arXiv:2512.24887v1 [math.AT] 31 Dec 2025

相干的 Span 值二维拓扑量子场论

SOPHIA E MARX 和 RAJAN AMIT MEHTA

摘要。我们考察 Span 双范畴中的交换 Frobenius 伪幺半群，并证明它们与 2-Segal 余对称集合一一对应。这种结构可以诠释为一种取值于 Span 双范畴的相干二维拓扑量子场论。我们还描述了一种构造，它可以从任意带有指定元素的偏幺半群生成一个 2-Segal 余对称集合。

1. 引言

拓扑量子场论（TQFT）定义为从协边范畴到向量空间范畴的对称幺半函子。更一般地，我们可以考虑 $\mathcal{C}$ 值 TQFT，其中 $\mathcal{C}$ 是任意对称幺半范畴。

孩子们最早学习到的关于 TQFT 的结果之一是：交换 Frobenius 代数与二维定向拓扑量子场论一一对应 [1, 13]。这实际上是一个关于二维定向配边范畴结构的定理，因此它立即推广为如下对应关系：$\mathcal{C}$ 中的交换 Frobenius 对象与 $\mathcal{C}$ 值二维定向拓扑量子场论一一对应。

我们尤其关注取值于 Span 范畴中的拓扑量子场论。这类结构自然源于数理物理中的 σ 模型，因为域可以从一个协边限制到其边界分支（例如参见 [8, 18, 24]）。另一个动机是，Span 范畴可以视为向量空间范畴的对象化（例如参见 [2, 20]）。

为了恰当地定义 Span 范畴，需要将 Span 的同构类作为态射。希望直接在 Span 本身的层面上开展工作，促使我们考虑高阶范畴。在研究 Span 范畴中的代数结构时，人们或许会进一步寻求将其提升为高阶范畴中的相干结构。这部分源于一种审美上的观点：任何“自然”的例子都应当源自这样的相干结构。我们将在集合的 Span 双范畴中开展工作，并将其

2020 数学主题分类。18B10, 18B40, 18C40, 18N50, 57R56。关键词和短语。2-Segal 集、Span、Frobenius 代数、单纯集合、拓扑量子场论。

记作**Span**，但我们相信，类似的结果也适用于更一般的情形。

在 **Span** 中，提升 Frobenius 对象的相容结构称为*Frobenius* 伪幺半群 [35]。根据上述讨论，我们将 **Span** 中的交换 Frobenius 伪幺半群视为一种相容的、以 **Span** 为值的二维定向拓扑量子场论。本文旨在用具有附加结构的单纯集合，对这类对象给出一个等价刻画。

作为 Stern [33], 的一项结果的特例，已知 **Span** 中的拟幺半群对应于满足 2-*Segal* 条件 的单纯集合[14, 19]; 关于这一对应关系的近期阐述，参见 [28, 34] 。在 [10],中，**Span** 中拟幺半群的交换结构和 Frobenius 结构被分别研究，并发现它们分别对应于相应单纯集合上的附加结构。具体而言，研究表明，**Span** 中的交换拟幺半群对应于 2-Segal Γ-集合，而 **Span**中的 Frobenius 伪幺半群对应于 2-Segal 拟循环集合。

本文的主要结果是证明：当 Γ和旁循环结构同时存在于同一个底层 2-Segal 集上时，它们便能彼此协调（无需任何额外的相容条件），从而构成唯一的余对称结构。结合 [10], 的结果，我们得出结论：Span 中的交换 Frobenius 伪幺半群与 2-Segal 余对称集合相对应。

此外，我们描述了一种构造方法，可以从相当常见的数据（例如带有任意指定元素的交换偏幺半群）生成 2-Segal 余对称集合。利用这一构造，我们获得了大量例子，其中有些据我们所知此前尚未出现在 2-Segal 文献中。作为应用，我们在效应代数的神经上构造了余对称结构，对 Roumen [29], 证明的效应代数神经具有循环结构这一结果略作改进。

我们以另一项与拓扑量子场论相关的动机作为引言的结尾，它指向了进一步的研究方向。Crane 和 Yetter [12]的工作隐含地表明，在 321 维扩张协边双范畴中，圆 S^1 具有交换 Frobenius 伪幺半群结构；在 [3]的生成元与关系描述中，这一结构可以看得更加清楚。因此，Span 中的交换 Frobenius 伪幺半群将构成一个取值于 Span 的 321 维扩张拓扑量子场论数据的一部分。借助 [3], 中的额外生成元与关系，我们或许可以在本研究的基础上，为 Span 中的模张量对象给出简洁的描述。

致谢。 我们谨向 Ivan Contreras 和 Walker Stern 致谢，感谢他们就本文相关主题进行了许多富有帮助的讨论。

2. 结构化单纯集

本文的主要结果涉及具有某些附加结构的单纯集合，以及这些结构之间的关系。这些结构及其相互关系可以用以下范畴交换图[1] 概括：

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \longrightarrow & \Lambda_\infty & \longrightarrow & \Lambda \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \Phi_*^{\mathrm{op}} & & \longrightarrow & & \Phi^{\mathrm{op}} \end{array} \tag{2.1}$$

这里， Δ 是单纯形范畴， Λ 和 Λ_∞ 分别是循环范畴和抛物循环范畴，而 Φ 和 Φ_* 分别是非空有限集范畴和有限带基点集范畴的骨架。本节将更详细地介绍（2.1）中的范畴与函子，以及这些范畴上的预层之间由此诱导的关系。

2.1. 单纯形范畴。 为确立记号和术语，我们简要回顾单纯形范畴和单纯集合。这部分内容是标准的，可见例如 [22]。

单纯形范畴 Δ 定义如下。其对象是集合$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$，其中 $n = 0, \ \mathbf{1}, \dots$；其态射是弱保序映射。

Δ 中的态射由以下<风格 id='2'>余面映射 δ_i^n生成： $[n-1] \to [n]$，其中 $0 \le i \le n$，定义为

$$\delta_i^n(k) = \begin{cases} k, & k < i, \\ k+1 & k \ge i, \end{cases}$$

以及 余退化映射 σ_i^n：对于 $0 \le i \le n$，由 $[n+1] \to [n]$ 给出

$$\sigma_i^n(k) = \begin{cases} k, & k \le i, \\ k-1, & k > i, \end{cases}$$

满足 余单纯关系

$$\begin{aligned} \delta_j^n \delta_i^{n-1} &= \delta_i^n \delta_{j-1}^{n-1}, && i < j, \\ \sigma_j^n \delta_i^{n-1} &= \begin{cases} \delta_i^{n+1} \sigma_{j-1}^n, & i < j, \\ \mathrm{id}, & i = j, j+1, \\ \delta_{i-1}^{n+1} \sigma_j^n, & i > j+1, \end{cases} \\ \sigma_j^n \sigma_i^{n+1} &= \sigma_i^n \sigma_{j+1}^{n+1}, && i \le j. \end{aligned}$$

一个单纯集合 是 Δ 上的一个预层，即一个函子 $X_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$。根据 Δ 的生成元与关系描述，单纯集合可以由以下数据描述：

[1]这一图示为从事循环理论研究的人所熟知；例如，它出现在 [27, 第 6.4 节2]中（不含 Λ_∞）。

• 个集合 X_n，对应 $n = 0$、1、.....,
• 面映射 d_i^n： $X_n \to X_{n-1}$ 对于 $0 \le i \le n$，以及
• 退化映射 s_i^n： $X_n \to X_{n+1}$ 对于 $0 \le i \le n$,
满足 单纯关系

$$
\begin{aligned}
d_i^{n-1} d_j^n &= d_{j-1}^{n-1} d_i^n, && i < j, \\
d_i^{n-1} s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^n d_i^{n+1}, & i < j, \\ \mathrm{id}, & i = j, j+1, \\ s_j^n d_{i-1}^{n+1}, & i > j+1, \end{cases} \\
s_i^{n+1} s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} s_i^n, && i \le j.
\end{aligned}
$$

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象与单纯形范畴相同，并配备一个函子 $\Delta \to \mathcal{C}$。这样，我们可以将 $\mathcal{C}$上的预层，即函子$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$**Set**，视为一个结构化单纯集合，因为（至少原则上）这种预层可以描述为带有额外结构映射和关系的单纯集合。（2.1）中的所有范畴都属于这一类型；本节余下部分将逐一介绍它们，并给出生成元与关系的描述，明确说明如何将其预层实现为带有各种附加结构的单纯集合。

2.2. **抛物循环范畴**。 本节回顾抛物循环范畴和抛循环集合的定义及基本性质。有关更多细节，以及抛物循环对象的原始动机（源自循环同调），请参见 [16, 21]。

