arXiv:2512.24850v1 [cs.DM] 31 Dec 2025

″ ´关于 Erdős–Lovász 问题：最小度为7的3-临界3-图

RUILIANG LI

Abstract. Erd″os 和 Lov´asz 曾提出这样一个问题：是否存在一种“3-临界”3-均匀超图，使得每个顶点的度至少为7？原始表述并未说明“3-临界”的含义，而文献及后续讨论中出现了两种并不等价的定义。本文在这两种解释下都解决了该问题。对于横截集解释（相对于横截数的临界性），我们证明，若一个3-均匀超图H满足 $\tau(H) = 3$，且对每条超边 e 都有 $\tau(H - e) = 2$，那么它至多有 10 条边；特别地， $\delta(H) \leq 6$，且这一上界是紧的，完全3-图 $K_5^{(3)}$ 即为见证。对于色数解释（相对于弱顶点染色的临界性），我们给出一个具有9个顶点的显式3-均匀超图，其中 $\chi(H) = 3$，最小度为 $\delta(H) = 7$；删除任意一条超边或任意一个顶点后，它都可以进行2-着色。该例的临界性由附录中列出的显式见证二染色以及一段简短的验证脚本予以证明。

1. Introduction

超图 $H = (V, E)$ 的（弱）顶点染色，是指为顶点分配颜色，使得没有超边是单色的。这是图染色的标准推广，与极值集合论中的经典问题（例如性质B）以及概率组合学密切相关。在关于3-色超图的开创性论文中，Erd″os 和 Lov´asz [1]研究了不可2-可着色均匀超图的结构与极值性质，并提出了若干问题，这些问题至今仍在该领域引起广泛关注。其中有一个局部问题如下：

是否存在一个3-临界3-均匀超图，使得每个顶点的度至少为7？

在图的情形下， k临界性没有歧义，并且会强制产生严格的度约束；特别地，每个 k临界图的最小度至少为$k - 1$。对于超图而言，文献中并存着几种相互竞争的“临界”概念，因此，对 Erd″os–Lov´asz 问题的正确理解并不

Date：2025年12月19日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C65, 05C15, 05C35。*Key words and phrases.* 3-均匀超图、临界超图、性质B、超图染色、横截数、最小度。

因此显而易见。一种用法（在极值集合论中很常见）是用击中集来表述的：如果一个超图的横截数恰好为 t ，但删除任意一条超边都会使横截数降低，则称其为“临界”。另一种用法（更接近图染色）是色临界性：如果一个超图的色数为 k ，但每个真子超图都可以进行（$k-1$）-染色，则称其为 k临界。两种概念都出现在标准参考文献中，当代问题汇编也明确指出了这种歧义；例如参见 [2]。由于 Erd˝os 和 Lov´asz 是在一篇围绕色数现象展开的论文中提出这一问题的，因此，色数解释或许是最自然的；不过，横截数解释的使用也十分广泛，同样值得进行权威而全面的处理。

本文旨在从两种解释出发，解决 Erd˝os–Lov´asz 提出的问题。我们采用第2节引入的术语，并在此陈述主要结果。

定理1.1 （横截集解释）。 设 H 是一个3-均匀超图，且为 τ阶为 3 的临界，即 $\tau(H) = 3$ 且 $\tau(H-e) = 2$ 对每个 $e \in E(H)$ 都成立。那么 $|E(H)| \le 10$ ，因此 $\delta(H) \le 6$。此外，等号 $\delta(H) = 6$ 在完全3-图 $K_5^{(3)}$ 上取到。

定理 1.2 （色数解释）。 存在一个3-均匀超图 H ，它是临界 3-色 （采用弱着色），并且满足$\delta(H) \ge 7$。事实上，存在这样一个 H ，其顶点数为9 ，且满足 $\delta(H) = 7$。

定理 1.1 表明，横截数解释对最小度要求给出了尖锐的否定答案。相比之下，定理 1.2 在色数解释下给出了尖锐的肯定答案（如 Erd˝os Problems 网站 [2]所述）。我们的例子对于不可2-着色性（性质B）同时是边极小和顶点极小的，并且我们在附录 B 中提供了明确的证书；附录 C 中还附有一个简短的蛮力验证脚本。

2. Terminology and basic notions

2.1. 超图、均匀性与度。 A超图 H 是一个二元组$H = (V(H)\ E(H))$，其中 $V(H)$ 是一个有限的顶点集， $E(H)$ 是 $V(H)$ 的一个子集族，称为超边。我们总是假设 H 是简单的（没有重复的超边），且不含空超边。若对于所有 $e \in E(H)$， $|e| = r$ 均成立，则超图 H 是 r-均匀的。特别地，3-均匀超图通常称为 3- 图。

对于顶点 $v \in V(H)$，度 $d_H(v)$ 是包含v的边数：

$$d_H(v) := \big|\{e \in E(H) : v \in e\}\big|.$$

最小度 为 $\delta(H) := \min_{v \in V(H)} d_H(v)$。

若 $e \in E(H)$，我们记作

$$H - e := \big(V(H),\, E(H) \setminus \{e\}\big).$$

若 $v \in V(H)$，则 $H - v$ 表示删除 v 及其所有关联边后得到的导出子超图：

$$H - v := H\big[V(H) \setminus \{v\}\big].$$

讨论顶点临界性时，我们可以忽略孤立顶点，因为它们对弱可着色性没有影响，却会妨碍顶点极小性；这符合临界性理论中的标准惯例。[10]

