arXiv:2512.24864v1 [math.CO] 31 Dec 2025

关于素矩阵乘积分解

Saieed Akbari 数学系，谢里夫理工大学，德黑兰，伊朗

Mohamad Parsa Elahimanesh 数学系，谢里夫理工大学，德黑兰，伊朗

Bobby Miraftab 计算机科学学院，卡尔顿大学，渥太华，安大略省，加拿大

2026年1月1日

摘要

如果 $A = BC$，则图 G 可通过矩阵乘积分解为图 H 和 K，其中 A、B和 C分别是 G、H和 K的邻接矩阵。若在每一种此类因子分解中，其中一个因子都是完美匹配（也就是说，它对应一个置换矩阵），则称图 G 为素图。我们刻画了所有素图，并利用这一结果对所有可分解森林进行分类，回答了 Akbari等人 [*Linear Algebra and its Applications* （2025年）提出的问题。我们证明每个环面都是可分解的，并刻画网格的所有可能因子分解，从而解决了 Maghsoudi 等人 [*Journal of Algebraic Combinatorics* （2025年）提出的两个问题]。

1 引言

如果存在某些顶点排序，使得它们的邻接矩阵 A，B，和 C 满足 $A = BC$，我们就称 G 可分解为 H 和 K 。如果存在这种因子分解，则称图 G 为可分解。设 H和 K是两个图，且满足 $V(K) = V(H) = [n] = \{1, \ldots, n\}$。若 B和 C 分别是 H 和 K 的邻接矩阵，则矩阵乘积 HK是一个加权有向图，其邻接矩阵为 BC。

本文研究“图的矩阵乘积”的因子分解问题。近期的论文 [1, 4, 5, 6, 7]重新引发了人们对矩阵乘积分解的兴趣。具体而言，Maghsoudi 等人提出了以下问题：

问题1。 [5,问题 1] 哪一类图是可分解的？

考虑 $K_{2,\,2}$，其中顶点 1 和 2 与顶点 3 和 4 相邻。于是可以看出，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们称这样的图为素。更准确地说，如果图 G 的每个因子分解中都有一个因子是完美匹配，我们就称该图为素 。本文研究素

图。事实上，我们开发了一些工具，并证明可以通过是否存在匹配对来刻画素图。

定义 1.1。 设 H 和 K 是具有相同顶点集的图。若满足以下条件之一，则称一对 (u, v) 为匹配对：

1. $\deg_H(u) = \deg_H(v) = 1$ 且 $v \in N_H(u)$。
2. $\deg_K(u) = \deg_K(v) = 1$ 且 $v \in N_K(u)$。

不失一般性，设 $\deg_H(u) = \deg_H(v) = 1$ 且 $v \in N_H(u)$。

定理 1.2。 图 G 是素图，当且仅当每个因子分解都在 G的每个连通分量中包含一个匹配对端点。

通过研究素图，我们引入了新的可分解图类。例如，我们刻画了所有可分解森林，从而回答了 [1]中的一个问题。设G 是一个森林，且 $\mathcal{I}$ 是 G的所有孤立顶点组成的集合。G 可分解，当且仅当$G \setminus \mathcal{I}$可分解。我们的第一个应用如下：

定理 1.3。 若一个不含孤立顶点的森林 G可分解，则以下结论成立：

(i)对于 G的每个连通分量 C， G中存在另一个连通分量，记为 C'，使得$C \cong C'$。
(ii) 并集 $C \cup C'$ 可分解为一个完美匹配和其自身。

例 1。 在下面的例子中，我们看到两个 P_8路径的不交并的一个因子分解。

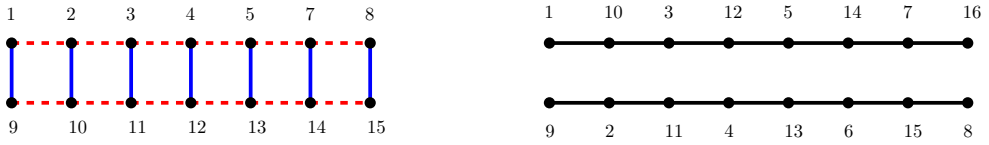


图 1： $P_8 \cup P_8$ 分解为 $P_8 \cup P_8$ 和一个完美匹配。

除了我们的首个应用之外，我们还刻画了所有可分解网格图（参见定义 4.11）和环面图（参见 定义 4.15），从而解答了 Maghsoudi等人提出的两个问题 [5]。

