arXiv:2512.24886v1 [eess.SY] 31 Dec 2025

利用胞腔层进行异构多智能体多目标跟踪

Tyler Hanks*、Cristian F. Nino*、Joana Bou Barcelo、Austin Copeland、Warren Dixon、James Fairbanks

摘要——存在非线性动力学和智能体异构性（状态空间维度可能不同）的多智能体目标跟踪问题颇具挑战性，传统的图拉普拉斯方法难以应对。本文采用胞腔层这一图论的数学推广，原生地对这类异构系统进行建模。现有协调层框架主要关注一致性等合作问题，本文则将其拓展至非合作目标跟踪问题。多个未知目标的跟踪被表述为胞腔层上的调和延拓问题，并考虑所有智能体的非线性动力学和外部扰动。本文利用层拉普拉斯算子设计了一种分布式控制律，并给出相应的基于李雅普诺夫的稳定性分析，以保证跟踪误差收敛；仿真结果验证了该方法的有效性。

I. 引言

多智能体系统（MAS）的研究已大幅拓展，其核心目标是设计局部交互规则，以产生期望的集体行为。奠基性研究通过一致性等典型问题确立了分布式协调的原则：智能体仅利用邻居的局部信息，就能就共同值达成一致（例如， [1], [2]）；此外还有编队控制（例如， [3], [4]）。许多此类任务都采用领导者—跟随者架构来建模，其中跟随者必须协同跟踪领导者的状态（例如， [5], [6]），这为众多现实世界中的协调问题提供了自然的抽象。

这一范式可直接扩展到多智能体目标跟踪问题，这是对监视与监测任务的一种综合抽象，其中目标被视为动态的非合作领导者（例如， [7]）。然而，要开发有效的解，就必须超越初期文献中常见的理想条件假设，例如线性动力学和完备信息。现实世界的系统具有非线性动力学，且必须能够应对未建模的动力学和外部扰动。此外，信息架构是一项关键约束。集中式控制依赖单个处理器获取全局信息，既无法扩展，也存在单点故障。这些特点促使人们转向分布式控制，即智能体依靠本地的智能体间通信；或转向完全去中心化控制，即智能体必须仅凭自身的机载传感器测量进行操作。

在单目标跟踪中常见的逐案设计，在应对更复杂的运行场景（例如多目标分配或异构目标）时难以扩展。现代系统面临的一项主要挑战是整合异构智能体；这些智能体可能具有根本不同的动力学模型、计算能力或运行时间尺度。这种异构性可能极为显著：智能体在不同领域（例如空中、地面和海上环境）运行，因此具有不同的状态空间维数。开发能够在如此多样化的网络中管理多个目标的稳健且可扩展的控制框架，仍然是一个重要的开放问题。

这些挑战促使人们将胞腔层和层拉普拉斯算子应用于多智能体控制，将其作为一种组织性和统一性的框架。胞腔层和层拉普拉斯算子是对图和图拉普拉斯算子的推广，涵盖标量加权图和矩阵加权图、符号图以及连接图等构造（例如， [8]）。胞腔层方法的一项关键优势是能够支持智能体状态空间、智能体间通信以及协调目标的异质性。这一方法已应用于多个领域，包括意见动力学（例如， [9]）、谣言传播（例如， [10]）、经济学（例如， [11]）、分布式优化（例如， [12]）和机器学习（例如， [13], [14]）。在控制领域，这些思想被用于构建一个分析和实现多智能体协调的通用框架。由此得到的协调层能够纳入异质的智能体状态空间，也能纳入共识、集群和编队等常见协调任务的异质组合（例如， [15], [16]）。

主要贡献

迄今为止，关于协调层的研究仅考虑了完全合作设置，即所有智能体共同努力以实现共同目标。本文将协调层框架扩展到协作跟踪一组未知目标的问题。该问题被表述为定义在胞腔层上的时变调和延拓问题，该胞腔层描述了智能体之间的

*这些作者贡献相同。

Tyler Hanks 就职于佛罗里达大学计算机与信息科学与工程系，以及 Cristian F. Nino、Joana Bou Barcelo、Austin Copeland、Warren Dixon 和 James Fairbanks 任职于佛罗里达大学机械与航空航天工程系，电子邮箱：{t.hanks, cristian1928, jboubarcelo, acopeland1, wdixon, fairbanksj}@ufl.edu。

Hanks 获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金（DGE- 1842473）的资助。Hanks、Bou Barcelo 和 Fairbanks 获得了美国国防高级研究计划局（HR00112220038）的资助；Hanks 和 Fairbanks 还获得了美国海军研究办公室（N00014-23-1- 2339）的资助。Nino、Copeland 和 Dixon 获得了美国空军研究实验室（FA8651- 24-1-0018）、美国空军科学研究办公室（FA9550-19-1-0169）和美国陆军研究实验室（W911NF-25-2-0045）的资助。文中的任何观点、研究发现、结论或建议均属于作者个人意见，不一定反映美国国家科学基金会或其他资助方的观点。

通信、智能体到目标的通信以及感知模型，并开发了一种用于解决该问题的分散式控制器。所得闭环系统的稳定性取决于定义该问题的胞腔层的相对上同调。上同调是胞腔层强大的代数拓扑不变量，可利用线性代数轻松计算（例如，[17]）。在胞腔层框架下开展工作，使非合作跟踪场景同样具备合作场景中异质性所带来的优势。

核心贡献总结如下：

- 将多智能体多目标跟踪问题表述为胞腔层上的调和延拓问题，
- 将该问题推广到由异构智能体和目标组成的网络，其中状态空间维度可能不同，
- 提出一种用于解决该问题的分散式控制器，其稳定性取决于相对上同调计算。

这些贡献通过理论分析和仿真得到验证。

II. 预备知识

设 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $V \triangleq [N] = \{1, \dots, N\}$。考虑一个静态无向简单图 $G \triangleq (V, E)$，其中 $E \subseteq V \times V$ 是自反且对称的。用 $i \leftrightarrow j \equiv ij$ 表示 $(i, j) \in E$。对于每个 $i \in V$，定义邻域 $N_i \triangleq \{j \in V : i \leftrightarrow j\}$。给定一个子集 $U \subseteq V$，诱导子图 $G|_U \triangleq (U, E|_U)$ 的边集为 $E|_U \triangleq \{(i, j) \in U \times U \mid i \leftrightarrow j\}$。因此，对于满足 $i \neq j$ 的 $i, j \in U$，$G|_U$ 中的邻接关系与 G 中的相同。

为描述异质的局部状态空间和交互规则，网络配备了一个细胞层（例如，[8], [9]）。

定义 1. 给定一个图 $G = (V, E)$，一个（加权）胞腔层 $\mathcal{F}$ 赋予：
(a) 对每个顶点 $i \in V$，赋予一个称为顶点茎的内积空间 $\mathcal{F}(i)$；(b) 对每条边 $ij \in E$，赋予一个称为边茎的内积空间 $\mathcal{F}(ij)$；(c) 对每个 $i \in V$ 和 $j \in N_i$，赋予一个线性限制映射 $\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} : \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(ij)$，其中 $i \trianglelefteq ij$ 表示该边 ij 与顶点 i 关联。

