arXiv:2512.24832v1 [math.CO] 31 Dec 2025

双曲平面中的便士图

´AD ´AM SAGMEISTER 和 KONRAD J. SWANEPOEL

Abstract. 我们研究这样一个问题：在曲率为 -1的双曲平面中，如何在由 n 个直径为 d 的全等圆组成的圆堆积中，使相切圆对的最大数量 $e_d(n)$达到最大。在欧几里得平面中，该最大值来自以等边三角形镶嵌铺满平面的螺旋构造（Harborth，1974）；对于对应于七阶三角剖分的 d 值，双曲平面中也有类似结果（Bowen，2000）。我们给出所有 $d > 0$值下 $e_d(n)$的若干上界和下界。特别地，我们证明，除 $d = 0.76217\ldots$外，如果 $d > 0.66114\ldots$，那么相切圆对的数量少于七阶三角剖分中的螺旋构造所得数量；我们猜想后者是极值。我们还给出一个下界 $e_d(n) > (2 + \varepsilon_d)n$，其中 $\varepsilon_d > 1$ 对所有 $d > 0$均成立。

1. Introduction

便士图是有限个全等圆的关联图。换句话说，对圆堆积中的每个圆，便士图中都有一个顶点；如果两个顶点对应的圆相切，就用一条边连接这两个顶点。等价地，这种图是有限点集的最小距离图，其中最小距离为 d；当两点之间的距离为 d时，就用一条边连接这两点。在欧几里得平面中，便士图的组合性质已得到深入研究，相关研究始于 Erd˝os 的开创性论文 [7]以及 Harborth 对边数最大值的确定 [9]，，此后 Kupitz [11], Pach 和 T´oth [15], T´oth [24], Csizmadia [5], Swanepoel [20], Eppstein [6], 和 Sagdeev [18]等人也作出了贡献。

Harborth 证明，具有 n 个顶点的便士图的边数最大值为 $\lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \rfloor$。类似的问题也可以在高维欧氏空间 [1],、赋范空间（参见综述中的参考文献 [21]）以及具有非零常曲率的空间，即球面和双曲空间中研究。请注意，在后两种情况下，边数最大值取决于球体大小与曲率的相对关系。对于二维球面，Bezdek、Connelly 和 Kert´esz [2] 改进了平凡上界 $5n/2$；对于双曲平面，Bowen [4] 证明，当最小距离 d 满足平面能够由边长为 d的等边三角形铺砌时，某种构造是最优的。

本文旨在研究所有 $d > 0$ 值下最小距离的最大数量。我们的主要结果是关于具有 n 个顶点的便士图中边的最大数量的各种上界和下界，这些界取决于 d，具体将在下一节中详述。我们还对 Bowen 的结果给出了一个略为简化的证明：当距离取为 k 阶三角形镶嵌中的距离时，边的最大数量由某个螺旋构造达到。利用相同的思想，我们证明了对于双曲平面中的 $\{p, q\}$ 镶嵌的子图，螺旋构造同样能使边的数量达到最大。

最后，我们还考察了“无限直径圆”这一简单问题，并找到了 n 个极限圆的圆堆积中相切圆对数量的精确最大值。

2. Our results

给定 $d > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $e_d(n)$ 表示在曲率为 -1 的双曲平面中，直径为 d的圆堆积里相切圆对的最大数量。等价地，这是边数的最大值

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：52C15；次要分类号：52C10，51M09。*Key words and phrases.* 双曲几何、圆堆积、便士图。´Ad´am Sagmeister 获 NKFIH 150151 号资助。项目编号 150151 得到了匈牙利文化与创新部通过国家研究、开发与创新基金提供的支持，该基金资助项目遵循 ADVANCED 24 资助计划。Konrad Swanepoel 获欧洲研究理事会第 882971 号 ERC 资助项目“GeoScape”以及 Erd˝os Center 的部分支持。

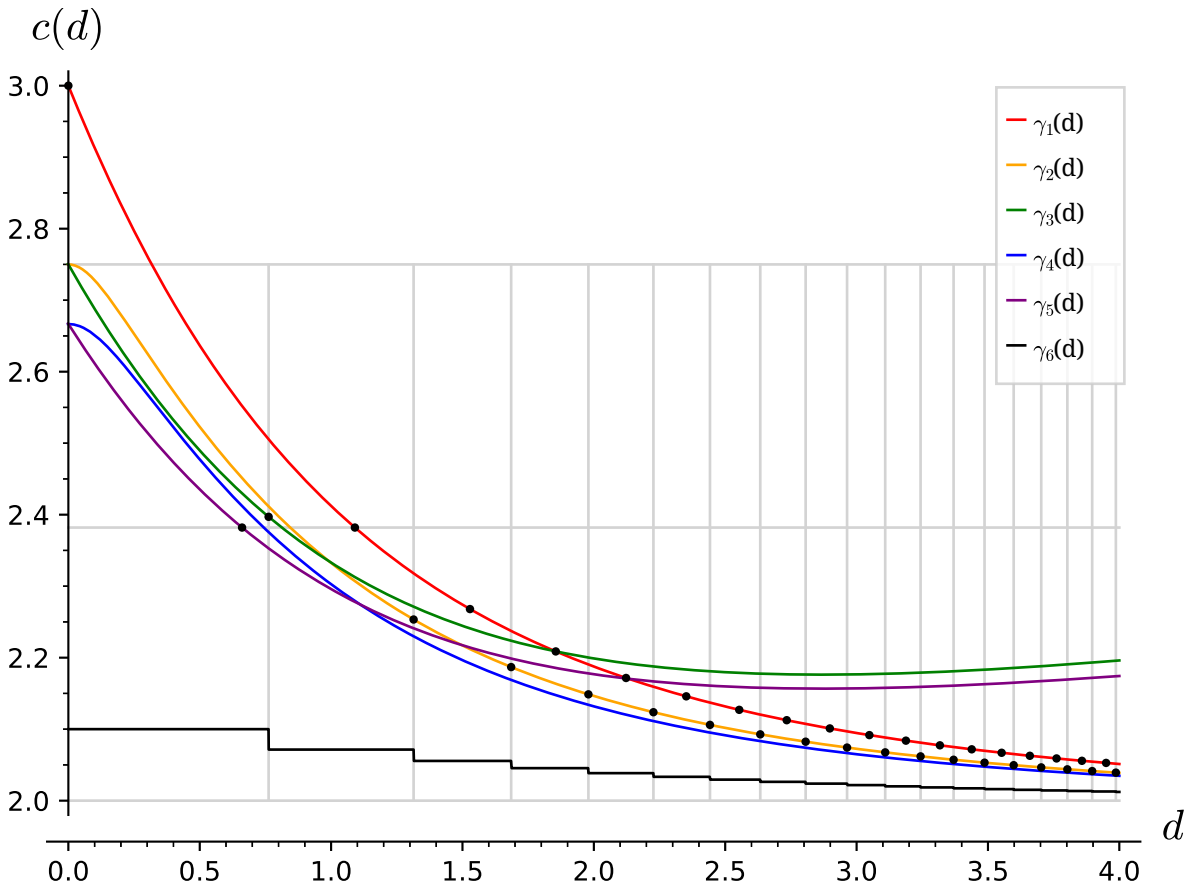


FIGURE 1. 关于 $c(d)$的上界和下界。红色上界 $\gamma_1(d)$对所有 d都成立，并且对于阶为-k 的三角形镶嵌是紧的（红色图上的点）。橙色 $\gamma_2(d)$和绿色 $\gamma_3(d)$界对所有 $d \neq d(k)$都成立。界 $\gamma_3(d(6)) = 2.39698265738619\ldots$是我们目前对 $d = d(6)$所知的最佳界（见绿色曲线上的点），而界 $\gamma_2(d(k))$是对 $d = d(k)$的最佳界，$k \geq 7$（见橙色曲线上的点）。蓝色 $\gamma_4(d)$和紫色 $\gamma_5(d)$上界对所有满足 $d \neq d(k)$的 d 成立，$k \geq 7$ 以及 $d \neq d(k)$，$d \geq 6$。这些曲线相交于 $d = 1.1128036956703866\ldots$。除半正则镶嵌 $d = d(6)$外，我们有猜想 2.6对所有 $d > 0.6611380871710578\ldots$都成立，$\gamma_5(d)$的解为 $= 3 - 1/\varphi$（由紫色曲线上的点表示）。灰色竖线位于 $d = d(k)$的取值处。灰色横线位于 $3 - 1/\varphi$ 和2.75处。黑色阶梯函数是下界 $\gamma_6(d)$。

