arXiv:2512.25024v1 [physics.class-ph] 31 Dec 2025

论非线性惯性变换

Nicholas Agia*

新罕布什尔大学，物理与天文学系

摘要

人们通常认为，两个惯性参考系之间最一般的变换，在其笛卡尔坐标中是仿射线性的；然而，这一假设并不成立。我们给出了最一般惯性参考系变换的完整推导，而这种变换实际上是非线性的；在此过程中，我们将发现，保持惯性定律的条件表现为施瓦茨微分方程，这或许是施瓦茨导数出现的最简单的物理学情境。随后我们证明，若要使这种最一般的惯性变换进一步保持各个方向上的光速不变，它仍然必须是仿射线性的。从物理角度看，本文可视为将唯一确定狭义相对论所需的公设数量减少一个，同时证明惯性变换会自动赋予时空一种向量空间结构，尽管其维数比预期高一维。从数学角度看，本文可视为对施瓦茨微分方程高维类比及其最一般解的推导。

目录

1 引言与概要 1 2 惯性约束的推导 3

3 求解约束方程 63.1 分离出 f 与施瓦茨微分方程.7 3.2 求解 g^i .11

4 性质 及非线性变换的意义 1
24.1 数学结构.12 4.2 物理结构.15**5 高维施瓦茨导数 17**

1 引言与总结

基于惯性参考系及其相互变换的相对论框架有着悠久的历史。毫无疑问，其中最著名、最重要的框架是狭义相对论，其惯性变换由洛伦兹和庞加莱发现，最终由爱因斯坦于 1905 [1]统一。尽管我们的物理宇宙中并不存在惯性参考系，这一概念仍然是当前描述

*Nicholas.Agia@unh.edu

自然定律的基础，因为广义相对论通过等效原理 [2], 建立在局部惯性系之上；这也是狭义相对论量子场论（如标准模型）在引力效应可以忽略的情形下仍然如此有用的原因。

能够提出的最基本问题之一是：两个惯性观察者之间最一般的惯性参考系变换是什么？为设定我们的约定，记第一位（“未加撇”）观察者的时空坐标为 $(t, \vec{x})$，第二位（“加撇”）观察者的时空坐标为 $(t', \vec{x}')$。我们研究 $d-1$ 个空间维度，并将其视为配备通常欧几里得度规的欧几里得空间 $\mathbf{R}^{d-1}$ 。对于时空的结构，或任何物理理论的动力学，我们不作进一步假设。参考系变换 $(t, \vec{x}) \mapsto (t', \vec{x}')$ 允许我们将任意粒子在未加撇参考系中测得的轨迹 $\vec{x}(t)$，转换为同一粒子在加撇坐标系中测得的轨迹 $\vec{x}'(t')$。我们获得的唯一信息是，这两个参考系都是惯性参考系，这里意味着：在一个参考系中加速度为零的轨迹，变换到另一个参考系后加速度仍为零，即

$$\vec{a}(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{a}'(t') = 0; \tag{1}$$

我们使用 $\vec{x}$ 的笛卡尔坐标，其中欧几里得度规具有标准形式，因此 $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{x}}{(t)\ dt^2}$ 是恰当的加速度概念。现在，~~—~~ 我们可以明确地提出这样一个问题：最一般的此类惯性变换是什么（$t, \vec{x}$）$\mapsto$（$t', \vec{x}'$）？考虑到这是物理学中最基本的问题之一，严格推导其答案似乎并未见于可检索的文献，这多少令人惊讶。人们通常直接假设，惯性变换必须是时空坐标的仿射线性变换，即具有以下形式：$t' = c_1 + \vec{c}_2 \cdot \vec{x} + c_3 t$ 和 $\vec{x}' = \vec{c}_4 + A\vec{x} + \vec{c}_5 t$，其中标量 c_1 和 c_3、向量 $\vec{c}_2$、$\vec{c}_4$ 和 $\vec{c}_6$，以及矩阵 A 都是常量，但这一假设是错误的。事实上，就连爱因斯坦在从公设推导洛伦兹推进时，也实际上假设了变换必须是线性的 [1][1]。当然，狭义相对论框架本身及其假设并无问题，但正如我们将看到的，这个特定假设其实并非必要。

事实上，最一般的惯性变换是非线性的；如下文所证，这种变换并非仿射线性，而是时空坐标中的射影线性变换，即其形式为

$$t' = \frac{c_1 + \vec{c}_2 \cdot \vec{x} + c_3 t}{c_6 + \vec{c}_7 \cdot \vec{x} + c_8 t} \tag{2}$$

$$\vec{x}' = \frac{\vec{c}_4 + A\vec{x} + \vec{c}_5 t}{c_6 + \vec{c}_7 \cdot \vec{x} + c_8 t}, \tag{3}$$

其中涉及的所有系数都是常数。当然，这些非线性变换确实是惯性变换，并不是什么新鲜事；鉴于这个问题已有数百年的历史，可以合理推测，证明它们构成惯性变换完备集合的推导，过去某个时候应当已经在某处出现过。然而，本文旨在为这一事实提供一份严谨且现代读者易于理解的证明。由此可见，爱因斯坦推导中的线性假设（或等价地，齐次性假设）是不必要的，因为一旦要求所有方向上的光速保持不变，非线性变换便会被排除，从而将推导狭义相对论所需的公设数量减少一个。更有趣的结果是，惯性变换总能被视为某个（射影化的）向量空间中的基变换，

[1]在1923年英文版中，爱因斯坦写道：“首先，显然这些方程必须是*linear*，这是由于我们赋予空间和时间的齐次性。”这只不过是把这一假设隐藏在齐次性之中；关键在于，即使这一假设也是不必要的。

从而自动赋予时空以向量空间结构，而无需事先假定时空已经是一个向量空间。在数学方面，这一推导或许构成了物理学中最简单的例子：著名的施瓦茨导数由此出现。施瓦茨导数是一种单变量非线性微分算子，具有众多应用。我们还将更进一步，推导出适当的高维版本的施瓦茨导数及其相应的微分方程；该方程的解正是上述射影线性变换。这些构成了本文的主要结果。

下文所述内容无论在概念上还是计算上都相当基础。本文旨在为前述论断提供详尽证明，并展示推导过程中的所有步骤；我们也不会假设读者熟悉射影几何，因此会比通常更详细地解释这些及其他数学细节，以期让广大本科生都能读懂本文。本文结构如下。第2节将推导出所有惯性参考系变换所满足的一组耦合非线性偏微分方程，这无疑是一个标准结果。第3节将通过将时间变换函数与空间变换函数解耦，并逐一求解，得到这些方程的最一般解；在这一节中，我们将看到，关于时间变换函数的第一个解耦方程就是施瓦茨微分方程。第4节将从数学和物理学的角度，详细介绍非线性惯性变换的一些最重要性质。最后，第5节将证明，惯性约束可以改写为高维施瓦茨导数方程，并引入一个四阶全对称非线性微分算子，其核由上述射影线性变换构成。