2.2. **弱着色、性质B和色数临界性**。 A*(*顶点*)* k<style id='6}-着色 超图 H 是一个映射 $\varphi\colon V(H) \to [k] := \{1, 2, \dots, k\}$。若没有超边是单色的，我们称这种着色为正常 （或弱正常），即。

$$\forall e \in E(H) \qquad \big|\varphi(e)\big| \geq 2.$$

这是集合系和性质B文献中超图着色的标准概念；例如参见 [3, 4, 12]。它不同于强着色（或彩虹着色），后者要求每条超边中的所有顶点都获得不同的颜色；强着色有其自身的临界性理论和度问题（例如参见 [10]）。

超图的色数 $\chi(H)$ 是满足以下条件的最小值： k H 可以进行适当的 k-着色。若超图是 2-可着色的，则 $\chi(H) \leq 2$。按照 Erd˝os–Hajnal 及其后继者沿用的经典术语，2-可着色等价于性质*B*。[12]

超图的临界性有若干种变体（边极小、顶点极小，或两者兼具）；参见 Toft 的奠基性论文及后续研究，还有相关综述。[8, 9, 11] 本文采用以下定义，它与 [2] 中明确记载的色数解释一致。

定义 2.1 （临界 3-色（弱））。 超图 H 称为临界3-色，如果

$$\begin{aligned} \chi(H) &= 3, \\ \chi(H - e) &\leq 2 \quad \text{for every } e \in E(H), \\ \chi(H - v) &\leq 2 \quad \text{for every } v \in V(H). \end{aligned} \tag{1}$$

等价地， H 不是 2-可着色的，但删除任意一条超边或任意一个顶点后，就变为 2-可着色。

条件 (1) 严格强于常用的边临界条件（它仅要求对所有 e， $\chi(H - e) \leq 2$ ），也强于顶点临界条件（它仅要求对所有 v， $\chi(H - v) \leq 2$ ）。这类区别在图论中早已是标准概念，在超图领域也同样存在。[10, 8]

在 $k = 3$ 的情形下，边临界性有一个便利之处，即它可以通过显式的2-着色，以简短且可检验证书的形式加以证明。

引理 2.2（边删除证书）。设 H 是一个具有 $\chi(H) \geq 3$的超图，并设 $e \in E(H)$。则 $\chi(H-e) \leq 2$ 当且仅当存在一个2-着色 $\varphi: V(H) \to \{1,2\}$，使得 e 是 φ 下唯一的单色边。

证明。如果 $\chi(H-e) \leq 2$，固定一个 φ 的正常2-着色。对于 $V(H)$ 的相同着色，H 的每条超边（除 e 外）都不是单色的。如果 e 也不是单色的，那么 φ 将是 H的一个正常2-着色，这与 $\chi(H) \geq 3$ 矛盾。因此，e 必定是单色的，并且它是唯一的单色边。

反之，如果存在一个 2-着色 φ，使得 e 是唯一的单色边，那么在 φ 下，$H-e$ 的每条超边都不是单色的，因此 $\chi(H-e) \leq 2$。□

特别地，对于一个临界3-色超图，可以通过展示：对于每个 $e \in E(H)$，都有一个以 e 为唯一单色边的 2-着色，来证明其边极小性。类似地，可以通过为每个 $v \in V(H)$ 提供 $H-v$的一个正常2-着色，来证明其顶点极小性。

2.3. 横截集与 τ阶为 3 的临界性。超图 H 的一个横截集（或击中集）是一个子集 $T \subseteq V(H)$，满足 $T \cap e \neq \emptyset$ 对所有$e \in E(H)$。横截集的最小大小称为横截数（或覆盖数） $\tau(H)$。[3]

定义 2.3（τ阶为 3 的临界）。若一个 3-均匀超图 H满足以下条件，则称其为 τ阶为 3 的临界超图：

$$\tau(H) = 3 \quad \text{and} \quad \tau(H-e) \leq 2 \ \text{ for every } e \in E(H).$$

这与 [2] 中明确引用的“某个点对击中除 e 以外的所有边”这一表述一致；我们将其称为横截意义上的 3-临界。参数 $\chi(H)$ 和 $\tau(H)$ 描述超图的不同方面，并由此引出实质上不同的临界性理论。例如，三个 3-边的不交并具有 $\tau = 3$，但它是 2-可着色的（因此 $\chi = 2$），所以 $\tau(H) = 3$并不能保证 3-色性。反过来，临界 3-色 3-图的横截数可能远大于 3。因此，在下文中，我们将分别讨论色性和横截解释，并避免在未指明具体含义的情况下使用“3-临界”一词。

3. The transversal interpretation: a sharp bound and the impossibility of $\delta \geq 7$

我们首先讨论第2节中的横截数解释。在这一框架下，Erd˝os–Lov´asz 问题有一个简洁且本质上是有限的答案：一个阶为 3 的 τ-临界 3-图至多有 10 条边，因此其最小度不可能至少为 7。主要工具是 Bollob´as,[5] 的经典集合对不等式；它已成为极值集合论中的标准工具；另见 Katona 的简短介绍。[6] 为完整起见，我们给出一个自足的证明。