在双曲平面中，具有 n 个顶点且最小距离为 d 的最小距离图中。由于 $e_d(n)$ 是超可加的，由 Fekete 引理可得

$$\lim_{n\to\infty} e_d(n)/n =: c(d)$$

存在。事实上，很容易看出，如果 $m \geq 2$ 且 $n \geq 1$，那么 $e_d(m+n) \geq e_d(m) + e_d(n) + 2$。这（或一个简单的构造）立即给出，对所有 d都有 $e_d(n) \geq 2n - 3$。由于所有最小距离图都是平面的，我们还有 $e_d(n) \leq 3n - 6$。因此，$2 \leq c(d) \leq 3$。本文证明这两个不等式都是严格的，并为所有 d 的取值求得 $c(d)$ 的上界和下界。图 1 展示了这些界，下面在引入一些记号后将对其作更精确的说明。对于 $k \geq 7$，令 $d(k)$ 表示一个所有角都等于 $2\pi/k$ 的等边三角形的边长。这些三角形是双曲平面中阶数为 k 的三角形镶嵌的原型瓦片，其中每个顶点的度为 k。

对于双曲平面中曲率为 -1的任意距离 $d > 0$，记边长为 d 的正三角形的角为 $\alpha = \alpha(d)$，面积为 $A(d) = \pi - 3\alpha$。我们可以利用以下关系计算 α

k	$\alpha(d(k)) = \frac{2\pi}{k}$	$d(k)$	$\alpha(\overline{d}(k))$	$\overline{d}(k)$
6	—	—	0.969004	0.76217
7	0.897598	1.09055	0.841836	1.31399
8	0.785398	1.52857	0.743463	1.68530
9	0.698132	1.85508	0.665375	1.97930
10	0.628319	2.12255	0.601989	2.22672
11	0.571199	2.35171	0.549554	2.44200
12	0.523599	2.55337	0.505480	2.63338
13	0.483322	2.73408	0.467925	2.80610
14	0.448799	2.89815	0.435550	2.96375
15	0.418879	3.04861	0.407355	3.10892
16	0.392699	3.18771	0.382582	3.24357
17	0.369599	3.31713	0.360645	3.36919
18	0.349066	3.43821	0.341084	3.48698
19	0.330694	3.55201	0.323533	3.59791
20	0.314159	3.65939	0.307699	3.70274
21	0.299199	3.76107	0.293341	3.80215
22	0.285599	3.85763	0.280263	3.89669
23	0.273182	3.94959	0.268300	3.98682

TABLE 1. $d(k)$ 和 $\overline{d}(k)$ 的数值及其对应角度 α

$\cos\alpha = \tanh d/2 \tanh d$。我们还用 $\alpha_m = \alpha_m(d)$表示边长为 d的正 m边形的角。于是 $\sin \alpha_m/2 = \cos(\pi/k)/\overline{\cosh(d/2)}$。特别地，这也给出了另一种表示 $\alpha = \alpha_3$与 d之间关系的方法，即 $\sin \alpha/2 = (2\cosh d/2)^{-1}$。此外，正方形的角 α_4满足 $\sin \alpha_4/2 = \sqrt{2}\sin \alpha/2$。对于任意 $k \geq 7$，令 $d(k)$为满足$\alpha(d) = 2\pi/k$的 d 的值；对于 $k \geq 6$，令 $\overline{d}(k)$为满足 $\alpha_4(d) + (k-1)\alpha(d) = 2\pi$的 d 的值。因此，$\overline{d}(k)$是阶数为k 的三角形镶嵌的边长，而$\overline{d}(k)$是半正则镶嵌的边长，其中每个顶点周围有 $k-1$ 个等边三角形和一个正方形。我们有 $d(6) < d(7) < d(7) \prec d(8) < \ldots$(见表1)。我们的主要结果如下。

定理 2.1。 $c(d)$的以下界：

$$c(d) \leq \begin{cases} \gamma_1(d) := \dfrac{\pi}{\alpha} - \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{\alpha} - 1\right)\left(\dfrac{\pi}{\alpha} - 3\right)} & \text{for all } d > 0 \\ \gamma_2(d) := \dfrac{\pi}{\alpha} - \dfrac{1}{8} - \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{17\pi}{4\alpha} + \dfrac{241}{64}} & \text{if } d = \overline{d}(k), k \geq 6 \\ \gamma_3(d) := 2 + \dfrac{3(d - \pi + 3\alpha)}{4(d + \pi - 3\alpha)} & \text{if } d = \overline{d}(k), k \geq 6 \\ \gamma_4(d) := \dfrac{\pi}{\alpha} - \dfrac{1}{6} - \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{13\pi}{3\alpha} + \dfrac{145}{36}} & \text{for all } d > 0 \text{ if } d \neq d(k), \overline{d}(k),\ k \geq 6 \\ \gamma_5(d) := \dfrac{8}{3} - \dfrac{4(\pi - 3\alpha)}{3(d + \pi - 3\alpha)} & \text{for all } d > 0 \text{ if } d \neq d(k), \overline{d}(k),\ k \geq 6 \end{cases}$$

$$c(d) \geq \gamma_6(d) := 2 + \frac{1}{4\lfloor (2\pi - \alpha_4)/\alpha \rfloor - 6} \qquad \text{for all } d > 0$$

该定理各部分的证明见第6节和第7节。Bowen 证明了 [4]，一种简单直接的螺旋构造可以从任意阶数为 k 的三角形铺砌中截取有限部分，从而得到一个具有 n 个顶点、边数达到最大值 $e_{d(k)}(n)$ 的最小距离图。Rold´an 和 Toal´a-Enr´ıquez [17] 给出了某些相关螺旋图边界上的边数的渐近公式。由这些结果可知，对于所有 $d = d(k)$、$k \geq 7$，都有 $c(d) = \gamma_1(d)$，并且

7 阶铺砌在所有阶数为 k 的三角形铺砌中是最优的。特别地，$e_{d(7)}(n) = (4-\varphi)\, n + O(1)$，其中 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例。我们对定理 2.1 的第一个不等式 $c(d) \le \gamma_1(d)$ 所作的自成一体的证明见下文命题 6.1，其中我们将证明以下更精确的界。

定理 2.2。对所有 $n \ge 1$,

$$e_{d(7)}(n) \le \left\lfloor \frac{7}{2}n - \sqrt{\frac{5}{4}n^2 + 15n - 4} \right\rfloor .$$

猜想 2.3。对所有 $n \ge 1$, $e_{d(7)}(n)$ 等于定理 *2.2* 给出的上界。

作为支持这一猜想的进一步有限证据，我们有如下观察，它将在下一节中得到证明。

命题 2.4。对于所有 $n \le 366536$ 以及所有 $n = 7F_{2k+1} - 6$, $k \ge 0$，猜想 *2.3* 均成立，其中 F_i是第 i 个斐波那契数。

我们还提出以下相关猜想。

猜想 2.5. 对于给定的 n，在所有 $d > 0$ 中，具有 n 个顶点的阶为7 的三角形镶嵌中的一条螺旋具有最多的边。换言之，$\max_{d>0} e_d(n) = e_{d(7)}(n)$。

猜想 2.6. 对于所有 $d > 0$，若 $d \ne d(7)$，则 $c(d) < c(d(7))$。

由定理 2.1 可知，对于所有不太小的 d，该猜想均成立。

定理 2.7. $c(d) < c(d(7))$ 对所有 $d > 0.6611380871710578\ldots$ 均成立，可能只有 $d = 0.762173254820934\ldots$ 例外。

由定理 2.1 可知，我们有一个一般的上界 $c(d) < 8/3 = \lim_{d\to 0} \gamma_4(d)$，对所有 $d > 0$ 均成立。

令人有些惊讶的是，对所有 $d > 0$，平凡下界 $e_d(n) \ge 2n - 3$ 都可以改进。下界 $\gamma_6(d)$ 的一个等价定义如下:

$$\gamma_6(d) = 2 + \frac{1}{10} \quad \text{if } 0 < d < \overline{d}(6),$$

而对于 $q \ge 7$,

$$\gamma_6(d) = 2 + \frac{1}{4q-14} \quad \text{if } \overline{d}(q-1) \le d < \overline{d}(q).$$

因此，对所有 $d > 0$，我们有 $c(d) > 2$。此外，由于对所有 $i = 1$，2，4，6，$\lim_{d\to\infty} \gamma_i(d) = 2$，可得 $\lim_{d\to\infty} c(d) = 2$。

我们可以探讨在双曲平面中考虑由“无限半径圆”构成的圆堆积时会发生什么。若考虑射线 $\overrightarrow{ab}$ 上的可变点 c，则圆心为 c、半径为 ac 的圆会随着距离 $ac \to \infty$ 而收敛到一条极限曲线，这条曲线称为极限圆。

命题 2.8。在双曲平面中由 n 个极限圆构成的圆堆积中，极限圆的相切圆对数量至多为 $2n-3$，且此上界是紧的。

证明。在庞加莱模型中，极限圆是圆盘内与边界圆相切的圆。考虑庞加莱模型中边界圆为 C 的极限圆圆堆积。若我们在 C 内有一个圆堆积，且所有圆都与 C 相切，那么相应的接触图是外平面图：其所有顶点都位于外面的边界上。众所周知，一个有 n 个顶点的外平面图至多有 $2n-3$ 条边。

我们注意到，很容易找到这样一个由极限圆组成的圆堆积，其中有 $2n-3$ 个相切圆对，如图 2 所示。□

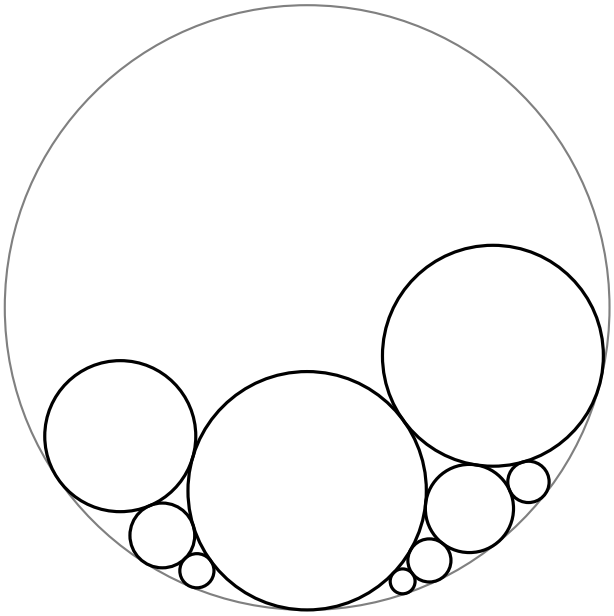


FIGURE 2.