抛物循环范畴 Λ_∞ 与单纯形范畴具有相同的对象，而态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda_\infty}([m],[n])$ 是一个弱保序映射f： $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 满足

$$
f(x+m+1) = f(x) + n + 1. \tag{2.2}
$$

由 (2.2) 可知，任意弱保序且满足 $f(m) \le f(0) + n + 1$ 的映射 f: $\{0,\dots,m\} \to \mathbb{Z}$，都唯一地延拓为一个态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda_\infty}([m],[n])$。特别地，存在一个自然的包含映射 $\Delta \hookrightarrow \Lambda_\infty$，其像由满足$f(\{0,\dots,m\}) \subseteq \{0,\dots,n\}$的态射 f 组成。

对每个 n，我们定义平移映射 $T^n \in \mathrm{Aut}_{\Lambda_\infty}([n])$，其定义为 $T^n(i) = i+1$，其中 $i \in \mathbb{Z}$。每个 $f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda_\infty}([m],[n])$ 都可以唯一分解为 $f = g \circ (T^m)^k$，其中 $g \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$，且 $k \in \mathbb{Z}$（见 [10, 命题 4.1]），因此映射 T^n 与余面映射及余退化映射一起生成 Λ_∞。由此还可得

$$
\mathrm{Aut}_{\Lambda_\infty}([n]) \cong \mathbb{Z},
$$

以 T^n 为生成元。

平移映射满足以下关系，这些关系与余单纯关系共同给出了 Λ_∞ 的生成元与关系描述。

$$T^n\delta_i^n=\begin{cases}\delta_{i+1}^nT^{n-1}, & 0\le i<n,\\ \delta_0^n, & i=n,\end{cases} \tag{2.3}$$

$$T^n\sigma_i^n=\begin{cases}\sigma_{i+1}^nT^{n+1}, & 0\le i<n,\\ \sigma_0^n(T^{n+1})^2, & i=n.\end{cases} \tag{2.4}$$

Λ_∞ 中的另一类特殊态射是 额外余退化映射 $\sigma_{n+1}^n=\sigma_0^nT^{n+1}\in \mathrm{Hom}_{\Lambda_\infty}([n+1],[n])$。它们满足以下关系

$$\sigma_{n+1}^n\delta_i^{n+1}=\begin{cases}T^n, & i=0,\\ \delta_i^n\sigma_n^{n-1}, & 0<i<n+1,\\ \mathrm{id}, & i=n+1,\end{cases} \tag{2.5}$$

$$\sigma_{n+1}^n\sigma_i^{n+1}=\sigma_i^n\sigma_{n+2}^{n+1},\qquad 0\le i\le n+1. \tag{2.6}$$

一个抛循环集合 是 Λ_∞上的预层，也就是说，是一个函子 $\Lambda_\infty^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$。从上述对 Λ_∞的生成元与关系描述可知，抛循环集合等价于一个单纯集合 $X_\bullet$，并配备可逆映射 $\tau^n\colon X_n\to X_n$，满足与 (2.3)–(2.4) 对偶的关系：

$$d_i^n\tau^n=\begin{cases}\tau^{n-1}d_{i+1}^n, & i<n,\\ d_0^n, & i=n,\end{cases} \tag{2.7}$$

$$s_i^n\tau^n=\begin{cases}\tau^{n+1}s_{i+1}^n, & i<n,\\ (\tau^{n+1})^2s_0^n, & i=n.\end{cases} \tag{2.8}$$

通常可以把 τ^n 看作在每个 n上生成一个作用于 X_n 的 $\mathbb{Z}$-作用。

抛循环集合 $X_\bullet$ 具有额外退化映射 $s_{n+1}^n=\tau^{n+1}s_0^n\colon X_n\to X_{n+1}$，它们满足与 (2.5)–(2.6) 对偶的关系：

$$d_i^{n+1}s_{n+1}^n=\begin{cases}\tau^n, & i=0,\\ s_n^{n-1}d_i^n, & 0<i<n+1,\\ \mathrm{id}, & i=n+1,\end{cases} \tag{2.9}$$

$$s_i^{n+1}s_{n+1}^n=s_{n+2}^{n+1}s_i^n,\qquad 0\le i\le n+1. \tag{2.10}$$

2.3. 循环范畴。 循环范畴 Λ由 Connes[9], 引入，是在附加关系 $(T^n)^{n+1}=\mathrm{id}$（对所有 n）下对 Λ_∞ 取商所得。

一个循环集合是 Λ 上的一个预层，即一个函子 $\Lambda^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$。因此，循环集合等价于满足 $(\tau^n)^{n+1}=\mathrm{id}$（对所有 n）的抛循环集合。此关系意味着，$\mathbb{Z}$ 在 X_n 上的作用下降为对每个 n 的 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 作用。

2.4. 有限带基数范畴。我们使用 Φ_* 表示有限带基数范畴。它与单纯形范畴具有相同的对象，其态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\Phi_*}([m],\ [n])$ 是满足 $f(0) = 0$ 的映射 $f\colon\ [m] \to [n]$。由于 Φ_* 是有限带基点集范畴的骨架，文献中也常用 $\mathbf{Fin}_*$ 或 $\mathbf{FinSet}_*$ 等名称指代它。

公式（2.1）中的函子 $\Delta \to \Phi_*^{\mathrm{op}}$ 更容易通过其对偶函子来定义，该对偶函子称为 Cut：$\Delta^{\mathrm{op}} \to \Phi_*$。它由面映射 $d_i^n\colon\ [n] \to [n-1]$ 给出，

$$d_i^n(k) = \begin{cases} k, & k \le i, \\ k-1, & k > i, \end{cases}$$

对于 $0 \le i < n$ 以及

$$d_n^n(k) = \begin{cases} k, & k < n, \\ 0, & k = n, \end{cases}$$

以及退化映射 $s_i^n\colon\ [n] \to [n+1]$，

$$s_i^n(k) = \begin{cases} k, & k \le i, \\ k+1, & k > i. \end{cases}$$

非正式地说，s_i^n 是跳过 $i+1$ 的映射，d_i^n 是将 i 和 $i+1$ 合并的映射（对于 $i < n$），而 d_n^n 将 0 和 n 合并。

除了 Cut 的像中的态射外，Φ_* 还包含置换映射 $\theta_i^n\colon\ [n] \to [n]$（对于 $1 \le i \le n-1$），它们交换 i 和 $i+1$，同时保持其他所有元素不变。它们满足 *Moore* 关系

$$(\theta_i)^2 = \mathrm{id}, \tag{2.11}$$

$$\theta_i\theta_j\theta_i = \theta_j\theta_i\theta_j,\ \ i = j-1, \tag{2.12}$$

$$\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i,\ \ i < j-1, \tag{2.13}$$

以及混合关系

$$\theta_i s_j = \begin{cases} s_j\theta_i, & i < j, \\ s_{i-1}, & i = j, \\ s_i, & i = j+1 \\ s_j\theta_{i-1}, & i > j+1, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\theta_i d_j = \begin{cases} d_j\theta_i, & i < j-1, \\ d_i\theta_{i+1}\theta_i, & i = j-1, \\ d_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}, & i = j, \\ d_j\theta_{i+1}, & i > j, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$d_i\theta_i = d_i, \tag{2.16}$$

$$d_n^n = d_0^n\theta_1^n\cdots\theta_{n-1}^n. \tag{2.17}$$

映射 s_i^n、d_i^n 和 θ_i^n 生成 Φ_*，而单纯关系、Moore 关系和混合关系足以生成所有关系（见[10,第 5.4] 节）。

A Γ-*set* 是一个函子 $\Phi_* \to$**Set**。这一术语源于Φ_*^{op}与 Segal [31], 提出的范畴 Γ 同构，因此函子$\Phi_* \to$**Set** 可视为定义在 Γ上的预层。

根据 Φ_*的生成元与关系描述， Γ-集是一个单纯集合 $X_\bullet$，配备映射 θ_i^n: $X_n \to X_n$, $1 \le i \le n-1$, 并满足 (2.11)–(2.17)。等价地， Γ- 集是一个单纯集合 $X_\bullet$，对每个 n，都配备对称群 $S_n \cong \mathrm{Aut}_{\Phi_*}([n])$在 X_n 上的作用，使得对换 θ_i^n满足 (2.14)–(2.17)。

2.5. **有限基数范畴**。我们用 Φ表示非空有限基数范畴，它是非空有限集范畴的一个骨架。它是 **Set** 的全子范畴，其对象 $[n] = \{0, \dots, n\}$ 满足 $n \ge 0$。

存在一个自然包含 $\Phi_* \hookrightarrow \Phi$，可将其解释为从有限带基点集范畴到非空有限集范畴的基点遗忘函子的骨架版本。

Φ_* 在 Φ 中的像由固定 0 的态射组成。循环置换 $\tau^n : [n] \to [n]$ 定义如下:

$$\tau^n(k) = \begin{cases} n & k = 0, \\ k-1 & k \ge 1, \end{cases}$$

它们构成了一族重要的映射，但不属于 Φ_* 的像。它们满足以下关系:

$$(\tau^n)^{n+1} = \mathrm{id}, \tag{2.18}$$

$$\theta_i^n \tau^n = \begin{cases} \tau^n \theta_{i+1}^n, & 1 \le i < n-1, \\ (\tau^n)^2 \theta_1^n \cdots \theta_{n-1}^n, & i = n-1, \end{cases} \tag{2.19}$$