定理 1.4。 设 $m, n \in \mathbb{N}$。那么，笛卡尔积 $P_n \square P_m$ 可分解，当且仅当 m 和 n 均为偶数。

例2。 在下面的例子中，我们将网格 $P_2 \square P_4$ 分解为一个完美匹配和某个图。

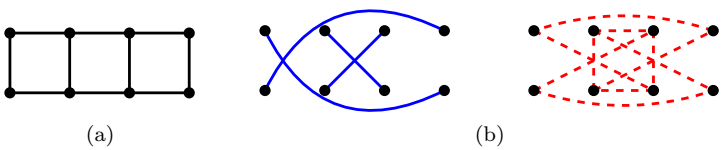


图 2：左侧的图描绘了 $P_2 \square P_4$，它被分解为右侧的两个图。

定理 1.5。 设 m、 $n \in \mathbb{N}$。则 $C_m \square C_n$ 是可分解的。

Ex例 3. 在以下示例中，我们将 $C_3 \square C_3$ 分解为两个 *2*-正则图 $s.$

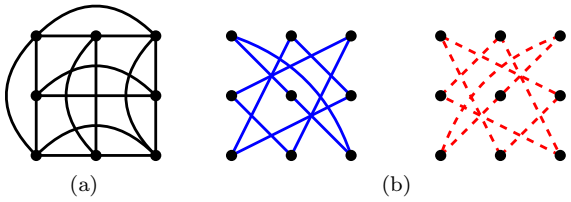


图 3：将 $C_3 \square C_3$ 分解为两个 2-正则图。

2 预备知识

在全文中， G 是一个简单 图（没有环或重边），且没有孤立顶点，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。设 u 和 v 是 G中的两个顶点。如果 u 和 v相邻，则将它们之间的边记为 $u\text{---}v$。

在 [5], Maghsoudi 等人以纯组合方式给出了矩阵乘积的一种等价定义。首先，我们需要确立一些记号和定义。

记号 2.1. [8] 设 H 和 K 是具有相同顶点集 $V(H) = V(K) = [n]$的图。 H 和 K的不交并记为 $H \oplus K$，它是顶点集为 $[n]$ 、边多重集为 $E(H) \sqcup E(K)$的图，其中同时出现在 H 和 K 中的边按其重数计入。

设 H和 K是两个图，满足 $V(H) = V(K) = [n]$。如果路径 $u\text{---}w\text{---}v$是长度为 2 的 $(H-K)$-路径，且 $u\text{---}w \in E(H)$ 和 $w\text{---}v \in E(K)$。（端点 u和 v 可以重合。）

定义 2.2。 设 H和 K是两个图，满足 $V(H) = V(K) = [n]$。那么 HK是以 $[n]$ 为顶点集的有向图（允许多重弧和环），满足

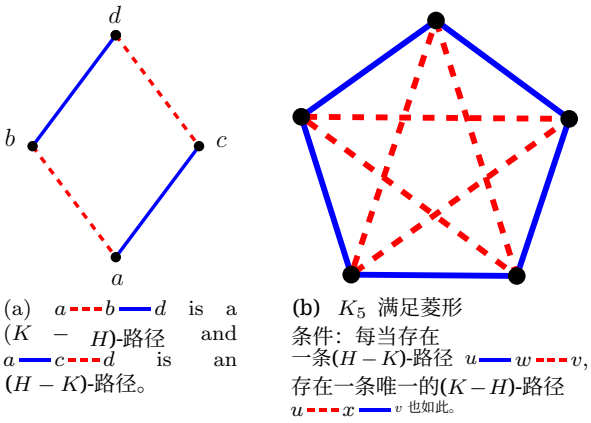
$$i \xrightarrow{k} j \text{ if and only if } \exists\ k\ (H-K)\text{-paths of length } 2 \text{ from } i \text{ to } j \text{ in } H \oplus K \tag{1}$$

记号 $i \xrightarrow{k} j$ 表示从 i 到 j有 k 条弧。

本文旨在寻找图 H 和 K ，使其邻接矩阵 B 和 C 满足： BC 是一个对角线元素全为零的 (0，1)-对称矩阵。

接下来，我们将介绍可分解图的组合刻画。回顾一下，图的k-边着色是指为每条边指定 k 种颜色之一。这种着色不必是正常边着色。

定义 2.3。 （参见 [2, 定义 2.6]）我们称 $H \oplus K$ 满足菱形条件，如果对于任意一对顶点 u, v，只要存在一条从u 到 v的长度为 2 的（$H-K$）路径，就存在一条从 u 到 v的唯一长度为 2 的（$K-H$）路径。



(a) a b d is a $(K-H)$-路径 and a c d is an $(H-K)$-路径。

(b) K_5 满足菱形条件：每当存在一条$(H-K)$-路径 u w v，存在一条唯一的$(K-H)$-路径 u x v 也如此。

图4

将 H 的边染成蓝色，将 K 的边染成红色；它们的并 $H \oplus K$ 因而构成一个双色边图。理解这种着色是刻画 $G = HK$ 何时存在的关键。

引理 2.4. [6, 定理 1] 设图 G 可分解为图 H 和 K。则有如下结论：

(i) $H \oplus K$ 是简单的，即 H 和 K 边不相交。(ii) 存在一种对 $H \oplus K$ 的2-边着色，其中 $E(H)$ 为蓝色，$E(K)$ 为红色，并满足菱形条件。