3. PRELIMINARIES

本节汇总双曲几何和图论中的基本事实，这些事实将在我们的证明中使用。

引理 3.1. 在具有 f_i 个有 i 条边的有界面以及有 b条边的边界面的 2-连通平面图中，边的数量为 $e = 3n - 3 - b - \sum_{i\geq 4}(i-3)f_i$。

证明。 由于 G 是连通的，根据欧拉多面体公式可得 $n - e + \sum_i f_i = 1$。由于 G 是 2-连通的，通过计算每个面的边数可得 $2e = \sum_i i f_i + b$。因此 $e = 3n - 3 - b - \sum_{i\geq 4}(i-3)f_i$。 □

为便于后文引用，我们在此陈述双曲平面多边形的初等高斯–博内定理（由 Lambert 给出）。

引理 3.2 (高斯–博内**)**。 双曲平面中（曲率为 -1）一个具有 n 个顶点、内角为θ_1、.....、 θ_n 的简单多边形 P 的面积等于 面积$(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n}\theta_i$。

以下引理的欧几里得版本通常称为 Oler 不等式 [14, 16], ，其渊源可追溯至 Thue [23]。B¨or¨oczky Jr. [3], 将其推广到了双曲平面，而以下引理是其中的一个特例。

引理 3.3. 设 G 是双曲平面中的一个 2-连通平面图，每个有界面都是三角形，且每条边的长度至少为 d。令 B 表示 G的边界多边形。那么

$$\frac{\text{area}(B)}{A(d)} + \frac{\text{per}(B)}{d} \geq 2n - 2,$$

其中 n 是 G的顶点数。当且仅当 G的每个有界面都是边长为 d的等边三角形时，等号成立。

作为上述引理的推论，我们得到对 [4], 中 Bowen 引理 2 的加强，从而为 Bowen 的结果（下一节中的定理 5.1）带来一个略为简化的证明。

引理 3.4. 设 G 是双曲平面中最小距离为 d的一个 2-连通最小距离图，其有 n 个顶点和 b 个边界顶点。那么 面积$(G) \geq (2n - 2 - b)A(d)$；当且仅当 G 可剖分为边长为 d的 $n-2$ 个等边三角形时，等号成立。

引理 3.5 （双曲等周不等式，Schmidt [19]）。 假设双曲平面中的一条简单闭曲线的长度为 L，面积为 A。那么 $L^2 \geq 4\pi A + A^2$，当且仅当该曲线是一个圆时取等号。

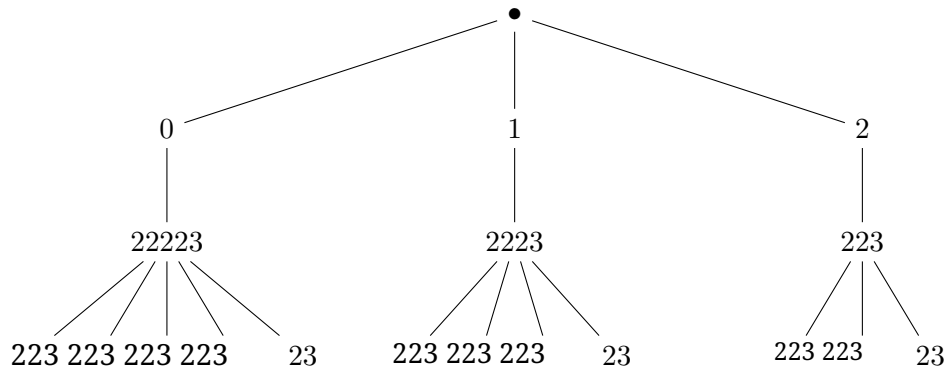
4. Proof of Proposition 2.4

该命题可由以下对有限差分的描述推出 e

$$\Delta e_{d(7)}(n) := e_{d(7)}(n+1) - e_{d(7)}(n).$$

命题 4.1。令 $A = (a_n)_{n\geq 0}$ 为由有限词序列 $(A_i)_{i\geq 0}$ 的极限所定义的无限词，其中该有限词序列由递归方式通过 $A_0 = 012$ 和 $A_{i+1} = A_i \cdot 2^{[4-a_i]}3$, $i \geq 0$ 定义。则 $\Delta e_{d(7)}(n) = a_n$。

换句话说，我们从词 012 开始，然后从左到右处理：每遇到一个 0，就在右侧添加 2、2、2、2、3；每遇到一个 1，就添加 2、2、2、3；每遇到一个 2，就添加 2、2、3；每遇到一个 3，就添加 2、3，如下图所示。



由此我们得到

$$A = 012\ 22223\ 2223\ 223\ 223\ 223\ 223\ 223\ 23\ 223\ 223\ 223\ 23\ 223\ 223\ 23\ \ldots.$$

将 a_n 相加，我们得到 $e_{d(7)}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$，从而得到以下最初的几个值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$e_{d(7)}(n)$	0	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	34	37	39	41

命题 *2.4* 的证明。为了证明对于所有 $n \leq 366536$, $e_{d(7)}(n) = \left\lfloor \frac{7}{2}n - \sqrt{\frac{5}{4}n^2 + 15n - 4} \right\rfloor$，我们使用命题 4.1 的递归计算了这些 n 值对应的 $e_{d(7)}(n)$，并将其与公式进行比较。（这非常耗时，因此最大值 366536 相当适中。）

如果我们考察以一个中心顶点开始的双曲七阶三角镶嵌的完整层，就会得到顶点数为

$$n = 7F_{2k+1} - 6 = \frac{7}{\sqrt{5}}\varphi^{2k+1} + \frac{7}{\sqrt{5}}\varphi^{-2k-1} - 6$$

边数为 $e = 7(3F_{2k+1} - F_{2k} - 3)$，其中 F_i 是第 i 个斐波那契数（见 [13,序列 A001354]）。将 e 用 n 表示，我们得到

$$e = \left(3 - \frac{1}{\varphi}\right) n - 3 - \frac{6}{\varphi} + 7\varphi^{-2k-1}.$$

我们可以只用 n 来表示 φ^{2k+1}：$\varphi^{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{7}(n+6) + \sqrt{\frac{5}{49}(n+6)^2 - 4}\right)$，并且 $\varphi^{-2k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{7}(n+6) - \sqrt{\frac{5}{49}(n+6)^2 - 4}\right)$。因此，对于完整层，我们得到

$$\begin{aligned} e &= (4-\varphi)\, n - 3 - \frac{6}{\varphi} + \frac{98/\sqrt{5}}{n+6+\sqrt{(n+6)^2 - 14^2}} \\ &= \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{5(n+6)^2 - 14^2}. \end{aligned}$$

Bowen [4] 证明，这些完整层在顶点数量相同的情况下，边的数量最多（见下文定理 5.1）。□

5. The spiral construction and a generalization of Bowen's upper bound

我们首先描述所有 $\{p,q\}$-镶嵌的螺旋构造。设 $p,q \geq 3$ 满足 $(p-2)(q-2) > 4$。设 $G_{p,q}$ 为双曲平面中由正p边形构成的无限 $\{p,q\}$-镶嵌，且每个顶点处恰有 q 个多边形。设 $e = v_1v_2$ 为$G_{p,q}$的一条边。接下来，我们递归地定义 $v_3, v_4, \ldots$，推广 Bowen [4] 的螺旋图，其中 $p = 3$。假设$v_1, \ldots, v_i$已经找到。令$v_{j_1}, \ldots, v_{j_t}$为 v_i所有先前定义的邻点，从$v_{j_1} = v_{i-1}$开始，沿 v_i顺时针方向排列，换言之，使得对每个 $k = 1, \ldots, t-1$，$\triangle v_{j_k} v_{j_{k+1}} v_i$的定向均为正向。然后，令 v_{i+1}为$G_{p,q}$中与 v_i相邻、且沿 v_i顺时针方向位于v_{j_t}之后的第一个顶点。螺旋图$G_{p,q}(n)$是由$v_1, \ldots, v_n$诱导的$G_{p,q}$ 的子图。

