arXiv:2512.24800v1 [math.AC] 31 Dec 2025

交换半环中的 S-准素理想研究

Amaresh Mahato、Sampad Das、Manasi Mandal *

数学系，贾达普大学

188，Raja S. C. Mallick Road，加尔各答 – 700032，印度。

摘要

本文在交换半环中定义了 S-k-不可约理想和 S-k-极大理想的概念。我们还建立了关于 S-k-准素理想的若干结果，并利用局部化证明了 S-k-主分解的存在性定理和唯一性定理的 S-版本。此外，我们证明了每个 S-准素理想的 S-根都是 R的素理想。进一步地，我们研究了主理想半整环中S-准素理想的结构，并证明每个这样的理想都可以表示为 $I = (vp^n)$， $n \in \mathbf{N}$ 以及某个 $p \in \mathbf{P} - \mathbf{P}_S$ 和 $v \in R$，使得 $(v) \cap S \neq \varnothing$，其中 $\mathbf{P}$ 是 R 中所有不可约（素）元素的集合；对于乘法子集 $S \subsetneq R$，集合 $\mathbf{P}_S$ 定义为 $\mathbf{P}_S = \{p \in \mathbf{P} : (p) \cap S \neq \varnothing\}$。

关键词：半环， S-k-准素，S-诺特，主理想半整域，S-根基理想。数学主题分类：13A15，16Y60，13F10。

1 引言

设 R 是一个含幺交换半环。若非空子集 $S \subsetneq R$ 满足 $1 \in S$，且对所有 s_1， $s_2 \in S$都有 $s_1 s_2 \in S$，则称 $S \subsetneq R$ 为 R 的一个乘法子集。称 R 的理想 P .....

*电子邮箱：amaresh.blg2015@gmail.com, jumathsampad@gmail.com, manasi_ju@yahoo.in

称为素数，当且仅当 $P \neq R$并且对于满足 $ab \in P$ 的 $a,b \in R$，有 $a \in P$ 或 $b \in P$。在这一思想基础上，Hamed 和 Malek [8] 提出了 S-素理想的概念，将其作为素理想的推广。给定交换环 R、乘法子集 $S \subsetneq R$ 和满足 $I \cap S = \phi$ 的理想 $I \subseteq R$，若存在元素 $s \in S$，使得对所有 $a,b \in R$，只要 $ab \in I$，就有 $sa \in I$ 或 $sb \in I$，则称理想 I 为 S-素理想。值得注意的是，当 S 仅由 R 中的单位元构成时，S-素理想的概念就退化为经典素理想。另请回顾，若对所有 $a,b \in R$，包含关系 $ab \in P$ 蕴含 $a \in P$ 或 $b \in \sqrt{P}$，则理想 $P \subseteq R$ 是准素的，其中 $\sqrt{P}$ 表示 P 的根理想，定义为 $\sqrt{P} = \{x \in R : x^n \in P$，其中 $n \in \mathbb{N}\}$。受此启发，并以素理想的推广为基础，Massaoud [3] 在交换环中引入了 S-准素理想，从而以一种有意义且包容性更强的方式扩展了准素理想的概念。设 R 为交换环，S 为 R的乘法子集，P 为 R 的真理想，且 $P \cap S = \phi$。若存在元素 $s \in S$，使得对所有$a,b \in R$，当 $ab \in P$ 时，便有 $sa \in P$ 或 $sb \in \sqrt{P}$，则将 P 定义为 S-准素理想。关于 S-准素理想的若干重要结果也可见于 Visweswaran [2]。半环中缺乏减法，这意味着环论中的许多经典结果无法直接推广到半环理论。为解决这一局限，Henriksen [10] 引入了 k-理想的概念。具体而言，若 R是半环，则 R 的理想 I 称为 k-理想，若对于所有 $a, b \in R$，条件 $a + b \in I$ 和 $a \in I$ 蕴含 $b \in I$。这一概念弥补了半环理论中缺少加法逆元的不足。此后，许多研究者探讨了 k-理想及其在半环理论中的应用。正如 Golan [17], 所指出的，在半环中，由单个元素生成的理想未必是 k-理想。例如，考虑半环 $\mathbb{N}[X]$ 中的理想 $I = \langle 1+x \rangle$；该半环是以不定元 x 为变量、系数为非负整数的多项式半环。我们有 $(1 + x)^3 = (x^3 + 1) + 3x(1 + x) \in I$，然而 $x^3 + 1 \notin I$。这说明 I 不是 $\mathbb{N}[X]$中的 k-理想。然而，对半环施加适当条件，就可以确保由单个元素生成的理想是 k-理想。我们从 [1], (引理 2.6）可知，若 R 是加法可消去的、yoked 且无零和的半环，则对任意理想$I =< a >$, $a \in R$ 是 R的 k-理想。诺特环领域的一项奠基性贡献

g g给定 b y Noether [16], 为这一概念奠定了

基础。过去几十年来，鉴于诺特环的重要性，众多作者积极研究了诺特环的各种推广形式，其中最引人注目的是 Anderson 和 Dumitrescu [13] 引入的 S-诺特环。若干作者在环论中广泛研究的 S-诺特性概念 [5, 6, 11,12], 已推广至半环，以建立相应的受控有限性条件。 S-诺特环背景下的 S-有限理想和 S-稳定理想的概念也在 [12] 中有所讨论。在 [4], ，Kar、Bhoumik 和 Goswami 将 S-素理想的概念推广为 S-k-素理想和 S-k-半素理想。此外，Bhoumik 和 Goswami [18],依据定义，进一步将 S-主理想的概念推广为 S-k-主理想：若半环 R 的理想 A 满足 $S \bigcap A \neq \varnothing$，则称其为 S-k-主理想；如果 A 是一个 k-理想，且对于 a、$b \in R$，若 $ab \in A$ 成立，则对某个 $s \in S$，必有 $sa \in A$ 或 $sb \in \sqrt{A}$。我们还注意到，S-诺特环论中关于 S-主分解的存在性和唯一性定理的 S版本已在 [5] 中建立。在 [1], 中，作者还研究了半环理论中 k-理想的主分解。在 [7], 中，作者研究了S-素理想的结构，并给出了这类理想在主理想整环中的刻画。