以及关系 (2.7)–(2.8)。注意，(2.11)–(2.13) 和 (2.18)–(2.19) 恰好是对称群 $S_{n+1} \cong \mathrm{Aut}_{\Phi}([n])$ 的关系。

任意映射 $f \in \mathrm{Hom}_{\Phi}([m], [n])$ 都可唯一地分解为 $f = (\tau^n)^k \circ g$，其中 $g \in \mathrm{Hom}_{\Phi_*}([m], [n])$ 且 $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$，因此可知上述关系连同 Φ_* 中的关系足以刻画 Φ。

由于刻画循环结构的关系式 (2.7)–(2.8) 和 (2.18) 出现在 Φ中，我们得到一个函子 $\Lambda^{\mathrm{op}} \to \Phi$，其对偶函子按定义即为 (2.1) 中的函子 $\Lambda \to \Phi^{\mathrm{op}}$。

我们用余对称集合 来描述一个函子 $\Phi \to$**Set**。这一术语源于函子 $\Phi^{\mathrm{op}} \to$ **Set** 通常被称为对称集合这一事实。

根据 Φ 的生成元与关系描述，余对称集合是一个配备了映射 θ_i^n: $X_n \to X_n$,$1 \le i \le n-1$ 和 $\tau^n : X_n \to X_n$ 的单纯集合 $X_\bullet$，满足 (2.7)–(2.8)、(2.11)–(2.17) 和 (2.18)–(2.19)。等价地，余对称集合是一个单纯集合 $X_\bullet$，它对每个 n 都配备了对称群 S_{n+1} 在 X_n 上的作用，

使得对换 θ_i^n 和循环置换 τ^n 满足 (2.7)–(2.8) 和 (2.14)–(2.17)。

注释 2.1. 需要指出的是，还有其他一些常见的结构也涉及对单纯集合的 S_{n+1} 作用，但它们与面映射和退化映射的相容条件不同于余对称集合的相容条件。例如，群胚的神经自然地允许 S_{n+1}作用，从而具有对称集合的结构，即一个函子 $\Phi^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$（参见 [23]）。此外，还有 $\Delta\mathfrak{S}$-集合的概念，即对称交叉单纯群 $\Delta\mathfrak{S}$ 上的一个预层（例如，参见 [16, 例 6]）。具体而言，余对称集合满足恒等式 $d_0^2\theta_1^2 = d_2^2$，而对称集合满足 $d_0^2\theta_1^2 = \tau^1 d_2^2$，$\Delta\mathfrak{S}$-集合则满足 $d_0^2\theta_1^2 = \tau^1 d_0^2$。

3. 2-Segal 集合

2-*Segal* 空间 这一概念由 Dyckerhoff 和 Kapranov [14] 以及 Galvèz-Carillo、Kock 和 Tonks [19], 各自独立提出；后者称之为分解空间。本节简要回顾其定义（在离散情形下，即 2-*Segal* 集的定义），并介绍在本文的语境中考虑 2-Segal 集的动机。

除了上文引用的开创性著作之外，现在还有几篇优秀的入门论文 [5, 6, 28, 34] 专门聚焦于 2-Segal 集合。

3.1. 2-Segal 集的定义。

设 $X_\bullet$ 为一个单纯集合。那么，对于$0 < i < n$, 以下图表作为单纯关系的推论均可交换：

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_0} & X_n \\ {\scriptstyle d_{i+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ X_n & \xrightarrow{d_0} & X_{n-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n \\ {\scriptstyle d_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \end{array} \tag{3.1}$$

定义 3.1。 若对所有 $0 < i < n$，图表 (3.1) 都是拉回，则单纯集合 $X_\bullet$ 称为 2-*Segal* 。

注 3.2. 定义 3.1 中的条件取自 [19, 第 3 节4]。那里还包含一些额外条件，对应于 [14], 中所称的幺元性 性质，但 [15] 已证明，幺元性会自动由定义 (3.1) 中的条件推出。该定义还有其他几种等价形式，例如 [14, 命题 2.32] 和 [7, 命题 117]。

范畴的神经是 2-Segal。在第 3.4 节中，我们将详细介绍一个不一定是范畴神经的例子。更多例子见第 5.5 节和第 5.6 节。读者还可以在上文提及的参考文献中找到许多其他例子。

稍后我们将用到以下性质，它结合了定义中的条件与 [19, 引理 3.10] 的结果。

引理 3.3. 如果 $X_\bullet$ 是2-*Segal*，那么对于 $0 \le i < j < n$ 或 $0 < i < j \le n$，图表

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_i} & X_n \\ {\scriptstyle d_{j+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_j} \\ X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \end{array}$$

是一个拉回。

3.2. **动机：2-Segal 集合是 Span 中的拟幺半群**。我们考虑 2-Segal 集合的动机，源于 Stern [33]，的一项结果；该结果表明，2-Segal 集合与 **Span** 中的拟幺半群相对应。我们在此简要回顾这一对应关系，更多细节请参阅 [10,28,34]。关于对称幺半双范畴 **Span**，详尽论述请参阅 [32, 第 5] 节和 [25，例 2.1.22]，简要介绍则请参阅 [10, 第 1] 节和 [28, 第 4] 节。

设 $X_\bullet$ 是一个单纯集合。那么我们可以构造如下 Span：

$$X_1 \times X_1 \xleftarrow{(d_2,d_0)} X_2 \xrightarrow{d_1} X_1, \qquad \{\mathrm{pt}\} \leftarrow X_0 \xrightarrow{s_0} X_1, \tag{3.2}$$

它们可以视为 **Span** 中的乘法和单位态射。由带有 $n = 2$ 的图表 (3.1)，我们得到映射

$$X_{2\ d_2\times_{d_1} 2} X_2 \xleftarrow{(d_1,d_3)} X_3 \xrightarrow{(d_0,d_2)} X_{2\ d_1\times_{d_0} 2} X_2. \tag{3.3}$$

若 $X_\bullet$ 是 2-Segal 的，那么这些映射都是同构，并共同构成乘法的结合子。此外，我们还有映射

$$X_1 \xrightarrow{(d_1,s_0)} X_{0\ s_0\times_{d_2} 0} X_2, \qquad X_1 \xrightarrow{(s_1,d_0)} X_{2\ d_0\times_{s_0} 2} X_0. \tag{3.4}$$

若 $X_\bullet$ 是 2-Segal 的，那么根据单位性（见注 3.2），这些映射都是同构，并构成左、右单位子。五边形方程可由带有 $n = 3$ 的 (3.1) 推出，三角形方程也可由单位性推出。

我们刚才描述的过程给出了 2-Segal 集与**Span**中的伪幺半群之间在同构意义下的对应关系。该对应关系可以提升为范畴等价；见 [34]。

3.3. **更多动机：结构化的 2-Segal 集**。设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象与单纯形范畴的对象相同，并配备一个函子 $\Delta \to \mathcal{C}$，它在对象上是恒等映射。我们将函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 定义为 2-*Segal* $\mathcal{C}$- 集，若其诱导的单纯集合是 2-Segal 的。特别地，利用 (2.1) 中的范畴，我们可以定义 2-Segal 拟循环集合、2-Segal 循环集合、2-Segal Γ-集以及 2-Segal 余对称集合。

利用 2-Segal 集合与**Span**中的拟幺半群之间的对应关系，可以非正式地将 2-Segal $\mathcal{C}$-集合视为**Span**中的带有附加结构和/或性质的拟幺半群。以下是一些相关的精确陈述。

- 2-Segal 抛循环集合对应于**Span** 中的 Frobenius 伪幺半群 [10, 定理 4.2],
- 2-Segal 循环集合对应于**Span** 中的 Calabi-Yau 对象（Calabi-Yau 对象是与对称 Frobenius 代数对应的相干结构） [33, 定理 3.29],
- 2-Segal Γ-集合对应于**Span**中的交换伪幺半群[10,定理 5.6]。

给定一个 2-Segal 余对称集合，由 (2.1) 可立即得出，存在相应的旁循环集合和 Γ-集合，它们具有相同的底层 2-Segal 单纯集合。根据上述对应关系可知，2-Segal 余对称集合会导出**Span** 中的一个拟幺半群，同时具有 Frobenius 结构和交换结构。

我们的主要结果将在第 4 节证明，它给出了以下逆向结论：给定具有相同底层 2-Segal 单纯集合的旁循环集合和 Γ-集合，存在唯一的提升，使之成为一个 2-Segal 余对称集合。因此，2-Segal 余对称集合与**Span**中的交换 Frobenius 伪幺半群之间存在对应关系。

3.4. 偏幺半群及其神经。 A偏幺半群 [30] 是一个集合M，配备了一个部分定义运算 $M_2 \to M$，$(x, y) \mapsto x \cdot y$，满足以下条件$M_2 \subseteq M \times M$:

(1)（结合律）$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$，对所有 $x, y, z \in M$均成立；**(2)**（单位元）存在一个元素 $e \in M$，使得对所有 $x \in M$都有 $e \cdot x = x \cdot e = x$。

上述等号表示两边要么都已定义且相等，要么都未定义。

偏幺半群之间的态射 $\varphi\colon M \to N$ 是一个映射，满足：若 $x \cdot y$ 对 $x, y \in M$ 有定义，则 $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ 有定义，且等于 $\varphi(x \cdot y)$。请注意，这允许 $x \cdot y$ 未定义，但 $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ 有定义的情形。我们用 **PMon** 表示部分幺半群范畴。

给定一个偏幺半群，可以构造一个单纯集合 $N_\bullet M$，称为 M的神经，其中 $N_0 M$ 只有一个点，而 $N_n M$ 由可完全复合的 n-元组组成:

$$N_n M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n \mid x_1 \cdots x_n \text{ is defined}\}\,. \tag{3.5}$$

面映射和退化映射由公式给出，这些公式与幺半群神经的公式完全相同。

文献 [6] 中已证明，偏幺半群的神经是 2-Segal 的。不过我们指出，这一验证在形式上与范畴的神经的验证完全相同；事实上，这两种构造都可以视为偏范畴 的神经的特例（见 [28]）。

以下内容已在 [10], 中提及，但由于它稍后对我们将起到重要作用，我们将更深入地讨论它。

命题 3.4。 若 M 是一个交换偏幺半群，则 S_n 在 $N_n M$ 上的置换作用赋予 $N_\bullet M$ 一个 Γ-*Set*结构。

证明。只需直接验证对换满足 (2.14)–(2.17)，即可证明该命题。不过，也可以采用以下方法直接将 $N_\bullet M$ 构造为一个 Γ-Set；这是 [4]的等离子神经构造的一个特例。

对于每个 $n \geq 0$，令 $P_n = P(\{1, \ldots, n\})$ 为 $\{1, \ldots, n\}$ 的幂集，并赋予其由不交并给出的交换偏幺半群结构（见例3.8）。任何 $f \in \mathrm{Hom}_{\Phi_*}([m], [n])$ 都会诱导一个映射 $f^*\colon P_n \to P_m$，其定义为 $f^*(A) = f^{-1}(A)$，这是一个偏幺半群态射。这定义了一个函子 $\Phi_*^{\mathrm{op}} \to$**偏幺半群范畴**，它在对象层面将 $[n]$ 送到 P_n。

给定一个交换偏幺半群 M，我们便可以定义

$$X_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{PMon}}(P_n, M),$$

并且由上文可立即得出，$X_\bullet$ 具有一个 Γ-集的结构。接下来只需验证这个定义与 (3.5) 中定义的 $X_n = N_n M$ 一致。为此，我们注意到，一个态射 $\phi\colon P_n \to M$ 唯一地由元素 $x_i = \phi(\{i\}) \in M$ 给出，其中 $i = 1, \ldots, n$，且满足 $\prod x_i$ 有定义。然后可以根据第 2.4 节中 Cut 的定义推导出面映射和退化映射的公式。□

备注 3.5. 即使 M 是非交换的，在命题 3.4 的证明中描述的构造也会产生一个 2-Segal Γ-Set。在这种情况下，$X_\bullet$并不同构于 M的神经。相反，它是该神经的单纯子集，其中 X_n 由完全可复合的 n-元组（$x_1, \ldots, x_n$）构成，且对所有 i, j，都有 $x_i x_j = x_j x_i$ 。

最后，我们通过一些例子来说明偏幺半群。

例3.6. 幺半群是偏幺半群的一种特殊情形。

例3.7. 设 L 是一个自然数，并设 $M = \{0, 1, \ldots, L\}$。那么，偏加法运算（当和为 $\leq L$时有定义）赋予 M 交换偏幺半群的结构。其神经为

$$N_n M = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in M^n \;\middle|\; \sum x_i \leq L \right\}.$$

例3.8. 设 S 是一个集合，且设 $M = P(S)$ 是 S的幂集。对于$A, B \in P(S)$，如果 $A \cap B \neq \varnothing$，我们称不交并 $A \sqcup B$无定义；如果 $A \cap B = \varnothing$，则称其有定义。不交并运算赋予 M交换偏幺半群的结构。其神经为

$$N_n M = \{ (A_1, \ldots, A_n) \in M^n \mid A_i \cap A_j = \varnothing \text{ for all } i \neq j \}.$$

例 3.9。设 V 是一个向量空间，并设 M 是 V 的子空间集合。对于 W_1, $W_2 \in M$，如果 $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$，则称直和 $W_1 \oplus W_2$ 未定义；如果 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$，则称 $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$。直和运算赋予 M 交换偏幺半群的结构。其神经为

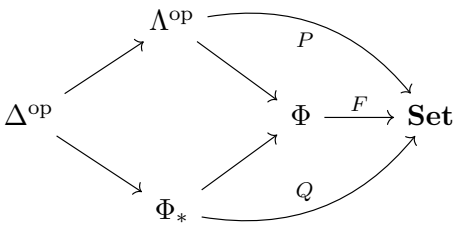
$$N_n M = \left\{ (W_1, \ldots, W_n) \in M^n \;\middle|\; W_i \cap \left(\bigoplus_{j \neq i} W_j \right) = \{0\} \text{ for all } i \right\}.$$

例 3.10。 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，并设 M 是 $\mathcal{H}$ 的子空间集合。对于 W_1, $W_2 \in M$，如果 $W_1 \not\perp W_2$，则称正交和 $W_1 \boxplus W_2$ 未定义；如果 $W_1 \perp W_2$，则称 $W_1 \boxplus W_2 = W_1 \oplus W_2$。正交和运算赋予 M 交换偏幺半群的结构。其神经为

$$N_n M = \{(W_1, \dots, W_n) \in M^n \mid W_i \perp W_j \text{ for all } i \neq j\}.$$

4. 主要结果

定理 4.1. 设 $P\colon \Lambda_\infty^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 是一个拋循环集合，且 $Q\colon \Phi_* \to \mathbf{Set}$是一个 Γ-集合，并假设 P 和 Q具有相同的底层 2-*Segal* 单纯集合。那么 P 是循环的，并且存在唯一的余对称集合$F\colon \Phi \to \mathbf{Set}$，使得该图



可交换。

结合定理 4.1 与 [10], 的结果，我们立即得到以下结论。

推论 4.2. 2-*Segal* 余对称集合与双范畴 **Span** 中的交换 *Frobenius* 伪幺半群之间存在一一对应（在同构意义下）。

本节余下部分将用于证明定理 4.1。由第 2 节给出的表示可立即得出唯一性，因为 Λ^{op} 和 Φ_* 的像包含了 Φ的所有生成元，因此需要证明的是存在性。

设 $X_\bullet$ 是一个带有以下结构的 2-Segal 集:

- 一个旁循环结构，即满足 (2.7)–(2.8) 的可逆映射 $\tau^n\colon X_n \to X_n$；
- 一个 Γ-结构，即对 $1 \leq i \leq n-1$，满足 (2.11)–(2.17) 的映射 θ_i^n: $X_n \to X_n$。

为证明定理 4.1，我们需要证明该旁循环结构是循环的，即 (2.18) 成立，并且相容条件(2.19)成立。

我们首先注意到，2-Segal 拋循环集合中的额外退化映射满足类似于单位性的性质。下述引理的 $n = 1$, $i = 1$ 情形曾出现在 [10, 引理 4.3], 中，但当时省略了证明。

引理 4.3. 对于所有 $1 \leq i \leq n$，图表

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_{n+1}} & X_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle d_i} & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ X_{n-1} & \xrightarrow{s_n} & X_n \end{array}$$

是一个拉回。

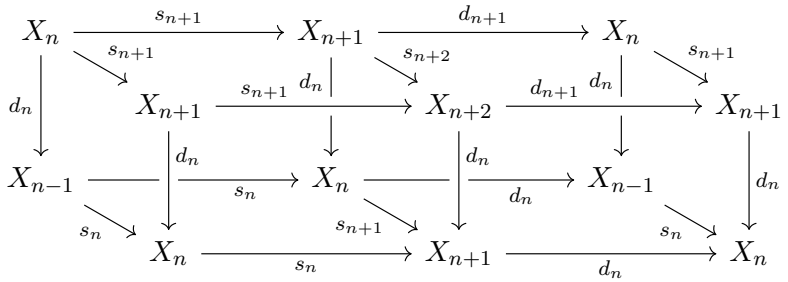
证明。 证明在形式上与 [15, 命题 2.1],的证明完全相同，但为完整起见，我们将其写出。

对于 $1 \leq i < n$，考虑以下图表。

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \xrightarrow{s_{n+1}} & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n \\ \downarrow{\scriptstyle d_i} & & \downarrow{\scriptstyle d_i} & & \downarrow{\scriptstyle d_i} \\ X_{n-1} & \xrightarrow{s_n} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \end{array}$$