引理 2.5. [6, 推论 2] 设 G 可分解为图 H 和 K。若顶点 u 和v在 H中相连，则 $\deg_K(u) = \deg_K(v)$。

引理 2.6. [6, 定理 7] 设 G 可分解为图 H 和 K，且 u 是G的一个顶点。则 $\deg_G(u) = \deg_H(u)\deg_K(u)$。

3 素图

我们先给出以下简单引理，不作证明。

引理 3.1. 设 H 是一个邻接矩阵为 B 的完美匹配。则 $B^2 = I$。

完美匹配的任意邻接矩阵都是一个置换矩阵，这意味着每一行和每一列中恰有一个 1。此外，每个 $n \times n$ 置换矩阵都对应于 S_n 上的一个置换，而该置换是若干不相交对换的乘积。每个对换对应于匹配中的一条边。因此，我们得到以下推论：

推论 3.2. 设 H 是一个邻接矩阵为 B 的完美匹配。则 B 可视为 H的一个自同构。

设 G、H 和 K 是图，其邻接矩阵分别为 A、B 和 C，且 $A = BC$ 和 $B^2 = I$。

由于 $V(H) = V(G)$，因此 B 可以视为从 $V(G)$ 到 $V(G)$ 的映射。接下来我们证明 B 也可以看作 G的一个自同构。但我们需要以下引理。

引理 3.3. 设 H 是一个邻接矩阵为 B的完美匹配。若 G 是一个邻接矩阵为 A的图，则 BAB 表示对 G的重新标记。

证明。根据引理 3.1， $B^2 = I$，因此 $B = B^{-1}$。由于 H 是一个完美匹配， B 是一个置换矩阵。因此 $BAB = BAB^{-1} = BAB^T$，这意味着 BAB 通过交换G中的每个顶点及其匹配伙伴来重新标记 H。 □

图 G 的每个自同构都可以视为一个置换矩阵。记住这一点，我们来证明以下定理。

定理 3.4。 设 G 是一个图， H 是一个完美匹配，其邻接矩阵为B。那么， G 可以分解为 H 和某个 K ，当且仅当 B 是 G的一个没有不动边的自同构。

证明。设 A和 C 分别是图 G和 K 的邻接矩阵，使得 $A = BC = CB$。由于 $B^2 = I$， $BA = AB = C$。因此 B 是 G的一个自同构。为导出矛盾，假设 B 固定了 G 的一条边 $\{u, v\}$ （因此 $Bu = v$ 和 $Bv = u$）。那么$\{u, v\}$ 同时是 G 和 H的一条边，这与引理 2.4（该引理指出 G 和 H没有公共边）矛盾。

反之，设 B 是 G 的一个没有不动边的自同构。则 $BA = AB$。由于 B 和 A 是对称矩阵， BA 也具有对称性。此外，由于 B 不固定 G 中的任何边， BA 的每个对角元素都是 0（ G 中没有边同时出现在 G 和 H 中）。因此， BA 是一个对角线为零的对称 $\{0, 1\}$-矩阵，我们将其视为图 K 的邻接矩阵。根据构造， $A = B(BA) = BC$，所以确实可以将 G 分解为 H 和 K。 □

记号 3.5。 设 G 是一个图， u 是 G 的一个顶点。则 $C_G(u)$ 表示包含 u 的 G 的连通分量。

定义 3.6。 设 G 和 H 是满足 $U \subseteq V(G)$ 的图。若映射 $\varphi\colon U \to V(H)$ 满足：对于所有 $u, v \in U$， u---$v \in E(G)$ 蕴含 $\varphi(u)\,\varphi(v) \in E(H)$，则称其为图同态 。

引理 3.7。 设 G 分解为 H和 K，且匹配对为 (u, v)。对于 $s \in \{u, v\}$，映射 $\varphi\colon C_K(s) \to N_H(C_K(s))$，定义为 $\varphi(x) = N_H(x)$，是一个图同态。

证明。由引理 2.5， H中的每个 $x \in C_K(u) \cup C_K(v)$ 都有唯一的邻点，因此 $\varphi(x) = N_H(x)$ 定义良好。特别地， $\varphi(u) = v$ 且 $\varphi(v) = u$。为证明 φ 是图同态，设 $a, b \in C_K(s)$ 在 K中相邻。由于每个顶点在 H中都有唯一的邻点，我们得到一条交错路径 $N_H(a)\,a$---b—$N_H(b)$。由菱形条件可知，这意味着 $N_H(a)\,N_H(b)$，从而证明 $\varphi(a)\,\varphi(b) \in E(N_H(C_K(s)))$。