—

本文将若干与 S-k-准素理想相关的重要定理和结果推广至同时为 S-准素理想和 k-理想的情形，并研究其在半环中的性质。此外，我们定义了 S-k-不可约理想的概念，并证明在某些条件下，在 S-诺特半环中，每个 S-k-不可约理想都是 S-k-准素理想。我们还建立了半环中 S-k-准素分解的存在性定理。此外，利用理想的局部化，我们建立了半环中 S-k-准素分解的S唯一性定理。我们还建立了关于半环 R 中 S根的一些重要结果。特别地， R 的 S-准素理想的 S根是一个素理想。 P 的 S-素理想的 S根与任意 S-P-准素理想的 S根相同。本文考察主理想半整环（PISD）中的 S-准素理想。我们刻画了这类理想的一般形式，并推导出若干基本的结构性结果。值得注意的是，我们证明了 PISD 中S-准素理想的根是一个 S-极大理想。

1.1 交换半环中的 S-k-主分解

Massaoud [3] 指出，环 S 的准素理想 A R 称为 S-P-准素，当其根与 S-素理想 P相同；等价地，当 $\sqrt{A} = P$。

类似地，我们可以定义 S-k-P-准主理想。若 A 是半环 R 的一个 S-k-准主理想，且其根满足 $\sqrt{A} = P$，其中 P 是一个 S-素理想，则称 A 为 R 的一个 S-k-P-准主理想。

命题 1.1. S-k-P-准主理想的有限交本身是一个 S-k-P-准主理想。

证明. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 R 的 S-k-准主理想，使得 $\sqrt{A_i} = P$ 且对每个 $i = 1, 2, \ldots, n$，都有 $A_i \cap S = \varnothing$。那么 $S \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \varnothing$。令 $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$。由于每个 A_i 都是 P-准主理想，我们得到 $\sqrt{A} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = P$。现在假设 $ab \in A$ 且对所有 $s \in S$ 都有 $sb \notin A$。那么存在一个指标 k，使得 $1 \leq k \leq n$，并且对每个 $s \in S$ 都有 $ab \in A_k$ 和 $sb \notin A_k$。由于 A_k 是 S-P-准主理想，因此存在某个 $s \in S$，使得 $sa \in \sqrt{A_k} = P$。因此 $sa \in \sqrt{A} = P$，于是 A 是 R 的一个 S-P-准主理想。最后，由于 R 的有限多个 k-理想的交仍然是一个 k-理想，因此 $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 是 R 的一个 k-理想。这个

p定理的 p证明。

□

定义 1.2。 半环的一个 k-理想 A（与 S 不相交）R 被称为 S-k-不可约理想，如果对于某个 $s \in S$以及某个半环 R 的 k-理想 I、J，有 $s(I \cap J) \subseteq A \subseteq (I \cap J)$，则存在 $s' \in S$ 使得 $ss'I \subseteq A$ 或 $ss'J \subseteq A$。

例 1.3。 设 $R = \mathbb{Z}_0^+$，并考虑理想 $I = \langle 2 \rangle$ 和 $J = \langle 3 \rangle$。则 $I \cap J = \langle 6 \rangle$。设 $A = \langle 12 \rangle$ 和 $S = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$。显然存在某个 $s \in S$ 使得$s(I \cap J) \subseteq A \subseteq (I \cap J)$。由于 $A \cap S = \varnothing$，存在 $s' \in S$ 使得 $ss'I \subseteq A$ 或 $ss'J \subseteq A$。因此，尽管 A 不是不可约理想，但它是 S-k-不可约的。

定义 1.4. </style}（带有 的）的理想称为-有限的，如果存在 $s \in S$ 和一个有限生成理想 $J \subseteq R$，使得 $sI \subseteq J \subseteq I$。若半环 R 的每个与 S 不相交的理想都是 S-有限的，则称 R 为 S-诺特的。

类似于环论中给出的证明， [11, 12], 该引理也可以在半环理论中得到验证。

引理 1.5。 设 R 是半环， S 是 R的乘法子集。则以下条件等价:

(1) R 是 S-诺特半环; *(2)* R 的每个理想升链都是 S-稳定的; *(3)* R 的每个非空理想集合都包含一个 S-极大元。

证明。 **(1) ⇒ (2):** 假设 R是 S-诺特的，并设 R的理想升链为 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$。令 $I = \bigcup_{n\geq 1} I_n$。由于 R 是 S-诺特的， I 是 S-有限的; 也就是说，存在 $s \in S$ 和一个有限生成理想 J，使得 $sI \subseteq J \subseteq I$. J 是有限生成的，并且$J \subseteq I$，存在 k 使得 $J \subseteq I_k$。因此，对所有 $n \geq k$，都有 $sI_n \subseteq sI \subseteq J \subseteq I_k$。于是链 $\{I_n\}$是 S-稳定的。

(2) ⇒ (3): 假设每个理想升链都是 S-稳定的。设 $\mathcal{F}$ 是 R的一个非空理想族。反设 $\mathcal{F}$ 没有 S-极大元。于是可以构造一个理想升链 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$， $I_n \in \mathcal{F}$，使得对每个$n \in \mathbb{N}$及每个 $s \in S$，都有 $sI_{n+1} \not\subseteq I_n$ （因为 I_n 不是 S-极大元）。根据假设，该升链是 S-稳定的，因此存在 k 和 $t \in S$，使得对所有 $n \geq k$都有 $tI_n \subseteq I_k$。特别地，$tI_{k+1} \subseteq I_k$，这与 I_{k+1}的选取矛盾。因此， $\mathcal{F}$ 必定含有一个 S-极大元。