2 惯性约束的推导

考虑两个惯性参考系（t，$\vec{x}$）和（t'，$\vec{x}'$），它们的坐标通过以下变换相互关联

$$t' = f(t,\vec{x}) \qquad\qquad t = F(t',\vec{x}') \tag{4}$$

$$\vec{x}' = \vec{g}(t,\vec{x}) \qquad\qquad \vec{x} = \vec{G}(t',\vec{x}'); \tag{5}$$

按照惯例，我们规定每位观察者始终以自身为坐标系的空间原点，因此，例如，未加撇号的观察者所测得的带撇号观察者的轨迹 $\vec{x}(t)$由 $\vec{g}\big(t,\ \vec{x}(t)\big) = 0$的解给出。到目前为止，对上述参考系变换施加的唯一一般性条件，是它在某个开连通子集 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$上可逆；因为按照定义，$(t,\vec{x}) \in \Omega$ 和 $(t',\vec{x}') \in \Omega' \equiv (f,\vec{g})(\Omega)$ 都应为各自观察者有效定义域的重叠部分中的每个时空点提供唯一坐标。点粒子相对论关注的基本任务，是将点粒子在 $(t,\vec{x})$ 参考系中测得的任意轨迹 $\vec{x}(t)$，变换为在 $(t',\vec{x}')$ 参考系中测得的相应轨迹 $\vec{x}'(t')$。这种变换是通过以下事实实现的：新自变量 t' 是粒子在新参考系中坐标为 $(t',\vec{x}'(t'))$ 时的时间；与之对应，在原参考系中，该粒子坐标为 $(t,\vec{x}(t))$ 时的原时间坐标为 t 。这就定义了两个参考系中该轨迹的自变量之间的函数$t(t')$。要求 t 和 t' 都为有效时间坐标这一物理条件，意味着函数$t(t')$也必须作为依赖于轨迹的映射 $\big\{t \,\big|\, \big(t,\vec{x}(t)\big) \in \Omega\big\} \to \big\{t' \,\big|\, \big(t',\vec{x}'(t')\big) \in \Omega'\big\}$ 可逆，即

$$t'(t) = f\big(t,\vec{x}(t)\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t(t') = F\big(t',\vec{x}'(t')\big). \tag{6}$$

当然，这种可逆性也取决于所考虑的轨迹 $\vec{x}(t)$，因此，若假设 $(t,\vec{x}) \mapsto (t',\vec{x}')$ 是有效的局部参考系变换，那么 $t(t')$ 的单射性便会对允许的粒子轨迹本身施加限制，从而构成运动学与动力学之间最简单的联系之一[2]。由于我们希望构造尽可能一般的惯性参考系变换，唯一应作的假设是：允许存在足够多条速度各不相同的直线轨迹，具体将在下文说明。因此，$t'(t)$ 和 $t(t')$ 在此互为真正的逆函数，仅仅是为了排除病态变换 $(t,\vec{x}) \mapsto (t',\vec{x}')$；例如，两位观察者各自对应的平凡轨迹 $\vec{x}(t) = 0$ 和 $\vec{x}'(t') = 0$ 总是存在的，这就要求 $f(t,0)$ 和 $F(t',0)$ 在各自的定义域上，分别作为其自变量的函数可逆。我们稍微扩展这一条件，要求对于相关定义域中的所有固定 $\vec{x}_0$ 和 $\vec{x}'_0$，恒定轨迹 $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ 和 $\vec{x}'(t') = \vec{x}'_0$ 也都是允许的；这分别要求在 $\vec{x}$ 和 $\vec{x}'$ 取常数时，$f(t,\vec{x})$ 和 $F(t',\vec{x}')$ 可逆。

现在，任意允许的轨迹 $\vec{x}(t)$ 的变换 $\vec{x}'(t')$，既可以作为下式的解得到

$$\vec{x}'(t') = \vec{g}\Big(F\big(t',\vec{x}'(t')\big),\vec{x}\Big(F\big(t',\vec{x}'(t')\big)\Big)\Big), \tag{7}$$

也可以作为下式的解得到

$$\vec{x}\Big(F\big(t',\vec{x}'(t')\big)\Big) = \vec{G}\big(t',\vec{x}'(t')\big), \tag{8}$$

由于上述可逆性条件，这两个方程等价。从计算变换后的轨迹显式形式的角度来看，后一方程通常更容易接受；但前一方程最便于计算变换后的速度。从现在起，我们将对空间量采用标准的指标记号和求和约定。例如，将空间坐标 $\vec{x}$ 写作 x^i，其中$i \in \{1,2,\ldots,d-1\}$。此外，为了推导加速度的变换，我们现在假设函数 $f(t,\ \vec{x})$ 以及每个 $g^i(t,\ \vec{x})$ 都是二阶连续可微的，即属于$C^2(\Omega)$。特别地，前述 $t(t')$ 的可逆性意味着映射 $t \mapsto t'(t)$ 在其定义域 $\big\{t\,\big|\,\big(t,\vec{x}(t)\big) \in \Omega\big\}$ 上是微分同胚。然后，直接对式 (7) 求导，立即得到熟知的结果[3]

$$v'^i(t') = \frac{1}{\frac{dt'(t)}{dt}}\frac{d}{dt(t')}\Big[g^i\Big(t(t'),\vec{x}\big(t(t')\big)\Big)\Big] = \frac{\frac{\partial g^i}{\partial t} + \frac{\partial g^i}{\partial x^j}v^j}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^k}v^k}, \tag{9}$$

[2]例如，任意洛伦兹推进下的这种可逆性，是推导出狭义相对论中任何粒子的速度必定始终低于光速、始终等于光速，或始终高于光速的最简单方法；这一推导完全不依赖任何动力学，也不涉及能量考量。

[3]对学生来说，直接从式（8）以较繁琐的方式推导这一结果，是一道很好的练习（涉及微积分和指标运算）。根据该方程，变换后的速度是下式的解：

$$\frac{\partial G^i}{\partial x'^j}v'^j = \frac{v^i}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^j}v^j} - \frac{\partial G^i}{\partial t'}.$$

接着，必须推导空间逆变换

$$\left(\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)^{-1}\right)^i_{\ j} = \frac{\partial g^i}{\partial x^j} - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial g^i}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

由此可得

$$\left(\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)^{-1}\right)^i_{\ j}\frac{\partial G^j}{\partial t'} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial g^i}{\partial t},$$