---　　---　　□

推论 3.8. 我们有 $C_K(u) = \varphi(C_K(v))$且 $\varphi(C_K(u)) = C_K(v)$。

证明。 由于 $\varphi(C_K(s)) \subseteq C_K(\varphi(s))$，再次应用 φ得到 $\varphi^2(C_K(s)) \subseteq \varphi(C_K(\varphi(s)))$。根据 φ 的定义，我们有 $\varphi^2(C_K(s)) = C_K(s)$，这意味着 $\varphi(C_K(s)) = C_K(\varphi(s))$。因此， $N_H(C_K(s)) = C_K(N_H(s))$。 □

推论 3.9. $\varphi\colon C_K(u) \to C_K(v)$是一个同构，而且 $N_H(C_K(u)) = C_K(v)$和 $N_H(C_K(v)) = C_K(u)$。

定义 3.10. U 称为 $V(G) = V(H \oplus K)$的一个子集，若其中每个顶点 u' 都没有邻点$V(G) \setminus U$，这些邻点位于 U 中，且 $H \oplus K$ 和 G，即 $N_G(u') \cap U = N_{H\oplus K}(u') \cap U = \emptyset$。

引理 3.11. 设图 G 可分解为 H 和 K，且匹配对为 (u, v)。则$C_K(u) \cup C_K(v)$是孤立的。

证明. 根据菱形条件，G 的每条边都对应于 $H \oplus K$中的一条交错路径。这意味着 G 的每个连通分量都是$H \oplus K$的某个连通分量的子集。因此，只需证明 $C_K(u) \cup C_K(v)$在 $H \oplus K$中是孤立的。设$x \in V(G) \setminus V(C_K(u) \cup C_K(v))$。我们需要证明 $N_{H\oplus K}(x) \cap (C_K(u) \cup C_K(v)) = \emptyset$。由推论 3.9 可知，$N_H(C_K(u)) = C_K(v)$，且 $N_H(C_K(v)) = C_K(u)$。因此，在 H中，x不能与 $C_K(u) \cup C_K(v)$中的任何顶点相邻。此外，$C_K(u)$和 $C_K(v)$是 K的连通分量，因此 K中 x与 $C_K(u) \cup C_K(v)$之间没有边。 □

定义 3.12. 设 G 是一个图。若对于 G 的每一种因子分解，至少有一个因子是完美匹配，则 G 是素 的。

根据定义，没有任何因子分解的图是素图。

备注 3.13. 如果素图 G 可分解，那么 G 的顶点数为偶数 s.

现在我们可以证明本节的主要定理了。

定理 1.2. 图 G 是素图，当且仅当每一种因子分解都在 G 的每个连通分量中包含一个匹配对端点。

证明。 如果 G 可分解为 H 和 K，且 H 是一个完美匹配，那么显然，每条 H-边的端点构成一个匹配对（如所需）。
对于逆向蕴含，假设 G 可分解为 H 和 K。任取一个顶点x 属于 H，并令 C 为包含 x的 G 的连通分量。根据假设，存在一个匹配对 u、v，使得 $u \in C$。根据引理 3.11，$C_K(u) \cup C_K(v)$ 是孤立的，这意味着$x \in C_K(u) \cup C_K(v)$。根据引理 2.5，对于每个 $z \in C_K(u) \cup C_K(v)$，$\deg_H(z) = 1$，由此可得 $\deg_H(x) = 1$，这意味着 H 是一个完美匹配。 □

4 素图的应用

现在，我们将素图的结果应用于更广泛的类别：首先是不含 C_4 的图（从而得到可分解森林），然后是网格和环面图。

4.1 无平方图

本小节将刻画所有可分解森林。我们从下面的引理开始。

引理 4.1。 [1, 引理 19] 设图 G 分解为两个图 H 和 K。若 G不含 C_4，则对每个顶点 $u \in V(G)$，要么 $度_K(u) = 1$要么 $度_H(u) = 1$。

引理 4.2. 每个不含 C_4 的图都是素图。

证明。令 C 为 $H \oplus K$ 的一个连通分量。如果 C 是 2-正则的，那么对于每个顶点 $u \in V(C)$，我们有 $\deg_H(u) = \deg_K(u) = 1$，因此 C 中的每条 H-边都是一个匹配对。如果 C 不是 2-正则的，那么存在一个顶点 $u \in C$，使得 $\deg_{H\oplus K}(u) \geq 3$。根据引理 4.1，不失一般性，我们可以假设 $\deg_H(u) = 1$ 且 $\deg_K(u) \geq 2$。于是 u 在 H 中有唯一的邻点 $N_H(u)$，并且根据引理 2.5，我们得到 $\deg_K(N_H(u)) = \deg_K(u) \geq 2$。再次应用引理 4.1，我们发现 $\deg_H(N_H(u)) = 1$，因此 $\{u, N_H(u)\}$ 是一个匹配对。由于 C 是 $H \oplus K$ 的任意连通分量，定理 1.2 保证 G 是素图。