根据引理 3.3，右侧的方形是一个拉回。水平映射的复合是恒等映射，因此大方形是一个拉回。由棱柱引理可知，左侧的方形是一个拉回。

对于 $i = n$ 的情形，考虑以下图表。



该图将左右两端的方块表示为中间方块的回缩，而我们已经证明中间方块是一个拉回。由于拉回方块的回缩仍是拉回方块，结论得证。□

注 4.4。 如果 $\omega \in X_{n+1}$ 满足：对于某个 $1 \leq i \leq n$，有 $d_i\omega \in \mathrm{im}(s_n^{n-1})$，那么引理 4.3 蕴含 $\omega \in \mathrm{im}(s_{n+1}^n)$。记作 $\omega = s_{n+1}\eta$，我们可以通过对等式两边应用 d_{n+1} 来解出 η，得到

$$\omega = s_{n+1}d_{n+1}\omega.$$

接下来，我们将推导出由旁循环结构产生的映射 s_{n+1}^n 和 τ^n 与由 Γ-结构产生的映射 θ_i^n 之间的一些相互作用。

引理 4.5。 以下各项均成立：

(1) $\theta_i^{n+1}s_{n+1}^n = s_{n+1}^n d_{n+1}^{n+1}\theta_i^{n+1}s_{n+1}^n$ 对于 $1 \leq i \leq n$，**(2)** $\theta_i^{n+1}s_{n+1}^n = s_{n+1}^n\theta_i^n$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$，**(3)** $\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}s_{n+1}^n = s_{n+1}^n\tau^n$，

证明。对于 $\omega \in X_n$，考虑任意 $\theta_i s_{n+1}\omega \in X_{n+1}$，其中 $1 \leq i \leq n$。由于 $d_i\theta_i s_{n+1}\omega = d_i s_{n+1}\omega = s_n d_i \omega$，由注 4.4 可得

$$\theta_i s_{n+1}\omega = s_{n+1}d_{n+1}\theta_i s_{n+1}\omega,$$

这就证明了第一个结论。

利用第一个结论以及 (2.15) 和 (2.9)，当$i \leq n-1$时，我们有

$$\begin{aligned}\theta_i^{n+1}s_{n+1}^n &= s_{n+1}^n d_{n+1}^{n+1}\theta_i^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= s_{n+1}^n\theta_i^{n+1}d_{n+1}^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= s_{n+1}^n\theta_i^{n+1},\end{aligned}$$

这就证明了第二个结论。

利用第一个和第二个结论以及 (2.17)，我们有

$$\begin{aligned}\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}s_{n+1}^n &= \theta_n^{n+1}s_{n+1}^n\theta_{n-1}^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1} \\ &= s_{n+1}^n d_{n+1}^{n+1}\theta_n^{n+1}s_{n+1}^n\theta_{n-1}^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1} \\ &= s_{n+1}^n d_{n+1}^{n+1}\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= s_{n+1}^n d_0^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= s_{n+1}^n\tau^n,\end{aligned}$$

这就证明了第三个结论。 □

命题 4.6。 $X_\bullet$ 上的旁循环结构是循环的，即对所有 $n \geq 1$，$(\tau^n)^{n+1} = \mathrm{id}$。

证明。注意到，在 Φ_* 中，态射 $\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}$循环置换元素 $\{1,\ldots,n+1\} \subset [n+1]$，因此恒等式 $(\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1})^{n+1} = \mathrm{id}$ 成立。

利用引理 4.5 中的第三个陈述，我们得到

$$\begin{aligned}s_{n+1}^n(\tau^n)^{n+1} &= (\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1})^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= s_{n+1}^n.\end{aligned}$$

结论由 s_{n+1}^n 是单射这一事实得出。 □

命题 4.7。 等式 (2.19)成立。

证明。首先考虑 $1 \leq i < n-1$ 的情形。然后，利用引理 4.5 和 Moore 关系 (2.12)–(2.13)，我们得到

$$\begin{aligned}s_{n+1}^n\tau^n\theta_{i+1}^n &= \theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}s_{n+1}^n\theta_{i+1}^n \\ &= \theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}\theta_{i+1}^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= \theta_i^{n+1}\theta_n^{n+1}\cdots\theta_1^{n+1}s_{n+1}^n \\ &= \theta_i^{n+1}s_{n+1}^n\tau^n \\ &= s_{n+1}^n\theta_i^n\tau^n,\end{aligned}$$

因此可得 $\tau^n\theta_{i+1}^n = \theta_i^n\tau^n$。

对于 $i = n-1$ 情形，我们再次利用引理 4.5 和 Moore 关系，得到

$$\begin{aligned} s^n_{n+1}(\tau^n)^2\theta^n_1\cdots\theta^n_{n-1} &= (\theta^{n+1}_n\cdots\theta^{n+1}_1)^2 s^n_{n+1}\theta^n_1\cdots\theta^n_{n-1} \\ &= \theta^{n+1}_n\cdots\theta^{n+1}_1\theta^{n+1}_n s^n_{n+1} \\ &= \theta^{n+1}_{n-1}\theta^{n+1}_n\cdots\theta^{n+1}_1 s^n_{n+1} \\ &= \theta^{n+1}_{n-1}s^n_{n+1}\tau^n \\ &= s^n_{n+1}\theta^n_{n-1}\tau^n. \end{aligned}$$ □

命题 4.6 和 4.7 合起来完成了定理 4.1 的证明。

5. 单纯形构造

本节介绍一种用于构造 2-Segal 余对称集合的实用方法。

5.1. 基点添加函子。 回忆一下，Φ 是非空有限集范畴的一个骨架，而 Φ_* 是有限带基点集范畴的一个骨架。在第 2.5 节中，我们使用了自然包含 $\Phi_* \hookrightarrow \Phi$，它对应于从有限带基点集到非空有限集的基点遗忘函子。

众所周知，基点遗忘函子有一个左伴随，即基点添加函子。在对象上，相应的函子 $\Phi \to \Phi_*$ˆ将 $[n]$映到 $[n+1]$；在态射上，它将 $f\colon\ [m]\to[n]$映到 $f\colon\ [m+1]\to$ ˆ ˆ$[n+1]$，其定义为 $f(0) = 0$ 和 $f(i) = f(i-1)+1$，其中 $1 \le i \le m+1$。

如第 2 节所述，如果我们将基点添加函子应用于 Φ的生成元，就可以将结果写成Φ_* 的生成元的形式，如下所示：

$$d^n_i \longmapsto \begin{cases} d^{n+1}_{i+1} & i < n, \\ d^{n+1}_1\theta^{n+1}_2\cdots\theta^{n+1}_n & i = n, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$s^n_i \longmapsto s^{n+1}_{i+1}, \tag{5.2}$$

$$\theta^n_i \longmapsto \theta^{n+1}_{i+1}, \tag{5.3}$$

$$\tau^n \longmapsto \theta^{n+1}_n\cdots\theta^{n+1}_1. \tag{5.4}$$

给定任意 Γ-集 $X_\bullet$，我们可以与基点添加函子 ˆ ˆ复合，得到余对称集合 $X_\bullet$，其中 $X_n = X_{n+1}$。由 (5.1)–(5.2)，我们可以得到 $X_\bullet$ 上的单纯结构相对于 $X_\bullet$上的结构映射的公式：

$$\hat{d}^n_i = \begin{cases} d^{n+1}_{i+1} & i < n, \\ d^{n+1}_1\theta^{n+1}_2\cdots\theta^{n+1}_n & i = n, \end{cases}$$
$$\hat{s}^n_i = s^{n+1}_{i+1}.$$

由 (5.3)–(5.4)，我们同样可以写出 $X_\bullet$上的附加余对称结构的显式公式，但还有一种更直接的描述。 $X_\bullet$ 上的 Γ-ˆ结构为每个 n提供了 X_n 上的 S_n-作用，因此 $X_n = X_{n+1}$ 具有一个S_{n+1}-作用，而这正是赋予 $X_\bullet$余对称ˆ结构的 S_{n+1}-作用。

定理 5.1. 设 $X_\bullet$ 是一个 Γ-集。若 $X_\bullet$ 是 2-*Segal*，则余对称ˆ集 $X_\bullet$ 是 2-*Segal*。

ˆ证明。 $X_\bullet$ 的图表 (3.1) 用 $X_\bullet$ 的结构映射表示如下:

$$\begin{array}{ccc} X_{n+2} & \xrightarrow{d_1} & X_{n+1} \\ {\scriptstyle d_{i+2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{i+1}} \\ X_{n+1} & \xrightarrow{d_1} & X_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X_{n+2} & \xrightarrow{d_1\theta_2\cdots\theta_{n+1}} & X_{n+1} \\ {\scriptstyle d_{i+1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{i+1}} \\ X_{n+1} & \xrightarrow{d_1\theta_2\cdots\theta_n} & X_n \end{array}$$

