arXiv:2512.24835v1 [math.DS] 31 Dec 2025

哈密顿系统周期解分岔的比较原理

Helene Cyris、Joanna Janczewska 和 Nils Waterstraat

摘要

我们利用谱流的比较原理，得到了哈密顿系统周期解局部分岔存在性的新判据。我们的方法只需简单考察系统的系数，即可发现新解的出现。

1 引言

设 $\mathcal{H}\colon I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 为一个 C^2-映射，其中 $I=[0,1]$ 表示单位区间，并假设 $\mathcal{H}(\lambda,\ t,\ u)$ 关于 t 是 2π-周期的，同时对于所有 $(\lambda,\ t)\in I\times\mathbb{R}$，$\nabla_u\mathcal{H}(\lambda,\ t,\ 0)=0$。我们考虑哈密顿系统

$$\begin{cases} Ju'(t)+\nabla_u\mathcal{H}(\lambda,t,u(t))=0, & t\in[0,2\pi] \\ u(0)=u(2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

其中 J 表示标准辛矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

并注意到，在给定假设下，对所有 $\lambda\in I$，$u\equiv 0$ 都是方程 (1) 的解。若在 $I\times C^1(S^1,\ \mathbb{R}^{2n})$ 中，$(\lambda_0,\ 0)$ 的每个邻域内都存在一个元素 $(\lambda,\ u)$，使得 $u\neq 0$ 是方程 (1) 的解，则称 $\lambda_0\in I$ 为方程 (1) 的分岔点。已有许多研究试图探讨此情形下分岔点的存在性（例如参见 [11], [9], [2] 及其中的参考文献）；本文则聚焦于一种基于谱流的方法，该方法由 [5]提出，并在 [6] 和 [10]中应用于方程 (1)。

谱流定义于希尔伯特空间上的任意一条自伴 Fredholm 算子路径 $L=\{L_\lambda\}_{\lambda\in I}$。粗略地说，当参数 λ 遍历区间 I时，它统计 L_0 的负特征值转为正值的净数量。特别地，谱流非零意味着对某个 $\lambda\in I$，L_0 有一个特征值穿过 0。谱流在分岔理论中的应用可以概述如下。设 H 为实希尔伯特空间，$f\colon I\times H\to\mathbb{R}\to C^2$为一个映射，使得 $0\in H$ 是所有 $f_\lambda\colon H\to\mathbb{R}$的临界点，即 $\nabla f_\lambda(0)=0,\ \lambda\in I$。如果在方程

$$\nabla f_\lambda(u)=0 \tag{3}$$

[1]**2020 数学主题分类：主要分类 37J20；次要分类 37J46、58J30**

在 $I \times H$ 中 (λ*,0) 的任意邻域内，都存在方程 (3) 的某个解 (λ, u)，满足 $u \neq 0$，则称 L_{λ^*} 为该方程的分岔点。 f_λ 在临界点 0 处的海森矩阵 L_λ 是 H上的自伴算子；若 λ^* 是方程 (3) 的分岔点，则 L_{λ^*} 必定不可逆。若进一步要求算子 L_λ为 Fredholm 算子，则路径 $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 的谱流有定义；其非平凡性表明，存在某个 $\lambda^* \in I$，使得当 λ 经过 λ*时， L_{λ^*} 有一个由特征值穿过 0 而产生的非平凡核。 [5] 的主要定理如下：

定理 1.1。 设 H 为实可分希尔伯特空间，且 $f\colon I \times H \to \mathbb{R}$ 为一个 C^2-映射，使得$0 \in H$ 是所有泛函 $f_\lambda\colon H \to \mathbb{R}$的临界点。设 f_λ 在0 处的海森矩阵 L_λ 均为 *Fredholm* 算子，并假设 L_0 和 L_1 可逆。若路径$L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$的谱流$(L) \neq 0 \in \mathbb{Z}$，则 *(3)* 在$(0, 1)$中存在一个分岔点。

请注意，如果 L_0 的莫尔斯指标有限，那么 L 的谱流恰好等于它们的莫尔斯指标之差。因此，当莫尔斯指标有限且从 L_0 变为 L_1 时，定理 1.1 给出了一个众所周知的分岔点存在性结论（参见 [3], [9]）。