3.1. Bollob´as 的集合对不等式。 设 X 为一个有限集。集对系统 是由子集对组成的一个族

$$\mathcal{P} = \{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{m}, \qquad A_i, B_i \subseteq X.$$

引理 3.1 (Bollob´集合对不等式)。 设 $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{m}$ 是有限集对，满足

$$A_i \cap B_i = \emptyset \quad \textit{for all } i, \qquad \textit{and} \qquad A_i \cap B_j \neq \emptyset \quad \textit{for all } i \neq j. \tag{2}$$

Then

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} \leq 1. \tag{3}$$

证明。 设 Y 为所有至少出现在集合 A_i 或 B_i之一中的元素的并集。固定 Y的一个均匀随机排列 π 。对每个 i，定义事件

$$\mathcal{E}_i = \{\text{in } \pi, \text{ every element of } A_i \text{ appears before every element of } B_i\}.$$

我们断言事件 $\mathcal{E}_1$、.....、$\mathcal{E}_m$ 两两不相交。事实上，假设 $\mathcal{E}_i$ 和 $\mathcal{E}_j$ 都与 $i \neq j$同时发生。由 (2) 可知，存在 $x \in A_i \cap B_j$。由于 $\mathcal{E}_i$成立，元素 $x \in A_i$ 必须先于 B_i 中的所有元素出现。由于 $\mathcal{E}_j$ 成立且 $x \in B_j$， A_j 中的每个元素都必须先于 x 出现。再由 (2)，取 $y \in A_j \cap B_i$。于是 $y \in A_j$ 意味着 y 先于 x 出现，而 $y \in B_i$意味着 x 先于 y 出现（因为在 $\mathcal{E}_i$ 下， A_i 中的所有元素都先于 B_i中的所有元素），矛盾。因此，对 $i \neq j$，有 $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ 。

因此

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\mathcal{E}_i) \leq 1.$$

剩下的工作是计算 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$。在将 π 限制到 $A_i \cup B_i$后，所有相对次序出现的概率都相同。等价地， A_i 中的元素在 $|A_i| + |B_i|$ 个位置中所占的位置，是一个均匀随机的 $|A_i|$-子集。事件 $\mathcal{E}_i$ 发生当且仅当 A_i 占据$A_i \cup B_i$中最前面的 $|A_i|$ 个位置，其概率为

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_i) = \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1}.$$

对 i 求和得到 (3)。 □

3.2. **τ-临界3-图的边数上界。**

定理 3.2. 设 H 是一个 τ-临界、阶为3的3-均匀超图。则 $|E(H)| \leq 10$。

证明。 固定一条边 $e \in E(H)$。由 $\tau(H - e) \leq 2$，存在一个集合 $B_e \subseteq V(H)$，其中 $|B_e| \leq 2$ 与 $H - e$的每条边都有交。我们首先注意到事实上$|B_e| = 2$。的确，如果 $|B_e| = 1$，设为 $B_e = \{x\}$，那么 x 与$H - e$的每条边都有交。如果 $x \in e$，那么 $\{x\}$ 与 H的每条边都有交，并且 $\tau(H) = 1$，这与$\tau(H) = 3$矛盾。如果 $x \notin e$，那么对于任意 $y \in e$，二元集 $\{x, y\}$ 与每条边都有交

H （顶点 x 与除可能的 e之外的所有边都有交，而 y 与 e有交），从而$\tau(H) \le 2$, 再次产生矛盾。因此 $|B_e| = 2$。

接下来我们断言

$$B_e \cap e = \emptyset. \tag{4}$$

否则，根据定义， B_e 与 $H - e$ 的每条超边都相交，而且它也与 e相交。因此, B_e 将是 H 的一个大小为 2 的横截集，这与 $\tau(H) = 3$矛盾。所以 (4) 成立。

现在，对每条超边 $e \in E(H)$，定义

$$A_e := e, \qquad B_e \text{ as above.}$$

由 (4) 可知， $A_e \cap B_e = \emptyset$ 。此外，若 $f \in E(H)$是另一条超边（$f \neq e$），则 f是 $H - e$ 的一条超边，因此它必与 B_e相交，即 $A_f \cap B_e = f \cap B_e \neq \emptyset$。于是，点对族 $\{(A_e,\ B_e)\}_{e\in E(H)}$ 满足 (2)。

应用引理 3.1，并对所有 e利用 $|A_e| = 3$ 和 $|B_e| = 2$ ，可得

$$|E(H)| \cdot \binom{3+2}{3}^{-1} \le 1,$$

因此 $|E(H)| \le \binom{5}{3} = 10$。 □

注 3.3。同样的论证给出一般模式：对于一个 r一致超图，若 $\tau(H) = t$且对所有 e都有 $\tau(H - e) \le t - 1$，则可得$|E(H)| \le \binom{r+t-1}{r}$。在我们的情形（$r,\ t$）中， $=(3,$ 3)，这给出 10。Tuza 的工作中也出现了集合对方法在这一背景下的相关应用。[7]

3.3. 一个精确的最小度推论。

推论 3.4. 若 H 是一个阶为 3 的3-一致超图，且是 τ-临界的，则 $\delta(H) \le 6$。特别地，不存在满足 $\delta(H) \ge 7$ 的此类 H 。