给定一个子图 $G' = (V', E') \subseteq G$，$G'$ 上的顶点茎和边茎分别组装成 G' 上的*0*-上链空间和*1*-上链空间：

$$C^0(G'; \mathcal{F}) \triangleq \bigoplus_{i \in V'} \mathcal{F}(i), \qquad C^1(G'; \mathcal{F}) \triangleq \bigoplus_{ij \in E'} \mathcal{F}(ij),$$

其中，$\bigoplus_{i \in I} H_i$ 表示指标集 I 上的内积空间 H_i 的直和。茎上的内积通过正交直和延拓为上链空间上的内积。

示例 1（常值层）。对于固定的 $k \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $G = (V, E)$，常值层 $\mathbb{R}^k$ 将 $\mathbb{R}^k$ 指定为每个顶点茎和边茎，并对所有 $i \in V$，$j \in N_i$ 使用恒等限制映射 $\mathbb{R}^k_{i \trianglelefteq \overline{ij}} = I_k$，其中 I_k 表示 $k \times k$ 单位矩阵。

胞腔层的限制映射规定了局部线性约束，这些约束会传播为该层所定义的整体图上的全局线性方程组。这些方程组的局部解和全局解由局部截面和全局截面的概念刻画。

定义 2（局部与全局截面）。设 $\mathcal{F}$ 是定义在 G 上的胞腔层，其中 $G' = (V', E')$ 是 G 的一个子图。$\mathcal{F}$ 在 G' 上的一个局部截面 是一个 0-上链 $\mathbf{x} \in C^0(G'; \mathcal{F})$，满足对所有 $ij \in E'$ 都有 $\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} x_i = \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} x_j$。$\mathcal{F}$ 在 G' 上的局部截面空间记为 $\Gamma(G'; \mathcal{F}) \subseteq C^0(G'; \mathcal{F})$。$\mathcal{F}$ 的一个全局截面 对应于 $G' = G$ 的情形。

例 2。在连通图 G 上的常值层 $\mathbb{R}^k$ 中，全局截面对应于共识向量，也就是说，每个顶点都被赋予同一个向量。

计算全局截面时，会用到层上同调的工具。上同调将拓扑问题转化为线性代数问题，因此可以直接计算。

定义 3. 给定图 G 上的胞腔层 $\mathcal{F}$，余边界算子 是一个线性映射 $C^0(G; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{F}}} C^1(G; \mathcal{F})$，定义为 $(\delta_{\mathcal{F}} \mathbf{x})_{ij} = \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}(x_i) - \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}(x_j)$。$\mathcal{F}$ 的层拉普拉斯算子 是一个线性映射 $L_{\mathcal{F}} : C^0(G; \mathcal{F}) \to C^0(G; \mathcal{F})$，定义为 $L_{\mathcal{F}} \triangleq \delta_{\mathcal{F}}^\top \delta_{\mathcal{F}}$。

根据定义，层拉普拉斯算子是一个对称半正定矩阵。它具有分块结构，对角块为 $L_{i,i} = \sum_{j \in N_i} \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}^\top \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}$，非对角块在 $ij \in E$ 时为 $L_{i,j} = -\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}^\top \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}$，否则为 0。层拉普拉斯算子逐顶点作用为

$$(L_{\mathcal{F}} \mathbf{x})_i = \sum_{j \in N_i} \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}^\top \big(\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}(x_i) - \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}(x_j) \big).$$

胞腔层的*0*阶和*1*阶上同调由下式给出

$$H^0(G; \mathcal{F}) \triangleq \ker \delta_{\mathcal{F}}, \quad H^1(G; \mathcal{F}) \triangleq C^1(G; \mathcal{F}) / \operatorname{im} \delta_{\mathcal{F}}.$$

由此可得 $H^0(G; \mathcal{F}) = \Gamma(G; \mathcal{F})$，因为当对所有 $ij \in E$ 都有 $\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}(x_i) - \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}(x_j) = 0$ 时，$x \in \ker \delta_{\mathcal{F}}$。这个等价关系表明，全局截面的集合具有 $C^0(G; \mathcal{F})$ 的向量子空间结构。此外，$\ker \delta_{\mathcal{F}} = \ker L_{\mathcal{F}}$。

还将使用相对上同调的概念。令 $G' \subseteq G$ 为一个子图，并定义

$$C^0(G, G'; \mathcal{F}) \triangleq \bigoplus_{i \in V(G) \setminus V(G')} \mathcal{F}(i).$$

关于 G' 的 G *0*度相对上同调 定义为

$$H^0(G, G'; \mathcal{F}) \triangleq \ker \delta|_{C^0(G, G'; \mathcal{F})}.$$

元素 $\mathbf{x} \in H^0(G, G'; \mathcal{F})$ 的含义是：它是 $\mathcal{F}$ 的一个全局截面，在 G' [9]上为零。

例 3. 再次考虑连通图 G 上的常值层 $\mathbb{R}^k$ 。层拉普拉斯算子 $L_{\mathbb{R}^k}$ 等于 $L_G \otimes I_k$，其中 L_G 是图 G 的图拉普拉斯算子。给定任意子图 $G' \subseteq G$，常值层的相对上同调为 $H^0(G, G'; \mathbb{R}^k) = 0$ ，因为图 G 上唯一在 G' 上取零的常值函数就是零函数。

III. 问题表述

A. 系统动力学

设 N， $M \in \mathbb{Z}_{>0}$。考虑一个多智能体系统，其中可控智能体 V_q 的数量为 $|V_q| = N$，目标智能体 V_p 的数量为 $|V_p| = M$。将所有 $N + M$ 智能体的集合记为 $V \triangleq V_q \sqcup V_p$，其中 $A \sqcup B$ 表示集合 A 和 B 的不交并。对于每个可控智能体 $i \in V_q$，其动力学为

$$\dot{q}_i(t) = f_i\left(q_i(t), t\right) + g_i\left(q_i(t), t\right) u_i\left(t\right) + \omega_i\left(t\right), \quad (1)$$

其中， $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示初始时刻， $t \geq t_0$ 表示当前时刻，$q_i : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_i}$ 表示智能体未知的广义位置， $\dot{q}_i : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_i}$ 表示智能体未知的广义速度，未知函数 $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_i}$ 和 $\omega_i : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_i}$ 分别表示漂移动力学和外部扰动， $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_i \times s_i}$ 表示已知的控制效能矩阵， $u_i : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{s_i}$ 表示控制输入，$s_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 表示控制通道的数量。

对于每个目标智能体 $k \in V_p$，其动力学为

$$\dot{p}_k(t) = f_k\left(p_k(t), t\right) + \omega_k\left(t\right), \quad (2)$$

其中， $p_k : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_k}$ 表示目标未知的广义位置，$\dot{p}_k : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_k}$ 表示目标未知的广义速度，未知函数 $f_k : \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_k}$ 和 $\omega_k : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n_k}$ 分别表示建模不确定性和外部扰动。为简化记号，在遍历受控智能体和目标智能体时，对所有 $i \in V$设定

$$x_i \triangleq \begin{cases} q_i, & \text{if } i \in V_q, \\ p_i, & \text{if } i \in V_p. \end{cases}$$

注释 1. 允许每个智能体具有特定的状态维数（$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$），从而支持异构团队。例如，一组无人机在 $\mathbb{R}^3$ 中演化，以跟踪在 $\mathbb{R}^2$中的一艘无人水面艇，反之亦然。