由此即可得到（9）。

为使表达清晰，我们省略了大部分自变量，但需注意，每一项都仅是 t' 的函数；再对唯一的自变量t' 求一次导数，即可得到变换后的加速度。具体而言，粒子在新参考系中的加速度可用其在旧参考系中的加速度和速度表示为

$$\begin{aligned}
a'^i = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x^m}v^m\right)^3}\Bigg\{ & \left[\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}-\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}-\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial x^k}\right)v^k\right]a^j \\
& +\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial g^i}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t^2}+2\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t\partial x^j}-2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)v^j \\
& +\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j\partial x^k}+2\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t\partial x^k}-2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial t}\right)v^jv^k \\
& +\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^k\partial x^\ell}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial x^\ell}\right)v^jv^kv^\ell\Bigg\}, \qquad (10)
\end{aligned}$$

其中，按照惯例，所有量在任何地方都隐含地表示为 t' 的函数。不借助任何额外公设，我们对两个惯性参考系唯一知道的是：一个参考系中的加速度为零，无论速度如何，另一个参考系中的加速度也必为零。也就是说，假设两个参考系都是惯性的，则对于所有允许的恒定速度 v^i，$a^i=0$ 必须意味着 $a'^i=0$。如果允许的恒定速度集合包含连续部分，那么当且仅当只有 a^j 的线性项保留下来时，这一性质才可能成立；我们将假设该集合包含这样的连续部分，或者该集合是离散的，但包含足够多的非共线速度，使得下述条件仍然成立。因此，我们可以直接得知，惯性参考系之间的加速度变换必须表示为

$$\text{惯性变换:}\qquad a'^i=\frac{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}-\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}-\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial x^k}\right)v^k}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x^\ell}v^\ell\right)^3}a^j. \qquad (11)$$

惯性要求，一般加速度变换（10）中其余各项之和对于所有可能的允许恒定速度 v^i 均为零。由于分母中的 $\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x^m}v^m$ 始终严格有限（因为它等于 $dt'(t)/dt$，且 $t'(t)$ 必然可微且可逆），惯性所施加的约束就是速度展开（10）中秩为 1、−2、−3 和 −4 的系数分别为零。因此，参考系变换$t'=f(t,\vec{x})$ 和 $x'^i=g^i(t,\vec{x})$ 在其有效定义域内是惯性变换，当且仅当满足以下条件：

$$0\overset{!}{=}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial g^i}{\partial t} \qquad (12)$$

$$0\overset{!}{=}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t^2}+2\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t\partial x^j}-2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial g^i}{\partial x^j} \qquad (13)$$

$$0\overset{!}{=}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j\partial x^k}+2\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}\frac{\partial^2 g^i}{\partial t\partial x^{k)}}-2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(j}}\frac{\partial g^i}{\partial x^{k)}}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial t} \qquad (14)$$

$$0\overset{!}{=}\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^k\partial x^{\ell)}}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(j}\partial x^k}\frac{\partial g^i}{\partial x^{\ell)}}, \qquad (15)$$

其中我们使用记号 $(\cdots)$ 表示对括号内的指标进行完全对称化，且

采用单位权重，例如[4] $A^{(i}B^{j)} \equiv \frac{1}{2}\left(A^iB^j + B^jA^i\right)$。方程 (12)–(15) 的推导完全是标准的，并无特别之处；我们将其列出，部分是为了完整起见，但更重要的是为了强调本文所作的确切假设以及这些假设如何发挥作用。非标准之处，甚至似乎并不容易找到相关资料的，是对这些约束方程最一般解的严格推导，我们将在下文给出。可以理解的是，人们或许不愿尝试求解一组耦合非线性偏微分方程，尤其是显而易见地，任何由空间和时间中的仿射线性函数构成的 $f(t、\vec{x})$ 和 $g^i(t、\vec{x})$ 都能给出一个解。尽管如此，这些方程仍是具有常系数的齐次双线性方程，因此可以将方程解耦并彻底求解，从而得到最一般的非线性解。

3 求解约束方程

现在我们继续求解惯性约束方程 (12)-(15)，其中 $f(t,\vec{x})$ 和 $g^i(t,\vec{x})$ 现在被视为 $C^3(\Omega)$ 的元素，而不仅仅是 $C^2(\Omega)$ 的元素；三阶连续可微这一性质将使我们能够将方程解耦。

鉴于物理条件要求 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 在 Ω 上处处非零，我们首先将约束方程 (12)-(15) 改写为

$$\frac{\partial^2 g^i}{\partial t^2} \stackrel{!}{=} \frac{\frac{\partial g^i}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{16}$$

$$2\frac{\partial^2 g^i}{\partial t\partial x^j} \stackrel{!}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial g^i}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j\partial x^k} \stackrel{!}{=} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^{k)}} - \frac{\partial f}{\partial x^{k)}}\frac{\partial g^i}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^{(j}} - \frac{\partial f}{\partial x^{(j}}\frac{\partial g^i}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}} + \frac{\frac{\partial g^i}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k} \tag{18}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^{(j}} - \frac{\partial f}{\partial x^{(j}}\frac{\partial g^i}{\partial t}\right)\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^{\ell)}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{\ell)}} + \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^{\ell)}}\right]. \tag{19}$$

参考系变换的物理性条件要求 $\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}$ 是一个可逆矩阵；将时空雅可比矩阵记为

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ \frac{\partial g^i}{\partial t} & \frac{\partial g^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

根据 [5]，这一可逆性成立

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^i}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g^i}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{d-1}\det J. \tag{21}$$

[4] 秩为 n 的指标的一般对称化形式为

$$A_1^{(i_1}A_2^{i_2}\cdots A_n^{i_n)} \equiv \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} A_1^{i_{\sigma(1)}}A_2^{i_{\sigma(2)}}\cdots A_n^{i_{\sigma(n)}},$$

其中，S_n 是集合 $\{1,2,\ldots,n\}$的置换群。

[5]值得注意的是，$\det J$ 和 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 不为零，本身并不能说明空间雅可比矩阵 $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$ 可逆；它只能说明 $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$ 的核至多为一维。不过，$\det J$不为零且 $\frac{\partial f}{\partial t}$ *and* 属于 $\frac{\partial F}{\partial t'}$，确实意味着 $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$ 可逆，因为

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = \frac{\det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}\det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i}\operatorname{adj}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^i{}_j\frac{\partial g^j}{\partial t}},$$

然后，将上述最后一个条件左乘该矩阵的逆，得到

$$0 \overset{!}{=} \delta^{i}{}_{(j}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}\frac{\partial f}{\partial x^{\ell)}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{3}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}-2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{\ell)}}+\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{k}\partial x^{\ell)}}\right], \tag{22}$$