□

引理 4.3。设 G 是一个图，对于一对顶点 u 和 v，它们之间存在唯一最短路径 γ。那么不存在满足以下条件的完美匹配 H：其邻接矩阵为 B，且 B 是 G 的一个没有不动边的自同构，并且 $Bu = v$。

证明。反设存在一个完美匹配 H，使得 $Bu = v$。如果 γ 的顶点数为奇数，那么 B 会固定 γ 的中心顶点。这是因为 u 和 v 之间只有一条路径，因此 $B\gamma = \gamma$。然而，由于 H 是一个完美匹配，B 不可能固定 G 的顶点。因此，γ 的顶点数为偶数，所以 B 会固定 γ 的中心边，这与 B 不固定 G 的任何边这一假设矛盾。

□

现在，我们立即得到以下推论。

推论 4.4。对于每一棵树 T 以及每个邻接矩阵为 B 的完美匹配 H，如果 B 是 T 的一个自同构，那么 B 会固定 T 的一条边。

在 [1, 问题 2], 中，作者要求刻画可分解森林。我们对此问题作如下回答。

定理 1.3。若森林 G没有孤立顶点且可分解，则以下结论成立：

(i)对于 G的每个连通分量 C，在 G中都存在另一个连通分量，记为 C'，使得$C \cong C'$。

(ii) 并集 $C \cup C'$ 可分解为一个完美匹配和其自身。

证明。设 G是分解为 H 和 K的森林。由于 G 没有 C_4，引理 4.2 推出G 是素的；因此 H 是一个完美匹配。设 B 是 H的邻接矩阵。由推论 4.4，B 置换 G 的连通分量（它不固定任何连通分量）。

接下来，设 X 是一个连通分量的邻接矩阵。由于 G 是二部图，X 具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & 0 \end{pmatrix}.$$

现在，考虑 G 的两个同构连通分量，其邻接矩阵形式如下：

$$\begin{pmatrix} 0 & Y & 0 & 0 \\ Y^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & Y^T & 0 \end{pmatrix}.$$

如果将此矩阵与完美匹配的邻接矩阵相乘：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

结果是，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & Y^T & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 \\ Y^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

证明完成。 □

推论 4.5. [1,定理 20] 每棵至少有 2 个顶点的树都不可分解。

4.2 度序列

在本小节中，我们研究图的度序列与其素性之间的相互作用。我们从以下引理开始。

引理 4.6. 设 G 是一个可分解图。如果 a和 d 在 G中相邻，那么存在相邻顶点 b 和 c，使得 a、 b、 c和 d 两两不同，并且

$$\deg_G(a)\deg_G(d) = \deg_G(b)\deg_G(c).$$

证明。 令 G分解为 H 和 K。由于 a和 d在 G中相邻，因此存在顶点 b 和 c 满足菱形条件（见 图4（a））。根据 引理 2.6，可得：

$$\begin{aligned} \deg_G(a)\deg_G(d) &= \deg_K(a)\deg_H(a)\deg_K(d)\deg_H(d) \\ &= \deg_K(c)\deg_H(b)\deg_K(b)\deg_H(c) \\ &= \deg_G(c)\deg_G(b). \end{aligned}$$ □

作为前述结果的直接推论，我们得到以下推论。

推论 4.7。 设 G是一个连通图，其中有两个度分别为 p 和q的相邻顶点，且 p 和 q 是素数。若 G 既没有

（i）度为 pq的顶点，也没有

（ii）任何度为 *1* 的顶点，

那么 G 是素数。

证明。将 $\deg_G(a) = p$ 和 $\deg_G(d) = q$ 及 G 分解为 K 和 H。根据引理 4.6，不失一般性，我们可以假设还存在另外两个顶点 b和 c，使得 $\deg_G(b) = p$ 且 $\deg_G(c) = q$。注意， a、 b、 c和 d 应满足菱形条件（见图 4(a)）。已知 $\deg_G(c) = q$，因此 $\deg_H(c) = q$或 $\deg_K(c) = q$成立，见引理 2.6。若 $\deg_K(c) = q$，则 $\deg_K(a) = q$，因为 c在 H中与 a相邻，见引理 2.5。

然而，这会导致矛盾，因为 $p = \deg_G(a) = \deg_H(a)\deg_K(a) = q\deg_H(a)$。因此，$\deg_H(c) = q$，从而 $\deg_K(c) = 1$。注意，d 和 c 在 K 中相邻，因此 $\deg_H(c) = \deg_H(d) = q$。由于 $\deg_G(d) = \deg_H(d)\deg_K(d)$，我们有 $\deg_K(d) = 1$。由于 c和 d在 K中相邻，且 $\deg_K(d) = \deg_K(c) = 1$，它们构成一个匹配对。 □