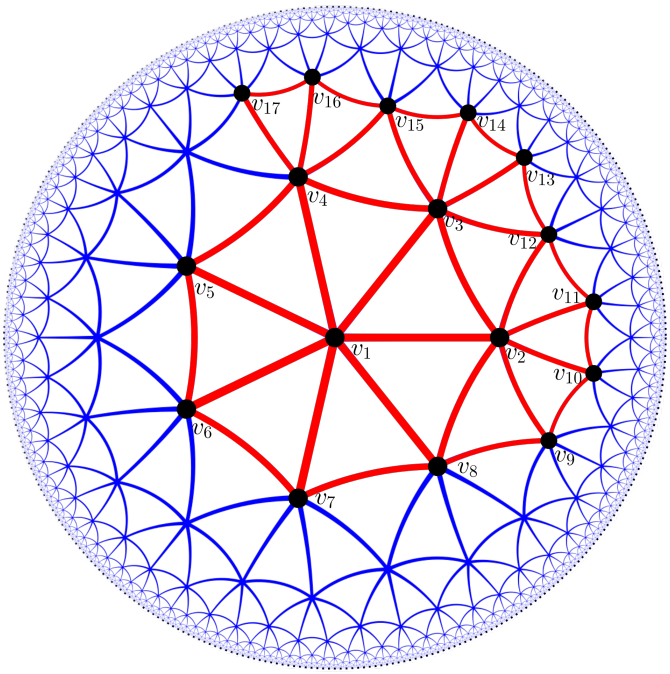


Figure 3. 七阶三角剖分中的一个含 17 个顶点的螺旋图。（改编自维基百科上的一幅图 [22]）

我们首先给出 Bowen 关于距离为$d(q)$的最小距离图的定理的一个稍简单的证明。

定理 5.1 (Bowen [4])。对于任意 $q \geq 7$，距离为 $d(q)$ 的最小距离图的边数 $e_{d(q)}(n)$ 的最大值，在所有 $n \geq 1$ 中均由 $G_{3,\ q}(n)$ 取得。

证明。当 $n \leq 3$ 时，定理显然成立，因此我们假设 $n > 3$ 并使用归纳法。考虑一个含有 n 个顶点、距离为 $d(q)$ 的最小距离图 G，其边数 $e = e_{d(q)}(n)$ 达到最大值。两条边不能相交，否则根据三角不等式可知，存在两个顶点之间的距离严格小于 d。因此，该图 G 是平面图。如果 G 不连通，那么我们可以将它的一个连通分量移向另一个连通分量，直到这两个连通分量之间的距离变为d，从而增加边数。因此 G 是连通的。同样，G 必须是 2-连通的，否则我们可以绕着一个割点旋转它的一个块，直到产生一条新边。根据引理 3.1，

$$e = 3n - 3 - b - (f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \ldots). \tag{1}$$

令 $G_s = G_{3,q}(n)$ 为包含于 $G_{3,q}$ 中的 n 个顶点的螺旋图。这也是距离为 $d(q)$ 的最小距离图。根据构造，G_s 是平面且 2-连通的，并且所有有界面都是三角形。引理 3.1 现在给出 $e_s = 3n - 3 - b_s$，其中 e_s 是 G_s 的边数，而 b_s 是其边界面上的边数。根据假设，$e \geq e_s$，由此可得 $b \leq b_s$，并且

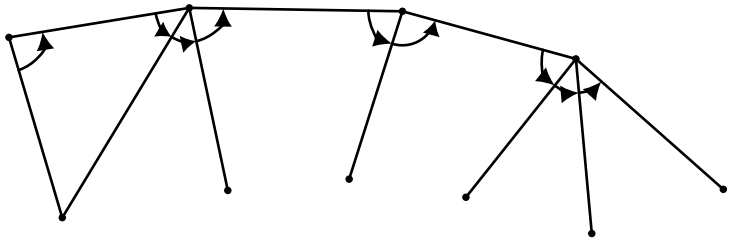


FIGURE 4. 箭头指出与某个角相关联的边

此外，如果 $b = b_s$，那么该螺旋构造是最优的，并且所有最优图的有界面都只有三角形。因此，要证明该定理，只需证明 $b = b_s$。我们假设 $b < b_s$ 并导出矛盾来完成证明。

现在移除 G 的边界顶点，得到一个较小的图 G'，它有 $n' = n - b$ 个顶点和 e' 条边。如果 $b = n$，则由 (1) 得到 $e \le 2n - 3$。另一方面，当我们在螺旋图中添加点 v_1, ..., v_n 时，从 v_3 开始，每添加一个点至少增加 2 条边，因此 $e_s \ge 2n - 3$。于是 $e = e_s$ 且 $f_4 + 2f_5 + \ldots = 0$，从而 $b_s = b$，这就产生了矛盾。

因此，不失一般性，$b < n$。从 G_s 的边界移除最后 b 个顶点 v_{n-b+1}, ..., v_n，得到 G'_s。根据归纳法，G' 的边数 e' 至多等于在 n' 个顶点上进行的螺旋构造 G'_s 的边数 e'_s：$e' \le e'_s$。

接下来，我们求出 G and G_s 的边界多边形面积的上下界估计，由此得到所需的矛盾。

我们先从下方估计 G 的边界多边形的角度和。在移除边界时，G 中每个有界面的每条边 $E(G) \setminus E(G')$，都可以对应到一个唯一的角；唯一的例外可能是两个端点都在 G 边界上的边（即边界圈的一条弦），这种边对应两个角（图 4）。

因此，这些角的总数至少为 $e - e'$，由此可知 G 的边界多边形 B 的角度和至少为 $(e - e')(2\pi/q)$；再由高斯–博内公式（引理 3.2）可得，该多边形的面积满足

$$\operatorname{area}(B) \le (b-2)\pi - (e-e')(2\pi/q).$$

接下来，我们从上方界定螺旋构造 G_s 的边界多边形的角度和。从 G_s 中移除的 b 顶点 $v_{n-b+1}, \ldots, v_n$ 处的角的总数至多为 $e_s - e'_s - 1$。理由如下。由于 $b < b_s$，我们不会移除 G_s 的整个边界；并且如上所述，将边界角与被移除的边配对，可知至少有 $e_s - e'_s - 1$ 个角。

G_s 中未被移除的每个边界顶点，在 G_s 中的度至多为 4（见 [12, 命题 3.1]），但与 v_n相邻的边界顶点 v_m（$m \le n - b$）除外，其度至多为 $q - 1$。因此，G_s 的边界多边形 B_s 的角度和至多为

$$(e_s - e'_s - 1)(2\pi/q) + (b_s - b - 1)(6\pi/q) + (q-2)(2\pi/q) = (e_s - e'_s + 3b_s - 3b + q - 6)(2\pi/q).$$

根据高斯–博内定理，G_s 的面积有如下下界：

$$\operatorname{area}(B_s) \ge (b_s - 2)\pi - (e_s - e'_s + 3b_s - 3b + q - 6)(2\pi/q).$$

Then

$$\operatorname{area}(B) - \operatorname{area}(B_s) \le (b - b_s)(\pi - 6\pi/q) + (e_s - e + e' - e'_s + q - 6)(2\pi/q) \le (1 - 8/q)\pi, \tag{2}$$

其中，最后一个不等式由 $b < b_s$、$e_s < e$和 $e' \le e'_s$得出。

现在我们使用引理 3.4 来估计这两个面积。首先，由于 G_s 仅由三角形组成，我们得到等式

$$\operatorname{area}(B_s) = (2n - 2 - b_s)(\pi - 6\pi/q),$$

而对于 G，我们得到下界

$$\operatorname{area}(B) \ge (2n - 2 - b)(\pi - 6\pi/q).$$

因此，

$$\operatorname{area}(B) - \operatorname{area}(B_s) \geq (b_s - b)(\pi - 6\pi/q) \geq (1 - 6/q)\pi,$$

这与 (2) 矛盾。 □

接下来我们将证明，类似于前一个证明的论证表明，对于任何满足 $(p-2)(q-2) > 4$ 的 $p,\ q \geq 3$，螺旋构造在具有固定数量顶点的 $\{p,q\}$ 铺砌的所有子图中给出的边数最多。Higuchi 和 Shirai [10] 以及 H¨aggstr¨om、Jonasson 和 Lyons [8]证明了这一结论的一个较弱的渐近版本。Rold´an 和 Toal´a-Enr´ıquez [17]证明了一个与此等价的命题。我们的证明同样更简单。

引理 5.2。 考虑 $\{p,q\}$ 铺砌中的一个圈 $C = v_1 \dots v_k$，设 e_i 为从 v_i 发出的、位于该圈内部的边数。那么 C 内部的面数为

$$\frac{(k-2)(q-2) - 4 - 2\sum_{i=1}^{k} e_i}{(p-2)(q-2) - 4}.$$

证明。 在 $\{p,q\}$-镶嵌中，每个面都是内角为 $\frac{2\pi}{q}$ 的正 p 边形。这样的 p-边形面积为 $(p-2)\pi - p\frac{2\pi}{q}$。由于在顶点 v_i 处有 $e_i + 1$ 个正 p 边形相交，因此 C 在该顶点处的内角为 $(e_i+1)\frac{2\pi}{q}$。因此，k 边形 C 的面积为 $(k-2)\pi - \frac{2\pi}{q}\sum_{i=1}^{k}(e_i+1)$。面数等于 C 的面积与正 p 边形面积之比。两面积相除即可完成证明。□