现在，将 i与 ℓ 收缩，立即可知方括号中的对称量恒等于零，即

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{j}\partial x^{k}} \overset{!}{=} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{j}}\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{k)}}, \tag{23}$$

因此，上述第三个条件可简化为

$$\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial x^{j}\partial x^{k}} \overset{!}{=} \frac{\partial g^{i}}{\partial x^{(j}}\left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{k)}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{k)}}\right]. \tag{24}$$

总之，目前为止，惯性约束方程为 (16)、(17)、(24) 和 (23)，要求所有相关函数的可微性类别为 C^{2}(Ω)。

3.1 分离 f 与施瓦茨微分方程

现在，通过对 $f(t,\vec{x})$ 和 $g^{i}(t,\vec{x})$ 的三阶偏导数交换性所满足的施瓦茨可积条件，可以轻松地将关于 $f(t,\vec{x})$ 的方程解耦；因此，现在需要将函数限制为属于 C^{3}(Ω) 类。

将 (16) 的空间导数与 (17) 的时间导数相等，得到

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x^{j}}\left(\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial t^{2}}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial t\partial x^{j}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^{i}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial f}{\partial x^{j}}\frac{\partial g^{i}}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\left[\frac{\partial^{3} f}{\partial t^{3}}-\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}\right)^{2}\right], \tag{25}$$

由于此处的前因子作为矩阵在定义域内任何点都不能为零，因此括号中的项必须为零。鉴于该项为零，将（17）的空间导数与（24）的时间导数相等，便得到

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial t\partial x^{j}}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}\right)=A^{i}{}_{jk}+2A^{i}{}_{kj}, \tag{26}$$

其中

$$A^{i}{}_{jk}\equiv-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g^{i}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial f}{\partial x^{j}}\frac{\partial g^{i}}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\left[\frac{\partial^{3} f}{\partial t^{2}\partial x^{k}}+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\left(\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}\right)^{2}-\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{k}}\right]. \tag{27}$$

当然，再次应用上述条件，但交换 j 和 k ，会得到$A^{i}{}_{jk}=-2A^{i}{}_{kj}=4A^{i}{}_{jk}$，从而得到 $A^{i}{}_{jk}=0$；与前面一样， $A^{i}{}_{jk}$ 中的前因子在任何地方都不能作为矩阵为零，因此括号中的项必为零。最后，根据上述关于 $\frac{\partial^{3} f}{\partial t^{3}}$ 和 $\frac{\partial^{3} f}{\partial t^{2}\partial x^{i}}$的表达式，（24）的空间导数为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\ell}}\left(\frac{\partial^{2} g^{i}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}\right)=\frac{3}{2}\frac{\partial g^{i}}{\partial x^{(j}}\left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{k}}\right]\left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{\ell)}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{2}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t^{2}}+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^{2} f}{\partial t\partial x^{\ell)}}\right], \tag{28}$$

~~其中 adj$(\frac{\partial g}{\partial x})^{i}{}_{j}$是矩阵 $\frac{\partial g^{i}}{\partial x^{j}}$的伴随矩阵。因此，~~我们不妨说，物理性条件包括 det J、$\frac{\partial f}{\partial t}$以及 det$(\frac{\partial g}{\partial x})$均不为零。

它已经关于 j、 k 和 ℓ完全对称；同理，式 (23) 的空间导数为

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = \frac{3}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 - 6\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}} + 6\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}, \tag{29}$$

而这自然再次完全对称。

因此，通过证明函数 $f(t,\ \vec{x})$ 满足约束方程，我们成功地将其孤立出来。

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 \tag{30}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x^i} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 + \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \stackrel{!}{=} -\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}}. \tag{32}$$

其余约束方程 (16)、(17) 和 (24) 用 $g^i(t,\ \vec{x})$ 的一阶导数以及 $f(t,\ \vec{x})$ 表示其二阶导数；因此，除了 (30)、(31) 和 (32) 之外，对 $f(t,\ \vec{x})$ 没有其他约束，因为后一组方程施加了前一组方程的施瓦茨可积条件，从而保证对于 $f(t,\ \vec{x})$ 的任意解，都存在 $g^i(t,\ \vec{x})$ 的局部解。因此，我们现在着手求出满足三个方程 (30)、(31) 和 (32) 的最一般解 $f(t,\ \vec{x})$。

我们上面得到的孤立约束方程中的第一个方程 (30)，恰好是一个特别著名的方程，称为施瓦茨微分方程。暂且考虑单个实变量或复变量 z 的函数 $f(z)$，其定义域 Ω 是 R 或 C 的开子集，并设 f: Ω $\to$ C 属于 $C^3(\Omega)$ 类（当 Ω $\subset$C 时，这等价于 f 在 Ω 上全纯）；仅在本讨论中，我们令 $f'(z)$ 表示 $f(z)$ 关于 z 的导数。然后，定义 f 关于 z 的施瓦茨导数为 [3][6]

$$\mathcal{S}_z f(z) \equiv \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \tag{33}$$

这个非线性微分算子因其在复分析和射影几何中的作用而为数学界所熟知 [4], ；它也因出现在二维共形场论 [5] 以及 Jackiw-Teitelboim 引力的低能极限中而闻名于物理学界 [6]。于是，（齐次）施瓦茨微分方程为

$$\mathcal{S}_z f(z) = 0. \tag{34}$$

例如，数学中有一条标准结果[7] 指出，黎曼球面的自同构群 PSL(2,C) 是施瓦茨导数的核；反过来，施瓦茨导数是 PSL(2,C) 湮灭子的唯一生成元 [4], ，这解释了它为何对二维共形场论（以及射影几何）如此重要，因为黎曼球面 C 等价于复射影直线 CP^1。此外，施瓦茨

—

[6]出于历史原因，施瓦茨导数 $\mathcal{S}_z f$ 通常记作 $\{f, z\}$ ；这一记号由 Cayley 在 [3], 中引入，他以 Schwarz 的名字命名了这一导数。[7]更准确地说，施瓦茨导数是一种（全纯）二次微分 [4], ，正因如此，它在黎曼曲面的模空间理论（即 Teichm¨uller 理论）中发挥着关键作用 [7]。

微分方程 (34) 的解是众所周知的；只要定义域 Ω 是开且连通的，(34) 的 $\Omega \to \mathbb{C}$ 上 C^3(Ω) 类的最一般解 f 为[8]

$$f(z) = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}, \tag{35}$$

其中，$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ 是满足 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ 的常数。于是，映射 $f \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 给出了一个到 GL(2,C) 的同态；将按乘法作用的 $\mathbb{C}^*$ 商去后，便得到与[9] $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的同构。将式 (35) 描述为黎曼球面的最一般自同构时，默认 z 是立体投影坐标，且 $z = -\frac{\gamma}{\delta}$ 映射到无穷远点；若不希望包含无穷远点，则自然应将 $z = -\frac{\gamma}{\delta}$ 从定义域 Ω 中排除。形如式 (35) 的函数 $f(z)$ 通常称为射影线性变换或 M¨obius 变换，其中 PSL(2,C) 就是 M¨obius 群。