证明。 由定理 3.2， $|E(H)| \le 10$。由于 H 是 3-一致的，度数之和满足

$$\sum_{v\in V(H)} d_H(v) = 3|E(H)| \le 30.$$

另一方面， $\tau(H) = 3$ 迫使 $|V(H)| \ge 5$。事实上，若 $|V(H)| \le 4$，则 $V(H)$ 的每个二元子集都与每个 3 元子集相交，因此，任何至多有 4 个顶点的 3-均匀超图都具有 $\tau \le 2$，这与 $\tau(H) = 3$ 矛盾。因此,

$$\frac{1}{|V(H)|} \sum_{v\in V(H)} d_H(v) \le \frac{30}{5} = 6.$$

由于 $\delta(H)$ 至多为平均度，我们得到 $\delta(H) \le 6$。 □

3.4. 尖锐性：极值例子。 令 $K_5^{(3)}$ 表示以五个顶点构成的完全3-一致超图。它有 10 条边，且是 6-正则的。

命题 3.5. 超图 $K_5^{(3)}$ 是 τ-临界的，阶为3 ，并满足$\delta(K_5^{(3)}) = 6$。

证明。 首先， $\tau(K_5^{(3)}) = 3$ ，因为 $[5]$ 的任何二元子集都不是横截集：给定互不相同的 $x, y \in [5]$，补3-集 $[5] \setminus \{x, y\}$ 是一条与 $\{x, y\}$不相交的超边。另一方面， $[5]$ 的任意3元子集都与每个3元子集相交，因此$\tau \leq 3$ ，从而 $\tau = 3$。

现在固定一条超边 $e \in \binom{[5]}{3}$，并令 $\{u, v\} = [5] \setminus e$ 为其补集中的点对。于是 $\{u, v\}$ 与 $[5]$ 的每个3元子集都相交，唯一例外是 e （因为任何其他3元子集都必须包含 u 或 v 中至少一个），所以 $\tau(K_5^{(3)} - e) \leq 2$。与定理 3.2 的证明一样， $\tau(K_5^{(3)} - e)$ 不可能为 1，因此 $\tau(K_5^{(3)} - e) = 2$。由此，$K_5^{(3)}$ 是阶为 3 的 τ-临界。最后， $\delta(K_5^{(3)}) = \binom{4}{2} = 6$ 显然成立。□

推论 3.4 表明，在“3-临界”的横截数解释下，最小度要求 $\delta \geq 7$ 不可能满足。因此，Erd˝os–Lov´asz 问题的任何肯定解答都必须基于色数解释，下面我们将讨论这一解释。

4. The chromatic interpretation: a critically 3-chromatic 3-graph with $\delta = 7$

现在我们转向第2节中的色数解释。用性质B的语言来说，我们要寻找一个3-均匀超图，使其在删去任意超边或顶点后均为极小的非2-可着色超图，同时所有顶点的度都至少为7。自Toft等人的研究以来，色临界超图一直受到关注，[8, 9, 11] 但“3-均匀 +弱着色 + 最小度约束 +超边临界性与顶点临界性”这一特定组合似乎尚未被一般性的结构结果所涵盖。因此，我们给出一个紧凑的显式例子。

4.1. **构造**。

定理4.1. 存在一个临界3色3均匀超图H ，其 $\delta(H) \geq 7$。事实上，下文定义的3图 H 包含9 个顶点，并满足$\delta(H) = 7$。

证明。 令 H 为顶点集为

$$V(H) = [9] := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

且边集为

$$\begin{aligned} E(H) = \{&\{1,2,3\}, \{1,2,9\}, \{1,3,8\}, \{1,4,6\}, \{1,4,8\}, \{1,4,9\},\\ &\{1,5,7\}, \{1,5,8\}, \{1,5,9\}, \{1,6,7\}, \{2,3,6\}, \{2,3,7\},\\ &\{2,4,9\}, \{2,5,9\}, \{2,6,7\}, \{3,4,8\}, \{3,5,8\}, \{3,6,7\},\\ &\{4,6,8\}, \{4,6,9\}, \{5,7,8\}, \{5,7,9\}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

为便于后文引用，(5) 中的前十条边恰好是与顶点 1 关联的边，而其余十二条边完全位于 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中。附录 A 以机器可读格式重述了 (5)。

我们将通过证明引理 4.2–4.4 和命题 4.5–4.6，说明 H 是临界 3-色的，且最小度为 7。□

4.2. **度数计算**。

引理 4.2。 在 (5) 中定义的超图 H 对每个 $v \in \{2,\dots,9\}$ 都满足 $d_H(1) = 10$ 和$d_H(v) = 7$。特别地， $\delta(H) = 7$。

证明。 由 (5) 可知，顶点 1 属于第一行列出的十条边，因此$d_H(1) = 10$。对于 $v \in \{2,\dots,9\}$，直接根据 (5) 计数可知，恰有七条边包含 v。例如，

$$d_H(2) = |\{123, 129, 236, 237, 249, 259, 267\}| = 7,$$

其余情况类似。因此 $\delta(H) = 7$。 □

4.3. H **不是 2-着色**。 接下来，我们给出一个完整的证明，说明 H没有正常 2-着色（即不满足性质B），从而 $\chi(H) \geq 3$。该证明旨在让读者能够直接根据 (5) 进行核查；它利用了经过顶点 1 的边与 $\{2,\dots,9\}$ 上的“核心”之间的分离性。