左侧图表由引理 3.3 可知是一个拉回。右侧图表可展开为

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+2} & \xrightarrow{\theta_2\cdots\theta_{n+1}} & X_{n+2} & \xrightarrow{d_1} & X_{n+1} \\ {\scriptstyle d_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle d_{i+2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{i+1}} \\ X_{n+1} & \xrightarrow{\theta_2\cdots\theta_n} & X_{n+1} & \xrightarrow{d_1} & X_n \end{array}$$

这表明它是一个拉回，因为引理 3.3 以及 θ_i 映射可逆。□

注 5.2. 熟悉 2-Segal 对象理论的读者或许会注意到， X_n 的构造与 décalage 函子之间存在相似之处，但我们强调， d_n^n 定义中的差异会带来实质性的影响。具体而言，尽管 2-Segal 对象的 décalage 是 1-Segal 的，但我们将通过例子看到， X_n 并非如此。

5.2. **带基点的 Γ-集合与余对称集合**。若结构化单纯集合$X_\bullet$只有一个点，则称其为带基点的。在 Φ_* 和 Φ中，对象[0] 都是终对象，因此每个 Γ-集合（余对称集合）自然分解为带基点的 Γ-集合（余对称集合）的不交并，且由 X_0的元素索引。在这种情况下，对每个 $u \in X_0$，我们将 $X_\bullet$在位于 u之上的分支上的限制记为 $X_\bullet^u$。

下面的结果是一个直接的练习。

命题 5.3。*A* Γ-集合（余对称集合） $X_\bullet$ 是2-*Segal*，当且仅当对所有 $u \in X_0$，$X_\bullet^u$都是2-*Segal*。

5.3. **交换偏幺半群的单形集**。设 M 为交换偏幺半群。根据命题 3.4， M 的神经是一个 2-SegalΓ-Set，其中 S_n 通过置换分量作用于 N_nM 。应用基点添加函子，我们得到余对称集合 $N_\bullet M$，其中

$$\hat{N}_nM = N_{n+1}M = \left\{(x_0,\dots,x_n) \in M^{n+1} \;\middle|\; x_0\cdots x_n \text{ is defined}\right\},$$

面映射和退化映射定义为

$$d_i(x_0,\dots,x_n)=\begin{cases}(x_0,\dots,x_{i-1},x_i\cdot x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_n), & 0\le i\le n-1,\\ (x_0\cdot x_n,x_1,\dots,x_{n-1}), & i=n,\end{cases}$$
$$s_i(x_0,\dots,x_n)=(x_0,\dots,x_i,e,x_{i+1},\dots,x_n),\qquad 0\le i\le n,$$

并且其中 S_{n+1} 通过置换各个分量起作用。定理 5.1 告诉我们，$\hat{N}_\bullet M$ 是 2-Segal 的。

或者，也可以直接如下描述 $N_\bullet M$ 上的余对称结构。给定 $f\in \mathrm{Hom}_\Phi([m],[n])$，令

$$f_*:\hat{N}_m M\to \hat{N}_n M$$

由 $f_*(x_0,\dots,x_m)=(y_0,\dots,y_n)$给出，其中

$$y_i=\prod_{j\in f^{-1}(i)} x_j.$$

直接检查可知，这给出了一个函子 $\Phi\to\mathbf{Set}$，并且它与上面给出的面映射和退化映射一致。

现在，假设我们还可以考虑由元素 $L\in M$ 给出的分量 $\hat{N}_\bullet^L M$：

$$\hat{N}_n^L M=\left\{(x_0,\dots,x_n)\in M^{n+1}\;\middle|\;x_0\cdots x_n=L\right\},\tag{5.5}$$

它继承了余对称结构，并根据命题 5.3 是 2-Segal 的。我们将 $\hat{N}_\bullet^L M$称为 M的 L-单形集。

我们强调，通常情况下， M 的 L-单形集不同于 M的神经，尽管在某些情况下（例如，当 M 是阿贝尔群时），二者同构。 L-单形集与神经之间的关系将在第 5.4 节进一步讨论。

下面给出一个典型例子。更多例子见第 5.5 节和第 5.6 节。

例 5.4。 设 M 为带有部分定义的加法运算的区间 $[0,1]$，并设 $L=1$。那么

$$\hat{N}_n^1 M=\left\{(x_0,\dots,x_n)\in[0,1]^{n+1}\;\middle|\;x_0+\cdots+x_n=1\right\}$$

是拓扑 n-单形，而余对称结构给出了通常的 S_{n+1} 作用。

5.4. **单形集与神经**。 设 M 是一个带有指定元素 $L\in M$的交换偏幺半群。根据这些数据，可以构造出两个不同的相关单纯集合——神经 $N_\bullet M$ 和 L-单形集 $\hat{N}_\bullet^L M$。神经是一个 Γ-集，而 L-单形集也具有由余对称结构诱导的Γ-集结构。

根据第 5.3 节中给出的 L-单纯形 Set 的描述，以下结论显而易见。

命题 5.5。映射

$$\hat{N}_n^L M \longrightarrow N_n M,$$
$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n),$$

构成一个 Γ-集态射 $\hat{N}_\bullet^L M \to N_\bullet M$。

一般而言，命题 5.5 中的态射并非同构，但以下结果给出了一个充要条件。

定义 5.6。若交换偏幺半群 M 相对于 $L \in M$ 具有正交补性质，则称其具有该性质：对于每个 $x \in M$，都存在唯一的 $x^\perp \in M$ 使得 $x \cdot x^\perp = L$。

命题 5.7。命题 *5.5* 中的态射是同构，当且仅当 M 相对于 L具有正交补性质。

证明。($\Longleftarrow$) 若 M 相对于 L具有正交补性质，则对于 $(x_0, \ldots, x_n) \in \hat{N}_n^L M$，必有 $x_0 = (x_1 \cdots x_n)^\perp$，因此映射

$$N_n M \longrightarrow \hat{N}_n^L M,$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left((x_1 \cdots x_n)^\perp, x_1, \ldots, x_n\right),$$

为命题 5.5 中的映射提供一个逆映射。

($\Longrightarrow$) 对于 $n = 1$，命题 5.5 中的映射由 $(x_0,\ x_1) \mapsto x_1$ 给出。若此映射是同构，那么对于每个 $x_1 \in M$，都存在唯一的$x_0 \in M$，使得 $(x_0,\ x_1) \in \hat{N}_1^L M$，或者等价地，使得 $x_0 \cdot x_1 = L$。□

推论 5.8。设 M 是一个交换偏幺半群，且相对于 $L \in M$ 存在正交补。那么 M 的神经具有余对称结构，因此还诱导出一个循环结构。

我们强调，推论 5.8 中神经上的余对称结构和循环结构取决于 L 的选择。具体而言，$N_n M$ 上的循环结构由下式给出

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, (x_1 \cdots x_n)^\perp). \tag{5.6}$$

5.5. **示例：效应代数**。效应代数的概念由 Foulis 和 Bennett [17] 在量子逻辑的研究中引入。

定义 5.9。效应代数是一种交换偏幺半群 M，配备了一个指定元素 $L \in M$，并满足以下条件。

(1)（正交补）对于每个 $x \in M$，都存在唯一的 $x^\perp \in M$，使得 $x \cdot x^\perp = L$。**(2)**（零一律）如果定义了 $x \cdot L$，那么 $x = e$。

根据推论 5.8，效应代数的神经具有余对称结构。这稍微加强了 Roumen [29]，的一项结果；他证明了效应代数的神经具有循环结构。我们注意到，Roumen 的构造基于测试空间，其定义与 (5.5) 中的 $\hat{}N_n^L(M)$ 相同。

我们先前见过的一些例子是效应代数，因此它们的神经具有余对称结构，其中循环运算由 (5.6) 给出。

例 5.10. 带有部分定义的加法运算的单位区间 $M = [0,1]$ 和 $L = 1$（见例 5.4）是一个效应代数。它的神经为

$$N_nM = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}.$$

在这种情况下，同构 $\hat{}N_n^1 M \cong N_nM$ 重现了 n-单纯形两个标准模型之间的经典同构。

例 5.11. 带有部分定义的加法运算的偏幺半群 $M = \{0, \dots, L\}$（见例3.7）是一个效应代数。

例 5.12. 集合 S 的幂集 $M = P(S)$，配备部分定义的不交并运算（见例 3.8），是一个带有 $L = S$ 的效应代数。

例 5.13。 希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的子空间集合，配备部分定义的正交和运算（见例 3.10），构成一个效应代数，并具有 $L = \mathcal{H}$。

5.6. **非效应代数的例子**。 这里我们将给出一些 2-Segal 余对称集合的例子，它们来自将 L-单纯形构造应用于并非效应代数的偏幺半群。具体而言，例 5.15 产生的有基点 2-Segal 余对称集合，与任何偏幺半群的神经都不同构。