定理 5.3。 设 G 是含有 n 个顶点的 $\{p,q\}$-镶嵌的一个子图，其中 $p > 3$。那么，G 的边数至多为螺旋图 $G_{p,\ q}(n)$ 的边数。

证明。 令 $G_s = G_{p,q}(n)$ 为通过螺旋构造得到的、具有 n 个顶点的 $\{p,q\}$-镶嵌的子图。我们对 n 使用归纳法，以证明 $e(G) \leq e(G_s)$；显然，当$n \leq p$时，该命题成立。假设 G 满足 $e(G) > e(G_s)$。不失一般性，G 是 $\{p,q\}$-铺砌的诱导子图。

如果 G 不连通，我们可以将一个连通分量移近另一个连通分量，直到产生一条新边，从而增加边数。如果 G 不是 2-连通的，那么 $G = G_1 \cup G_2$，其中 $G_1 \cap G_2$ 由一个点组成。我们用螺旋构造 S_1 和 S_2 替换 G_1 和 G_2，它们的顶点数分别与 G_1 和 G_2 相同。在每个 S_i 上，边界上都存在 3 个相邻点 a_i, b_i, c_i，使得 S_i 包含在角 $\angle a_i b_i c_i$ 内。随后，我们可以移动 S_2，使边 a_1b_1 和 a_2b_2 重合，从而得到一个具有 $n-1$ 个顶点、$e(G) - 1$ 条边的构造。因此，$e(G) - 1 \leq e(G_s^-)$，即具有 $n-1$ 个顶点的螺旋构造 G_s^- 的边数。由于 $e(G_s) \geq e(G_s^-) + 1$，我们证明了 $e(G) \leq e(G_s)$，这与我们的假设矛盾。

因此，G 是 2-连通的。接下来，我们将 G 与具有 n 个顶点的 G_s 螺旋构造进行比较。根据欧拉公式和双重计数，我们得到 $e(G) \leq \frac{p}{p-2}(n-1) - \frac{b}{p-2}$，其中 b 是 G的边界多边形 B的长度。同样，由于 G_s的所有有界面都是 p边形，我们有 $e(G_s) = \frac{p}{p-2}(n-1) - \frac{b_s}{p-2}$，其中 b_s 是 G_s的边界长度。由于根据假设有 $e(G) > e(G_s)$，我们得到 $b < b_s$。

由于 $\alpha_p = 2\pi/q$ 是 $\{p,q\}$铺砌中一个面的角，G_s 的边界多边形 B_s 的面积为

$$\operatorname{area}(B_s) = ((p-2)\pi - p\cdot\alpha_{p,q})(e(G_s) - n + 1) = ((p-2)\pi - p\cdot\alpha_{p,q})\left(\tfrac{2}{p-2}(n-1) - \tfrac{b_s}{p-2}\right) \tag{3}$$

由欧拉公式和高斯–博内公式（引理 3.2）得到。

现在考虑 G。移除其边界后，得到图 G'，它有 $n-b$ 个顶点和 e' 条边。令 G'_s 为对应于 $n-b$ 个顶点的螺旋构造的图。于是，根据归纳假设，我们有 $e(G'_s) \geq e(G')$。我们还利用与定理 5.1 的证明中类似的观察，给出边界多边形 B_s（属于 G_s）面积的下界。在这种情况下，由于 $p \geq 4$，每个未被移除的边界顶点的度数至多为 3，除了与 v_n 相邻的边界顶点 $v_m (m \leq n-b)$，其度数至多为 q。因此，B_s 的角度和至多为

$$\big(e(G_s) - e(G'_s) - 1\big)\cdot\alpha_{p,q} + (b_s - b - 1)\cdot 2\alpha_{p,q} + (q-1)\,\alpha_{p,q},$$

thus

$$\operatorname{area}(B_s) \geq (b_s - 2)\,\pi - \Big(\big(e(G_s) - e(G'_s) - 1\big) + 2\,(b_s - b - 1) + (q-1)\Big)\cdot\alpha_{p,q}. \tag{4}$$

我们还注意到，$(e(G) - e(G'))\,\alpha_{p,\,q}$ 是边界多边形 B（属于 G）角度和的下界，因为它至少有 $e(G) - e(G')$ 个顶点，且每个角都是 $\alpha_{p,\,q}$ 的倍数。于是，

$$\operatorname{area}(B) \le (b-2)\,\pi - \left(e(G) - e\left(G'\right)\right)\alpha_{p,q}. \tag{5}$$

我们还要给出 area(B) 的一个下界。为此，我们注意到一个 k-面至少包含 $\binom{k-2}{p-2}$ 个正则 p-边形的副本，因此

$$\operatorname{area}(B) \ge \left(\pi - \frac{p}{p-2}\alpha_{p,q}\right)\sum_{k\ge p}(k-2)\,f_k, \tag{6}$$

其中，f_k 表示 G中 k-面的数量。我们有

$$\sum_{k\ge p} f_k = 1 + e(G) - n$$

由欧拉公式可得，

$$\sum_{k\ge p} k\cdot f_k = 2e(G) - b,$$

因此

$$\sum_{k\ge p}(k-2)\cdot f_k = 2n - b - 2,$$

据此，我们将 (6) 改写为

$$\operatorname{area}(B) \ge \left(\pi - \frac{p}{p-2}\alpha_{p,q}\right)(2n-b-2). \tag{7}$$

由（4）和（5），我们推得

$$\operatorname{area}(B_s) - \operatorname{area}(B) \ge (b_s - b)(\pi - 2\alpha_{p,q}) + \left(e(G) - e(G_s) + e\left(G_s'\right) - e\left(G'\right) + 4 - q\right)\alpha_{p,q}. \tag{8}$$

另一方面，由（3）和（7），我们有

$$\operatorname{area}(B_s) - \operatorname{area}(B) \le \left(\pi - \frac{p}{p-2}\alpha_{p,q}\right)(b - b_s) \le \frac{p}{p-2}\alpha_{p,q} - \pi, \tag{9}$$

其中，最后一个不等式来自假设 $b < b_s$。比较不等式（8）和（9），我们得到 $p \le 3$，矛盾。□

6. Upper bounds

下面的归纳法证明（类似于 Harborth 的证明 [9]，用于欧几里得平面中的便士图）对所有 $d > 0$ 均成立，并且对所有 d（k）都是紧的，$k \ge 7$。

命题 6.1。对于所有 $d > 0$ 和 $n \ge 1$,

$$e_d(n) \le \frac{\pi}{\alpha}n - \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)n^2 + 6\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)n - \frac{2\pi}{\alpha} + 3} < \gamma_1(d)n,$$

其中，$\gamma_1(d) = \frac{\pi}{\alpha} - \sqrt{(\frac{\pi}{\alpha}-1)(\frac{\pi}{\alpha}-3)}$ 是二次多项式 $p_\alpha(x) = \alpha x^2 - 2\pi x + 4\pi - 3\alpha$的较小根。

证明。设

$$s(x) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)x^2 + 6\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)x - \frac{2\pi}{\alpha} + 3}.$$

设 G 是一个距离为 d、具有 n 个顶点且边数最多的便士图。容易验证，若 $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，则 $e = 0,\ 1,\ 3,\ 5$，并且这些数均不超过 $\frac{\pi}{\alpha}n - s(n)$。由极大性可知，$G$ 是 2-连通的，因为否则我们可以像定理 5.1 的证明中那样对图进行调整，从而增加边数。下面令 $n \ge 5$。根据归纳法，我们假设顶点数为 $n' < n$ 的图的边数不超过 $\frac{\pi}{\alpha}n' - s(n')$。设边界多边形的边数为

b。由引理 3.1 可得 $e \le 3n-3-b$，若 $b \ge \left(3-\frac{\pi}{\alpha}\right)n-3+s(n)$，则该数至多为 $\frac{\pi}{\alpha}n-s(n)$。因此，不失一般性，我们可以假设

$$b < \left(3-\frac{\pi}{\alpha}\right)n-3+s(n).$$

注意，$\left(3-\frac{\pi}{\alpha}\right)n-3+s(n) < n$（因为这等价于不等式 $0<(n-3)^2+\left(\frac{2\pi}{\alpha}-3\right)$，而该不等式显然成立，因为 $\alpha<\frac{\pi}{3}$）。因此，如果我们移除边界顶点，就会剩下可应用归纳法的顶点。总共移除 r 条边（其中 b 条边来自边界，$r-b$ 条边连接边界顶点与内部顶点）。于是，边界多边形的角度和 B 为

$$(b-2)\pi - \operatorname{area}(B) \ge \alpha r.$$

根据引理 3.4,

$$\operatorname{area}(B) \ge (2n-2-b)(\pi-3\alpha),$$

因此我们得到 $r \le (2b-2n)\frac{\pi}{\alpha}+3(2n-2-b)$。于是边的数量

$$e \le r + (n-b)\frac{\pi}{\alpha} - s(n-b),$$

当且仅当时，其最多为 $\frac{\pi}{\alpha}n-s(n)$

$$\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)b+\left(6-\frac{2\pi}{\alpha}\right)n-6-s(n-b) \le -s(n).$$