(3) ⇒ (1): 假设每个非空理想族都有一个 S-极大元。设 I 是 R的一个理想，并考虑满足 $\mathcal{G} = \{ J \subseteq I \mid J$是 $R\}$的有限生成理想的集合。根据 (3)， $\mathcal{G}$ 有一个 S-极大元，记为 J。我们断言 I 是 S-有限的。若非如此，则对每个$s \in S$都有 $sI \not\subseteq J$，因此存在 $x_s \in I$使得 $sx_s \notin J$。取这样一个 $x \in I \setminus J$，并考虑理想 $J' = J + (x)$。此时 J'是有限生成的，且 $J \subsetneq J'$; 但对所有 $s \in S$，都有 $sJ' \not\subseteq J$（因为 $sx \notin J$），这与 J的 S-极大性矛盾。因此，存在 $s \in S$ 使得$sI \subseteq J \subseteq I$。于是 I 是 S-有限的。由于 R 的每个理想都是 S-有限的，故 R 是 S-诺特的。

□

在 [1, 定理 2.5], 中，证明了加法可消去、yoked 且交换诺特半环的每个 k-不可约理想都是主理想。在本文中，我们通过建立其 S版本来推广这一结果。

定理 1.6. 设 R 是一个加法可消去、零和自由、*yoked*、交换的 S-诺特半环。那么，其每个 S-k-不可约理想 R 都是 S-k 主理想。

证明。 设 R 是一个加法消去、零和自由、yoked 且交换的 S-诺特半环，并设 A 是 R的一个 S-k-不可约理想。假设 $a, b \in R$ 满足 $ab \in A$，并且对每个 $s \in S$都有 $sb \notin A$ ，其中 S 是 R 的一个乘法封闭子集，且$S \cap A = \varnothing$。在这些条件下，我们断言存在一个元素 $r \in S$ 使得$ra \in \sqrt{A}$。

我们将 R的两个理想定义为 $I = A + \langle a^k \rangle$和 $J = A + \langle b \rangle$。显然， $A \subseteq I \cap J$。考虑 $B_n = \{ x \in R : \ a^n x \in A \}$, $n \in \mathbb{N}$。对每个 n，集合 B_n是R的一个理想，而序列 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots$是一个非递减理想链。由于 R是S-诺特的，根据引理 1.5，该链最终成为 S-稳定的。因此，存在一个指标 $k \in \mathbb{N}$ 和一个元素 $s \in S$，使得对每个 $n \geq k$都有 $sB_n \subseteq B_k$。令 $y \in I \cap J$。于是，对某些 $z \in R$ 和 $a_0 \in A$，可写为 $y = a_0 + a^k z$。由于 $ab \in A$，我们得到$aJ = aA + a\langle b \rangle \subseteq A$。因为 $y \in J$，两边乘以 a 得到 $ay = aa_0 + a^{k+1} z \in A$。由于 A是 R的一个 k-理想，条件 $ay \in A$ 推出 $a^{k+1} z \in A$，从而得到 $z \in B_{k+1}$。因此，$sz \in sB_{k+1} \subseteq B_k$，进而 $a^k sz \in A$。由此可得 $sy = sa_0 + a^k sz \in A$。根据上述，我们得到 $s(I \cap J) \subseteq A \subseteq I \cap J$。令 A表示理想 A的 k-闭包，定义为 $A = \{ a \in R :$ 对某些 $b, c \in A \}$有 $a + b = c$。 k-闭包的一个标准性质指出，$(I \cap J) \subseteq I \cap J$。由于 $A \subseteq I \cap J$且 A是一个 k-理想，因此可得 $A = A \subseteq I \cap J$。所以$s(I \cap J) \subseteq A \subseteq I \cap J$。由于 A是 S-k-不可约的，存在 $s' \in S$，使得 $ss'I \subseteq A$或 $ss'J \subseteq A.$ 。若 $ss'J \subseteq A$，则 $ss'b \in A$，这不可能。因此， $ss'I \subseteq A.$ 。于是，对某个 $k \in \mathbb{N}$有 $ss'a^k \in A$。令 $r = ss' \in S$。那么，由 $ra^k \in A$ 可得 $(ra)^k = r^{k-1}(ra^k) \in A$。因此，$ra \in \sqrt{A}.$

□

正如 [19], 中所述，半环中的 S-极大理想概念是对经典极大理想概念的自然推广。此外， [9] 中证明了R 至少拥有一个 k-极大理想。

现在我们定义半环 R 中的 S-k-极大理想。

定义 1.7. 设 R 是一个半环，$S \subsetneq R$ 是一个乘法集，且 M（与 S 不相交）是 R 的一个 k-理想。若存在 $s \in S$，使得对于某个理想 I，只要 $M \subseteq I$，就有 $sI \subseteq M$ 或 $I \cap S \neq \varnothing$，则称 M 为 S-k-极大理想。

定理 1.8。（S-k-准素分解的存在性）设 R 是一个 S-诺特半环。则每个与 S不交的真 k-理想都可以表示为有限个 S-k-准素理想的有限交。

证明。令 E 表示由 R 的所有与 S 不交且不能表示为有限个 S-k-不可约理想的有限交的 k-理想组成的族。我们的目标是证明 $E = \varnothing$。反设 $E \neq \varnothing$。由于 R 是一个 S-诺特半环，根据引理 1.5，可以确保 E 具有一个 S-k-极大元；将此理想记为 I。根据 E的定义性质，理想 I 不是 S-k-不可约的，因此它作为 k-理想也不是不可约的。于是，存在 R 的 k-理想 J和 K，使得 $I = J \cap K$，其中 $I \neq J$和 $I \neq K$。由于 $I \subseteq J \cap K$，可知对于每个 $s \in S$，$s(J \cap K) \subseteq I \subseteq J \cap K$。因为 R 是一个 S-诺特半环，R 的所有理想都是 S-有限的。此外，I 不是 S-k-不可约的；因此，对于任意 s、$s' \in S$，必有 $ss'J \nsubseteq I$ 和 $ss'K \nsubseteq I$。现在我们证明J 和 K 均不属于集合 E。反设二者均属于 E，即 J 和 K 成立。由于I 是 E中的一个 S-k-极大元，存在某些 s、$s' \in S$，使得 $sJ \subseteq I$ 和 $s'K \subseteq I$，而 $I \subsetneq J$ 和 $I \subsetneq K$。这与 I 在集合 E中的极大性矛盾。因此，我们得到 J、$K \notin E$。于是，J 和 K 都可以分解为有限个 S-k-不可约理想的交。由于 $I = J \cap K$，可知 I 本身可以表示为有限个S-k-不可约理想的有限交。这与假设 I 属于 E相矛盾。因此，E 必为空。由此，每个 R 的真 k-理想都有关于 S-k-不可约理想的有限分解。根据定理 1.6，每个 S-k-不可约理想都是 S-k-准素的。因此，R 的任意 k-理想都可以表示为有限个 S-k-准素理想的有限交。