下面给出后续分析中用于保证适定性的正则性和有界性条件。

假设1. 对于所有 $i \in V$，函数 f_i 均属于 $\mathcal{C}^1$ 类。

假设2。对于所有的（q_i， t） $\in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}_{\geq t_0}$，函数 g_i 均满行秩且属于 $\mathcal{C}^0$类。此外，对于每个固定的 q_i，映射 $t \mapsto g_i$（q_i， t）对所有 $i \in V_q$在$t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$ 中一致有界。

假设3。函数 ω_i 属于 $\mathcal{C}^0$类，并且存在已知常数 $\omega_i \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于所有 $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$和所有 $i \in V$， $\|\omega_i\ (t)\ \| \leq \overline{\omega_i}$。

根据 [18],，假设2确保伪逆g_i^+：$\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{s_i \times n_i}$ 对于所有$i \in V_q$和 $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$均作为右逆。除此之外，还施加以下条件。

假设 4. 函数 g_i^+ 属于 $\mathcal{C}^0$类，并且对于每个固定的 q_i，映射 $t \mapsto g_i^+(q_i, t)$ 关于 $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$ 对所有 $i \in V_q$均一致有界。

B. 通信拓扑

设 $G_q = (V_q, E_q)$ 为一个图，其顶点是可控智能体，边表示双向通信。类似地，设 $G_p = (V_p, E_p)$ 为目标智能体之间的双向通信图。通过取不交并 $G_q \sqcup G_p$，再在智能体 i 能感知目标 k 时连接 $i \in V_q$ 与 $k \in V_p$，定义总图 $G = (V, E)$。关于 G 的以下假设确保每个目标至少被一个智能体感知，并且智能体团队能够协同跟踪所有目标。

假设5（通信拓扑）。智能体图G_q 是连通的，并且对于每个目标 $k \in V_p$，至少存在一个节点 $i \in V_q$ 满足 $ik \in E$。

胞腔层用于指定智能体间通信模型。设 $\mathcal{F}$ 为定义在 G 上的胞腔层，其顶点茎等于智能体状态空间， $\mathcal{F}(i) = \mathbb{R}^{n_i}$ 对于 $i \in V$。将可控智能体的子层定义为 $\mathcal{Q} \triangleq \mathcal{F}|_{G_q}$。

智能体 $i \in V$ 与 $j \in N_i$ 之间的感知模型由 $\mathcal{F}$ 上的“平行传输”指定。具体而言，智能体 i和 j 可以测量

$$d_{i,j} \triangleq \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}^{\top}(\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} x_i - \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} x_j),$$
$$d_{j,i} \triangleq \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}^{\top}(\mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} x_j - \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} x_i),$$

在常值层情形下，这些测量简化为相对位置测量。接下来的例子将说明异构维数和局部标架。

例4（USV-UAV投影）。假设 $i \in V$是一艘状态位于 $\mathbb{R}^2$ 中的无人水面艇，智能体 $j \in N_i$ 是一架状态位于$\mathbb{R}^3$中的无人机，其限制映射为

$$\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此， i感知其平面位置与将 j的位置投影到（x， y）平面后的结果之间的差异；反过来， j 感知其自身位置与嵌入为（x_i， y_i，0）的 i的位置之间的差异。

对于边 $ij \in E$，限制映射 $\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times n_i}$和 $\mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times n_j}$将智能体状态传输到公共局部测量坐标系（茎） $\mathcal{F}$（ij） $= \mathbb{R}^{m_{ij}}$。传输后的相对状态

$$y_{ij} \triangleq \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} x_j - \mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} x_i \in \mathcal{F}(ij)$$

通过其距离 $r_{ij} \triangleq \|y_{ij}\|$ 和方位角 $b_{ij} \triangleq y_{ij}/\|y_{ij}\| \in \mathbb{S}^{m_{ij}-1}$进行测量，使得 $y_{ij} = r_{ij}\, b_{ij}$。相应的逐节点拉回

$$d_{i,j} = -\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}^{\top} y_{ij}, \qquad d_{j,i} = \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij}^{\top} y_{ij},$$

实现与这种距离–方位感知一致的分布式残差。

示例 5（对齐的局部坐标系）。假设 $n_i = n_j = n$和 $\mathcal{F}(ij) = \mathbb{R}^n$。令 $R_i \in \mathrm{SO}(n)$ 将全局坐标映射到智能体 i 的局部坐标系。选择与 i坐标系重合的边坐标系，并令

$$\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} = R_i, \qquad \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} = R_i.$$

Then

$$y_{ij} = R_i(x_j - x_i), \quad r_{ij} = \|x_j - x_i\|, \quad b_{ij} = \frac{R_i(x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|},$$

因此，r_{ij} 是欧几里得距离，b_{ij} 是从 i 到 j 、以 i的局部坐标表示的单位方位向量。

示例 6（三维目标的平面感知）。令 $n_i = 2$, n_j =3，且 $\mathcal{F}(ij) = \mathbb{R}^2$。令 $R_i \in \mathrm{SO}(2)$ 将全局坐标映射到智能体 i 的局部坐标系，并令 $P \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ 将 $\mathbb{R}^3$ 投影到(x, y)坐标上。定义

$$\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij} = R_i, \qquad \mathcal{F}_{j \trianglelefteq ij} = R_i\, P.$$

Then

$$y_{ij} = R_i\big(P\, x_j - x_i\big), \quad r_{ij} = \|y_{ij}\|, \quad b_{ij} = \frac{y_{ij}}{\|y_{ij}\|} \in \mathbb{S}^1,$$

因此，智能体 i 测量到 j的位置在(x, y)平面上的投影的平面距离与方位，并以 i的坐标系表示。

备注 2。**(i)** 对于限制映射为恒等映射的常值层，$y_{ij} = x_j - x_i$，从而恢复相对位置感知。**(ii)** 边坐标系的选择可并入限制映射；任何正交重新指派都等价于对 $\mathcal{F}(ij)$施加左作用。**(iii)** 在分布式实现中，每个智能体仅使用其局部位姿估计来计算 $\mathcal{F}_{i \trianglelefteq ij}$；距离–方位传感器提供$(r_{ij}, b_{ij})$，据此无需全局坐标即可重建 y_{ij} 。

C. 控制目标

为简化记号，定义集成控制状态向量和目标状态向量

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_1^{\top} & q_2^{\top} & \dots & q_N^{\top} \end{bmatrix}^{\top} \in C^0(G_q, \mathcal{F})$$
$$\mathbf{p} \triangleq \begin{bmatrix} p_1^{\top} & p_2^{\top} & \dots & p_M^{\top} \end{bmatrix}^{\top} \in C^0(G_p, \mathcal{F}).$$

目标是为每个智能体 $i \in V_q$ 设计一个去中心化控制器，仅使用相对测量模型来跟踪目标。等价地，要求残差消失，$d_{i,\,j} = d_{j,\,i} = 0$对所有 $ij \in E$均成立，当且仅当

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\top} & \mathbf{p}^{\top} \end{bmatrix}^{\top} \in C^0(G; \mathcal{F})$$