自文献 [5] 以来，多位作者已将谱流用于研究具有无穷莫尔斯指标的各类微分方程的分岔问题。遗憾的是，谱流即使能够计算，通常也极难计算。Pejsachowicz 和第三位作者在 [10] 中提出了一种比较原理，可用于估计谱流；这种估计可能足以证明谱流不为零，从而使定理 1.1 得以应用（参见 [17]）。例如，仅根据哈密顿量 $\mathcal{H}$ 在 $0 \in \mathbb{R}^{2n}$处的海森矩阵族的特征值，该原理便可找到方程 (1) 的分岔点。下面我们将对此作一概述。设 $H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 为所有满足下述条件的函数 $u\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{2n}$ 构成的线性空间

$$u(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)), \tag{4}$$

其中 c_0， a_k， $b_k \in \mathbb{R}^{2n}$、 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $\sum_{k=1}^{\infty} k(|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty$ （参见 [1]）。
关于标量积，这是一个希尔伯特空间

$$\langle u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \langle c_0, \tilde{c}_0 \rangle + \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(\langle a_k, \tilde{a}_k \rangle + \langle b_k, \tilde{b}_k \rangle), \tag{5}$$

其中 $\tilde{c}_0$和 $\tilde{a}_k$， $\tilde{b}_k$是 $v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 的傅里叶系数，如-（4）所示。现在令

$$Q : H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \times H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}$$

为有界双线性型的连续延拓

$$\tilde{Q}(u, v) = \int_0^{2\pi} \langle Ju'(t), v(t) \rangle \, dt \tag{6}$$

从稠密子空间 $H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 到 $H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$，其中我们回顾一下， $H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 由所有绝对连续函数 $u\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{2n}$ 构成，这些函数具有平方可积导数。我们考虑映射

$$f : I \times H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}, \quad f_\lambda(u) = \frac{1}{2} Q(u, u) + \int_0^{2\pi} \mathcal{H}(\lambda, t, u(t)) \, dt. \tag{7}$$

众所周知（见 [11], [4]），若存在常数 a，$b \geq 0$ 和 $r > 1$ 使得 f 为 C^2，则

$$|\nabla_u \mathcal{H}(\lambda, t, u)| \leq a + b|u|^r,$$
$$|D_u \nabla_u \mathcal{H}(\lambda, t, u)| \leq a + b|u|^r, \quad (\lambda, t, u) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}.$$

此外,

$$\langle \nabla_u f_\lambda, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u, v) + \int_0^{2\pi} \langle \nabla_u \mathcal{H}(\lambda, t, u(t)), v(t) \rangle \, dt, \quad v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}),$$

因此，f_λ 的临界点就是哈密顿系统 (1) 的弱解。特别地，$u \equiv 0 \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 是 f_λ的临界点，其相应的海森矩阵为 ¯

$$\langle L_\lambda u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u, v) + \int_0^{2\pi} \langle A_\lambda(t) u(t), v(t) \rangle \, dt, \tag{8}$$

其中，$A_\lambda(t)$ 是泛函 $\mathcal{H}_\lambda(t, \cdot) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 在 0 处的海森矩阵。注意，L_λ 的核由线性方程的解构成

$$\begin{cases} Ju'(t) + A_\lambda(t)u(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases} \tag{9}$$

海森矩阵 L_λ 是 Fredholm算子（参见 [14, 引理 3.1], [16]），因此由定理 1.1 可知，如果对于 $\lambda = 0$,1，方程 (9) 只有平凡解，且 sf(L) $\neq 0$，那么 (1) 存在分岔点。正如前文所述，求出 sf(L) 的数值通常是一项颇具挑战的工作（参见 [6]），但估计其值便足以证明其非平凡性，从而使定理 1.1 得以应用。Pejsachowicz 与第三作者曾在一项合作研究 [10] 中采用以下方法完成了这一工作（参见 [8]）。

令 $\mu_1(\lambda, t) \leq \cdots \leq \mu_{2n}(\lambda, t)$ 为矩阵 $A_\lambda(t)$ 在 $\lambda \in I$, $t \in [0, 2\pi]$ 时的特征值，并设

$$\alpha_\lambda := \inf_{t \in [0, 2\pi]} \mu_1(\lambda, t) \tag{10}$$

以及

$$\beta_\lambda := \sup_{t \in [0, 2\pi]} \mu_{2n}(\lambda, t). \tag{11}$$

因此，α_λ 是矩阵族 $\{A_\lambda(t)\}_{t \in [0, 2\pi]}$ 的谱的下界，而 β_λ 是上界。

定理 1.2. 设 $\mathcal{H} : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 是上述哈密顿量族，并且 α_1, β_0 如 (10) 和 (11) 所示。假设对于 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$，(9) 只有平凡解。