□

以下结果是该定理的直接推论。

推论 1.9. 若 R 是一个 S-诺特半环，则 R 中与 $I \cap S = \varnothing$不相交的 k-理想 I 的根可表示为有限个 S-素理想的有限交。

证明. 设 R 是一个 S-诺特半环，且 k-理想 I 与 S不相交。由于 R 是 S-诺特的， R 的每个 k-理想都存在有限的 S-k-准素分解。因此，存在S-k-准素理想 A_1， A_2，……， A_r，使得 $I = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r$。现在，由于 I是根理想，我们有 $I = \sqrt{I}$。对等式两边取根，得到 $I = \sqrt{I} = \sqrt{A_1} \cap \sqrt{A_2} \cap \cdots \cap \sqrt{A_r}$。由于 S-准素理想的根是 S-素的，因此每个 $\sqrt{A_i}$ 都是一个 S-素理想。令 $P_i = \sqrt{A_i}$，其中 $i = 1$，2，……， r。于是，

$$I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_r,$$

它表示为 I 的有限个 S-素理想的交。 □

注 1.10。 *([18])* 半环中 S-k-准素理想的根可能不是 S-k-素理想R。

回顾一下，若 R 是交换半环，且 I 是 R的理想，则对任意 $s \in R$定义 $I : s = \{ x \in R : sx \in I \}$。对于每个 $s \in R$，集合 $I : s$ 是 R的理想。

命题 *1.11*。设 $f : R \to R'$ 是交换半环的一个同态，且 $f(S)$ 不包含零。若 A 是 R' 的一个 $f(S)$-k-准素理想，则 $(A : f(s))$ 是 R' 的一个 k-准素理想，且 $f(f^{-1}(A) : s) \subseteq (A : f(s))$，其中 $s \in S$。

证明。 由于 A 是 R'的一个 $f(S)$-k-准素理想，因此 A 是一个 k-准素理想。于是，根据 [[18], 命题 2.9], ，存在 $s \in S$，使得 $(A : f(s))$ 是 R' 的一个 k- 准素理想。

令 $x \in (f^{-1}(A) : s)$。由此可得 $f(x) \in f(f^{-1}(A) : s)$。再由 $x \in (f^{-1}(A) : s)$。于是，对于某个 $s \in S$，有$xs \in f^{-1}(A)$。将 f应用于等式两边，得到 $f(xs) \in f(f^{-1}(A)) = A$。这意味着 $f(x)f(s) \in A$，因此 $f(x) \in (A : f(s))$。所以， $f(f^{-1}(A) : s) \subseteq f(f^{-1}(A)) : f(s)$。此外，当 f是恒等映射时，即当 $f(x) = x$时，等号成立。因此， $f(f^{-1}(A) : s) \subseteq f(f^{-1}(A)) : f(s) = (A : f(s))$。

□

注 1.12. 若 $f : R \to R'$是同构，则， $f(f^{-1}(A) : s) = f(f^{-1}(A)) : f(s))$。

设 $y \in (A : f(s))$。那么，存在 $y_1 \in R$ 使得 $f(y_1) = y$。由于 $f(y_1) \in (A : f(s))$，我们有 $f(y_1)f(s) \in A$。因此， $f(y_1 s) \in A = f(f^{-1}(A))$。这表明 $y_1 s \in f^{-1}(A)$。因此，$y_1 \in (f^{-1}(A) : s)$，这意味着 $f(y_1) \in f(f^{-1}(A) : s)$。于是， $y \in f(f^{-1}(A) : s)$。

因此，我们得到 $f(f^{-1}(A)\colon f(s) \subseteq f(f^{-1}(A)\colon s)$，于是我们得到 $f(f^{-1}(A)\colon s) = f(f^{-1}(A))\colon f(s))$。

命题1.13。设 A 是 R 的一个 S-k-准主理想，且 $x \in R$ 满足对每个 $s \in S$ 都有 $sx \notin A$。那么 $(A\colon sx)$ 是 R 的一个 S-k-准主理想，并且存在 $r \in S$ 使得，$r\sqrt{(A\colon sx)} \subseteq \sqrt{A} \subseteq \sqrt{(A\colon sx)}$，对所有 $s \in S$ 均成立。