例 5.14。 设 G 是一个阿贝尔群，且令 $L \in G$ 为任意固定元素。由于不满足零一律（除非 G 是平凡群）， G 不是效应代数。不过，正交补性质仍然成立，因此推论 5.8 依然适用，并且 G 的神经具有余对称结构，其中循环结构具体由下式给出

$$\tau(g_1, \dots, g_n) = (g_2, \dots, g_n, L(g_1 \cdots g_n)^{-1}).$$

例 5.15. 令 S 为一个集合，并考虑带有并运算的幺半群 $M = P(S)$。需要强调的是，这里指的是普通并运算，不同于例3.8中的部分定义的不交并运算。

令 $L = S$， S-单纯形集合 $\hat{N}_\bullet^S M$ 由下式给出

$$\hat{N}_n^S M = \left\{(A_0, \dots, A_n) \in M^{n+1} \;\middle|\; A_0 \cup \cdots \cup A_n = S.\right\}$$

L-单形集合是一个有基点的 2-Segal 余对称集合，但由于正交补性质不成立（除非 $S = \varnothing$），命题

5.5 中的映射不是同构。事实上，$\hat{}N_\bullet^S$ 不同构于任何偏幺半群的神经。为此，我们注意到，偏幺半群的神经满足映射 $(d_2, d_0)\colon X_2 \to X_1 \times X_1$ 是单射这一性质，但在此情形下，对于所有 $A \in P(S)$，$d_2(A,S,S) = (A \cup S, S) = (S,S)$，且 $d_0(A,S,S) = (A \cup S, S) = (S,S)$。

6. 相干二维拓扑量子场论

如引言所述，我们的初衷是将 2-Segal 余对称集合诠释为一个以 **Span**为取值的相干二维拓扑量子场论。本节将进一步阐述其含义，并介绍如何通过第 5.3 节的单纯形集构造得到真正的拓扑量子场论。

6.1. 来自协边范畴的伪函子。 我们先对交换 Frobenius 代数与二维定向拓扑量子场论之间众所周知的对应关系作一个稍显显然的观察。给定一个交换 Frobenius 代数和一个二维协边，若要构造与之对应的拓扑量子场论赋予该协边的线性映射，首先必须选择一种裤子分解，也就是将协边分解为裤子、圆盘和圆柱。然后，我们利用 Frobenius 代数的数据为分解中的每个部分赋予一个线性映射，并适当地复合这些映射，从而得到赋予该协边的线性映射。交换 Frobenius 代数的公理是必要且充分的条件，确保由同一协边的两种不同裤子分解所产生的线性映射相等。

给定一个 2-Segal 余对称集合 $X_\bullet$，我们可以类似地从任意配备裤子分解[2]的协边中得到一个跨。为此，我们使用乘法和单位跨越 (3.2)，以及余乘法和余单位跨越

$$X_1 \xleftarrow{d_0} X_2 \xrightarrow{(\tau d_2, d_1)} X_1 \times X_1, \qquad\qquad X_1 \leftarrow X_0 \xrightarrow{s_1} \{\mathrm{pt}\}.$$

与同一协边的两种不同裤子分解相关联的跨并不相等，但它们之间存在同构；这个同构由结合子 (3.3)、单位子 (3.4)、映射 s_2^1 和 θ_1^2，以及**Span**的结构 2-态射构造而成（见 [32, 第 5]节）。相干条件应确保以这种方式构造的同构是唯一的[3]。

如果我们为每个协边微分同胚类全局地选定一个裤子分解，那么刚才描述的数据便给出了一个

[2]我们还应选择计算跨的复合与乘积的顺序，但为简单起见，我们假设运算顺序已预先固定。[3]需要说明的是，若要使这一点严谨，就需要交换 Frobenius 伪幺半群的相干定理；据我们所知，文献中目前尚无此类定理。

从二维定向配边范畴$\mathbf{Cob}_2$到$\mathbf{Span}$的伪函子。不同的全局分解选择会导出等价的伪函子，不过我们注意到，也有一种标准选择，即 [26, 第 1.4 节16] 中的“标准形式”分解。

若我们转到 $\mathbf{Span}$ 的同伦范畴，并将同构的跨度视为相同，则上述函子会诱导出一个以跨度范畴为取值的拓扑量子场论。

6.2. **Hall 代数构造**。 在 [2], 中，作者讨论了将跨度（满足某些有限性条件）映射为向量空间线性映射的函子。将这些函子应用于 2-Segal 集的数据后，我们得到一个结合代数。详情请参见 [14, 第 8]章或 [11]，关于各种构造及其相互关系的简明总结，请参见 [28, 第 6]节。这里我们将重点讨论有限 2-Segal 集，在这种情况下，不同的函子彼此相同。

设 $X_\bullet$ 是一个有限的 2-Segal 集（即对每个n， X_n 都是有限集），并设 $\Bbbk$ 是任意域。*Hall* 代数 $\mathcal{A}(X)$ 定义如下。作为向量空间， $\mathcal{A}(X) = \Bbbk[X_1]$，而对于 $x,\ y \in X_1$ 乘法$m(x,\ y)$ 定义为

$$m(x,y) = \sum_{\omega \in T^{-1}(x,y)} d_1\omega, \tag{6.1}$$

其中 $T\colon\ X_2 \to X_1 \times X_1$ 由 $T(\omega) = (d_2\omega,\ d_0\omega)$ 给出。乘法单位元是

$$1 = \sum_{u \in X_0} s_0 u.$$

作为推论 4.2 的直接推论，若 $X_\bullet$ 具有余对称结构，则 $\mathcal{A}(X)$ 是一个 Frobenius 代数，其余单位由

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in s_1(X_0), \\ 0 & x \notin s_1(X_0), \end{cases}$$

并且乘法 (6.1) 是交换的。将这一事实应用于第 5.3 节的单纯形构造，我们得到一种构造：它可以从任意带有指定元素的有限交换偏幺半群构造出交换 Frobenius 代数。

例 6.1. 设 M 是一个关于 $L \in M$具有正交补的有限交换偏幺半群。由推论 5.8 可知， M 的神经具有余对称结构。相应的 Hall 代数为 $\mathcal{A} = \Bbbk[M]$，其乘法定义如下：

$$m(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{if } x \cdot y \text{ is defined}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

单位元为 $1 = e$，余单位定义如下：

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x = L, \\ 0 & x \neq L. \end{cases}$$

在一些特殊情况下，我们可以明确描述所产生的 Frobenius 代数：

- 当 $M = G$ 是一个带有指定元素 $L \in G$的阿贝尔群时，这种构造会产生群代数 $\Bbbk[G]$，其余单位由 $\varepsilon(L) = 1$ 和 $\varepsilon(g) = 0$（对于 $g \neq L$）给出。特别地，当 $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$时，该群代数同构于 $\Bbbk[x]/\langle x^m - 1\rangle$，其中余单位提取 x^L 系数。
- 当 $M = \{0, \dots, L\}$ 带有部分定义的加法运算（见例3.7）时，相应的 Frobenius 代数 $\mathcal{A}$ 同构于 $\Bbbk[x]/\langle x^{L+1}\rangle$，其中余单位提取 x^L 系数。
- 当 S 是一个 k元集合，且 $M = P(S)$带有不交并运算（见例3.8）时，$\mathcal{A}$同构于 $\Bbbk[x_1, \dots, x_k]/\langle x_i^2\rangle$，其中余单位提取 $x_1 \cdots x_k$系数。

例 6.2. 设 $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ 是一个有限集，并令 $M = P(S)$ 配备并运算（见例 5.15）。那么

$$\hat{N}_1^S M = \left\{(A_0, A_1) \in P(S)^2 \;\middle|\; A_0 \cup A_1 = S\right\}$$

and

$$\hat{N}_2^S M = \left\{(C_0, C_1, C_2) \in P(S)^3 \;\middle|\; C_0 \cup C_1 \cup C_2 = S\right\},$$

其面映射定义为

$$\begin{aligned} d_0(C_0, C_1, C_2) &= (C_0 \cup C_1, C_2), \\ d_1(C_0, C_1, C_2) &= (C_0, C_1 \cup C_2), \\ d_2(C_0, C_1, C_2) &= (C_0 \cup C_2, C_1). \end{aligned}$$

注意，任意一个 $(A_0, A_1) \in \hat{N}_1^S M$ 都等价于将 S 划分为三个互不相交的集合 $A_0 \smallsetminus (A_0 \cap A_1)$、$A_1 \smallsetminus (A_0 \cap A_1)$ 和 $A_0 \cap A_1$，因此$|\hat{N}_1^S M| = 3^k$。