引理 4.3。 由(5)定义的3-图 H 不是 *2*-着色。

证明。 反设 $\varphi\colon V(H) \to \{0,1\}$ 是 H 的正常2-着色（没有单色边）。必要时交换颜色，不妨假设

$$\varphi(1) = 0. \tag{6}$$

Let

$$Z := \{v \in \{2,\dots,9\} : \varphi(v) = 0\},$$
$$B := \{v \in \{2,\dots,9\} : \varphi(v) = 1\} = \{2,\dots,9\} \setminus Z.$$

步骤 *1*： $|Z| \leq 3$. 考虑顶点集为 $\{2,\dots,9\}$ 的图 G，其中 $\{x,y\}$是 G 的一条超边，当且仅当 $\{1,x,y\}$ 是 H的一条超边。由（5）的第一行可得

$$\begin{aligned} E(G) = \{&\{2,3\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,6\},\{4,8\},\\ &\{4,9\},\{5,7\},\{5,8\},\{5,9\},\{6,7\}\}. \end{aligned} \tag{7}$$

由（6）可知，对于每条超边 $\{1,x,y\} \in E(H)$，不可能有 $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$，否则 $\{1,x,y\}$ 将是单色的 0。等价地， Z 是 G的一个独立集。

我们断言 $\alpha(G) = 3$，因此 $|Z| \leq 3$。事实上，若 $8 \in Z$，则由 (7) 可得 3，4，$5 \notin Z$，所以 $Z \subseteq \{2,6,7,8,9\}$（其中 8 固定）。在 $\{2,6,7,9\}$ 中，边 $\{2,9\}$ 和 $\{6,7\}$ 也再次出现在 (7) 中，因此我们至多可以再选两个顶点；于是 $|Z| \leq 3$。若 $9 \in Z$，同样的论证也适用。若 8 和 9 都不属于 Z，则 $Z \subseteq \{2,3,4,5,6,7\}$。由 (7)， $\{4,5,6,7\}$ 上的导出子图是路径 4–6–7–5，因此其独立数为 2，而剩下的边 $\{2,3\}$ 至多再贡献一个顶点；故仍有 $|Z| \leq 3$。这就证明了该断言，因此

$$|B| = 8 - |Z| \geq 5. \tag{8}$$

步骤*2*：$\{2,\dots,9\}$ 的每个 5 元子集都包含 H 中一条不经过顶点 1 的边。令 $H_0 := H[\{2,\dots,9\}]$。其边集由 (5) 中最后十二条边组成：

$$\begin{aligned} E(H_0) = \{&\{2,3,6\},\{2,3,7\},\{2,4,9\},\{2,5,9\},\{2,6,7\},\\ &\{3,4,8\},\{3,5,8\},\{3,6,7\},\{4,6,8\},\{4,6,9\},\\ &\{5,7,8\},\{5,7,9\}\}. \end{aligned} \tag{9}$$

我们断言，H_0没有大小为5的独立集。令 $S \subseteq \{2,\dots,9\}$ 与$|S| = 5$；我们证明 S包含一个来自(9)的超边。设 $A := \{2,3,6,7\}$。A 的每个3元子集都是 H_0的超边，即

$$\binom{A}{3} = \big\{\{2,3,6\},\{2,3,7\},\{2,6,7\},\{3,6,7\}\big\} \subseteq E(H_0).$$

我们根据 $S \cap \{8,9\}$区分情况。

情况*1*：$S \cap \{8,9\} = \emptyset$。于是 $S \subseteq A \cup \{4,5\}$，并且由于 $|S| = 5$，我们有$|S \cap A| \geq 3$。因此，S 包含 A的一个3元子集，从而包含 H_0的一条超边。

情况*2*：$|S \cap \{8,9\}| = 1$。由对称性，不妨设 $8 \in S$ 和 $9 \notin S$。如果 $|S \cap A| \geq 3$，则结论成立，因此设 $|S \cap A| \leq 2$。于是 $S \setminus \{8\} \subseteq A \cup \{4,5\}$ 的大小为4，而 A 中至多有两个顶点迫使 $\{4,5\} \subseteq S$。因此$\{4,5,8\} \subseteq S$，且 S 恰好包含 A中的两个顶点。然而，包含8的 H_0 的超边为

$$\{3,4,8\},\ \{3,5,8\},\ \{4,6,8\},\ \{5,7,8\}.$$

由于 4，$5 \in S$，避开一条超边会迫使 3，6，$7 \notin S$，因此 $S \cap A \subseteq \{2\}$，这与 S 包含来自 A的两个顶点相矛盾。因此，S 必然包含 H_0的一条超边。$9 \in S$ 和 $8 \notin S$ 的情况类似（使用超边$\{2,4,9\}$，$\{2,5,9\}$，$\{4,6,9\}$，$\{5,7,9\}$）。

情况*3*：$S \cap \{8,9\} = \{8,9\}$。令 $T := S \setminus \{8,9\}$，于是 $|T| = 3$和 $T \subseteq A \cup \{4,5\}$。如果 $T \subseteq A$，那么 T 是 A 的一个 3元子集，因而是 H_0的一条超边。因此假设 T包含 4 或 5。