(i) 若存在某个 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\beta_0 < k \leq \alpha_1$，则 (1) 存在一个分岔点。

(ii) 如果只有有限多个 $\lambda \in I$ 使得 (9) 存在非平凡解，那么 (1) 的分岔点数目大于或等于

$$(\beta_0, \alpha_1] \cap \mathbb{Z}.$$

注意，假设 $\beta_0 < k < \alpha_1$ 限制性很强，因为它要求矩阵族 $A_0(t)$、 $t \in [0, 2\pi]$ 的最大特征值严格小于 $A_1(t)$、$t \in [0, 2\pi]$ 的最小特征值。本文旨在沿着以下思路推广定理 1.2。特别地，若考虑对角矩阵 $C_0 = \mathrm{diag}(\beta_0, \dots, \beta_0)$ 和 $C_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_1)$，那么由假设 $\beta_0 < k < \alpha_1$ 可得矩阵不等式

$$A_0(t) \le C_0 \le kI_{2n} \le C_1 \le A_1(t), \quad \text{for all} \quad t \in [0, 2\pi], \tag{12}$$

其中 I_{2n} 表示单位矩阵， $\le$ 是所有对称矩阵集合上的通常洛温序（见下文 (16)）。我们工作的创新之处在于去掉 (12) 中的中间项 kI_{2n} ，并考虑一般的对称矩阵 $C_0 \le C_1$ ，它们对所有 $t \in [0, 2\pi]$仍满足下界 $A_0(t)$ 和上界 $A_1(t)$。在接下来的第二节中，我们陈述两个大大加强定理 1.2 的定理。第三节给出这些定理的证明，并简要综述谱流及其若干计算方法。

2 主要定理

今后令 $C_0, C_1 \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ 为两个对称矩阵，使得

$$A_0(t) \le C_0 \le C_1 \le A_1(t), \quad \text{for all} \quad t \in [0, 2\pi] \tag{13}$$

并将它们的特征值记为

$$\mu_1(C_0) \le \cdots \le \mu_{2n}(C_0) \quad \text{as well as} \quad \mu_1(C_1) \le \cdots \le \mu_{2n}(C_1).$$

请注意，从几何角度看，(13) 要求路径 $\{A_0(t)\}_{t\in[0,2\pi]}$ 和 $\{A_1(t)\}_{t\in[0,2\pi]}$ 在分别以 C_0 或 C_1为顶点的仿射凸锥中运行。
关于方程 (1) 存在分岔点的第一个定理如下。

定理 2.1。 设 $\mathcal{H}$： $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 是如上所述的一族哈密顿量，并假设(9) 对于 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$ 仅有平凡解。设 $C_0, C_1 \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ 是 (13) 中的两个对称矩阵。若存在某个 $1 \le i \le 2n$ 使得

$$\mu_i(C_0) < 0 \le \mu_i(C_1), \tag{14}$$

那么，方程 (1) 的平凡分支上存在周期解的分岔点。

注意，(14) 的意思是，矩阵 C_0 的莫尔斯指标 $\mu_-(C_0)$（即计重数的负特征值个数）与矩阵 C_1 的莫尔斯指标 $\mu_-(C_1)$不同。
需要强调的是，如果 $\mathrm{sf}(L) \neq 0$，则由定理 1.1 可知，方程 (1) 存在分岔点；其中路径 $L_- = \{L_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 是由希尔伯特空间$H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 中的算子 (8) 构成的。如果可以计算的话，这个谱流通常也很难计算。定理 2.1 表明，如果有两个矩阵 C_0, C_1 如 (13) 所示，那么分岔可由数值 $\mu_-(C_0) - \mu_-(C_1)$ 的非平凡性推出。实际上，后者就是有限维希尔伯特空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中对称矩阵的路径 $I \ni \lambda \mapsto (1-\lambda)C_0 + \lambda C_1 \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ 的谱流（见 [4, §1]）。因此，从某种程度上说，定理 2.1 将谱流 $\mathrm{sf}(L)$ 的计算化简到了有限维情形。

在第二个定理中，我们希望在附加假设 C_0 和 C_1 与 (2) 中的辛标准矩阵 J 交换的条件下，进一步加强定理 2.1。注意，Mat$(2n,\mathbb{R})$ 中的对称矩阵与 J 交换，当且仅当它具有如下形式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