引理 4.8。设 G为一个连通图，其中有一个度为 p 的顶点，且没有度为 kp的顶点，其中 p 为素数并且 $k > 1$。则 G 为素数。

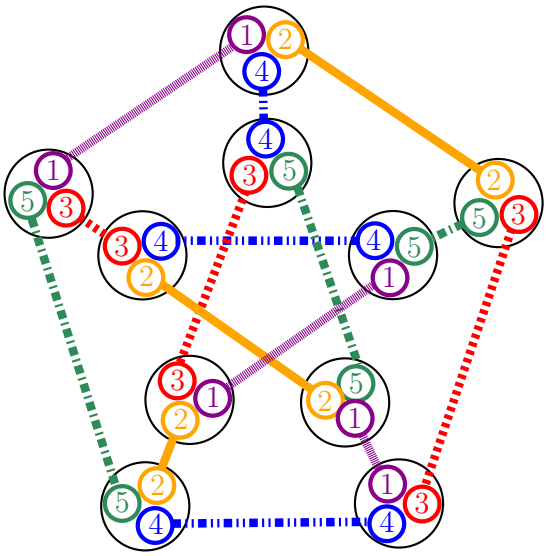
证明。将 G分解为 H 和 K，并令 a为 G中一个度为 p的顶点。存在满足菱形条件的顶点 b、c 和 d（见图 4(a)）。由于 $\deg_G(a) = p$，不妨设 $\deg_H(a) = 1$且 $\deg_K(a) = p$。注意，在 K中，a与 c相邻，因此 $\deg_K(a) = \deg_K(c) = p$。由于 $\deg_G(c) = \deg_H(c)\deg_K(c)$，我们有 $\deg_G(c) = p\deg_H(c)$，这意味着 $\deg_H(c) = 1$。鉴于 $\deg_H(c) = \deg_H(a) = 1$且在 H中 c 与 a 相邻，我们推得 c、a 构成一个匹配对。最后，由于 G 与定理 1.2 相连，证明得证。 □

推论 4.9. 设 G 是一个最大度为素数的连通图。那么 G 是素的。

接下来，我们证明彼得森图不可分解。

推论 4.10. 彼得森图不可分解。

证明. 我们用 P 表示彼得森图。它是三正则图，根据 推论 4.9，它是素的。



接下来，我们证明 P 中任何一个阶为二且没有不动边的自同构都有不动顶点。这意味着 P 没有因子分解；见 定理 3.4。已知 P 的自同构群是对称群 S_5，见 [9]。令 e 为 P的一条任意边。不失一般性，可以假设 e 着色为 1，因为 P 是边传递的。假设 σ 是 P 的一个阶为 2 的自同构，它将数字 1 映射为 2，因此 σ只有四种情况：

$$(1,2),\ (1,2)(3,4),\ (1,2)(4,5),\ \text{and}\ (1,2)(3,5)$$

在所有情况下， σ 都必须固定唯一一个与颜色为 3（红色）、4（蓝色）和 5（绿色）的边关联的顶点；因此， σ 有一个不动顶点。 □

4.3 网格与环面的因子分解

Maghsoudi 等人 [5] 提出了刻画所有可分解网格图和环面图的问题。我们在此回答这些问题。

定义 4.11。（参见 [3, 第 382] 页）二维网格图，又称二维格图，是一种 $m \times n$ 格图，它是 $P_m \square P_n$两个分别有 m 个和 n个顶点的路图的笛卡尔积。

引理 4.12。每个网格图都是素图。

证明。设 $G = P_n \square P_m$。我们根据 m 和 n 的取值分情况证明。 .

• 如果 $n = 1$ 且 $m \geq 2$，那么 $G \cong P_m$ 结论由推论 4 得出。 5.

• 若 $n = m = 2$，则 $G \cong C_4$。所有顶点的度均为 2，且没有顶点的度为 $2k(k > 1)$，因此引理 4.8 适用。

• 设 $n \geq 2$ 且 $m \geq 3$。这里 G 包含度为 3 的顶点，但没有度为 $3k(k > 1)$ 的顶点；引理 4.8 再次给出所需结果。 □