由于左侧关于 b 递增（因为 $b<n$ 和 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$），只需注意到，如果

$$x = \left(3-\frac{\pi}{\alpha}\right)n-3+s(n),$$

then

$$\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)x+\left(6-\frac{2\pi}{\alpha}\right)n-6-s(n-x) = -s(n),$$

或者等价地,

$$\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)x+\left(6-\frac{2\pi}{\alpha}\right)n-6+s(n)\right)^2 = s(n-x)^2,$$

这可以通过展开等式两边来验证。 □

我们猜想，与七阶三角形镶嵌的情形一样，对于所有距离 $d(k)$，边数的最大值可通过对上述上界取整得到。

猜想 6.2。对于所有 $n \ge 1$ 和所有 $k \ge 7$,

$$e_{d(k)}(n) = \left\lfloor \frac{\pi}{\alpha}n - \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\pi}{\alpha}-3\right)n^2+6\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)n-\frac{2\pi}{\alpha}+3} \right\rfloor.$$

现在考虑对于所有 $k \ge 7$，$d \ne d(k)$ 的情形。考虑一个由 n 个点构成、边长为 d 且有 $e = e_d(n)$ 条边的最小距离图 G。与之前一样，我们假设 G 是平面且 2-连通的。从现在起，我们还假设对于所有 $k \ge 7$，$d \ne d(k)$。那么对于所有 $k \ge 7$，$\alpha(d) \ne 2\pi/k$，由此可知，每个内部顶点都属于一个非三角形面。结合引理 3.1，可得以下估计。

命题 6.3。若对所有 $k \ge 7$ 都有 $d \ne d(k)$，则 $e_d(n) \le \frac{11}{4}n-\frac{3}{4}b-3$。

证明。由引理 3.1，$e = 3n-3-b-\sum_{i\ge 4}(i-3)f_i$。由于每个内部顶点都属于一个非三角形面，$b+\sum_{i\ge 4} i f_i \ge n$，因此可得 $e \le 3n-3-b-(n-b)/4 \le \frac{11}{4}n-\frac{3}{4}b-3$。 □

我们可以利用引理 3.4 给出的边界多边形面积下界，以及在 d 较大时由面积公式给出的上界，或在 d 较小时由双曲等周不等式给出的上界，来改进这一估计。

命题 6.4。 如果 $d \neq d(k)$ 对所有 $k \geq 7$ 都成立，那么对所有 $n \geq 1$,

$$e_d(n) < \min\{\gamma_2(d)n, \gamma_3(d)n\},$$

其中

$$\gamma_2(d) = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{8} - \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \frac{17\pi}{4\alpha} + \frac{241}{64}}$$

and

$$\gamma_3(d) = 2 + \frac{3(d - \pi + 3\alpha)}{4(d + \pi - 3\alpha)}.$$

证明。我们利用归纳法和命题 6.3 证明第一个界。注意，随着 α 在 0 和 $\pi/3$ 之间变化， $\gamma_2(d)$ 严格递减，且取值位于区间 (2,3) 内。设 G 是一个距离为 d 、具有 n 个顶点的便士图，且其边数 e 最大。则 G 是 2-连通的；否则，我们可以对该图进行调整以增加边数。容易验证，若 $n = 1, 2, 3, 4$，则 $e = 0, 1, 3, 5$，依次成立，进而 $e \leq 2n - 2 < \gamma_2(d)n$。根据归纳假设，顶点数为 $n' < n$ 的图的边数至多为 $\gamma_2(d)n'$。设边界多边形的边数为 b。由命题 6.3 可得 $e \leq \frac{11}{4}n - \frac{3}{4}b - 3$；若 $b \geq (\frac{11}{3} - \frac{4}{3}\gamma_1(d))n - 4$，则该数至多为 $\gamma_2(d)n$。因此，不失一般性，我们可以假设 $b < (\frac{11}{3} - \frac{4}{3}\gamma_1(d))n - 4$。

令 r 为 G 中至少有一个端点位于边界多边形 B上的边数。注意，这些边与由两条具有公共端点的边所形成的所有角一一对应，这些角的公共端点位于 B 上，且角内没有边。由于这些角的每一个角度都至少为 α，我们得到边界多边形 B 的角度和为

$$(b - 2)\pi - \operatorname{area}(B) \geq \alpha r.$$

由引理 3.4,

$$\operatorname{area}(B) \geq (2n - 2 - b)(\pi - 3\alpha),$$

因此我们得到一个上界

$$r \leq -(\tfrac{2\pi}{\alpha} - 6)n + (\tfrac{2\pi}{\alpha} - 3)b - 6.$$

若从 G中移除边界顶点及其关联的边，则剩下 $e - r \leq \gamma_2(d)(n - b)$ 条边。因此，边数的上界如下：

$$e \leq \gamma_2(d)(n - b) + r \leq \gamma_2(d)(n - b) - (\tfrac{2\pi}{\alpha} - 6)n + (\tfrac{2\pi}{\alpha} - 3)b - 6,$$

并且当 $\gamma_2(d)n$时，这个上界至多为

$$(\tfrac{2\pi}{\alpha} - 3 - \gamma_2(d))b \leq (\tfrac{2\pi}{\alpha} - 6)n + 6.$$

由于 $b < (\frac{11}{3} - \frac{4}{3}\gamma_1(d))n - 4$，只需证明

$$(\tfrac{2\pi}{\alpha} - 3 - \gamma_2(d))(\tfrac{11}{3} - \tfrac{4}{3}\gamma_2(d))n - 4) \leq (\tfrac{2\pi}{\alpha} - 6)n + 6.$$

这由 $(\frac{2\pi}{\alpha} - 3 - \gamma_2(d)) \cdot (\frac{11}{3} - \frac{4}{3}\gamma_2(d)) = \frac{2\pi}{\alpha} - 6$得出。

对于第二个界，我们使用等周不等式，该不等式意味着 $A < L = bd$。根据引理 3.4，边界多边形的面积 A 为

$$A \geq (\pi - 3\alpha)(2n - 2 - b).$$

我们得到 $b > \frac{2\pi - 6\alpha}{d + \pi - 3\alpha}(n - 1)$，并像之前一样得到上界 $e \leq \gamma_3(d)\, n$。 □

接下来，我们结合等周不等式、归纳证明和收费论证，在另外假设 d 不是以下距离之一的情况下，得到两个更好的上界：$d(k)$，其中 $k - 1$ 个等边三角形和一个正方形可以围绕一个点拼合。

命题 6.5。 如果对所有 $k \geq 7$ 都有 $d \neq d(k)$，并且对所有 $k \geq 6$ 都有 $d \neq d(k)$，那么

$$e_d(n) \leq \min\{\gamma_4(d)n, \gamma_5(d)n\},$$

其中

(10)
$$\gamma_4(d) = \frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{6} - \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \frac{13\pi}{3\alpha} + \frac{145}{36}}$$

and

$$\gamma_5(d) = \frac{8}{3} - \frac{4(\pi - 3\alpha)}{3(d + \pi - 3\alpha)}.$$

请注意

$$\frac{\pi}{\alpha} - \frac{1}{6} - \sqrt{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - \frac{13\pi}{3\alpha} + \frac{145}{36}} = 2 + \frac{\alpha}{3\pi} + O(\alpha^2) \quad \text{as } d \to \infty,$$

这可以与定理 7.1 中的下界相比较。

证明。 与之前一样，我们可以假设 G 是 2-连通的；由于很容易验证 $n = 1,2$ 的情形，因此我们也假设 $n \geq 3$，并且该陈述对所有 $2 \leq n' < n$都成立。特别地，对于每个 $i \geq 3$ ，都存在一个有 b 条边的边界多边形；我们令 i-面数为 f_i，由欧拉公式可得$e = 2n - 3 - b - \sum_{i\geq 4}(i-3)f_i$。

我们采用收费论证，首先给每个 $n - b$ 内部顶点赋予 1 的电荷。由于对于任意 $q \geq 7$都有 $\alpha \neq 2\pi/q$ ，因此每个顶点都与一个非三角形面关联。然后，我们按照以下两条规则，将每个顶点的电荷转移到与其关联的非三角形面：

（1）如果与某个内部顶点相邻的所有非三角形面都是四边形，那么我们就在这些面之间平均分配电荷。（2）否则，我们就在所有与该顶点相邻且既不是三角形也不是四边形的面之间平均分配电荷。

显然，任意有界的 i 边形 $i \geq 4$，所获得的电荷至多为 i。

断言 6.6. 所有四边形获得的电荷至多为 3。

断言的证明。 由于便士图中的四边形 $Q = ABCD$ 是边长为 d 的菱形，其对角相等。设 $\angle ABC = \gamma \leq \delta = \angle BCD$ 为这两个角。