对于某些 $A = A^T \in$ Mat$(n,\mathbb{R})$ 和 $B = -B^T \in$ Mat$(n,\mathbb{R})$。我们的第二个定理如下。

定理 2.2. 设 $\mathcal{H}\colon I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ 是如上所述的一族哈密顿量，并假设(9) 在 $\lambda = 0$ 和 $\lambda = 1$ 时仅有平凡解。设 $C_0, C_1 \in \mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R})$ 是如 (13) 所示的两个对称矩阵，并进一步假设 $[J, C_0] = [J, C_1] = 0$。

(i) 若存在某些 $i \in \{1, \dots, 2n\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\mu_i(C_0) < k \le \mu_i(C_1), \tag{15}$$

则对于(1)，从平凡分支分岔出周期解的分岔点。

(ii) 若仅有有限多个 $\lambda \in I$ 使得(9) 有非平凡解，则(1)的分岔点数至少为

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} |(\mu_i(C_0), \mu_i(C_1)] \cap \mathbb{Z}|}{2n},$$

其中 $|\cdot|$ 表示一个集合的基数。

注意，根据 (13) 和 (15)，$\mu_i(C_0) \le \mu_i(C_1)$，$1 \le i \le 2n$意味着存在一对特征值，它们相差一个整数。对于 $k = 0$，定理 2.2 (i) 是定理 2.1 的直接推论；但对于 $k \neq 0$，定理 2.2 中关于矩阵 C_0、C_1 的附加假设 $[J, C_0] = [J, C_1] = 0$ 对其证明至关重要。注意，后者对于 (12) 中的矩阵 $C_0 =$ diag$(\beta_0, \dots\dots, \beta_0)$ 和 $C_1 =$ diag$(\alpha_1, \dots\dots, \alpha_1)$ 尤其成立，因此定理 1.2 是定理 2.2 的直接推论。

3 定理 2.1 和定理 2.2 的证明

We 现在先回顾谱流的一些基础知识，并为证明做一个共同的准备步骤 s
Th定理 2.1 和定理 2.2。之后我们将在两个独立的小节中分别处理它们。

3.1 谱流的设定

设 C_0，$C_1 \in$ Mat$(2n,\ \mathbb{R})$ 是如式 (13) 所示的两个对称矩阵，即

$$A_0(t) \le C_0 \le C_1 \le A_1(t), \quad \text{for all} \quad t \in [0, 2\pi],$$

并设

$$C_\lambda := (1-\lambda)C_0 + \lambda C_1 \in \mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R}), \quad \lambda \in [0,1].$$

我们考虑由下式唯一确定的自伴算子同伦 $H = \{H_{(\lambda,s)}\}_{(\lambda,s)\in I\times I}$

$$\langle H_{(\lambda,s)}u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u,v) + \int_0^{2\pi} \langle((1-s)A_\lambda(t) + sC_\lambda)u(t), v(t)\rangle\, dt,$$

并注意到，根据例如 [16], [14, 引理 3.1]，每个 $H_{(\lambda,s)}$ 都是 Fredholm。因此，将 $H = \{H_{(\lambda,s)}\}_{(\lambda,s)\in I\times I}$ 的参数限制在矩形 $I \times I$ 的任一边上所得到的路径，其谱流均有定义，于是我们得到

$$\mathrm{sf}(H_{(\cdot,0)}) = \mathrm{sf}(H_{(0,\cdot)}) + \mathrm{sf}(H_{(\cdot,1)}) - \mathrm{sf}(H_{(1,\cdot)})$$

由于谱流是同伦不变的，对常值路径其值为零，并且沿路径反向遍历时符号会改变（参见例如 [13]）。谱流的另一个重要性质源自著名的偏序

$$A \le B :\Longleftrightarrow \langle (B-A)u, u\rangle \ge 0, \text{ for all } u \tag{16}$$

该偏序定义在希尔伯特空间上的自伴算子集合上。若自伴 Fredholm 算子的路径 $\{L_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 满足：当 $\lambda \le \mu$时， $L_\lambda \le L_\mu$/ $L_\mu \le L_\lambda$ ，则称其为递增/递减路径。在[10] 中证明了（参见 [8]），对于递增路径，$\mathrm{sf}(L) \ge 0$ ；对于递减路径，$\mathrm{sf}(L) \le 0$ 。由 (13) 可知，由.....构成的路径

$$\langle H_{(0,s)}u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u,v) + \int_0^{2\pi} \langle((1-s)A_0(t) + sC_0)u(t), v(t)\rangle\, dt, \quad s \in I,$$