如果 $4 \in T$ 和 S 不含边，那么 T 不能包含 2（否则 $\{2,4,9\} \subseteq S$），不能包含 3（否则 $\{3,4,8\} \subseteq S$），也不能包含 6（否则 $\{4,6,8\} \subseteq S$ 或 $\{4,6,9\} \subseteq S$）。因此 $T = \{4,5,7\}$，这就得到 $\{5,7,8\} \subseteq S$，即 H_0 的一条边。类似地，如果 $5 \in T$，那么为避免出现边，我们必须有 $T = \{4,5,6\}$，这就得到 $\{4,6,8\} \subseteq S$，同样是一条边。因此，在这种情况下，S 也包含 H_0 的一条边。

这证明了 $\{2,\dots,9\}$ 的每个 5-元子集都包含 H_0 的一条边。

步骤*3*：结论。由 (8) 可知，集合 B 的大小至少为 5，因此根据步骤2，B 包含 H_0 的一条超边。但按定义，B 中的所有顶点都具有颜色 1，因此该超边是单色 1 的，这与 φ 是正常2-着色矛盾。□

4.4. H **可进行3-着色**。

引理 4.4。超图 H 存在一个正常的 3着色。因此 $\chi(H) =3$。

证明。 定义 $\psi\colon\ V(H) \to \{1,2,3\}$ 如下

$$\psi(1) = \psi(2) = \psi(4) = \psi(5) = 1,$$
$$\psi(3) = \psi(6) = \psi(8) = \psi(9) = 2,$$
$$\psi(7) = 3.$$

由（5）可直接验证，在 ψ 下没有边是单色的。根据引理 4.3， H 不可 2-可着色，因此 $\chi(H) = 3$。□

4.5. **边临界性**。

命题 4.5。 对于每条边 $e \in E(H)$，都有 $\chi(H - e) \leq 2$。

证明。 根据引理 2.2，只需对每个 $e \in E(H)$ 构造 $V(H)$ 的一种 2-着色，使得其中 e 是唯一的单色边。这些证书已明确列于附录 B（表 1）中。□

4.6. **顶点临界性**。

命题 4.6。 对于每个顶点 $v \in V（H）$，我们有 $\chi（H - v） \leq 2$。

证明。 对于每个 $v \in V(H)$，附录 B（表 2）列出了 $H - v$ 的一个明确的正常 2-着色。□

定理 *1.2* 的证明。 令 H 为式 (5) 中定义的超图。由引理 4.3 和 4.4，我们有 $\chi(H) = 3$。由命题 4.5 和 4.6，删除任意一条边或任意一个顶点都会使 H 2 可着色。因此，根据定义 2.1 的定义， H 是临界 3-色的。最后，引理 4.2 给出 $\delta(H) = 7$。□

5. Concluding remarks and reproducibility

关于“3-临界”3-均匀超图最小度为 7 的 Erd˝os–Lov´asz 问题，自然地分为两种并不等价的解释；这两种解释都见于文献中，并在现代讨论中得到明确强调。[2]在横截意义下，第 3 节表明该问题有一个尖锐的否定答案：一个阶为 3 的 τ-临界 3-图至多有 10 条边，因此满足 $\delta \leq 6$，且 $K_5^{(3)}$ 达到等号。在色数意义下，第 4 节通过展示一个具有 9个顶点且最小度为 7 的明确临界 3-色 3-图，给出了尖锐的肯定答案。

最后，我们说明该色数临界构造的可复现性。附录 A 以数学形式和机器可读形式给出了 H 的边集。附录 B 列出了每次删边和删顶点后对应的明确 2-着色证书，这些证书构成了命题 4.5 和 4.6 的完整有限证明。附录 C 包含一段简短的 Python 3 脚本（仅使用标准库），通过蛮力法穷举所有 2^9 种可能的 2-着色，全面检查关于 H 的所有断言，并验证附录 B 中列出的每份证书。这项计算在逻辑上并非必需，但能进一步防范转录错误，也使该例便于在后续工作中直接复用。

Appendix A. The edge set of H

为方便起见，我们以适合直接输入验证脚本的机器可读格式，重列式（5）中的边集 $E(H)$。

机器可读的边列表。

```
1 2 3
1 2 9
1 3 8
1 4 6
1 4 8
1 4 9
1 5 7
1 5 8
1 5 9
1 6 7
2 3 6
2 3 7
2 4 9
2 5 9
2 6 7
3 4 8
3 5 8
3 6 7
4 6 8
4 6 9
5 7 8
5 7 9
```

Appendix B. Certificates for edge- and vertex-criticality

我们用其蓝色顶点集表示一个 2-着色 $\varphi\colon V(H) \to \{0,1\}$

$$B(\varphi) := \{v \in V(H) : \varphi(v) = 1\}.$$

不属于 $B(\varphi)$ 的顶点被染为 0（红色）。

B.1. 边删除证书。 对于每条超边 $e \in E(H)$，表 1 列出了一个蓝色顶点集 $B(\varphi)$，使得 e 是在相应着色 φ下 H 的唯一单色边。根据引理 2.2，这证明了对于每个 e，$\chi(H-e) \le 2$。