证明。首先，假设对于某个 $s \in S$ 有 $(A\colon sx) \cap S \neq \varnothing$。那么存在 $r \in S$，使得$r \in (A\colon sx)$，这意味着 $rsx \in A$。这与 A 是一个 S- 准主理想且 $sx \notin A$ 这一事实矛盾。因此，对于每个 $s \in S$，都有 $(A\colon sx) \cap S = \varnothing$。现在取 $s \in S$，并假设 $ab \in (A\colon sx)$，且另外假设对所有 $s' \in S$ 都有 $s'a \notin \sqrt{(A\colon sx)}$。由 $ab \in (A\colon sx)$，可得 $sxab \in A$。由于 $s'a$ 这种形式的元素都不属于 $\sqrt{(A\colon sx)}$，根据 A 的 S-准主性质，存在 $s'' \in S$ 使得 $s''sxb \in A$，从而 $s''b \in (A\colon sx)$。因此 $(A\colon sx)$ 是一个 S-准主理想。接下来验证 $(A\colon sx)$ 是一个 k- 理想。显然，$(A\colon sx) \subseteq (A\colon sx)$。设 $a \in (A\colon sx)$。根据 k- 闭包的定义，存在 $b \in (A\colon sx)$，使得 $a + b \in (A\colon sx)$。这意味着 $sx(a + b) \in A$，其中 $sxb \in A$。因此 $sxa + sxb \in A$，又由于 A 是一个 k-理想，可知 $sxa \in A$。于是 $a \in (A\colon sx)$，这表明 $(A\colon sx) = (A\colon sx)$，因此 $(A\colon sx)$ 是 R 的一个 k-理想。最后，设 $c \in \sqrt{(A\colon sx)}$。那么对某个 $n \in \mathbb{N}$，有$c^n \in (A\colon sx)$，由此可得 $sxc^n \in A$。由于 A 是 S-k-准主理想，且对所有 $r \in S$ 都有 $rsx \notin A$，因此存在一个元素 $r \in S$，使得对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $(rc^n)^k \in A$。于是 $(rc)^{nk} = r^{nk-k}(rc^n)^k \in A$，这表明 $rc \in \sqrt{A}$。因此 $r\sqrt{(A\colon sx)} \subseteq \sqrt{A}$。由于$A \subseteq (A\colon sx)$，我们还有 $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{(A\colon sx)}$，从而 $r\sqrt{(A\colon sx)} \subseteq \sqrt{A} \subseteq \sqrt{(A\colon sx)}$。

□

局部化在交换代数中发挥着核心作用。尽管局部化技术无法直接迁移到交换半环的情形，但其中若干重要方面仍然有效且适用。在本节中，我们考察通过局部化得到的半环，并说明如何利用这些构造来建立分解唯一性定理。回顾 [15]，$f\colon R \longrightarrow S^{-1}R$ 是由 $f(x)$ 定义的典范半环同态 $= \frac{x}{1}$。对于 I的任意理想 R，$f^{-1}(S^{-1}I)$ 的原像称为 I 相对于 S的收缩，并记为 $S(I) = \{\, x \in R \mid \frac{x}{1} \in S^{-1}I \,\}$. 显然，$I \subseteq S(I)$。

因此，为了研究与局部化相容的理想分解，我们需要加法消去半环中理想的一个 S- 版本的主分解，它推广了经典的主分解概念。

现在，我们在一个加法消去、零和自由、yoked 的交换半环 R 中定义 S-极小分解。设 $S \subsetneq R$ 是一个乘法封闭子集。考虑满足 $I \cap S = \varnothing$ 的一个 k-理想 $I \subseteq R$。如果 I 可以表示为有限个 S-k-主理想的交，且这些理想均属于 R，则称 I 存在一个 S-k-主分解。只要存在这样的表示，就称理想 I 是 S-k-可分解的。设 $I = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$，其中 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，每个 A_i 都是一个 S-k-主理想，且 $\sqrt{(A_i)} = P_i$。如果满足以下条件，则称该分解为 极小：

(1) 对所有不同的 $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ S(P_i) \neq S(P_j)$;

(2) 对每个 $j \neq i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $S(A_i) \not\subseteq S(A_j)$，或等价地，$S(A_i) \not\subseteq \bigcap_{j \neq i} S(A_j)$。

在特殊情形 $S = \{1\}$ 下，S-准素理想的定义与普通主理想相同。因此，S-准素分解与通常的主分解相同。

引理 1.14. 若 A 是 S-P-准素的，则半环 R 中的 $S(A)$ 是 $S(P)$-准素的。

证明。设 $a, b \in R$ 满足 $ab \in S(A)$。那么 $\frac{ab}{1} \in S^{-1}A$，因此存在 $x \in A$ 和 $s \in S$使得 $\frac{ab}{1} = \frac{x}{s}$。于是，对某个 $s_1 \in S$，有 $s_1 sab \in A$。由于 A是 S-P-准素的，存在$s' \in S$ 使得 $s' s_1 sa \in A$ 或 $s'b \in \sqrt{A} = P$。因此，$\frac{a}{1} = \frac{s' s_1 sa}{s' s_1 s} \in S^{-1}A$ 或 $\frac{b}{1} = \frac{s'b}{s'} \in S^{-1}P$，这表明 $a \in S(A)$ 或 $b \in S(P)$。所以 $S(A)$ 是 $S(P)$- 准素的。

□

定理1.15。设 R 是一个加法可消去的、*yoked* 且交换的 S-诺特半环，并设 $I = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 是 I的一个极小 S-k-准素分解，其中每个 A_i都是关于 $i = 1$的 P_i-S-k-准素理想，2，.....，n。那么，理想 $S(P_i)$ 与集合 $\{S(\sqrt{(I : x)}\}, x \in R$中出现的素理想一致。因此，理想 $S(P_i)$ 不依赖于 I 的 S- 准素分解的具体选择。

证明。令 $x \in R$, 冒号理想可分解为 $(I : x) = (A_1 : x) \cap \cdots \cap (A_n : x)$，由

[1], 的引理 2.8(iv)表明，只要 $x \notin A_i$，就有 $\sqrt{(A_i :\ x)} = P_i$。因此，$\sqrt{(I :\ x)} = \bigcap_{i|x\notin A_i} P_i$。局部化保持有限交，所以 $S^{-1}(I :\ x) = \bigcap_{i=1}^{n}(S^{-1}A_i :\ S^{-1}R_1^x)$。收缩到 R 后得到 $S(I :\ x) = \bigcap_{i=1}^{n}(S(A_i) :\ x)$。因此，$S(\sqrt{(I :\ x)}) = \bigcap_{i|x\notin A_i} \sqrt{S(A_i) :\ x}$。每个理想 $S(P_i)$ 都是素理想，因为 $S^{-1}P_i$ 是素理想，而素理想的收缩仍为素理想。根据引理 1.14，理想 $S(A_i)$ 是 $S(P_i)$-准素的。因此，由 [1], 的引理 2.8(iv)可得$S(\sqrt{(I :\ x)}) = \bigcap_{i|x\notin A_i} S(P_i)$。假设 $S(\sqrt{(I :\ x)})$ 是素理想。由于它是素理想 $S(P_i)$ 的交（ [20], 命题 1.11），这意味着对于某个 j，$S(\sqrt{(I :\ x)}) = S(P_j)$。因此，任何以 $S(\sqrt{(I :\ x)})$ 形式出现的素理想，都必须等于某个 $S(P_j)$。反过来，约化 S-准素主分解的极小性保证，对于每个 i, 存在元素 $x_i \in (\bigcap_{j\neq i} S(A_j)) \setminus S(A_i)$。对于这样的 x_i，有 $S(I :\ x_i) = \bigcap_{j=1}^{n}(S(A_j) :\ x_i) = (S(A_i) : x_i)$，因为对于每个 $j \neq i$，$(S(A_j) : x_i) = R$ 。应用 [1], 的引理 2.8(iv)，我们得到 $S(\sqrt{(I :\ x_i)}) = S(P_i)$，其中 $1 \leq i \leq n$。