是 $\mathcal{F}$ 的全局截面。由于目标状态不受控制，这一约束通常不可行。例如，一个负责同时跟踪两个尚未达成一致的目标位置的智能体，无法同时实现相对于这两个目标的零残差。通过调和延拓可以得到一种易于处理的松弛方案。

定义 4. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $G = (V,\ E)$ 上的胞腔层，令 $U \subseteq V$，并令 $\mathbf{y} \in C^0(G|_U;\, \mathcal{F})$。定义 $W \triangleq V \setminus U$。$\mathbf{y}$ 在 G 上的**调和延拓** 是一个 0-上链 $\mathbf{x} \in C^0(G; \mathcal{F})$，满足

$$(L_{\mathcal{F}}\mathbf{x})|_W = 0, \qquad \mathbf{x}|_U = \mathbf{y}.$$

任意局部 0-上链都存在调和延拓；当$H^0(G,\ G|_U;\, \mathcal{F}) = 0$ 时，任意局部 0-上链的调和延拓都是唯一的（见 [17,命题 4.1]）。

例 7. 考虑三个智能体，其状态属于 $\mathbb{R}$ ，其中智能体 2 的任务是跟踪智能体 1 和 3。此设置在三顶点路径图 P_3上给出一个常值层 $\mathbb{R}$ 。层拉普拉斯算子等于图拉普拉斯算子

$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

固定端点值 $x_1 = a$ 和 $x_3 = c$。调和延拓为 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^{\top}$ ，其中 $b = \frac{a+c}{2}$ 。从目标跟踪的角度来看，如果智能体 2 跟踪的智能体 1 和 3 未能达成一致性，那么最优稳态是它们之间的中点。

建立调和延拓框架后，便可以精确地表述控制目标。

问题 1. 为每个智能体$i \in V_q$ 设计一个分散式控制器，使集群状态 $\mathbf{q}(t)$ 跟踪给定目标智能体轨迹对应的调和延拓 $\mathbf{p}(t)$。

注 3. 该目标类似于具有狄利克雷边界条件的图上的热扩散过程。考虑内部顶点上的离散热流 $\dot{x} = -L_{\mathcal{F}}x$ ，并将边界值固定在 $U \subseteq V$ 上。唯一的平衡态满足 $W = V \setminus U$ 上的 $L_{\mathcal{F}}x = 0$，其中 $x|_U = y$；这正是将 y 调和延拓至 G的结果。等价地，调和延拓是在边界约束 $x|_U = y$下，使狄利克雷能量 $\frac{1}{2}\|\delta_{\mathcal{F}}x\|^2$ 最小的唯一解。在跟踪场景中，目标状态 $\mathbf{p}(t)$ 作为 G_p 上随时间变化的狄利克雷数据。期望的智能体状态 $\mathbf{q}(t)$ 应跟随 $\mathbf{p}(t)$ 向智能体顶点的调和延拓，记作 $\mathbf{q}^*(t)$。当边界信号相对于闭环收敛速率缓慢变化时，$\mathbf{q}(t)$ 会保持接近 $\mathbf{q}^*(t)$，即准静态状态。更一般而言，闭环系统表现为由时变边界驱动的扩散过程，沿通信拓扑对目标轨迹进行空间插值，并满足层约束。

IV. 控制设计

令 $i \in V_q$ 为任意值。为简化记号，令 $A_i \triangleq N_i \cap V_q$ 表示与 i 相邻的控制智能体集合，并令 $T_i \triangleq N_i \cap V_p$ 表示与 i 相邻的目标智能体集合。为量化智能体 i 的控制目标，定义

分歧 $\eta_i \triangleq (L_{\mathcal{F}}\mathbf{x})_i \in \mathbb{R}^{n_i}$。展开此定义可得

$$\begin{aligned}\eta_i &= \sum_{j\in N_i} \mathcal{F}_{i\lhd ij}^{\top}(F_{i\lhd ij}q_i - \mathcal{F}_{j\lhd ij}x_j),\\ &= \sum_{j\in A_i} \mathcal{F}_{i\lhd ij}^{\top}(F_{i\lhd ij}q_i - \mathcal{F}_{j\lhd ij}q_j)\\ &+ \sum_{k\in T_i} \mathcal{F}_{i\lhd ik}^{\top}\mathcal{F}_{i\lhd ik}q_i - \sum_{k\in T_i} \mathcal{F}_{i\lhd ik}^{\top}\mathcal{F}_{k\lhd ik}p_k.\end{aligned} \tag{3}$$

基于后续的稳定性分析，将控制输入设计为

$$u_i = -k_1 g_i^{+}\eta_i, \tag{4}$$

其中， $k_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ 是用户定义常数。

为便于分析，我们对系统的集群表示作出如下定义。将智能体-目标广义度映射 $D\colon\ C^0(G_q;\mathcal{F}) \to C^0(G_q;\mathcal{F})$ 定义为一个块对角矩阵，其第 i 个块为 $\sum_{k\in T_i}\mathcal{F}_{i\lhd ik}^{\top}\mathcal{F}_{i\lhd ik}q_i$。注意，如果智能体 i 无法感知任何目标，则第 i 个块为 0。此外，将智能体-目标交互映射 $B\colon\ C^0(G_p;\mathcal{F}) \to C^0(G_q;\mathcal{F})$ 定义为一个块矩阵；如果智能体i 能够感知目标 k ，则其块为 $B_{i,\,k} \triangleq \mathcal{F}_{i\lhd ik}^{\top}\mathcal{F}_{k\lhd ik}$，否则为 0。最后，将智能体总交互映射 $\mathcal{H}\colon\ C^0(G_q;\mathcal{F}) \to C^0(G_q;\mathcal{F})$ 定义为 $\mathcal{H} \triangleq L_{\mathcal{Q}} + D$。完成上述定义后，可以将（3）重写为

$$\eta_i = (L_{\mathcal{Q}}\mathbf{q})_i + (D\mathbf{q})_i - \sum_{k\in T_i} B_{i,k}p_k.$$

因此，将所有 η_i 叠加起来，就得到了整个网络中分歧的集群表示

$$\eta = (L_{\mathcal{Q}} + D)\mathbf{q} - B\mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{q} - B\mathbf{p}. \tag{5}$$

下一个引理证实，将 η 调节至 0 等价于求解目标状态$\mathbf{p}$的调和延拓。

引理 1. 若 $\eta = 0$，则 $\begin{bmatrix}\mathbf{q}^{\top} & \mathbf{p}^{\top}\end{bmatrix}^{\top}$ 是$\mathbf{p}$ 到 G的调和延拓。

证明。根据 [8, 第 3 节1], 中的讨论，调和延拓问题可通过对 $L_{\mathcal{F}}$ 进行分块分解，写为

$$\begin{bmatrix}L_{\mathcal{F}}[V_q,V_q] & L_{\mathcal{F}}[V_q,V_p]\\ L_{\mathcal{F}}[V_p,V_q] & L_{\mathcal{F}}[V_p,V_p]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \mathbf{z}\end{bmatrix},$$