是递增的，而由这些算子构成的

$$\langle H_{(1,s)}u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u,v) + \int_0^{2\pi} \langle((1-s)A_1(t) + sC_1)u(t), v(t)\rangle\, dt, \quad s \in I,$$

是递减的，因此我们得到

$$\mathrm{sf}(L) = \mathrm{sf}(H(\cdot,0)) = \mathrm{sf}(H_{(0,\cdot)}) + \mathrm{sf}(H_{(\cdot,1)}) - \mathrm{sf}(H_{(1,\cdot)}) \ge \mathrm{sf}(H_{(\cdot,1)}) \ge 0, \tag{17}$$

其中，后一个不等式再次由 (13) 得出。此后我们简记

$$M_\lambda := H_{(\lambda,1)}, \quad \lambda \in I,$$

并注意到

$$\langle M_\lambda u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = Q(u,v) + \int_0^{2\pi} \langle C_\lambda u(t), v(t)\rangle\, dt.$$

因此由（17）

$$\mathrm{sf}(L) \geq \mathrm{sf}(M) \tag{18}$$

并由定理 1.1 可知，当 sf(M) > 0 且 $M = \{M_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 时，(1) 存在一个分岔点。需要注意的是，定理 1.1 仅表明，在$I \times H^{\frac{1}{2}}(S^1,\ \mathbb{R}^{2n})$中，(1) 的弱解发生了分岔。众所周知，在给定假设下，(7) 中的泛函 f_λ 的临界点实际上是(1)的经典解，并且在 $C^1(S^1,\ \mathbb{R}^{2n})$ 中收敛于 0；详细证明可参见，例如， [11]或 [4, 定理 12.3。3]

在接下来的两节中，我们将证明，在定理 2.1 或定理 2.2 的假设下，sf(M) > 0；这里我们采用 Robbin 和 Salamon 在 [12] 中提出的一种计算谱流的通用方法。设 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$ 是希尔伯特空间上有界算子赋范空间中的一条连续可微路径，并进一步假设每个 $\mathcal{L}_\lambda$ 都是自伴 Fredholm 算子。若 ker($\mathcal{L}_{\lambda^*}$) $\neq \{0\}$，则称 $\lambda^* \in [a,b]$ 为 $\mathcal{L}$ 的交叉点。交叉 λ^* 的交叉型是定义在有限维空间 ker($\mathcal{L}_{\lambda^*}$) 上的二次型，定义如下:

$$\Gamma(\mathcal{L},\lambda^*)[u] = \langle \dot{\mathcal{L}}_{\lambda^*}u, u\rangle, \qquad u \in \ker(\mathcal{L}_{\lambda^*}),$$

其中 $\mathcal{L}_{\lambda^*}$ 表示路径 $\mathcal{L}$ 在 $\lambda = \lambda^*$ 处的导数。最后，若 Γ($\mathcal{L}$, λ^*) 非退化，则称交叉点为正则交叉点。该定理由 [12] 证明（另见 [15]）。

定理 3.1。 设 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$ 是如上所述的一条自伴 *Fredholm* 算子的连续可微路径。

(i) 若 $\mathcal{L}$仅有正则交叉，则交叉点只有有限个，且 $\mathcal{L}$ 的谱流由下式给出

$$\mathrm{sf}(\mathcal{L},[a,b]) = -m^-(\Gamma(\mathcal{L},a)) + \sum_{\lambda\in(a,b)} \mathrm{sgn}(\Gamma(\mathcal{L},\lambda)) + m^-(-\Gamma(\mathcal{L},b)), \tag{19}$$

其中， m^- 表示二次型的莫尔斯指标，而符号函数 表示其符号差。

(ii) 存在某个 $\varepsilon > 0$，使得对几乎所有 $\delta \in (-\varepsilon,\varepsilon)$，扰动路径 $\mathcal{L}^\delta = \{\mathcal{L}_\lambda + \delta I_H\}_{\lambda\in[a,b]}$ 仅有正则交叉。

最后，下面需要用到谱流的如下扰动不变性，例如可在 [7, 引理 2.1] 中找到。

定理 3.2。 对于每一条自伴 *Fredholm* 算子的路径 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\lambda\}_{\lambda\in[a,b]}$，都存在某个$\varepsilon > 0$，使得

$$\mathrm{sf}(\mathcal{L}) = \mathrm{sf}(\mathcal{L}^\delta),$$

对所有 $\delta \in [0,\varepsilon)$，其中 $\mathcal{L}^\delta = \{\mathcal{L}_\lambda + \delta I_H\}_{\lambda\in[a,b]}$。