在我们的问题中，函数 $f(t, \vec{x})$ 有 d 个相互独立的（实）变量，因此我们将式 (33) 中的普通导数替换为相应的偏导数，从而定义它关于每个变量的施瓦茨导数。采用这一记号，三阶导数约束立即写成 (30)

$$\mathcal{S}_t f(t,\vec{x}) \overset{!}{=} 0, \tag{36}$$

这立即确定了 $f(t, \vec{x})$ 的时间依赖性为

$$f(t,\vec{x}) = \frac{b_1(\vec{x}) + b_2(\vec{x})t}{b_3(\vec{x}) + b_4(\vec{x})t}, \tag{37}$$

其中，$b_1(\vec{x})$、$b_2(\vec{x})$、$b_3(\vec{x})$ 和 $b_4(\vec{x})$ 是满足 $b_1 b_4 - b_2 b_3 \neq 0$ 的纯空间函数，且该条件在定义域中的所有点都成立。事实上，式 (29) 与式 (32) 一起作为特殊情形意味着，$f(t, \vec{x})$ 在每个空间坐标 x^i 上分别也满足施瓦茨微分方程，即 $\mathcal{S}_{x^i} f(t, \vec{x}) \overset{!}{=} 0$，不过目前利用这一事实对我们并无太大帮助；稍后我们将回到沿着这一思路得出的更强结论。

接下来，我们必须将剩余的约束方程 (31) 和 (32) 施加到式 (37) 给出的函数 $f(t, \vec{x})$ 上；我们主要省略函数的空间变量 b_α，并采用标准指标记号 $\partial_i b_\alpha$ 表示导数 $\frac{\partial b_\alpha(\vec{x})}{\partial x^i}$。由式 (37) 可直接计算得

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 - \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} = \frac{2(b_4\partial_i b_2 - b_2 \partial_i b_4)}{(b_3 + b_4 t)^2}, \tag{38}$$

[8] 一般解 *almost* 很容易求得；只要 $\frac{df}{dz} \neq 0$），只需注意到

$$\mathcal{S}_z f(z) = -2\sqrt{\frac{df(z)}{dz}}\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{df(z)}{dz}}}\right).$$

事实上，施瓦茨导数最早正是以这种形式出现的；使用这一形式的并非 Schwarz，而是早近一个世纪的拉格朗日 [8]。随后，通过注意到 $\frac{df}{dz} \neq 0$），便可解除这一假设：要么 $f(z)$ 是常数（这恰好是退化情形 $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ 下的函数 (35)），要么存在一个邻域，使得 $\frac{df}{dz}$ 不为零，因此解为 (35)；此后，由连续性可知，$\frac{df}{dz}$ 在整个定义域内都不为零。

[9] 复射影线性群可以用任一种方式表示，因为对于所有 n，$\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$；然而，对于实射影线性群，$\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$ 当且仅当 n 为奇数时才同构于 $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$，否则前者是后者的覆盖。

使得约束 (31) 等价于

$$b_4\partial_i b_2 - b_2\partial_i b_4 \overset{!}{=} 0. \tag{39}$$

若 $b_4 \neq 0$，那么这个条件显然就是说 $\frac{b_2}{b_4}$ 是一个常数。

继续考虑情形 $b_4 \neq 0$，并利用 $\frac{b_2}{b_4}$的恒定性，经过稍微繁琐一些的计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}} &= \frac{b_3 b_4\left[b_3\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - b_1\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right)\right]}{(b_3+b_4 t)^3} \\ &+ \frac{b_4\left[2b_3 b_4\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - (b_1 b_4 + b_2 b_3)\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right)\right]t}{(b_3+b_4 t)^3} + \frac{b_4^2\left[b_4\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - b_2\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right)\right]t^2}{(b_3+b_4 t)^3},\end{aligned} \tag{40}$$

因此，约束 (32) 给出的条件为

$$b_3\left[b_3\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - b_1\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right)\right] \overset{!}{=} 0 \tag{41}$$

$$2b_3 b_4\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - (b_1 b_4 + b_2 b_3)\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right) \overset{!}{=} 0 \tag{42}$$

$$b_4\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) - b_2\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right) \overset{!}{=} 0. \tag{43}$$

鉴于 b_4和 $b_1 b_4 - b_2 b_3$均不为零，将第三个条件代入第二个条件，再代回第三个条件，可知这些条件等价于

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{b_1}{b_4}\right) \overset{!}{=} 0 \tag{44}$$

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{b_3}{b_4}\right) \overset{!}{=} 0. \tag{45}$$

因此，我们确定了在情形 $b_4 \neq 0$ 下，满足可积性条件 (30)、(31) 和 (32) 的最一般解由 (37) 给出，其中 $\frac{b_2}{b_4}$ 为常数，且 $\frac{b_1}{b_4}$ 和 $\frac{b_3}{b_4}$ 均为关于 $\vec{x}$的仿射线性函数。当然，由于在这种情形下，我们可以将 (37) 的分子和分母同时除以 b_4，所以这个解等价于 b_2 和 b_4 均为常数，且 b_1 和 b_3 均为关于 $\vec{x}$ 的仿射线性函数。

最后，我们重新考察另一种原始可能性，即 $b_4 = 0$。在这种情形下，我们只需将$f(t, \vec{x}) = c_1(\vec{x}) + c_2(\vec{x})t$ 改写为空间函数 c_1和 $c_2 \neq 0$。于是约束 (31) 显然成立，并且我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}} &= \partial_i\partial_j c_1 - \frac{2}{c_2}\partial_{(i}c_1\partial_{j)}c_2 + \left(\partial_i\partial_j c_2 - \frac{2}{c_2}\partial_i c_2\partial_j c_2\right)t \\ &= c_2\left[\partial_i\partial_j\left(\frac{c_1}{c_2}\right) - c_1\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{c_2}\right)\right] - c_2^2\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{c_2}\right)t,\end{aligned} \tag{46}$$

因此，约束 (32) 现在要求

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{1}{c_2}\right) \overset{!}{=} 0 \tag{47}$$

$$\partial_i\partial_j\left(\frac{c_1}{c_2}\right) \overset{!}{=} 0. \tag{48}$$

因此，$-\frac{1}{c_2}$ 和 $\frac{c_1}{c_2}$ 关于 $\vec{x}$均为仿射线性的，从而即使在 $b_4 = 0$ 的情形下，时间变换函数仍可写为 $f = c_1 + c_2 t = \frac{b_1 + b_2 t}{b_3}$，其中 b_2 为常数，且 b_1 和 b_3 关于 $\vec{x}$均为仿射线性的。