其中$\mathbf{z}$ 是一个自由变量。因此，若

$$L_{\mathcal{F}}[V_q,V_q]\mathbf{q} + L_{\mathcal{F}}[V_q,V_p]\mathbf{p} = 0,$$

则 $\begin{bmatrix}\mathbf{q}^{\top} & \mathbf{p}^{\top}\end{bmatrix}^{\top}$ 是$\mathbf{p}$ 到 G的调和延拓。注意到 $L_{\mathcal{F}}[V_q,V_q] = \mathcal{H}$和 $L_{\mathcal{F}}[V_q,V_p] = -B$，证明得证。 □

引理1表明，设计一个分散式控制器，使 η 趋于0，即可解决问题1。以下情况成立:

$$\mathcal{H}\mathbf{q} = B\mathbf{p}. \tag{6}$$

为确保式（6）的解的唯一性，我们需要以下假设。

假设6. G相对于 G_p 的相对上同调是平凡的。形式上， $H^0(G,G_p;\mathcal{F}) = 0$。

假设6给出了关于式(6)的以下结果。

引理2. 矩阵 $\mathcal{H}$ 可逆且正定。

证明. $\mathcal{H}$ 是半正定的，因为它是半正定矩阵之和。假设6确保对于任意$\mathbf{p} \in C^0(G_p,\mathcal{F})$，式(6)的解均唯一存在，这意味着 $\mathcal{H}$ 可逆。由于 $\mathcal{H}$ 半正定且可逆，因此它是正定的。 □

备注4. 假设6至关重要，因为它消除了跟踪任务中的歧义，并且如后文所示，确保闭环控制系统的稳定性。为获得这一保证，框架所允许的异质性类型必须受到限制。为作说明，考虑例4中的设置。在这些限制映射下，表面智能体可以跟踪空中目标在xy-平面上的投影。这是因为，对于任意目标位置，都存在唯一的调和延拓（具体而言，即投影目标状态的质心）。反过来，空中智能体无法跟踪地面目标，因为将地面目标状态调和延拓至空中智能体状态，并不会对智能体的高度（z坐标）施加任何约束。在这一失效情形下，整体图相对于无人水面艇子图的上同调为 $\mathbb{R}$ ，而非0。这个非零上同调源于一维一致子空间（未受约束的 z轴），这违反了假设6。

基于后续分析，对于给定的目标配置$\mathbf{q}^* \in C^0(G_q,\mathcal{F})$，将调和延拓$\mathbf{p} \in C^0(G_p,\mathcal{F})$定义为

$$\mathbf{q}^* \triangleq \mathcal{H}^{-1}B\mathbf{p}, \tag{7}$$

并将跟踪误差$\mathbf{e} \in C^0(G_q,\mathcal{F})$定义为

$$\mathbf{e} \triangleq \mathbf{q}^* - \mathbf{q}. \tag{8}$$

然后，将式（7）和式（8）代入式（5）可得

$$\eta = \mathcal{H}(\mathbf{q}^* - \mathbf{e}) - B\mathbf{p} = \mathcal{H}(\mathcal{H}^{-1}B\mathbf{p} - \mathbf{e}) - B\mathbf{p} = -\mathcal{H}\mathbf{e}. \tag{9}$$

现在，将集群智能体动力学$f_q\colon\ C^0(G_q,\mathcal{F}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^0(G_q,\mathcal{F})$及扰动$\omega_q\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^0(G_q,\mathcal{F})$定义为

$$f_q(\mathbf{q},t) \triangleq \big[f_i(q_i,t)\big]_{i\in V_q},\quad \omega_q(t) \triangleq \big[\omega_i(t)\big]_{i\in V_q}.$$

类似地，将集群目标动力学$f_p\colon\ C^0(G_p,\mathcal{F}) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^0(G_p,\mathcal{F})$及扰动$\omega_p\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to C^0(G_p,\mathcal{F})$定义为

$$f_p(\mathbf{p},t) \triangleq \big[f_i(p_i,t)\big]_{i\in V_p},\quad \omega_p(t) \triangleq \big[\omega_i(t)\big]_{i\in V_p}.$$

为了确保控制器能够实现目标，必须假设智能体动力学与目标动力学之间的差异有界。以下假设对此进行了说明。

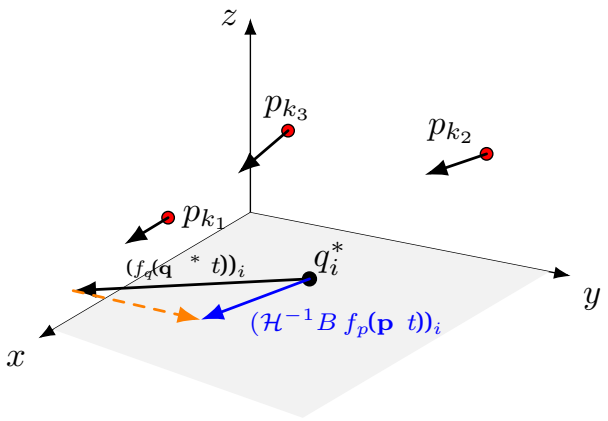

图1：该图示展示了智能体动力学与目标动力学之间的有界差异。曲面智能体 i 的任务是跟踪三个空中目标 p_{k_j}，持续时间为 $j \in \{1,2,3\}$。点 q_i^* 表示将目标状态调和延拓至曲面域所得的结果；蓝色切向量表示目标切向量的调和延拓。橙色向量表示调和延拓后的目标动力学与在 q_i^* 处求得的智能体动力学之间的差异。假设7要求，对于所有目标配置，该差异均一致有界。

假设7（有界差异）。映射

$$\mathbf{p} \mapsto \mathcal{H}^{-1}Bf_p(\mathbf{p},t) - f_q(\mathcal{H}^{-1}B\mathbf{p},t)$$

属于 $\mathcal{L}_\infty\big(C^0(G_p,\mathcal{F}) \times \mathbb{R}_{\geq 0}, C^0(G_q,\mathcal{F})\big)$类。

注5。假设7量化了以下图示

$$\begin{array}{ccc} C^0(G_p,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mathcal{H}^{-1}B} & C^0(G_q,\mathcal{F}) \\ {\scriptstyle f_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_q} \\ C^0(G_p,\mathcal{F}) & \xrightarrow[\mathcal{H}^{-1}B]{} & C^0(G_q,\mathcal{F}) \end{array}$$

不满足交换性。该图示中的路径代表通过调和延拓将目标状态向量$\mathbf{p}$ 传输到智能体切向量 $\dot{\mathbf{q}}$ 的不同方式。具体而言，它要求目标动力学在$\mathbf{p}$ 处的调和延拓与智能体动力学在$\mathbf{p}$的调和延拓处具有有界差异。图 1 展示了这一点。

Let $\mathbf{u} \triangleq [u_i]_{i\in V_q} \in \bigoplus_{i\in V_q} \mathbb{R}^{s_i}$. Then, using (4) and (9), it follows that

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{g}^+\mathcal{H}\mathbf{e}, \tag{10}$$

其中$\mathbf{g}^+$: $C^0(G_q,\mathcal{F}) \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \bigoplus_{i\in V_q} \mathbb{R}^{s_i\times n_i}$ 定义为$\mathbf{g}^+ \triangleq \mathrm{blkdiag}\{g_1^+,\ldots,g_N^+\}$。对式 (8) 求时间导数并使用式 (10)，得到闭环误差系统

$$\dot{\mathbf{e}} = -k_1\mathcal{H}\mathbf{e} + f_B + \tilde{f} + \Delta, \tag{11}$$