令 $\mathcal{A} = \Bbbk[\hat{N}_1^S M]$ 为与 $\hat{N}_\bullet^S M$ 关联的 Hall 代数。为了更好地理解 $\mathcal{A}$ 的结构，我们先考虑 $\hat{N}_1^S M$ 中形如 $x_A = (S, A)$ 的元素，其中 $A \in P(S)$。若 $A \cap B = \varnothing$，则 $\omega = (S, A, B)$ 是 $\hat{N}_2^S M$ 中唯一满足 $T(\omega) = (x_A, x_B)$ 的元素。将由 (6.1) 给出的乘积记作 $x_A x_B$，则有 $x_A x_B = d_1 \omega = x_{A \cup B}$。特别地，若记 $x_i = x_{\{a_i\}}$，则有

$$x_A = \prod_{a_i \in A} x_i$$

对于所有 $A \in P(S)$。

接下来，我们考虑形如 $y_A = (S \smallsetminus A, A)$ 的 $\hat{N}_1^S M$ 中的元素。如果 $A \cap B = \varnothing$，那么 $\omega = (S \smallsetminus (A \cup B), A, B)$ 是 $\hat{N}_2^S M$ 中唯一满足条件的元素

使得 $T(\omega) = (y_A, y_B)$，因此 $y_A y_B = d_1\omega = y_{A\cup B}$。特别地，若记 $y_i = y_{\{a_i\}}$，则有

$$y_A = \prod_{a_i \in A} y_i$$

对所有 $A \in P(S)$。

此外，若 $A \cap B = \varnothing$，则 $\omega = (S \smallsetminus B,\ A,\ B)$ 是 $\hat{}N_2^S M$ 中满足 $T(\omega) = (x_A,\ y_B)$ 的唯一元素，因此 $x_A y_B = d_1\omega = (S \smallsetminus B,\ A \cup B)$。注意，$\hat{}N_1^S M$ 中的每个元素都可以唯一地表示为这种形式，因此可得 $\mathcal{A}$ 由 $\{x_i, y_i\}$ 生成。

对每个 i，$T^{-1}(x_i,\ x_i)$ 中有两个元素，分别是 $(S,\ \{a_i\},\ \{a_i\})$ 和 $(S\smallsetminus\{a_i\},\ \{a_i\},\ \{a_i\})$。因此，我们有

$$x_i^2 = (S, \{a_i\}) + (S \smallsetminus \{a_i\}, \{a_i\}) = x_i + y_i,$$

因此 $y_i = x_i^2 - x_i$。此外，$T^{-1}(x_i,\ y_i) = \varnothing$，因此 $x_i y_i = x_i^3 - x_i^2 = 0$。

上述讨论结合维数计数，使我们得以得出结论：$\mathcal{A}$ 与 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_k]/\langle x_i^3 - x_i^2\rangle$ 同构。余单位由性质 $\varepsilon(\varnothing, S)) = 1$ 定义，并且在 $\hat{}N_1^S M$ 的其他元素上取值为零；但用生成元 x_i 表示时，它写作 $\varepsilon(x_1^2 \cdots x_k^2) = 1$，其中 ε 在次数为 $< 2k$ 的项上取值为零。

参考文献

[1] Lowell Abrams, 《二维拓扑量子场论与 Frobenius 代数》, 《结理论及其应用》 **5** 1996 5, 569 587 1414088 ( ), 第–

[2] 号。MR John C. Baez、Alexander E. Hoffnung 和 Christopher D. Walker, 《高维代数 VII：群胚化》, 《范畴理论与应用》**24** (2010), 第18号, 489–553。[3] Bruce Bartlett、Christopher L Douglas、Christopher J Schommer-Pries 和 Jamie Vicary, 《扩展三维配边作为模对象理论》, arXiv预印本 arXiv:1411.0945 (2014)。[4] Jonathan Beardsley 和 So Nakamura, 《射影几何与简单有基点拟阵作为》 $\mathbb{F}_1$-模, arXiv预印本 arXiv:2404.04730 (2024)。[5] Julia E Bergner, 《2-Segal 集合的组合例子与应用》, arXiv预印本 arXiv:2411.18544 (2024)。[6] Julia E. Bergner、Angélica M. Osorno、Viktoriya Ozornova、Martina Rovelli 和 Claudia I. Scheimbauer, 《2-Segal 集合与 Waldhausen构造》, 《拓扑学及其应用》**235** (2018), 445–484。[7] Julia E. Bergner、Angélica M. Osorno、Viktoriya Ozornova、Martina Rovelli 和 Claudia I. Scheimbauer, 《2-Segal对象与 Waldhausen构造》, 《代数与几何拓扑学》**21**(2021), 第3号, 1267–1326。MR4299667[8] Damien Calaque、Rune Haugseng 和 Claudia Scheimbauer, 《导出代数几何中的 AKSZ 构造作为扩展拓扑场论》, 第308卷, 美国数学会, 2025。[9] Alain Connes, 《循环上同调与函子》Ext^n, 《巴黎科学院报告》第一辑数学。 **296** 1983 23, 953 958 777584 ( ), 第–号。MR Ivan

[10] Contreras、Rajan Amit Mehta 和 Walker H. Stern, 《Span 双范畴中的 Frobenius 伪幺半群与交换伪幺半群》, 《几何与物理学杂志》**207** (2025), 论文编号105309, 31页。

[11] Benjamin Cooper 和 Matthew B Young, 《通过 2-Segal空间构造 Hall代数》, arXiv预印本 arXiv:2409.19384 (2024)。[12] Louis Crane 和 David Yetter, 《拓扑量子场论中隐含的代数结构》, 《结理论及其应用》8 (1999), 125–163。[13] Robertus Henricus Dijkgraaf, 《二维共形场论的几何方法》, 博士学位论文 (1989)。[14] Tobias Dyckerhoff 和 Mikhail Kapranov, 《高阶Segal空间》, 《数学讲义》第2244卷, Springer, 尚贝里, 2019。[15] Matthew Feller、Richard Garner、Joachim Kock、May U. Proulx 和 Mark Weber, 《每个 2-Segal 空间都是酉的》, 《当代数学通讯》23 (2021), 第2号, 论文编号2050055, 6页。[16] Zbigniew Fiedorowicz 和 Jean-Louis Loday, 《交叉单纯群及其相关同调》, 《美国数学会汇刊》326 (1991), 第1号, 57–87。[17] D. J. Foulis 和 M. K. Bennett, 《效应代数与非锐量子逻辑》, 1994。第1331–1352页。1304.5942 纪念 Constantin Piron 六十寿辰专辑。MR[18] Daniel S. Freed, 《关于陈-西蒙斯理论的评论》, 《美国数学会通报》（新系列）46 (2009), 第2号, 221–254。MR2476413[19] Imma Gálvez-Carrillo、Joachim Kock 和 Andrew Tonks, 《分解空间、关联代数与莫比乌斯反演 I：基本理论》, 《高等数学》331 (2018), 952–1015。[20] Imma Gálvez-Carrillo、Joachim Kock 和 Andrew Tonks, 《同伦线性代数》, 《爱丁堡皇家学会学报》A辑148 (2018), 第2号, 293–325。[21] Ezra Getzler 和 John D. S. Jones, 《交叉积代数的循环同调》, 《纯粹与应用数学杂志》445 (1993), 161–174。[22] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine, 《单纯形同伦论》, 《数学进展》第 174 卷, Birkhäuser出版社, 巴塞尔, 1999。[23] Marco Grandis, 《有限集与对称单纯集》, 《范畴理论与应用》8 (2001), 244–252。[24] Rune Haugseng, 《迭代跨度与经典拓扑场论》, 《数学杂志》289 (2018), 第3号, 1427–1488。[25] Niles Johnson 和 Donald Yau, 《二维范畴》, 牛津大学出版社, 牛津, 2021。[26] Joachim Kock, 《Frobenius代数与二维拓扑量子场论》, 《伦敦数学学会学生教材》第59卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2004。[27] Jean-Louis Loday, 《循环同调》, 施普林格出版社, 柏林, 1998。第2版。[28] Sophia E Marx 和 Rajan Amit Mehta, 《2-Segal 集合与 Span 双范畴中的拟幺半群》, arXiv预印本 arXiv:2505.22832 (2025)。[29] Frank Roumen, 《效应代数的上同调》, 第13届量子物理与逻辑国际会议论文集, 2017, 174 201 3594213 第–页。[30] MR Graeme Segal, 《构形空间与迭代环空间》, 《数学发明》21 (1973), 213–221。[31] , 《范畴与上同调理论》, 《拓扑学》13 (1974), 293–312。[32] Michael Stay, 《紧闭双范畴》, 《范畴理论与应用》31 (2016), 论文编号26, 755–798。[33] Walker H. Stern, 《2-Segal对象与跨度中的代数》, 《同伦相关结构杂志》16 (2021), 第2号, 297–361。[34] , 《关于2-Segal条件的观点》(2024)。[35] Ross Street, 《弗罗贝尼乌斯单子与伪幺半群》, 《数学物理杂志》45 10, 3930 2004 3948 ( ), 第–号。

马萨诸塞大学阿默斯特分校数学系，马萨诸塞州电子邮箱地址：semarx@umass.edu 史密斯学院数学科学系，College Lane 44 号，北安普敦，马萨诸塞州 01063电子邮箱地址：rmehta@smith.edu