因此，我们已经证明，满足可积性条件 (30)、(31) 和 (32) 的最一般三次连续可微解为

$$f(t, \vec{x}) = \frac{b_1(\vec{x}) + b_2 t}{b_3(\vec{x}) + b_4 t}, \quad \text{where} \quad \partial_i b_2 = \partial_i b_4 = 0 \quad \text{and} \quad \partial_i \partial_j b_1 = \partial_i \partial_j b_3 = 0, \tag{49}$$

并满足物理性条件 $b_4 b_1(\vec{x}) - b_2 b_3(\vec{x}) \neq 0$。也就是说，$f(t, \vec{x})$ 必然是时空中的射影线性函数。

3.2 求解 g^i

得到 (49) 中 $f(t, \vec{x})$ 的一般解后，现在很容易利用剩余的约束 (16)、(17) 和 (24) 求出空间函数 $g^i(t, \vec{x})$。首先，我们注意到，约束 (16) 等价地写作

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial g^i}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\right) \stackrel{!}{=} 0, \tag{50}$$

这表明存在纯空间函数 $\beta^i(\vec{x})$ 和 $d^i(\vec{x})$，使得

$$g^i(t, \vec{x}) = \beta^i(\vec{x}) f(t, \vec{x}) + d^i(\vec{x}). \tag{51}$$

利用此表达式，其余两个约束方程 (17) 和 (24) 变为

$$\partial_j \beta^i \stackrel{!}{=} \frac{b_4(b_3 + b_4 t)}{b_1 b_4 - b_2 b_3}\left(f \partial_j \beta^i + \partial_j d^i\right) \tag{52}$$

$$f \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{2\partial_{(j}\beta^i(\partial_{k)} b_1 - f\partial_{k)} b_3)}{b_3 + b_4 t} + \partial_j \partial_k d^i \stackrel{!}{=} -\frac{2\left(f\partial_{(j}\beta^i + \partial_{(j}d^i\right)\partial_{k)} b_3}{b_3 + b_4 t}, \tag{53}$$

化简为

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_j\left(b_2 \beta^i + b_4 d^i\right) \tag{54}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_j \partial_k\left(b_1 \beta^i + b_3 d^i\right) + \partial_j \partial_k\left(b_2 \beta^i + b_4 d^i\right) t. \tag{55}$$

根据第一个约束方程（16），我们此前已将 $g^i = \frac{b_1 \beta^i + b_3 d^i + (b_2 \beta^i + b_4 d^i) t}{b_3 + b_4 t}$ 参数化；现在，最后两个约束方程（17）和（24）只要求分子系数 $b_5^i(\vec{x}) \equiv b_1(\vec{x})\beta^i(\vec{x}) + b_3(\vec{x}) d^i(\vec{x})$ 和 $b_6^i \equiv b_2 \beta^i(\vec{x}) + b_4 d^i(\vec{x})$ 满足

$$\partial_j b_6^i \stackrel{!}{=} 0 \tag{56}$$

$$\partial_j \partial_k b_5^i(\vec{x}) \stackrel{!}{=} 0. \tag{57}$$

由于这就是对空间函数 $\beta^i(\vec{x})$ 和 $d^i(\vec{x})$ 施加的全部条件，显然我们可以对它们进行选择，使 $b_5^i(\vec{x})$ 成为任意仿射线性函数，而 b_6^i 成为任意常数。

总之，我们已全面证明，在开连通域 $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ 上，$C^3(\Omega)$ 类中最一般的惯性变换在局部必为 $t' = f(t, \vec{x})$ 和 $x'^i = g^i(t, \vec{x})$，其形式为

$$f(t, \vec{x}) = \frac{b_1(\vec{x}) + b_2 t}{b_3(\vec{x}) + b_4 t} \tag{58}$$

$$g^i(t, \vec{x}) = \frac{b_5^i(\vec{x}) + b_6^i t}{b_3(\vec{x}) + b_4 t}, \tag{59}$$

其中 b_2、 b_4 以及每个 b_6^i 都是常数； $b_1(\vec{x})$、 $b_3(\vec{x})$ 以及每个 $b_5^i(\vec{x})$ 都是仿射线性空间函数，彼此独立，但须满足物理性条件：在整个变换定义域内，$\det J$、 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 和 $\det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$ 均不为零。——

4 非线性变换的性质与意义

我们现在已经证明，在某个开连通域中，最一般的三次连续可微惯性变换 $(t, x^i) \mapsto (t', x'^i)$ 可表示为

$$t' = \frac{\alpha + \beta_i x^i + \gamma t}{A + B_j x^j + Ct} \tag{60}$$

$$x'^i = \frac{\delta^i + \epsilon^i{}_j x^j + \zeta^i t}{A + B_k x^k + Ct}, \tag{61}$$

其中， A、 B_i、 C、 α、 β_i、 γ、 δ^i、 $\epsilon^i{}_j$ 和 ζ^i 现在都是常数；为了使其成为参考系之间的真正变换，还必须满足三个较弱的条件。第一个物理性条件是

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{A\gamma - C\alpha - (C\beta_i - \gamma B_i)x^i}{(A + B_j x^j + Ct)^2} \neq 0. \tag{62}$$

那么，第二个物理性条件是

$$\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \frac{(A + Ct)\det\epsilon - B_i(\operatorname{adj}\epsilon)^i{}_j(\delta^j + \zeta^j t)}{(A + B_i x^i + Ct)^{d+1}} \neq 0, \tag{63}$$

其中，$(\operatorname{adj}\epsilon)^i{}_j$ 是 $\epsilon^i{}_j$的伴随矩阵；在最一般的情况下，我们应使用伴随矩阵而非逆矩阵 $(\epsilon^{-1})^i{}_j$ 来表示这类量，因为矩阵 $\epsilon^i{}_j$ 不必可逆（尽管显然这是伴随矩阵非零的必要条件，但并非充分条件[10]）。不过，最后的可逆性条件在 $\epsilon^i{}_j$ 确实可逆[11],的情形下最容易表述，此时它写作

$$\det J = \frac{[A - B_i(\epsilon^{-1})^i{}_j\delta^j][\gamma - \beta_k(\epsilon^{-1})^k{}_\ell\zeta^\ell] - [C - B_i(\epsilon^{-1})^i{}_j\zeta^j][\alpha - \beta_k(\epsilon^{-1})^k{}_\ell\delta^\ell]}{(A + B_m x^m + Ct)^{d+2}}\det\epsilon \neq 0. \tag{64}$$