设 G 为一个连通图。对于 u， $v \in V(G)$，令 $d(u, v)$ 表示它们之间的（最短路径）距离。对于 $v \in V(G)$，其离心率 为 $\epsilon(v) = \max_{u \in V(G)} d(v, u)$。 G 的半径 为$r = \min_{v \in V(G)} \epsilon(v)$，而中心 为

$$\mathrm{cen}(G) = \{v \in V(G) \mid \epsilon(v) = r\}.$$

注 4.13。 G 的每个自同构都将 cen(G) 映射到自身。

接下来，我们给出以下民间结果。

引理 4.14。设 m， $n \in \mathbb{N}$。

(i) 如果 m 和 n 中恰有一个是偶数，那么 $P_n \square P_m$ 的中心恰有两个相邻顶点。

(ii) 如果 m 和 n 都是偶数，那么 $P_n \square P_m$ 的中心恰有四个顶点。

在下一个定理中，我们讨论 $P_n \square P_m$ 何时可分解。如果 $m = n = 1$，那么 $P_1 \square P_1$是单个顶点，其邻接矩阵是一个 1×1 零矩阵。显然，每个 $n \times n$零矩阵都是两个 $n \times n$ 零矩阵的矩阵乘积。

定理 1.4. 设 m、 $n \in \mathbb{N}$。那么，笛卡尔积 $P_n \square P_m$ 可分解，当且仅当 m 和 n 都是偶数。

证明。 设 $G = P_n \square P_m$。

首先，假设 G 可分解。根据 引理 4.12， G 是素数，并且根据注 3。13 G 有偶数个顶点。因此， m 或 n 至少有一个是偶数。

反设 m、 n 中恰有一个为偶数。那么 G 的中心恰由两个相邻顶点组成（根据引理 4.14 ）。由备注 4.13 可知，每个自同构

都会固定 G 的这条中心边。然而，根据定理 3.4， B 是 G 的一个自同构，且没有不动边，这与前述观察相矛盾。因此， m 和 n 都必须是偶数。

对于逆向蕴含，假设 m 和 n 都是偶数。G 的顶点集为

$$V(G) = \{(i,j) \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}.$$

(1，1) 与 (1，m) 之间存在唯一最短路径，(1，1) 与 (n，1) 之间也同样如此。由于 B 是 G的自同构，因此

$$B(1,1) = (n,m), \quad B(n,1) = (1,m).$$

由于 B 不固定 G的任何顶点，我们可以推出

$$B(1,i) = (n, m+1-i), \quad B(j,1) = (n+1-j, m).$$

应用相同的论证，

$$B(2,i) = (n-1, m+1-i), \quad B(j,2) = (n+1-j, m-1).$$

根据归纳法， $B(i,\ j) = (n+1-i,\ m+1-j)$ 定义了唯一的自同构，从而证明了可因子分解性。 □

定义 4.15. （参见 [3, 第 382] 页）环面或环面网格图 $T_{m,\ n}$ 是由圈图 C_m 和 C_n的笛卡尔积 $C_m \square C_n$ 构成的图。

定义 4.16。 （参见 [2, 第 34] 页）如果 S 是群 G 的一个对称子集（集合 S 是对称的，如果$S = S^{-1}$，其中 $S^{-1} = \{ s^{-1} \mid s \in S \}$。），那么相应的凯莱图 Cay($G$; S) 是一个无向图，其顶点是 G 的元素，并且顶点 x 和 y 相邻，当且仅当 $x^{-1}y \in S$。

环面 $C_n \square C_m$ 同构于 Cay($\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$; (±1，0)，(0，±1)).

定理 1.5。 设 $m, n \in \mathbb{N}$。那么 $C_m \square C_n$ 是可分解的。

证明。 记 $C_m \square C_n$ 的顶点为

$$V(C_n \square C_m) = \{(i,j) \mid 0 \le j \le m-1, 0 \le i \le n-1\}.$$

根据 m 和 n，有以下几种情况：一个对称子集（集合 S 是对称的，如果 $S = S^{-1}$，其中 $S^{-1} = \{ s^{-1} \mid s \in S \}$。）

•令 m 和 n 中至少有一个为偶数。不妨设 n 为偶数。我们定义图 H，其顶点集与 $V(C_n \square C_m)$ 相同，边集为 $\{(i,j)\ (i+\frac{n}{2}, j) \mid 0 \le i \le \frac{n}{2}, 0 \le j \le m-1\}$。注意，连通分量中的求和分别模 $\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathbb{Z}_m$ 进行。显然， H 是 $V(C_n \square C_m)$ 上的一个完美匹配。现在考虑 H的邻接矩阵 B。 B 没有不动边，根据定理 3.4， G 可分解为 H 和某个图 K。

• 设 m 和 n 均为奇数。在这种情况下，我们直接定义 H 和 K。令 H :=Cay($\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, ($\frac{n+1}{2}, \frac{m-1}{2}$), ($\frac{n-1}{2}, \frac{m+1}{2}$)), 以及 K:= Cay($\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, ($\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}$), ($\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}$))。假设 H 有蓝色边，且 K 有红色边（虚线边）。令 u — v --- w 和u --- z — t，其中 $u = (i,j)$。于是有以下几种情况：