因此，每个 $S(P_i)$ 都可表示为某个 $S(\sqrt{(I :\ x)})$，其中 $x \in R$；且不存在其他这种形式的素理想。这证明了关联素根集合的唯一性，并完成了证明。

□

2 S-准素理想上的 S-根

定义 2.1. 设 R 是一个交换半环， S 是 R 的一个乘法子集。理想 I 的 S-根定义为

$$\sqrt[S]{I} = \{a \in R : sa^n \in I, \textit{ for some } s \in S \textit{ and } n \in \mathbf{N}\}$$

例 2.2. 设 $R = \mathbf{Z}_0^+$，且令 $S = \{\, 2^n : n \in \mathbb{N}\,\}$ 为 R 的一个乘法封闭子集。考虑 R 的理想 $I = (18)$ 。那么， I 的 S-根由 $\sqrt[S]{I} = \{\, a \in R :\ sa^n \in (18)$ 给出，其中 $s \in S$ 且 $n \in \mathbb{N}\,\}$。由此可得 $\sqrt[S]{I} = (3)$。 –

定理 2.3. 每个 S-素理想的 S-根都是半环 R 的一个素理想。

证明。 设 P 是 S-素理想 R。我们证明 $\sqrt[S]{P}$ 是 R的素理想。取 x， $y \in R$，使得 $xy \in \sqrt[S]{P}$。根据 S-根的定义，存在 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$ ，使得$s(xy)^n = sx^n y^n \in P$。由于 P 是 S-素的，要么存在 $s_1 \in S$使得 $s_1 x^n \in P$，在

这种情况下 $x \in \overline{\sqrt[S]{P}}$；要么，若 $s_1x^n \notin P$，则 P的 S-素性保证存在 $s_2 \in S$使得 $s_2(sy^n) \in P$。令 $s_3 = s_2s$，得到 $s_3y^n \in P$，因此 $y \in \sqrt[S]{P}$。

因此，只要 $xy \in \sqrt[S]{P}$，就有 $x \in \sqrt[S]{P}$或 $y \in \sqrt[S]{P}$。于是，$\sqrt[S]{P}$是 R的素理想。

□

定理 2.4。 S-根是半环 R中每个 S-准素理想的素理想。

证明。设 A 是 R的一个 S-准素理想。我们证明 $\sqrt[S]{A}$ 是 R的素理想。取x、$y \in R$，使得 $xy \in \sqrt[S]{A}$。根据 S- 根的定义，存在 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $s(xy)^n = sx^ny^n \in A$。由于 A 是 S-准素的，要么存在 $s_1 \in S$ 使得 $s_1x^n \in A$，这意味着 $x \in \sqrt[S]{A}$；要么，当 $s_1x^n \notin A$ 时， A 的 S–准素性质保证存在 $s_2 \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得 $(s_2sy^n)^k \in A$。令 $s_3 = (s_2s)^k$，得到 $s_3y^{nk} \in A$，从而有 $y \in \sqrt[S]{A}$。因此，只要 $xy \in \sqrt[S]{A}$，就有 $x \in \sqrt[S]{A}$ 或 $y \in \sqrt[S]{A}$。所以， $\sqrt[S]{A}$是 R的素理想，进而每个 S-准素理想的 S-根都是 R的素理想。

□

注 2.5. 设 P 是一个 S-素理想，则 P 的 S-根与 S-P 准素理想相同。

3 主理想半整域中的 S-主理想

回顾一下，半整环 R 称为主理想半整环，如果 R 的每个理想都可以表示为一个主理想。换句话说，对于任意理想 $I \subseteq R$，存在一个元素 $a \in R$，使得 $I = (a) = \{ra : r \in R\}$。

例 3.1. 半环 $R = (\mathbf{N}_0, gcd, \cdot)$ 是一个主理想半整环，因为 R 的每个理想都是由单个元素 $(a) = a\mathbf{N}_0$，生成的主理想，其中 $a \in \mathbf{N}_0$。

我们采用下列记号，这些记号与 [7], 中使用的约定一致，并在本节中始终使用。设 R 为一个主理想半整环，并令 $\mathbf{P}$ 表示 R 中所有不可约（素）元的集合 [14]。对于 S 中的乘法子集 R，定义

$\mathbf{P}_S = \{ p \in \mathbf{P} : (p) \cap S \neq \varnothing \}$。因此，$\mathbf{P}_S$ 是 R 中所有能整除 S中某个元素的不可约元所组成的集合。等价地，不可约元 p 属于$\mathbf{P}_S$，当且仅当存在$s \in S$ 和 $b \in R$ 使得 $s = bp$。

我们将经常使用以下结果，该结果见于（[18], 命题 2.9）。

命题 3.2。设 R 是交换半环，S 是 R 的乘法子集，且 A 是 R 中与 S 不相交的理想。则下列断言等价:

(1) A 是 R 的 S-准素理想。

(2) 对某个 $s \in S$，$(A : s)$ 是 R 的准素理想。

主理想半整环的 S-准素理想可由以下结果完全刻画。

定理 3.3。设 R 是主理想半整环，S 是 R 的乘法子集，且 A 是 R 的理想。下列陈述等价:

(1) A 是 R的 S-准素理想。*(2)* $A = (vp^n)$，$n \in N$ 并且存在某个 $p \in \mathbf{P} - \mathbf{P}_S$ 和 $v \in R$，使得$(v) \cap S \neq \varnothing$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2): 设 $A = (q)$ 是 R 的非零 S-准素理想，并设 $s \in S$ 满足 $(A : s)$ 是 R 的主理想。由于 $A \subseteq (A: s)$，我们有 $(q) \subseteq (A : s)$。因此，存在不可约元 $p \in R$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $(A : s) = (p^n)$。于是，$(q) \subseteq (p^n)$，这意味着 $p^n s \in A$。因此，存在某个 $q' \in R$ 使得 $p^n s = q'q$。特别地，$q'q \in (p^n)$，所以 $q' \in (p^n)$ 或 $q \in \sqrt{(p^n)}$。若 $q' \in (p^n)$，则存在某个 $q'' \in R$ 使得 $q' = q''p^n$。因此，$sp^n = q'q = qq''p^n$，这意味着 $s = qq'' \in (q) \cap S$。这与 (q) 是 S-准素理想且 $(q) \cap S = \varnothing$ 的假设矛盾。因此，$q \in \sqrt{(p^n)}$；又由于 $(q) \subseteq (p^n)$，存在$v \in R$ 和 $m \in \mathbb{N}$，使得 $q = vp^m$，其中 $m \geq n$。假设 $m > n$。则 $sp^n = q'q = vq'p^m$，这意味着 $s = vq'p^k$，其中 $k + \overline{n} = m$。因此，$p \in \mathbf{P}_S$。若 $p \in \mathbf{P}_S$，则 $(p) \cap S \neq \varnothing$，进而推出 $(p^n) \cap S \neq \varnothing$。设 $s' \in S$ 满足对于某个 $c \in R$ 有 $s' = cp^n$。则$ss' = scp^n \in I$，这与 $A = (q)$ 是 S-准素理想且 $(A) \cap S = \varnothing$ 的事实矛盾。因此，必有 $m = n$，从而存在某个 $v \in R$ 使得 $q = vp^n$。此时，$sp^n = q'q = vq'p^n$，这意味着 $s = vq'$。因此，$(v) \cap S \neq \varnothing$，进而可得 $A = (q) = (vp^n)$，其中 $(v) \cap S \neq \varnothing$ 且 $p \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_S$。

(2) $\Rightarrow$(1)：设 $A=(vp^n)$，其中 $p\in \mathbf{P}-\mathbf{P}_S$ 且 $(v)\cap S\neq\varnothing$。则存在元素$s\in S$ 和 $v_0\in R$，使得 $s=vv_0$。令 $x\in(A:s)$。则 $sx\in A$，因此存在某个 $\alpha\in R$ 使得 $sx=\alpha vp^n$。所以，$sx\in(p^n)$，这意味着 $x\in(p^n)$，因为 $s\notin(p)$。因此，$(A:s)\subseteq(p^n)$。反过来，由于 $p^ns=vv_0p^n\in A$，可得 $(p^n)\subseteq(A:s)$。因此，$(A:s)=(p^n)$，这是 R 的一个主理想。所以，A 是 R 的一个 S-准素理想。

特别地，如果 $n=1$，那么 $A=(vp)$，其中 $p\in\mathbf{P}-\mathbf{P}_S$ 且 $v\in R$ 满足 $(v)\cap S\neq\varnothing$，是主理想半整环 R 的一个 S-素理想。

□

例*3.4*。考虑半环 $R=(Z_0^+,gcd\ \cdot)$ 和乘法集 $S=\{3^k:k\in N\}$。在这种情况下，能整除 S 中某个元素的唯一不可约元是 *3*，因此 $P_S=\{3\}$。设 A 是 Z_0^+ 的一个非零 S-准素理想。这样的理想可写成 $A=(vp^k)$ 的形式，其中 p 是一个素数，满足 $p\neq 3$，且 $v\in Z_0^+$ 满足 $(v)\cap S\neq\varnothing$。因此，存在 $m\in Z_0^+$ 和 $k\in N$，使得 $mv=3^k$，这意味着对于某个 $l\in N$，有 $v=3^l$。因此，Z_0^+ 的 S-准素理想是形如 $A=(3^lp^k)$ 的理想，其中 $p\neq 3$ 是正素数，且 $l,k\in N$。

定理3.5. 设 R 是一个主理想半整环。若 $A=(vp^k)$ 是R的一个 S-准素理想，则其根 $P=\sqrt{A}$ 是 R的一个 S-极大理想。

证明. 设 A 是主理想半整环 R的一个非零 S-准素理想。于是，对某个 $p\in\mathbf{P}-\mathbf{P}_S$ 以及满足 $(v)\cap S\neq\varnothing$的 $v\in R$，有 $A=(vp^k)$。因此，A 的根是 $P=\sqrt{A}=(vp)$，它是一个 S-素理想。设 R 的一个理想 $I=(x)$满足 $P\subseteq I$。由于 $vp\in(x)$，可知对某个 $y\in R$，有 $vp=xy$。特别地，$xy\in(p)$，这意味着 $x\in(p)$或 $y\in(p)$。

情况1: 假设 $x\in(p)$。则对某个 $x'\in R$，有 $x=x'p$。代入 $vp=xy$，得 $vp=x'yp$，因此 $v=x'y$。由于 $(v)\cap S\neq\varnothing$，存在 $t\in R$ 使得$s=tv=tx'y\in S$。因此，$sx=tvx=tx'vp\in(vp)$。由此可得 $sI\subseteq P$。

情况2: 假设 $x\notin(p)$。则 $y\in(p)$，因此 $y=y'p$ 对于某个 $y'\in R$。代入 $vp=xy$，得到 $vp=xy'p$，从而 $v=xy'$。由于 $(v)\cap S\neq\varnothing$，可知$\varnothing\neq(v)\cap S\subseteq(x)\cap S$。因此，$I\cap S\neq\varnothing$，这与 A 是一个S-主理想的假设相矛盾。所以，$P=\sqrt{A}$ 是 R 的一个 S-极大理想。 —