如果 Q 中只有两个顶点将其全部电荷分配给 Q，那么总电荷至多为 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 3$。因此，不失一般性地，至少有三个 Q 中的顶点向 Q分配 1 单位电荷。由此可知， $2\pi - \gamma$和 $2\pi - \delta$都是 α的倍数，记作 $k\alpha + \gamma = 2\pi = \ell\alpha + \delta$。因此 $|k - \ell|\alpha = |\gamma - \delta| = \delta - \gamma$。接下来我们证明 $\delta - \gamma < \alpha$。注意，由于 Q 的对角线必须严格大于 d，所以 $\gamma > \alpha$ 。设C' 为对角线 AC 上的点，使得 $AC' = d$。由于 $DA = DC = d$，可得 $DC' < d$。因此， $\delta/2 = \angle DAC < \alpha$，所以 $\delta < 2\alpha$ 和 $\delta - \gamma < \alpha$。

由此可得 $k = \ell$，因此 Q 是一个正方形，其外角是 α 的整数倍，这与我们的假设 $d \neq d(k)$ 矛盾。□

由于总电荷为 $n - b$，我们得到

$$n - b \leq 3f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \cdots \leq 3\sum_{i\geq 4}(i-3)f_i.$$

根据引理 3.1，我们得到 $e \leq \frac{8}{3}n - \frac{2}{3}b - 3$。只要 $b \geq (4 - \frac{3}{2}\gamma_4(d))n - \frac{9}{2}$，那么 $e \leq \gamma_4(d)n$就成立。另一方面，正如命题 6.4 的证明中所示，通过归纳法可得，只要 $(\frac{2\pi}{\alpha} - 3 - \gamma_4(d))b \leq (\frac{2\pi}{\alpha} - 6)n + 6$，则 $e \leq \gamma_4(d)n$ 。因此，为涵盖这两种情况，我们需要 $\gamma_4(d)$ 满足

$$\left(4 - \frac{3}{2}\gamma_4(d)\right)n - \frac{9}{2} \leq \frac{(2\pi/\alpha - 6)n + 6}{2\pi/\alpha - 3 - \gamma_4(d)}$$

对所有 n 均成立。取 $\gamma_4(d)$ 为下式的较小根即可

$$\left(4 - \frac{3}{2}x\right)(2\pi/\alpha - 3 - x) - 2\pi/\alpha + 6 = 0,$$

该式由公式 (10) 给出。

为证明 $e_d(n) \leq \gamma_5(d)n$，我们使用等周不等式 $bd > A$，其中 A 是由边界圈围成的多边形的面积。由引理 3.4， $A \geq (2n-2-b)(\pi-3\alpha)$。由此可得 $b > \frac{2\pi-6\alpha}{d+\pi-3\alpha}(n-1)$。结合收费界 $e \leq \frac{8}{3}n - \frac{2}{3}b - 3$，我们得到 $e < \gamma_5(d)n$。命题 6.5 的证明到此完成。□

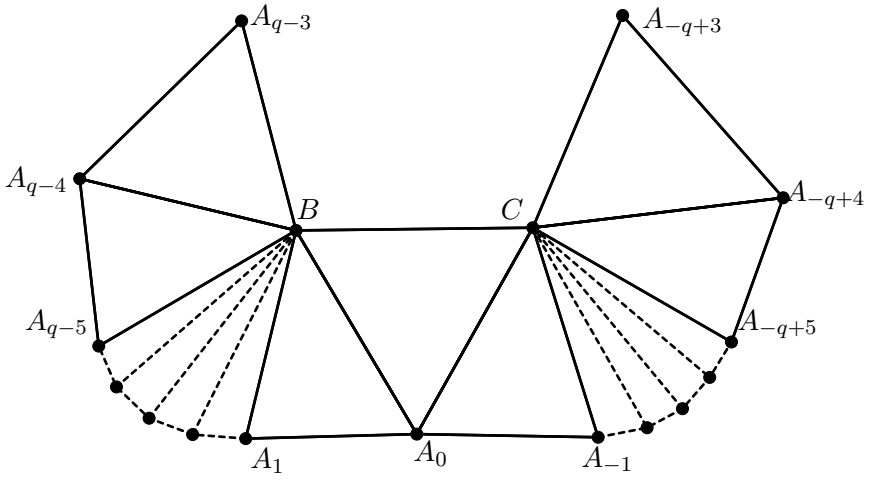


FIGURE 5. 下界构造的第一步

7. LOWER BOUNDS

设 $d > 0$ 是双曲平面中的任意距离。很容易排布 n 个直径为 d的圆，使得有 $2n-3$ 对相切圆。因此，对于所有 $d > 0$ 和所有 $n \geq 3$，都有 $e_d(n) \geq 2n-3$。

现在我们描述一种更好的构造。回顾一下，$\alpha_4 = 2\arcsin(\sqrt{2}\sin(\bar{\alpha}/2))$ 是边长为 d的正方形的角。

定理 7.1。对于任意 $n \in \mathbb{N}$和 $d > 0$，都有 $e_d(n) \geq \left(2 + \frac{1}{4q-14}\right)n - 4$，其中 $q = 2 + \lfloor (2\pi - \alpha_4)/\alpha \rfloor$。因此

$$c(d) \geq \gamma_6(d) = 2 + \frac{1}{4q-14} = 2 + \frac{\alpha}{8\pi} + O(\alpha^2) \quad as\ d \to \infty.$$

证明。我们首先固定任意一个 $q \geq 6$。定理陈述中给出的 q 的具体值将由下述构造构成便士图的约束推出。设 $\triangle A_0BC$为边长为 d的等边三角形。设点 $A_1, \ldots, A_{q-2}$按顺时针顺序位于距 B距离为 d的位置，并且都位于以 B 为中心、半径为 d的圆上，其中 $\triangle A_iA_{i+1}B$为等边三角形，$i = 0, \ldots, q-3$。类似地，设 $A_{-1}, \ldots, A_{-q+2}$按逆时针顺序位于距 C 距离为 d 的位置，并且位于以 C为中心、半径为 d 的圆上，其中 $\triangle A_{-i}A_{-i-1}B$ 为等边三角形，$i = 0, \ldots, q-3$。于是，只要满足$A_{q-3}C, BA_{-q+3}, A_{q-3}A_{-q+3} \geq d$，点 $\{B, C\} \cup \{A_i : -q+3 \leq i \leq q-3\}$ 就构成一个便士图。只需确保 $A_{q-3}A_{-q+3} \geq d$，因为这样三角不等式将保证 $A_{q-3}C + BA_{-q+3} \geq A_{q-3}A_{-q+3} + BC \geq 2d$，从而有 $A_{q-3}C = BA_{-q+3} \geq d$。不等式 $A_{q-3}A_{-q+3} \geq d$ 等价于

$$\beta_q \leq 2\pi - (q-2)\alpha, \tag{11}$$

其中 $\beta_q = \angle A_{q-3}A_{-q+3}C = \angle A_{-q+3}A_{q-3}B$。我们将 q 固定为使（11）成立的最大值。因此，如果我们还构造等边三角形 $\triangle A_{q-3}A_{q-2}B$ 和 $\triangle A_{-q+3}A_{-q+2}C$，那么有

$$\beta_{q+1} > 2\pi - (q-1)\alpha. \tag{12}$$

由于 $A_{q-3}A_{-q+3} \geq d > A_{q-2}A_{-q+2}$，可知存在一个正方形 $ABCD$，其中 A 位于角 $\angle A_{q-3}BA_{q-2}$ 内，且 D 位于角 $\angle A_{-q+3}CA_{-q+2}$内。因此，（11）和（12）可改进为

$$\beta_q \leq \alpha_4 \leq 2\pi - (q-2)\alpha,$$

and

$$\beta_{q+1} > \alpha_4 > 2\pi - (q-1)\alpha, \tag{13}$$

其中 α_4 是边长为 d的正方形的角。因此 $q = 2 + \lfloor (2\pi - \alpha_4)/\alpha \rfloor$。

我们还需要一个约束 $(q-2)\alpha > \pi$，它意味着 A_{q-3} 和 A_0 位于经过 B 和 C 的直线两侧，这一点在图5中被隐含地假定了。这可由 (13) 以及不等式 $\alpha < \pi/3$ 和 $\alpha_4 < \pi/2$ 得出。

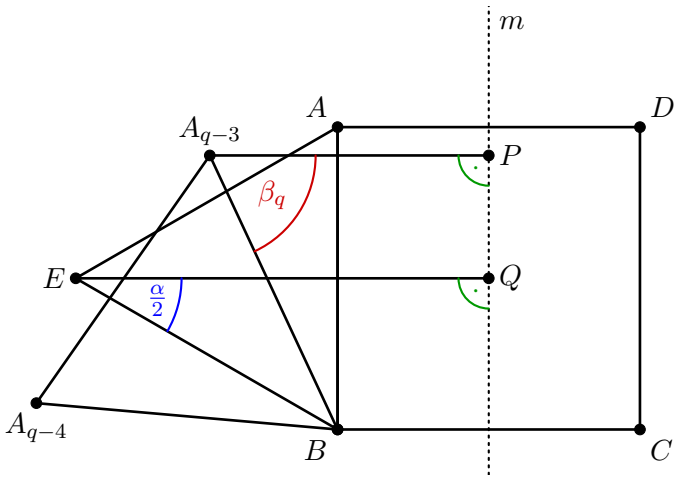


FIGURE 6.