现在，我们将在两个独立的章节中证明定理 2.1 和定理 2.2。下面简要介绍这两个证明的策略。根据定理 3.1 和定理 3.2，存在某个 $\varepsilon > 0$，使得对几乎所有的 $\delta \in [0,\varepsilon)$，路径 M^δ只有正则交叉点，且 sf(M^δ) =sf(M)。此外，sf(M^δ)由（19）给出，其中

$$\Gamma(M^\delta,\lambda^*)[u] = \Gamma(M,\lambda^*)[u] = \langle (C_1 - C_0)u, u\rangle_{H^{\frac{1}{2}}}, \quad u \in \ker(M^\delta).$$

由于根据假设 $C_1 \geq C_0$，由（5）可知 $\Gamma(M^\delta, \lambda^*)$ 是半正定的；此外，由于按照我们的 δ 选择，$\Gamma(M^\delta, \lambda^*)$ 是非退化的，因此它是正定的。于是，由（18）和（19）可得

$$\mathrm{sf}(L) \geq \mathrm{sf}(M) = \mathrm{sf}(M^\delta) = \sum_{\lambda \in (0,1]} \dim \ker(M^\delta_\lambda), \tag{20}$$

这最终表明 $\mathrm{sf}(L) \neq 0$，只要我们能找到某个 $\lambda \in (0,1]$，使得 $\ker(M^\delta_\lambda)$ 非平凡即可。需要强调的是，(20) 对几乎所有的 $\delta \in [0, \varepsilon)$ 以及某个 $\varepsilon > 0$ 都成立。

现在我们分别考察定理 2.1 和定理 2.2。下文除了在 $H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 上的标量积 (5) 外，还需要考虑标量积

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = 2\pi \langle c_0, \tilde{c}_0 \rangle + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k, \tilde{a}_k \rangle + \langle b_k, \tilde{b}_k \rangle \tag{21}$$

对于 $u, v \in L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$，如 (4) 所示。

3.2 定理 2.1 的证明

由 (14)，$\mu_i(C_0) < 0 \leq \mu_i(C_1)$，因此对于每个充分小的 $\delta > 0$，都存在某个 $\lambda^* \in (0,1)$，使得 $\mu_i(C_{\lambda^*}) = -\delta$。此外，我们可以假设 (20) 对这个 δ 成立。现在令 $u_0 \in \ker(C_{\lambda^*} + \delta I_{2n})$，其中 $I_{2n} \in \mathrm{Mat}(2n, \mathbb{R})$ 是单位矩阵，并令 $u \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 为常值函数 $u(t) \equiv u_0$。于是

$$\begin{aligned} \langle M^\delta_{\lambda^*} u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} &= Q(u, v) + \delta \langle u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{2\pi} \langle C_{\lambda^*} u(t), v(t) \rangle \, dt \\ &= \delta \langle u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} - \delta \int_0^{2\pi} \langle u(t), v(t) \rangle \, dt = 0, \quad v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}), \end{aligned}$$

其中，我们利用了根据 (6) 有 $Q(u, v) = 0$，并且对每个 $v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$，由 (5) 和 (21) 可得 $\langle u, v \rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = \langle u, v \rangle_{L^2}$，因为 u 是常数。因此 $u \in \ker M^\delta_{\lambda^*}$，这表明根据 (20) 有 $\mathrm{sf}(L) \geq 1$，从而由定理 1.1 可知，方程 (1) 存在周期解的分岔。定理 2.1 的证明至此完成。

3.3 定理 2.2 的证明

由于 (i) 可由 $k = 0$ 的定理 2.1 推出，以下不妨假设 $k \neq 0$。现在我们按照定理 2.1 的证明，注意到由 (15) 有 $\mu_i(C_0) < k \leq \mu_i(C_1)$，因此对每个充分小的 $\delta > 0$，存在某个 $\lambda^* \in (0, 1)$，使得 $\mu_i(C_{\lambda^*}) = k - \delta|k|$。此外，我们可以假设数 δ 满足 (20)。