□

命题 3.6。 在主理想半整域中，每个 S-主理想的 S-根都是 R 的一个素理想。

证明。 设 R 是一个主理想半整环（主理想半整域）。那么 R 的每个 S-主理想都具有 $I=(vp^k)$ 的形式，其中 $k\in\mathbf{N}$， $p\in\mathbf{P}-\mathbf{P}_S$，且 $v\in R$ 满足 $(v)\cap S\neq\varnothing$。回忆一下，理想 A 的 S-根定义为 $\sqrt[S]{A}=\{a\in R:$ 存在某个 $s\in S$，使得 $sa^n\in A$，且 $n\in\mathbf{N}\}$。因此，$\sqrt[S]{I}=\{p_1\in R:$ 存在某个 $s\in S$，使得 $sp_1^n\in I$，且 $n\in\mathbf{N}\}$。由此可得 $\sqrt[S]{I}=(p)$，它是 R 的一个素理想。

□

命题 3.7。 在主理想半整域中，非零 S-主理想的 S-根是 R 的一个极大理想。

证明。 由命题 3.6可知，在主理想半整域中，每个 S-根主理想都是 S 的一个素理想。此外，在主理想半整域中，每个非零素理想都是 R 的一个极大理想。

□

命题 3.8。 设 R 是主理想半整域中的一个 a， S 是 R 的一个乘法子集， A 是与 R 的 S 不相交的一个主理想。若 $P=\sqrt{A}$ 是 R 的一个 S-k- 素理想，则 A 也是 R 的一个 S-k-主理想。我们称 A 为 R 的 S-k-P-主理想。

证明。 这是一个显然的情形。

如果 R 不是主理想半整域（PISD），上述结果可能不成立。考虑半环 $R=(\mathbf{Z}_0^+,+,\cdot)$，它不是主理想半整域。设 $P=2\mathbf{Z}_0^+$和 $A=2\mathbf{Z}_0^+\setminus\{2\}$。那么$\sqrt{A}=P$，所以 P是一个 k-理想，但 A 不是 k-理想。事实上， $2+4=6\in A$ 且 $4\in A$，但$2\notin A$，这违反了成为 k-理想的条件。此外， A 不是主理想，因为 $3\cdot 2=6\in A$，但 $2\notin A$ 且 $3\notin\sqrt{A}$。然而，若取 $S=\{2n+1:\ n\in\mathbf{N}_0\}$，则$A$是一个 S-准素理想。

□

参考文献

[1] Sharma, R. P., Dadhwal, M., Sharma, R., & Kar, S.（2021）。半环中 *k*-理想与模糊 *k*-理想的主分解。《模糊信息与工程》，13(2)，223-235。[2] Visweswaran, S.（2022）。交换环中 *S*-主理想的一些结果。Beitr¨age zur Algebra und Geometrie/《代数与几何贡献》，63(2)，247-266。[3] Massaoud, E.（2022）。交换环中的 *S*-主理想。《代数通讯》，50(3)，988-997。[4] Bhowmick, S., Goswami, J., & Kar, S.（2024）。半环中的 *S*-*k*-素理想与 *S*-*k*-半素理想。《数学讨论——一般代数及其应用》，44(2)，301-317。[5] Singh, T., Ansari, A. U., & Kumar, S. D.（2025年）。*S*-主分解研究。《捷克斯洛伐克数学杂志》，数字对象标识符:10.21136/CMJ.2025.0029-25。[6] Singh, T., Ansari, A. U., & Kumar, S. D.（2024）。*S*-诺特模中 *S*-主分解的存在性与唯一性。《代数通讯》，52(10)，4515-4524。[7] Aqalmoun, M.（2023）。主理想整环中的 *S*-素理想。《印度尼西亚数学学会杂志》，93-98。[8] Hamed, A., & Malek, A.（2020年）。交换环中的 *S*-素理想。Beitr¨age zur Al- gebra und Geometrie/《代数与几何贡献》，61(3)，533-542。[9] *EbrahimiAtani, R., & Atani, S. E.*（*2008*）。交换半环中的理想理论。Bulet- inul Academiei de S¸tiint¸e a Republicii Moldova. Matematica，57(2)，14-23。[10] Henriksen, M.（1958）。加法交换的半环中的理想。Amer. math. soc. notices，6(1)，321。[11] Bilgin, Z., Reyes, M.L., &Tekir, U.（2018年）。右 *S*-诺特环与 *S*-诺特模。《代数通讯》，46(2)，863-869。

[12] *Ahmed, H.* 与 *Sana, H.*（*2016*年）。满足*S*-诺特性质与*S-ACCR*的模。《代数通讯》，*44(5)，1941-1951*。[13] Anderson, D. D. 与 Dumitrescu, T.（2002年）。*S*-诺特环。《代数通讯》，30(9)，4407-4416。[14] Nasehpour, P.（2018年）。关于半环及其理想的若干注记。《亚欧数学杂志》，13(1)，（2020年）。数字对象标识符: 10.1142/S1793557120500023[15] Nasehpour, P.（2018年）。 关于交换半环理想的若干注记。《拟群及相关系统》，40(2)，281-298。[16] Noether, E.（1921年）。 环域中的理想理论。《数学年刊》，83(1)，24-66。[17] *Golan, J. S.*（*2013*年）。《半环及其应用》。*Springer*科学与商业媒体。[18] *Bhowmick, Sumon* 与 *Goswami, Jituparna.*（*2025*年）。半环的*S*-*k*-主理想。《巴拉那数学会通报》。*43. 1-10. 10.5269/bspm.66571*。[19] Bhowmick, Sumon 与 Goswami, Jituparna.（2025年）。 半模的*S*-素数与*S*-极大*k*-子半模。《巴勒斯坦数学杂志》。14. 372-378。[20] Atiyah, M. F. 与 Macdonald, I. G.（2018年）。《交换代数导论》。CRC出版社。