到目前为止，我们有 $2q-3$ 个顶点和 $4q-9$ 条边。接下来，将所有内容关于经过 A_{q-3} 和 A_{-q+3} 的直线 ℓ_1 反射。这样便得到 $2q-5$ 个反射顶点和 $4q-9$ 条反射边。为了使反射后的点与原始点之间的距离至少为 d，只需原始点 B 和 A_0，……，A_{q-4} 到直线 ℓ_1 的距离至少为 $d/2$。要证明 B 到 ℓ_1 的距离至少为 $d/2$，只需证明

$$2\beta_q \geq \alpha, \tag{14}$$

因为这将得到 $BB' \geq d$ 位于三角形 $\triangle BA_{q-3}B'$ 中，其中 B' 是 B 关于 ℓ_1 的反射。同样，考虑三角形 $A_{q-4}A_{q-3}A'_{q-4}$（其中 A'_{q-4} 是 A_{q-4} 关于 ℓ_1 的反射），要证明 A_{q-4} 到 ℓ_1 的距离至少为 $d/2$，只需证明

$$\pi - (\alpha + \beta_q) \geq \alpha/2. \tag{15}$$

由 (14) 和 (15) 可知，B、C 和 A_{q-4} 到 ℓ_1 的距离至少为 $d/2$；在 B 和 C 所在一侧，与直线 ℓ_1 距离为 $d/2$ 的等距曲线与圆心为 B、半径为 d 的圆相交于从 A_{q-4} 到 B 的圆弧上的点，该圆弧包含 A_{q-3}。由此可知，所有点 $A_1, \ldots, A_{q-5}$ 到 ℓ_1 的距离至少为 $d/2$，因为它们位于这段圆弧之外。

在完成构造之前，我们先证明 (14) 和 (15)。设 E，使得 $\triangle ABE$ 是等边的，且 E 和 C 位于直线 AB 的两侧（图 6）。由于 A 位于角 $\angle A_{q-3}BA_{q-2}$内部，因此 A_{q-3} 位于角 $\angle EBA$内部。设 P 为从 A_{q-3} 向 BC的垂直平分线 m 所作垂线的垂足，Q 为从 E 向 m所作垂线的垂足。于是 $\beta_q = \angle BA_{q-3}P \geq \angle BEQ = \alpha/2$，这就证明了 (14)。由于 $\beta_q \leq \alpha_4$ 和 $\alpha \leq \pi/3$，我们有 $\beta_q + 3\alpha/2 \leq \pi$，这与 (15) 等价。

设 A'_0 为 A_0 关于 ℓ_1的反射，A'_1 为 A_1 关于 ℓ_1的反射。仿照最初围绕 B 和 C的做法，围绕 A'_0 和 A'_1 构造三角形。这样会在 A'_0周围增加 $q-5$ 个三角形，同时增加 $q-5$ 个顶点和 $2q-10$ 条边；并在 A'_1 周围增加 $q-4$ 个三角形，同时增加 $q-4$ 个顶点和 $2q-8$ 条边。该图形关于 $B'A'_0$的中点中心对称。因此，如果我们再次关于直线 ℓ_2反射，那么 ℓ_1 和 ℓ_2 互为中心反射，因而超平行。

经过 i 次迭代，我们从直线 ℓ_1 到ℓ_i 的反射中添加了 $(2q-5)i$ 个顶点和 $4q-9$ 条边，并通过构造三角形又添加了 $(2q-9)(i-1)$ 个顶点和 $(4q-18)(i-1)$ 条边，从而得到

$$n_i = 2q-3+(2q-5)i+(2q-9)(i-1)$$

顶点和

$$e_i = 4q-9+(4q-9)i+(4q-18)(i-1)$$

边。消去 $i=(n-6)/(4q-14)$ 后，我们得到，只要 $n-6$ 能被 $4q-14$整除，就构造出了一个双曲便士图，具有

$$e=\left(2+\frac{1}{4q-14}\right)n-3+\frac{14}{4q-14}$$

边。我们可以通过反复添加度为 2 的顶点，补齐 n 之间的值。这样，在最坏情况下，当 $n-6$ 比 $4q-14$的倍数小 1 时，我们至少可以得到 $(2+\frac{1}{4q-14})n-4$ 条边。由于任意两条相邻的反射线 ℓ_i 和 ℓ_{i+1} 都是超平行的，因此所有反射线两两超平行，所以每次迭代都不会发生重叠。□

References

[1] K. Bezdek. 欧几里得三维空间中全等球堆积的接触数 309, 2012 48 2 298 -space. *Discrete Comput. Geom.*, ( ): – .[2] K. Bezdek、R. Connelly 和 G. Kert´esz. 全等圆球面堆积中邻居的平均数量。载于 *Intuitive geometry (Siófok, 1985)*，第 48 卷，*Colloq. Math. Soc. János Bolyai*，第 37–52 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987 年。[3] K. B¨or¨oczky, Jr. 双曲平面中的离散点集。 *Studia Sci. Math. Hungar.*, 39(1-2):21–36, 2002. [4] L. Bowen. 双曲平面中的圆堆积。 *Math. Phys. Electron. J.*, 6:Paper 6, 10, 2000. [5] G. Csizmadia. 最小距离图的独立数。 *Discrete & Computational Geometry*, 20 2 179 187, 1998 ( ): – .[6] D. Eppstein. 无三角形便士图：退化度、列表可选性和边数。载于 F. Frati 和 K.-L. Ma 编，*Graph Drawing and Network Visualization*，第 506–513 页，查姆，2018 年。施普林格国际出版公司。[7] P. Erd˝os. 关于平面上点的距离集。 *Amer. Math. Monthly*, 53:248–250, 1946. [8] O. H¨aggstr¨om、J. Jonasson 和 R. Lyons. 随机簇模型的显式等周常数与相变。 *Ann. Probab.*, 30(1):443–473, 2002. [9] H. Harborth. 问题 664 A 的解答。 *Elem. Math*, 29:14–15, 1974. [10] Y. Higuchi 和 T. Shirai. (d f 9 2 221 228, ,)-2003正则平面图的等周常数。 *Interdiscip. Inform. Sci.*, ( ): – .[11] Y. S. Kupitz. 关于平面上 n *Intuitive* 个点之间最小距离出现的最大次数。载于 *Geometry (Szeged, 1991)* 63 *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* 217 244 1994，第 卷，第 – 页。北荷兰出版社，。[12] G. Malen、E. Rold´an 和 R. Toal´a-Enr´ıquez. 极值 p,q{p, q}-动物。 *Ann. Comb.*, 27(1):169–209, 2023. [13] OEIS 基金会。在线整数数列百科全书，2025年。电子版发布于 http://oeis. org。[14] N. Oler. 数的几何中的一个不等式。 *Acta Math.*, 105:19–48, 1961. [15] J. Pach 和 G. T´oth. 硬币图的独立数。 *Geombinatorics*, 6:30–33, 1996. [16] C. A. Rogers. 二维凸域的最密堆积。 *Acta Math.*, 86:309–321, 1951. [17] E. Rold´an 和 R. Toal´a-Enr´ıquez. 双曲动物的等周公式。 *Preprint, arXiv:2206.14910*, 2024. [18] A. Sagdeev. 一般便士图的密度至多为 $43/18$。 *Combinatorics and Number Theory*, 14(1):75–89, 2025年1月。[19] E. Schmidt. ¨关于常负曲率 n维空间中的等周问题。I. 双曲平面中的等周不等式以及双曲 n维空间中旋转体的等周不等式。 *Math. Z.*, 46:204–230, 1940. [20] K. J. Swanepoel. 平面接触图的独立数。 *Discrete Comput. Geom.*, 28:649–670, 2002. [21] K. J. Swanepoel. 赋范空间中的组合距离几何。载于 *New trends in intuitive geometry*，第 27 卷，*Bolyai Soc. Math. Stud.*，第 407–458 页。J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，2018 年。[22] P. Taxel. 七阶三角剖分。https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-7_triangular_tiling.svg。维基百科。最后访问日期：2025年12月31日。[23] A. Thue. ¨关于平面上全等圆的最密排列 *Christiania Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturv. Klasse* 1 1 9, 1910 , : – .

[24] G. T´oth. 一般位置点集中的最短距离。 *Computational Geometry*, 8(1):33–38, 1997.

Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi vértanúk tere 1, H-6720 Szeged, Hungary
Email address: sagmeister.adam@gmail.com

Department of Mathematics, London School of Economics and Political Science, Houghton Street, Lon-don, WC2A 2AE, UK*Email address*: k.swanepoel@lse.ac.uk