其中 $f_B \triangleq \mathcal{H}^{-1}Bf_p(\mathbf{p}\ t) - f_q(\mathcal{H}^{-1}B\mathbf{p}\ t)$、$\tilde{f} \triangleq f_q(\mathbf{q}^*,t) - f_q(\mathbf{q}\ t)$，以及 $\Delta \triangleq \mathcal{H}^{-1}B\omega_p(t) - \omega_q(t)$。

V. 稳定性分析

$\mathbf{e}$ 的演化由初值问题控制

$$\dot{\mathbf{e}} = h(\mathbf{e},t),\ \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}_0, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{e}_0 \in C^0(G_q,\ \mathcal{F})$ 是初始状态，向量场h: $C^0(G_q,\ \mathcal{F}) \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \to C^0(G_q,\ \mathcal{F})$ 定义为

$$h(\mathbf{e},t) \triangleq -k_1\mathcal{H}\mathbf{e} + f_B + \tilde{f} + \Delta. \tag{13}$$

根据假设1和假设3，h在$\mathbf{e}$上局部利普希茨连续，并且关于 t连续。因此，根据皮卡-林德洛夫定理（例如，[19, 第1章定理3.1]），对于每个$\mathbf{e}_0 \in C^0(G_q,\mathcal{F})$，都存在唯一的最大解。考虑李雅普诺夫函数候选 V： $C^0(G_q,\mathcal{F}) \to \mathbb{R}_{\geq t_0}$ 定义为

$$V(\mathbf{e}) \triangleq \frac{1}{2}\mathbf{e}^\top\mathbf{e}. \tag{14}$$

利用微积分基本定理和假设1，存在函数 ρ： $\mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}_{\geq t_0}$，使得$\|\tilde{f}\| \leq \rho(\|\mathbf{e}\|)\|\mathbf{e}\|$，其中 $\rho(\cdot) \triangleq \rho(\cdot) - \rho(0) \in \mathcal{K}_\infty$。此外，根据假设7，存在 $f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 使得 $\|f_B\| \leq f$。令 $P = \max\{N,M\}$。基于后续分析，定义 $\mu \triangleq \frac{1}{2}k_1\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}$、$k_{\min} \triangleq \frac{(f+\omega)^2}{2k_1\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}}$和 $\omega \triangleq \left(1+\frac{\sigma_{\max}\{B\}}{\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}}\right)\sqrt{P}\max_{i\in V}\{\omega_i\}$，其中 max，根据假设 3，该值对所有 $i \in V$ 和所有 $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$ 均存在。

为简化记号，令 $\chi\rho^{-1}(k_{\min} - \lambda_V - \rho(0))$，其中 $\lambda_V \in \mathbb{R}_{>0}$ 是用户定义的参数，用于控制期望的收敛速率。状态轨迹受限于的区域定义为

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{\iota \in C^0(G_q,\mathcal{F}) : \|\iota\| \leq \chi\right\}. \tag{15}$$

对于式 (12) 所描述的动力系统，初始条件集合定义为

$$\mathcal{S} \triangleq \left\{\iota \in C^0(G_q,\mathcal{F}) : \|\iota\| \leq \chi - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right\}, \tag{16}$$

一致最终界定义为

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{\iota \in C^0(G_q,\mathcal{F}) : \|\iota\| \leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right\}. \tag{17}$$

定理1。考虑式 *(1)* 和 *(2)* 所描述的动力系统。对于任意 $\mathbf{e}_0 \in \mathcal{S}$，分散式控制器 *(4)* 保证 $\mathbf{e}$ 半全局一致指数收敛至 $\mathcal{U}$，其估计为

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq \sqrt{\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\|\mathbf{e}_0\|^2 + \frac{\mu}{\lambda_V}\left(1-\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\right)},$$

对所有 $t \geq t_0$，只要满足充分增益条件 $k_{\min} > \rho\left(2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right) + \lambda_V$ 且假设*1*至*7*成立。此外，$\mathcal{U} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ 且解$\mathbf{e}$ 是完备的。

证明。沿着（12）的轨迹对（14）求导，并利用（13）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{e}(t)) = &-k_1\mathbf{e}^\top(t)\mathcal{H}\mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^\top(t)f_B \\ &+ \mathbf{e}^\top(t)\tilde{f} + \mathbf{e}^\top(t)\Delta.\end{aligned} \tag{18}$$

利用 Δ 和 ω的定义，由三角不等式可得

$$\|\Delta\| \leq \left(1+\frac{\sigma_{\max}\{B\}}{\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}}\right)\sqrt{P}\max_{i\in V}\{\overline{\omega}_i\} = \overline{\omega}. \tag{19}$$

应用三角不等式和柯西-施瓦茨不等式，并利用（19）以及 ρ 和 f 的定义，可得（18）的上界为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{e}(t)) \le & -k_1\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}\|\mathbf{e}(t)\|^2 \\ & +\rho(\|\mathbf{e}(t)\|)\|\mathbf{e}(t)\|^2 \\ & +\left(\overline{f}+\overline{\omega}\right)\|\mathbf{e}(t)\|.\end{aligned} \tag{20}$$

配方可得，式（20）有如下上界：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{e}(t)) \le -\left(k_{\min}-\rho(\|\mathbf{e}(t)\|)\right)\|\mathbf{e}(t)\|^2+\mu. \tag{21}$$

现在用反证法证明，最大解对所有时间均存在，且始终位于$\mathcal{D}$的内部。固定任意 $\mathbf{e}_0\in\mathcal{S}$，并令 $\mathbf{e}:[t_0,T_{\max})\to C^0(G_q,\mathcal{F})$ 为式（12）对应的唯一最大 Carathéodory 解。

令 $\mathcal{I}\triangleq\{t\in[t_0,T_{\max}):\mathbf{e}(\tau)\in\mathcal{D}$ 对所有 $\tau\in[t_0,t]\}$ 均成立，其中 $T_{\max}\in(t_0,\infty]$ 表示解在 $[t_0,T$ 上存在的所有时间$T>t_0$的上确界。由于 $\mathbf{e}_0\in\mathcal{S}\subset\mathcal{D}$ 且 $t\mapsto\mathbf{e}(t)$ 连续，集合 $\mathcal{I}$ 非空，且包含某个区间 $[t_0,t_0+\epsilon)$，其中 $\epsilon>0$。

对于所有 $t\in\mathcal{I}$，由连续性可知存在一个时间区间，使得 $\mathbf{e}(t)\in\mathcal{D}$。利用 $\rho(\cdot)=\rho(\cdot)-\rho(0)$ 可知，$\rho(\cdot)=\rho(\cdot)+\rho(0)$。于是 $\|\mathbf{e}(t)\|\le\rho^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))$，这意味着 $\rho(\|\mathbf{e}(t)\|)\le k_{\min}-\lambda_V-\rho(0)$，即 $\rho(\|\mathbf{e}(t)\|)+\rho(0)-k_{\min}\le-\lambda_V$。利用该不等式和式（14）可得，式（21）有如下上界：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\mathbf{e}(t)) \le -2\lambda_V V(\mathbf{e}(t))+\mu, \tag{22}$$