在这些物理性条件中，只有 $\det J$ 不为零这一条件真正限制了变换中的实际系数；而（62）和（63）的作用则是限制 $(t,\ x^i)$ 的定义域，使其分子始终不为零。同样，若 B_i 和 C 不同时为零，则也应将超平面 $A + B_i x^i + Ct = 0$ 排除在变换定义域之外。

4.1 数学结构

由（60）和（61）定义并满足（64）的广义惯性映射，是 d维空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$中的射影线性变换。在任何相对论框架中，

[10]作为一个特殊情形，一维空间中任意矩阵的伴随矩阵都是单位矩阵。[11]若对于固定的向量 v^i 和一形式 w_j，$\det\epsilon = 0$，但 $\epsilon^i{}_j + v^i w_j$ 可逆，则 $\epsilon^i{}_j + v^i w_j$ 的逆矩阵将取决于 $\epsilon^i{}_j$ 的若尔当标准形，因此不存在显式的一般表达式。

参考系变换在复合运算下总是构成一个群。这里，由（60）和（61）定义的惯性变换（t, x^i) $\mapsto$ (t', x'^i)与由

$$t'' = \frac{\alpha' + \beta'_i x'^i + \gamma' t'}{A' + B'_j x'^j + C' t'} \qquad \text{and} \qquad x''^i = \frac{\delta'^i + \epsilon'^i{}_j x'^j + \zeta'^i t'}{A' + B'_k x'^k + C' t'} \tag{65}$$

是由下式定义的惯性变换（$t,\ x^i$）$\mapsto$（$t'',\ x''^i$）

$$t'' = \frac{\alpha'' + \beta''_i x^i + \gamma'' t}{A'' + B''_j x^j + C'' t} \qquad \text{and} \qquad x''^i = \frac{\delta''^i + \epsilon''^i{}_j x^j + \zeta''^i t}{A'' + B''_k x^k + C'' t}, \tag{66}$$

其中，该新变换中的参数为

$$\alpha'' = \alpha' A + \gamma' \alpha + \beta'_i \delta^i \tag{67}$$
$$\beta''_i = \alpha' B_i + \gamma' \beta_i + \beta'_j \epsilon^j{}_i \tag{68}$$
$$\gamma'' = \alpha' C + \gamma' \gamma + \beta'_i \zeta^i \tag{69}$$
$$A'' = A' A + C' \alpha + B'_k \delta^k \tag{70}$$
$$B''_i = A' B_i + C' \beta_i + B'_j \epsilon^j{}_i \tag{71}$$
$$C'' = A' C + C' \gamma + B'_k \zeta^k \tag{72}$$
$$\delta''^i = \delta'^i A + \zeta'^i \alpha + \epsilon'^i{}_j \delta^j \tag{73}$$
$$\epsilon''^i{}_j = \delta'^i B_j + \zeta'^i \beta_j + \epsilon'^i{}_k \epsilon^k{}_j \tag{74}$$
$$\zeta''^i = \delta'^i C + \zeta'^i \gamma + \epsilon'^i{}_j \zeta^j. \tag{75}$$

对于惯性变换（60）和（61），我们可以通过下式将其与一个（$d+1$）维矩阵相关联

$$\Big((t, x^i) \mapsto (t', x'^i)\Big) \longmapsto \begin{pmatrix} A & C & B_j \\ \alpha & \gamma & \beta_j \\ \delta^i & \zeta^i & \epsilon^i{}_j \end{pmatrix}, \tag{76}$$

根据上述乘法定律，这给出了到 GL($d+1$, R) 的同态，因为这个 ($d+1$) 维矩阵的行列式等于 (64) 中 $\det J$ 所给表达式前的乘数$1\ (A+B_m x^m + Ct)^{d+2}$，因此不为零。当然，(60) 和 (61) 中唯一的歧义在于，所有参数可以同时乘以同一个非零常数，而仍定义同一个惯性变换；对这个乘法群 R^* 取商，便得到一般惯性变换群与维数为 $\dim \mathrm{PGL}(d+1, \mathrm{R}) = d(d+2)$ 的射影群 PGL($d+1$, R) 同构。当然，(76) 中的矩阵与 ($d+1$) 维向量空间 $\mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{d-1}$ 的自同构一一对应；将这个向量空间（去掉原点并添上无穷远点）对整体乘法群 R^* 取商，意味着变换 (60) 和 (61) 只不过是射影空间 $\big((\mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}^{d-1})^*\big)/\mathrm{R}^* \cong \mathrm{RP}^d$[9] 上最一般的自同构。因此，只要赋予时空射影空间 RP^d的结构，就总能将惯性参考系变换视为时空的自同构；这是本文的核心结论。必须强调，将一般惯性变换视为射影变换，并不意味着我们真的应当把时空本身等同于射影空间；事实上，若我们希望对因果性有所定义，就绝不应这样做。相反，我们不添加无穷远点，而真正的非线性惯性变换只是非全局的。

我们现在已经证明，$\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{d-1}$ 上的无约束惯性变换群是 PGL($d+1$，R)，但显然，基于惯性变换的特定相对论框架应当从这个 PGL($d+1$，R) 中选出一个子群，以对应时空的实际对称性。具体而言，两个惯性观察者之间的物理变换，应由其中一位观察者相对于另一位观察者的轨迹，以及二者在某一固定时刻的空间标架之间的关系共同决定。最一般的惯性变换 (60) 和 (61) 还表明，最一般的惯性观察者彼此之间必然以恒定速度运动；这是一个熟悉的基础性论断，然而通常只是被直接假定为真；我们已经证明，这一假设并非必要。因此，彼此独立的惯性变换类型总是由平移、推 boost 变换和恒定空间标架变换构成（后者几乎总被视为旋转，但若不希望施加宇宙学原理，则不必如此）。随后，将选定的允许惯性变换子群视为保持向量空间（或射影空间）上的某种附加结构的自同构，会非常方便。对于向量空间，这种附加结构最常取为内积；例如，狭义相对论这一著名理论建立在如下等价关系之上：庞加莱变换等同于闵可夫斯基度量的等距变换。另一方面，射影空间不允许定义内积，但仍允许定义诸如凯莱–克莱因度量 [10] 这样的度量，可用于相同目的。