令 $u_0 \in$ 核$(C_{\lambda^*} - (k - \delta|k|)I_{2n})$。根据假设，$[J, C_0] = [J, C_1] = 0$，因此 $[J, C_{\lambda^*}] = 0$。于是，$Ju_0 \in$ 核$(C_{\lambda^*} - (k - \delta|k|)I_{2n})$，现在我们考虑由下式给出的 $u \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$

$$u(t) = u_0 \cos(kt) + Ju_0 \sin(kt) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt), \tag{22}$$

其中 $a_{|k|} = u_0$、 $b_{|k|} =$ 符号函数$(k)Ju_0$，且对于 $j \neq |k|$， $a_j = b_j = 0$。那么 $C_{\lambda^*}u = (k - \delta|k|)u$，由 (5) 和 (21) 可得

$$\langle u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} = |k|\langle u, v\rangle_{L^2}, \quad v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}),$$

由 (6) 可得

$$Q(u, v) = -k\langle u, v\rangle_{L^2}, \quad v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}).$$

因此,

$$\begin{aligned}\langle M^{\delta}_{\lambda^*}u, v\rangle &= Q(u, v) + \delta\langle u, v\rangle_{H^{\frac{1}{2}}} + \langle C_{\lambda^*}u, v\rangle_{L^2}\\ &= -k\langle u, v\rangle_{L^2} + \delta|k|\langle u, v\rangle_{L^2} + \langle (k - \delta|k|)u, v\rangle_{L^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

对任意 $v \in H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$。因此 $u \in$ 核 $M^{\delta}_{\lambda^*}$，这再次表明，根据 (20)，$\mathrm{sf}(L) \geq 1$，从而由定理 1.1 可知，方程 (1) 存在周期解的分岔，这正如定理 2.2 的第 (i) 部分所述。

对于第 (ii) 部分，我们首先回顾 [10, Th. 2.1 (ii)], 中的以下结果，其中使用了定理 1.1 中的记号。

The理 3.3. 如果使 L_λ 不可逆的 $\lambda \in (0、1)$ 仅有有限个，那么 t
该族
至少 f

$$\frac{|\,\mathrm{sf}(L)|}{\max\{\dim\ker L_\lambda : \lambda \in (0, 1)\}}$$

个分岔点位于(0,1)内。

由于 $\ker L_\lambda$ 由方程 (9) 的解构成，我们可知

$$\max\{\dim\ker L_\lambda : \lambda \in (0, 1)\} \leq 2n,$$

因此，只需证明

$$\mathrm{sf}(L) \geq \sum_{i=1}^{2n} |(\mu_i(C_0), \mu_i(C_1)] \cap \mathbb{Z}|. \tag{23}$$

设 $\delta > 0$ 满足 (20)，其中 M^δ。此外，我们可以假设，只要 $k \in (\mu_i(C_0)\ \mu_i(C_1)] \cap \mathbb{Z}$ 对某个 $1 \leq i \leq 2n$ 成立，则 $k - \delta|k| \in (\mu_i(C_0)\ \mu_i(C_1)]$。我们用 $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ 表示

$$(\mu_1(C_0), \mu_1(C_1)] \cap \mathbb{Z}.$$

与定理第一部分的证明类似，对每个 k_i，存在某个 $\lambda^1_i \in (0,1)$，使得$\mu_1(C_{\lambda^1_i}) = k_i - \delta|k_i|$ 且

$$\dim\ker(M^{\delta}_{\lambda^1_i}) \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m.$$

由（20）可得

$$\mathrm{sf}(L) \geq |(\mu_1(C_0), \mu_1(C_1)] \cap \mathbb{Z}|.$$

现在令 $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$ 表示.....的元素

$$(\mu_2(C_0), \mu_2(C_1)] \cap \mathbb{Z}.$$

再次，对于每个 l_j，都存在某个 $\lambda_j^2 \in (0, 1)$，使得 $\mu_2(C_{\lambda_j^2}) = l_j - \delta|l_j|$。若 $\lambda_i^1 = \lambda_j^2$对某个 i, j成立，则有两种情况。首先，若 $\mu_1(C_{\lambda_i^1}) = \mu_2(C_{\lambda_i^1})$，则 $C_{\lambda_i^1}$关于特征值 $\mu_1(C_{\lambda_i^1})$ 的特征子空间维数至少为二。其次，若 $\mu_1(C_{\lambda_i^1}) < \mu_2(C_{\lambda_i^1})$，则相应的特征子空间交集仅含零向量。在这两种情况下，我们都能得到 $C_{\lambda_i^1}$ 的两个线性无关特征向量，它们在 (22) 中给出线性无关函数。因此，dim 核$(M_{\lambda_i^1}^{\delta}) \geq 2$，其中一个维度由考察 $(\mu_1(C_0)\ \mu_1(C_1)] \cap \mathbb{Z}$ 的元素得到，另一个维度则由 $(\mu_2(C_0)\ \mu_2(C_1)] \cap \mathbb{Z}$ 得到。