– 首先假设 $u+\binom{n+1}{2},\binom{m-1}{2}) = v$ 且 $v+\binom{n-1}{2},\binom{m-1}{2}) = w$。于是有 $u+(n,m-1) = w$，因此 $w=(i,j-1)$。– 假设 $u+\binom{n-1}{2},\binom{m+1}{2}) = v$ 且 $v+\binom{n-1}{2},\binom{m-1}{2}) = w$。于是有 $u+(n-1,m) = w$，因此 $w=(i-1,j)$。– 接下来假设 $u+\binom{n+1}{2},\binom{m-1}{2}) = v$ 且 $v+\binom{n+1}{2},\binom{m+1}{2}) = w$。于是有 $u+(n+1,m) = w$，因此 $w=(i+1,j)$。– 接下来假设 $u+\binom{n-1}{2},\binom{m+1}{2}) = v$ 且 $v+\binom{n+1}{2},\binom{m+1}{2}) = w$。于是有 $u+(n,m+1) = w$，因此 $w=(i,j+1)$。

因此，我们证明了 (i,j) 与 $(i-1,j)$、$(i,j-1)$、$(i+1,j)$ 和 $(i,j+1)$ 相邻。接下来，我们需要证明 $H\oplus K$ 满足菱形条件。假设顶点 (i,j) 和 (i',j') 属于以下菱形：

$$(i,j)\text{ — }X_1\text{ - - - }(i',j')\text{ — }X_2\text{ - - - }(i,j),$$

其中，对于 $i=1,2$，$X_i\in V(H\oplus K)$。注意，(i',j') 属于以下情形之一：$(i-1,j)$、$(i,j-1)$、$(i+1,j)$ 和 $(i,j+1)$。此外，可以看出，每种情形下顶点 X_1 和 X_2 的定义都是唯一的。这表明 H 和 K 的矩阵乘积为 $C_n\square C_m$。

□

5 进一步研究

我们以以下问题结束本文：

1. 设 d 和 t 为整数，且满足 $d\geq 1$ 和 $t\geq 3$。风车图 $W_{d,t}$ 由 d 个团 K_t 组成：将每个团中的一个顶点合并为同一个顶点。我们称这个公共顶点为 c，并称其为枢纽顶点。每个副本贡献 $t-1$ 个新顶点，因此总共有 $d(t-1)$ 个非枢纽顶点。此外，每个非枢纽顶点恰好属于 K_t 的一个副本，并与枢纽顶点 c 以及其所在团中的其他 $t-2$ 个顶点相邻。例如，当 $t=3$ 时，图 $W_{d,3}$ 正是标准的友谊图 F_d，由 [5,命题 3.29] 可知，F_d（因此 $W_{d,3}$）不允许因子分解。另一方面，风车图 $W_{1,4t+1}=K_{4t+1}$ 允许因子分解。

   我们希望确定所有满足 $W_{d,t}$ 存在因子分解的配对 (d,t)。

2. [5] 中的作者证明，完全图 K_n 存在因子分解，当且仅当 $n=4t+1$。他们还给出了 K_{4t+1} 的两种因子分解，其中两种情况下的两个因子都是传递图。我们提出如下问题：找出两个非传递图 H 和 K，其邻接矩阵分别为 B 和 C，使得 $BC=J-I$

参考文献

[1] Saieed Akbari, Yizheng Fanb, Babak Miraftab和 Yi Wang。《矩阵乘积分解的谱方法》。载于：《线性代数及其应用》（2025年）。[2] Chris Godsil 和 Gordon Royle。代数图论。第207卷。数学文本丛书。施普林格出版社，纽约，2001年，第xx页+439。

[3] Teresa W. Haynes、 Stephen T. Hedetniemi和 Michael A. Henning，编。《图的支配问题》。第64卷。数学进展。施普林格出版社，尚，2020年，第viii+545页。[4] Allen W Herman和 Bobby Miraftab。《凯莱图的矩阵乘积分解》。载于：arXiv预印本 arXiv:2512.17110（2025年）。[5] Farzad Maghsoudi、 Babak Miraftab和 Sho Suda。《图的矩阵乘积分解》。载于：组合代数学杂志 61，12（2025年）。[6] K. Manjunatha Prasad、 G. Sudhakara、 H. S. Sujatha和 M. Vinay。《图的矩阵乘积》。载于：《组合矩阵理论与矩阵广义逆》。施普林格出版社，新德里，2013年，第41–55页。[7] Babak Miraftab、 Heydar Radjavi和 Sho Suda。《无限图的可分解性》。载于：线性代数及其应用 728（2026年），第409–418页。[8] Kenneth H. Rosen、 Douglas R. Shier和 Wayne Goddard，编。《离散数学与组合数学手册》。第二版。离散数学及其应用（博卡拉顿）。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2018年，第xxiv+1590页。[9] Japheth Wood。《无字证明：彼得森图的自同构群同构于 S_5》。载于：数学杂志 89.4（2016年），第267页。