对所有 $t\in\mathcal{I}$ 均成立。将 Grönwall-Bellman 不等式应用于 (22)，可得

$$\begin{aligned}V(\mathbf{e}(t)) \le & \,\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}V(\mathbf{e}(t_0)) \\ & +\frac{\mu}{2\lambda_V}\left(1-\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\right),\end{aligned} \tag{23}$$

对所有 $t\in\mathcal{I}$ 均成立。将 (14) 应用于 (23)，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}(t)\| \le & \left(\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\|\mathbf{e}_0\|^2\right. \\ & \left.+\frac{\mu}{\lambda_V}\left(1-\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\right)\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{24}$$

对所有 $t\in\mathcal{I}$ 均成立。由于 $e(t_0)\in\mathcal{S}$，$\|\mathbf{e}(t_0)\|\le\overline{\rho}^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}$。将该表达式代入 (24)，并利用以下事实：对于所有 $t\ge t_0$，$\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}\le 1$ 且 $1-\mathrm{e}^{-2\lambda_V(t-t_0)}<1$，可得严格界 $\|\mathbf{e}(t)\|<\rho^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))$，对所有 $t\in\mathcal{I}$ 均成立。因此，对于所有 $t\in\mathcal{I}$，$\mathbf{e}(t)\in\operatorname{int}(\mathcal{D})$。现在，反设最大存在时间有限，即 $\sup\mathcal{I}<T_{\max}$。若 $\sup\mathcal{I}<T_{\max}$，则 $\mathbf{e}(\cdot)$ 的连续性意味着 $\mathbf{e}(\sup\mathcal{I})\in\partial\mathcal{D}$，这与对于所有 $t\in\mathcal{I}$，$\mathbf{e}(t)\in\operatorname{int}(\mathcal{D})$ 矛盾。因此 $\sup(\mathcal{I})=T_{\max}$ and $\mathcal{I}=[t_0,T_{\max})$，即对于所有 $t\in[t_0,T_{\max})$，$\mathbf{e}(t)\in\mathcal{D}$。

由于对所有 $t\in[t_0,T_{\max})$，$\mathbf{e}(t)\in\mathcal{D}$，且 $\mathcal{D}$ 是紧集，因此 $\sup_{t\in[t_0,T_{\max})}\|\mathbf{e}(t)\|<\infty$。根据 [19, 第 1 章定理 4.1], 解从 $[t_0,T_{\max})$ 延拓到 $[t_0,\infty)$。因此，对于所有满足 $\mathbf{e}(t)\in\mathcal{D}$ 的 $t\ge t_0$，解均存在。由此，对于所有 $\mathbf{e}_0\in\mathcal{S}$，式 (24) 对每个$t\ge t_0$均成立。

由于 $t\to\infty$，(24) 中的界收敛至 $\|\mathbf{e}(t)\|\le\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}$，即，根据 (17)，该解是一致最终有界的，其最终集合为 $\mathcal{U}$。此外，由于 $\mu=\left(\frac{f+\omega}{2k_1\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}}\right)^2$，通过增大 k_1，$\frac{\mu}{\lambda_V}$ 可以任意减小。

接下来，回顾 $k_{\min}>\rho\left(2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right)+\lambda_V$。利用 ρ 的定义以及 ρ 可逆这一事实，可得 $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}<\rho^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}$，即 $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$。此外，由于 $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}>0$，根据 ρ 的严格单调性可得 $k_{\min}>\rho\left(2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right)+\lambda_V>\rho\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right)+\lambda_V$，这意味着 $k_{\min}-\lambda_V-\rho(0)>\rho\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}\right)>0$。因此，$\rho^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda_V}}>0$，所以 $\mathcal{S}$ 的半径严格为正，即 $\mathcal{S}\neq\varnothing$。由此，$\mathcal{U}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{D}$。此外，由于 $\rho\in\mathcal{K}_\infty$，$\rho^{-1}\in\mathcal{K}_\infty$。因此，由于 $k_{\min}=\frac{1}{2}k_1\lambda_{\min}\{\mathcal{H}\}$，令 $-k_1\to\infty$ 可得 $\rho^{-1}(k_{\min}-\lambda_V-\rho(0))\to\infty$，因此 $\mathcal{D}$ 可以任意增大，结果具有半全局性。

由于 λ_V 与初始时刻 t_0 或初始条件 $\mathbf{e}_0$,无关，因此指数收敛是均匀的。此外，由于 $\mathbf{e}\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_{\ge t_0};C^0(G_q,\mathcal{F}))$，利用式 (9) 可得 $\eta\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_{\ge t_0};C^0(G_q,\mathcal{F}))$。因此，根据式 (4) 和假设 4，$\mathbf{u}\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_{\ge t_0};C^0(G_q,\mathcal{F}))$，且所有实现信号均有界。 □

VI. 仿真

一个 13 智能体平面网络跟踪 $\mathbb{R}^3$中的四个目标，这些目标通过分布式一致性自组织成一个正四面体。四个智能体围绕顶点目标构成一个正方形；其余九个智能体构成三个等边三角形，每个三角形以一个底面目标为中心。背景速度场由点源/点汇、轴向涡旋和高斯轴向流叠加而成。点奇异性为 $SS=\begin{bmatrix}-2.0 & 1.0 & 0.8 & 1.2\\ 1.6 & -1.2 & -0.5 & -1.0\\ 0.2 & 2.0 & 1.6 & 0.6\end{bmatrix}$，其中每一行编码为 (p_x,p_y,p_z,α)，其中 $\alpha>0$ 为源，$\alpha<0$ 为汇。涡旋分量为 $VV=\begin{bmatrix}-1.2 & -0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.9\\ 2.0 & 1.3 & 0.7 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.7\end{bmatrix}$，其中每一行编码为 $(q_x,q_y,q_z,a_x,a_y,a_z,\gamma)$；$\gamma$ 的符号根据右手定则决定绕轴 a的旋转方向。高斯轴向流分量使用中心 c_k、单位方向 d_k、强度 β_k、横向宽度 w_k和轴向长度 l_k；在求值点 $X=(\quad)$ $n_k=r_k-t_kd_k\quad v_k=\beta_k\quad-\|n_k\|^2/2w_k^2\quad-t_k^2/2l_k^2\ d_k$, ,)处，定义 $r_k=X-c_k$, $t_k=r_k^\top\hat{}\,d_k$, $\hat{}$, and exp( ) exp( ) $\hat{}$。使用两个此类分量：$c=(-3.0,0.0,0.0)$，$d=[1.0,0.0,0.1]$，$\beta=0.9$，$w=0.9$，$l=5$；以及 $c=(0.0,-2.0,1.0)$，$d=[0.7,0.7,0.0]$，$\beta=0.6$，$w=0.55$,$l=3.2$。智能体在相同速度场作用下于 xy平面内演化。

目标运动遵循李萨如型参考轨迹 $\dot{x}=Aa\cos(at+\delta_x)$，$\dot{y}=Bb\cos(bt)$，$\dot{z}=Cc\cos(ct+\delta_z)$，其参数为 $A=20$ m，$B=10$m，$C=15$ m，$(a,b,c)=(1,2,1)$ rad s^{-1}，$\delta_x=\pi/2$，$\delta_z=0$。智能体从