总之，在构造的前两个步骤之后，我们由（20）可知

$$\mathrm{sf}(L) \geq |(\mu_1(C_0), \mu_1(C_1)] \cap \mathbb{Z}| + |(\mu_2(C_0), \mu_2(C_1)] \cap \mathbb{Z}|.$$

If w我们继续这一过程，直到（μ_{2n}（C_0） μ_{2n}（C_1）$] \cap \mathbb{Z}$，最终得到（23），这表明 e sec定理 2.2 的第二部分。

参考文献

[1] A. Abbondandolo，《哈密顿系统的莫尔斯理论》，Chapman & Hall/CRC 数学研究笔记**425**

[2] T. Bartsch, A. Szulkin，《哈密顿系统：通过变分方法研究周期解与同宿解》，《微分方程手册：常微分方程》，第 II 卷，77–146，Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2005

[3] C. Conley，**孤立不变集与莫尔斯指标**，CBMS 数学区域会议系列 **38**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1978年

[4] N. Doll、H. Schulz-Baldes、N. Waterstraat，**谱流——一种泛函分析与指标理论方法**，De Gruyter 数学研究 **94**，De Gruyter，柏林，2023年

[5] P.M. Fitzpatrick、J. Pejsachowicz、L. Recht，**强不定泛函临界点的谱流与分岔——第一部分：一般理论**，《泛函分析杂志》**162**，1999年，52–95

[6] P.M. Fitzpatrick、J. Pejsachowicz、L. Recht，**强不定泛函临界点的谱流与分岔——第二部分：哈密顿系统周期轨道的分岔**，《微分方程杂志》**163**，2000年，18–40

[7] M.Izydorek、J.Janczewska、N.Waterstraat，**Maslov指标与谱流——再探**，《不动点理论及其应用》**5**，2019年

[8] J.Janczewska, M. Starostka, N.Waterstraat, **借助谱流比较理论研究哈密顿系统周期解的局部分岔与全局分岔**，《非线性分析拓扑方法》，已接受发表

[9] J. Mawhin, M. Willem, **临界点理论与哈密顿系统**, 《应用数学科学》**74**, Springer-Verlag，纽约，1989[10] J. Pejsachowicz, N. Waterstraat, **Fredholm型连续族的临界点分岔 C^2 泛函**, 《不动点理论与应用杂志》**13**，2013，537–560[11] P.H. Rabinowitz, **临界点理论中的极小极大方法及其在微分方程中的应用**，CBMS 数学区域会议系列**65**，1986[12] J. Robbin, D. Salamon, **谱流与Maslov指标**, 《伦敦数学学会通报》**27**，1995，1–33[13] M. Starostka, N. Waterstraat, **比较原理与谱流的唯一性**, 《数学通讯》**295**，785–805[14] N. Waterstraat, **周期哈密顿系统的族指标定理与分岔**, 《变分学与偏微分方程》**52**，2015，727–753[15] N. Waterstraat, **谱流、交叉型与哈密顿系统的同宿轨道**, 《伦敦数学学会会刊》(3)**111**，2015，275–304[16] N. Waterstraat, **Fredholm算子与谱流**, 《都灵理工大学数学研讨会报告》**75**，2017，7–51[17] N. Waterstraat, **强不定椭圆系统的一类谱流与分岔**, 《爱丁堡皇家学会会刊A辑》**148**，2018，1097–1113

Helene Cyris 哈雷-维滕贝格马丁·路德大学 自然科学学院II 数学研究所 06099 哈雷（萨勒） 德国
helene.cyris@mathematik.uni-halle.de

Nils Waterstraat 哈雷-维滕贝格马丁·路德大学 自然科学学院II 数学研究所 06099 哈雷（萨勒） 德国
n
ils.waterstraat
@mathematik.uni-halle.de

Joanna Janczewska 应用数学研究所 应用物理与数学学院 格但斯克理工大学 Narutowicza 11/12, 80-233 格但斯克，波兰 joanna.janczewska@pg.edu.pl