表 1：边删除证书：$B(\varphi)$使 e 成为唯一的单色边。

超边 e	蓝色顶点 $B(\varphi)$
$\{1,2,3\}$	$\{6,7,8,9\}$
$\{1,2,9\}$	$\{3,4,5,6\}$

下页继续

删除的顶点 v	$H-v$中的蓝色顶点 $B(\varphi)$
1	$\{2,3,4,5\}$
2	$\{1,3,4,5\}$
3	$\{1,2,4,5\}$
4	$\{1,2,5,6\}$
5	$\{1,2,4,7\}$
6	$\{1,2,4,5\}$
7	$\{1,2,4,5\}$
8	$\{1,2,4,7\}$
9	$\{1,2,6,8\}$

TABLE 2. 顶点删除证书： $B(\varphi)$ 为 $H-v$ 提供正常2-着色。

超边 e	蓝色顶点 $B(\varphi)$
$\{1,3,8\}$	$\{2,4,5,6\}$
$\{1,4,6\}$	$\{2,7,8,9\}$
$\{1,4,8\}$	$\{3,5,6,9\}$
$\{1,4,9\}$	$\{2,5,6,8\}$
$\{1,5,7\}$	$\{2,6,8,9\}$
$\{1,5,8\}$	$\{3,4,7,9\}$
$\{1,5,9\}$	$\{2,4,7,8\}$
$\{1,6,7\}$	$\{2,3,4,5\}$
$\{2,3,6\}$	$\{1,7,8,9\}$
$\{2,3,7\}$	$\{1,6,8,9\}$
$\{2,4,9\}$	$\{1,3,5,6\}$
$\{2,5,9\}$	$\{1,3,4,7\}$
$\{2,6,7\}$	$\{1,3,4,5\}$
$\{3,4,8\}$	$\{1,2,5,6\}$
$\{3,5,8\}$	$\{1,2,4,7\}$
$\{3,6,7\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{4,6,8\}$	$\{1,3,7,9\}$
$\{4,6,9\}$	$\{1,2,7,8\}$
$\{5,7,8\}$	$\{1,3,6,9\}$
$\{5,7,9\}$	$\{1,2,6,8\}$

B.2. **顶点删除证书**。 对于每个顶点 $v \in V(H)$，表 2 列出了一个蓝色顶点集 $B(\varphi) \subseteq V(H) \setminus \{v\}$，它定义了 $H-v$ 的正常2-着色。

AppendixC. Verification script

以下 Python 3 脚本（仅使用标准库）可验证：(i) 最小度 $\delta(H) = 7$；(ii) H 不可 2-可着色；(iii) 对每条超边 e, $H - e$ 均可 2-可着色；(iv) 对每个顶点 v, $H - v$ 均可 2-可着色；以及 (v) 附录 B 中的所有证书。

```
# 验证_临界_超图.py # 纯 Python 3，无依赖项。 from itertools import product V =list(range(1, 10)) E = [(1, 2, 3), (1, 2, 9), (1, 3, 8), (1, 4, 6), (1, 4, 8), (1, 4, 9), (1, 5, 7), (1, 5, 8), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 9), (2, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 8), (3, 6, 7), (4, 6, 8), (4, 6, 9), (5, 7, 8), (5, 7, 9),]# 表 B.1 中的边删除证书（蓝色顶点集） EDGE_CERTS = { (1, 2, 3): {6, 7, 8, 9}, (1, 2, 9): {3, 4, 5, 6}, (1, 3, 8): {2, 4, 5, 6}, (1, 4, 6): {2, 7, 8, 9}, (1, 4, 8): {3, 5, 6, 9}, (1, 4, 9): {2, 5, 6, 8}, (1, 5, 7): {2, 6, 8, 9}, (1, 5, 8): {3, 4, 7, 9}, (1, 5, 9): {2, 4, 7, 8}, (1, 6, 7): {2, 3, 4, 5}, (2, 3, 6): {1, 7, 8, 9}, (2, 3, 7): {1, 6, 8, 9}, (2, 4, 9): {1, 3, 5, 6}, (2, 5, 9): {1, 3, 4, 7}, (2, 6, 7): {1, 3, 4, 5}, (3, 4, 8): {1, 2, 5, 6}, (3, 5, 8): {1, 2, 4, 7}, (3, 6, 7): {1, 2, 4, 5}, (4, 6, 8): {1, 3, 7, 9}, (4, 6, 9): {1, 2, 7, 8}, (5, 7, 8): {1, 3, 6, 9}, (5, 7, 9): {1, 2, 6, 8}, }
```

```
# 表 B.2 中的顶点删除证书（V\ 上的蓝色顶点集                                {v
    }) 顶点_证书 = { 1: {2, 3, 4, 5}, 2: {1, 3, 4, 5}, 3: {1, 2, 4,
5}, 4: {1, 2, 5, 6}, 5: {1, 2, 4, 7}, 6: {1, 2, 4, 5}, 7: {1, 2, 4, 5}, 8:
{1, 2, 4, 7}, 9: {1, 2, 6, 8}, } def degs(edges): d ={v: 0 for v in
V} for a, b, c in edges: d[a] += 1d[b] += 1d[c] += 1return
d def is_mono(edge, col): a, b, c = edge return col[a] ==
col[b] == col[c]def induced_edges(edges, verts): verts =
set(verts) return [e for e in edges if set(e) <= verts]def
proper_2coloring_exists(edges, verts): verts =list(verts) f
or bits in product([0, 1], repeat=len(verts)): col = {v:
bits[i] for i, v in enumerate(verts)} if all(not is_mono(e,
col) for e in edges): return True,col return False, None def
monochromatic_edges(edges, col): return [e for e in edges
if is_mono(e, col)]def main(): # 度检查 d =degs(E) print("
degrees:", d) print("min degree:", min(d.values())) assert
min(d.values()) == 7
```

```
    # 检查 H 是否不可二染色
    ok, _ =proper_2着色_exists(E, V)
    print("H 是否可二染色？", ok)
    assert not ok

    # 使用蛮力法检查边临界性
    对于 E 中的每个超边 e:
        超边2 = [f, 其中 f 属于 E 且 f != e]
        ok, _ =proper_2着色_存在(edges2, V)
        如果 not ok:
            raise 断言错误(f"H-e 对于 e={e 不可二染色
                }")
    print("已通过蛮力法验证边临界性。")

    # 用蛮力法检查顶点临界性
    for v in V:
        顶点2 = [u, 其中 u ∈ V 且 u != v]
        边2 = 诱导_边(E, verts2)
        ok, _ =适当的_2着色_存在(edges2, verts2)
        if not ok:
            raise AssertionError(f"H-v 对 v={v 不可二染色
                }")
    print("已通过蛮力法验证顶点临界性。")

    # 验证边证书
    for e , B 中 EDGE_CERTS.items():
        col = {v: (1 if v in B else 0) for v in V}
        monos =单色_edges(E, col)
        如果 monos != [e]:
            raise 断言错误(f"Bad edge certificate for e={e}:
                mono edges={monos}")
    print("All edge certificates validated.")

    # Validate vertex certificates
    对于 v , B 位于 VERTEX_CERTS.items() 中:
        顶点2 = [u, 其中 u ∈ V 且 u != v]
        边2 = 诱导_边(E, verts2)
        col = {u: (1 if u in B else 0) for u in verts2}
        若存在某个 e ∈ edges2 使得 is_mono(e, col):
            raise AssertionError(f"v= 的顶点证书错误{
                v}")
    print("所有顶点证书均已验证。")

    print("所有检查均已通过。")

if __name__ == "__main__":
    main()
```