任意平面位置出发；目标初始化于负 z轴上。通过相对于指定目标的恒定偏移和智能体间距离约束来维持编队。正方形编队将目标置于中心；等边三角形编队将目标置于质心，且具有 $R = l/\sqrt{3}$ 和 60° 的边间夹角。四面体的底面顶点为 $(0,0,0)$, $(d,0,0)$, $(\frac{d}{2}, \frac{\sqrt{3}d}{2}, 0)$，顶点为 $(\frac{d}{2}, \frac{\sqrt{3}d}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}d)$。逐边等大反向偏移更新可保持质心不变，这意味着偏移量$_i = 0$。

采用比例增益 $k_{p,\ A} = 10$ （智能体）和 $k_{p,\ T}$ =5（目标）时，智能体群组会收敛到各自指定目标周围的正方形/三角形编队，目标则会收敛为正四面体。编队之间的稀疏交叉连接会导致其中心位置略微偏离精确居中。平面跟踪会产生智能体八字形轨迹，与参考结果一致。图 2 对比了仿真的初始配置和最终配置。如图所示，所有智能体都成功地围绕各自期望的目标形成了相应编队。图 3 展示了整个仿真过程中的所有轨迹。

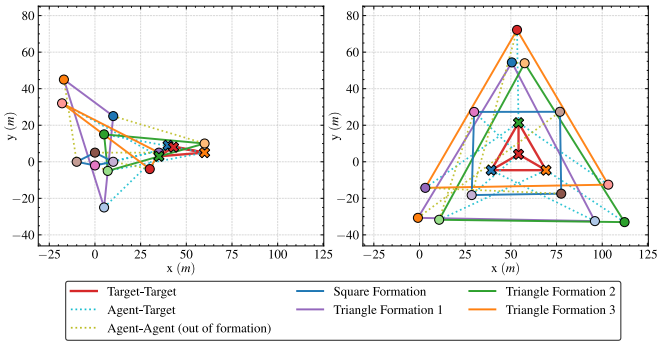

图 2：仿真初始条件与最终条件的对比，智能体比例增益设为 10。

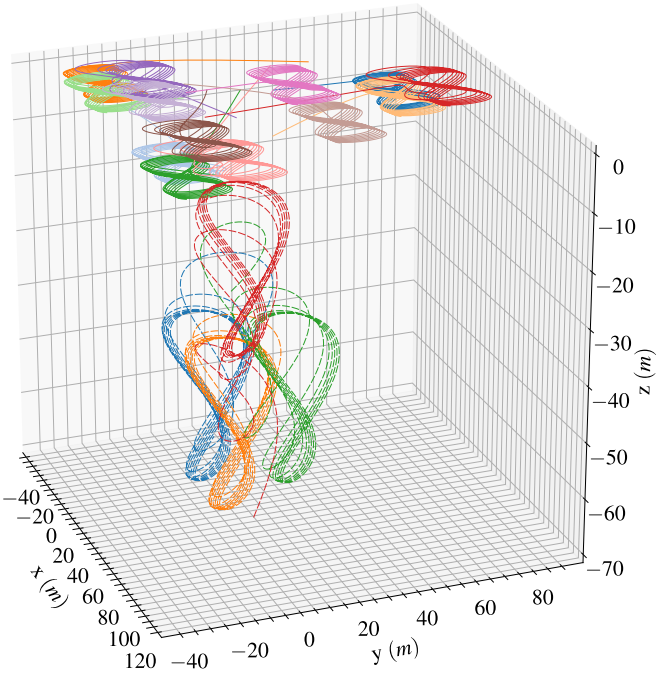

图 3：整个仿真过程中所有轨迹的可视化。

VII. 结论

本文提出了一种新颖的多智能体多目标跟踪框架，通过利用胞腔层的数学结构，能够处理异构非线性智能体动力学和状态空间。本文将现有协同协调框架扩展至非合作跟踪问题，并将该任务建模为胞腔层上的调和延拓问题。在此建模基础上，本文利用层拉普拉斯算子设计了一种分散式控制律，并通过相应的基于李雅普诺夫的稳定性分析保证跟踪误差收敛。未来研究将致力于拓展这一层论方法，以纳入非线性限制映射，从而使模型能够刻画更复杂的智能体交互，并将该框架应用于由有向通信拓扑定义的系统。

参考文献

[1] R. Olfati-Saber 和 R. M. Murray，《具有切换拓扑和时延的智能体网络中的一致性问题》，*IEEE* 自动控制汇刊，第49卷，第1520–1533页，2004年。[2] R. Olfati-Saber、J. A. Fax 和 R. M. Murray，《网络化多智能体系统中的一致性与协作》，*IEEE* 学报，第95卷，第215–233页，2007年。[3] M. Mesbahi 和 M. Egerstedt，多智能体网络中的图论方法。普林斯顿大学出版社，2010年。[4] W. Ren 和 Y. Cao，多智能体网络的分布式协调。伦敦施普林格出版社，2013年。[5] J. A. Fax 和 R. M. Murray，《车辆编队的信息流与协同控制》，*IEEE* 自动控制汇刊，第49卷，第1465–1476页，2004年。[6] Y. Hong、J. Hu 和 L. Gao，《具有主动领导者和可变拓扑的多智能体一致性跟踪控制》，《自动化》，第42卷，第1177–1182页，2006年。[7] C. F. Nino、O. S. Patil、S. C. Edwards 和 W. E. Dixon，《二阶非线性系统指数型异构多智能体目标跟踪的基于 RISE 的分布式控制》，*IEEE* 控制系统快报，第9卷，第811–816页，2025年。[8] J. Hansen，胞腔层的拉普拉斯算子：理论与应用。博士论文，2020年。[9] J. Hansen 和 R. Ghrist，《论述层上的意见动力学》，*SIAM* 应用数学杂志，第81卷，第2033–2060页，2021年。[10] H. Riess 和 R. Ghrist，《通过闲聊协议在网络格点上传播信息》，第5946–5952页，2022年。[11] H. Riess、M. Munger 和 M. M. Zavlanos，《分散式交易系统中的 Max-Plus 同步》，第221–227页，2023年。[12] J. Hansen 和 R. Ghrist，《具有层同调约束的分布式优化》，2019年。[13] J. Hansen 和 T. Gebhart，《层神经网络》，2020年。[14] C. Bodnar、F. Di Giovanni、B. Chamberlain、P. Li´o 和 M. Bronstein，《神经层扩散：图神经网络中异配性与过平滑的拓扑视角》，神经信息处理系统进展，第35卷，第18527–18541页，2022年。[15] T. Hanks、H. Riess、S. Cohen、T. Gross、M. Hale 和 J. Fairbanks，《胞腔层上的分布式多智能体协调》，2025年。[16] Y. Zhao、T. Hanks、H. Riess、S. Cohen、M. Hale 和 J. Fairbanks，《用于多智能体协调的异步非线性层扩散》，2025年。[17] J. Hansen 和 R. Ghrist，《迈向胞腔层的谱理论》，应用计算拓扑学杂志，第3卷，第315–358页，2019年。[18] R. Penrose，《矩阵的广义逆》，剑桥哲学学会数学学报，第51卷，第406–413页，1955年。[19] E. A. Coddington、N. Levinson 和 T. Teichmann，常微分方程理论。美国物理联合会，1956年。