References

[1] P. Erd
˝ ´ *Problems and results on* 3*-chromatic hypergraphs and some related* os、L. *questions* ´ *Infinite and Finite Sets* Lovasz，载于：A. Hajnal、R. Rado、V. T. Sos（编），（论文集，凯斯特海伊，匈牙利，1973），第 II 卷，Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai，第 10 卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1975，第 609–627 页。MR0382050。[2] Erd˝os 问题与结果，问题 #834（“三染色超图”），https: //www.erdosproblems.com/834（访问于 2025 年 12 月 19 日）。[3] C. Berge，*Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets*，North-Holland数学图书馆，第 45 卷，1 016 1989 978 0 444 87489 4 10 0924 6509 08 70093North-Holland，阿姆斯特丹，。ISBN - - - -。doi: . /S - ( ) -X。[4] C. Bujt´as、Z. Tuza、V. I. Voloshin，超图着色，载于：L. W. Beineke、R. J. Wilson（编），*Topics in Chromatic Graph Theory*，《数学及其应用百科全书》，剑桥大学出版社，剑桥，2015，第 230–254 页。doi:10.1017/CBO9781139519793.014。[5] B. Bollob´as，论广义图，Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16 (1965) 447–452。doi:10.1007/BF01904851。[6] G. O. H. Katona，A. Ehrenfeucht 和 J. Mycielski 问题的解答，J. Combin. Theory Ser. A 17 (1974) 265–266。doi:10.1016/0097-3165(74)90018-1。[7] Z. Tuza，临界超图与相交集合对系统，J. Combin. Theory Ser. B 39 (1985) 134–145。doi:10.1016/0095-8956(85)90043-7。[8] B. Toft，色临界图与超图，J. Combin. Theory Ser. B 16 (1974) 145–161。doi:10.1016/0095-8956(74)90057-4。[9] H. L. Abbott、D. R. Hare，平方临界三染色超图，Discrete Math. 197–198 (1999) 3–13。doi:10.1016/S0012-365X(99)90031-6。[10] A. V. Kostochka、D. R. Woodall，关于强着色意义下临界超图的边数，European J. Combin. 21 (2000) 249–255。doi:10.1006/ eujc.1999.0330。[11] A. V. Kostochka，少边色临界图与超图：综述，载于：E. Gy
˝ ´ *More Sets Graphs* ori、G. *and Numbers* O. H. Katona、L. Lovasz、T. Fleiner（编），，，Bolyai学会数学研究，第 15 卷，Springer，柏林，2006，第 175–197 页。doi:10.1007/978-3-540-32439-3_9。[12] L. Duraj、G. Gutowski、J. Kozik，关于非一致超图二着色性的简短说明，载于：I. Chatzigiannakis、C. Kaklamanis、D. Marx、D. Sannella（编），*ICALP 2018: 45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*，LIPIcs，第 107 卷，Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2018，文章编号 46，第 46:1–46:13 页。doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.46。

Tsinghua University, Beijing 100084, China
Email address: lirl23@mails.tsinghua.edu.cn