如果 B_i 和 C 恒等于零，那么惯性变换 (60) 和 (61) 就退化为极其熟悉的仿射线性变换，对应于 PGL($d+1$,R) 中由 GL(d,R) $\ltimes\,\mathrm{R}^d$ 构成的子群，其维数为 $\dim\big(\mathrm{GL}(d,\mathrm{R})\ltimes\mathrm{R}^d\big)=d(d+1)$。在射影空间 RP^d 中，一般的 GL(d,R) 变换同时固定一个原点和无穷远点；一般的 GL(d,R) $\ltimes\,\mathrm{R}^d$ 变换恰好固定无穷远点；而一般的 PGL($d+1$,R) 变换则不固定任何无穷远点。因此，只需要求无穷远点在惯性变换下保持不变，便可将由仅包含仿射线性惯性变换的相对论框架赋予时空的向量空间结构嵌入射影空间。事实上，最早指出狭义相对论的洛伦兹变换可以这样看作射影空间中 Cayley-Klein 度量的等距变换的人是菲利克斯·克莱因 [11]（定义 Cayley-Klein 度量的不变二次曲面本质上就是光锥）。一方面，如果假设时空具有向量空间结构，那么射影惯性变换 (60) 和 (61) 的存在在数学上显而易见——具体而言，如果假设时空 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^{d-1}$ 可以视为一个真正的 d 维向量空间（而不只是作为集合的时间轴 R 与空间向量空间 R^{d-1} 的笛卡尔积），那么零加速度轨迹就对应于该向量空间中的直线，而射影几何基本定理指出，向量空间上将直线映射为直线的最一般映射是射影线性变换[12] [9]。因此，射影线性惯性变换的存在既不令人意外，也并非新发现。然而，真正似乎新颖的是，这一证明表明，最一般的非线性惯性变换实际上是射影线性的，这会自动赋予任何惯性相对论理论中的时空一种向量空间结构，尽管其维数高出一维。

[12]严格来说，将直线映射为直线的最一般映射称为“共线变换”，通常不仅包括射影线性变换。不过，共线变换群与射影线性群的商群和域自同构有关，因此，对于 *real* 射影空间，所有共线变换都是射影线性变换（而对于 *complex* 维数为 $n\geqslant 2$的射影空间，共线变换群则是 PGL($n+1$,C) $\rtimes\,\mathrm{Z}_2$，，其中 Z_2 指复共轭）。

4.2 物理结构

真正的非线性惯性变换，即 B_i 和 C 不同时为零的情形，与其仿射线性近亲相比，具有相当奇特的性质；这既是非线性本身所致，也是因为这些变换并非全局定义。这里我们只记录 (60) 和 (61) 最基本的物理性质。

我们已经知道，如果$B_i = 0$ 或被限制在法向方向为 B^i的空间超平面一侧，那么变换的有效性会在某个固定时刻开始或结束；而当 $C \neq 0$时，这个极限空间超平面还会平行于 B^i 以恒定速度运动。有效空间坐标还受到第一物理性条件（62）的进一步限制，有效时间坐标则受到第二物理性条件（63）的进一步限制。这些变换奇异点的存在会引入（非因果）视界，并意味着时空要么不允许存在任何全局观察者，要么存在优选惯性系。这些可能性在其他一些例子中也很常见，尽管那些例子中的空间并非笛卡尔空间：不存在全局观察者是黑洞时空的典型特征[13], ，而优选惯性系则常见于拓扑非平凡平直时空或以太理论中。需要注意的是，极限空间超平面 $A+B_ix^i+Ct=0$（它将映射到无穷远点）可以自动从变换定义域中排除，只需将其隐藏在违反物理性条件（62）和（63）的空间超平面及时间切片之后。

现在我们来考虑两个相对运动的观察者之间的一般惯性变换。为此，不失一般性，我们可以在（60）和（61）中令 $\alpha = 0$ 和 $\delta^i = 0$ 。请注意，令 $\alpha = 0$ 和 $\delta^i = 0$ 并不意味着平移属于相对论框架的时空对称群；相反，两个相对运动的惯性观察者的轨迹在唯一一个时空点相交，我们只需将两位观察者的时空坐标定义为使这一唯一交点位于 $(t,\ x^i) = (t',\ x'^i) = (0,\ 0)$。接着，要使该变换在他们共同的时空原点附近有效，就要求 $A \neq 0$，因此我们可以将其缩放掉并令 $A = 1$。随后，在此处的时空原点应用物理性条件（62）和（63），要求 $\gamma \neq 0$, 且 $\epsilon^i{}_j$ 实际上可逆。最后，我们将 v^i 称为在未加撇参考系中测得的加撇观察者的速度，因此 $\zeta^i = -\epsilon^i{}_j v^j$。于是，这里所考虑的变换具有以下形式

$$t' = \frac{\beta_i x^i + \gamma t}{1 + B_j x^j + Ct} \qquad \text{and} \qquad x'^i = \frac{\epsilon^i{}_j (x^j - v^j t)}{1 + B_k x^k + Ct}, \tag{77}$$

此时，可逆性条件 (64) 还要求 $\gamma \neq -\beta_i v^i$。因此，逆变换为

$$t = \frac{\beta'_i x'^i + \gamma' t'}{1 + B'_j x'^j + C' t'} \qquad \text{and} \qquad x^i = \frac{\epsilon'^i{}_j x'^j + \zeta'^i t}{1 + B'_k x'^k + C' t'}, \tag{78}$$

[13]需要注意的是，此处所说的“全局观察者”是指一个 *single* 全局观察者，也就是说，其世界线与时空中每一点的因果过去和因果未来均相交的观察者。

其中

$$\beta'_i = -\frac{\beta_j(\epsilon^{-1})^j{}_i}{\gamma+\beta_k v^k} \tag{79}$$

$$\gamma' = \frac{1}{\gamma+\beta_i v^i} \tag{80}$$

$$B'_i = -B_j(\epsilon^{-1})^j{}_i + \frac{C+B_k v^k}{\gamma+\beta_\ell v^\ell}\beta_j(\epsilon^{-1})^j{}_i \tag{81}$$

$$C' = -\frac{C+B_i v^i}{\gamma+\beta_j v^j} \tag{82}$$

$$\epsilon'^i{}_j = (\epsilon^{-1})^i{}_j - \frac{v^i\beta_k(\epsilon^{-1})^k{}_j}{\gamma+\beta_\ell v^\ell} \tag{83}$$

$$\zeta'^i = \frac{v^i}{\gamma+\beta_k v^k}. \tag{84}$$

未加撇参考系中的线性轨迹 $x^i(t) = x^i_0 + v^i_0 t$ 在加撇坐标系中变为线性轨迹$x'^i(t') = x'^i_0 + v'^i_0 t'$，其中速度变换公式为

$$v'^i_0 = \frac{\epsilon^i{}_j[(1+B_k x^k_0)(v^j_0 - v^j) - (C+B_k v^k_0)x^j_0]}{(\gamma+\beta_\ell v^\ell_0)(1+B_m x^m_0) - (C+B_\ell v^\ell_0)\beta_m x^m_0} \tag{85}$$

变换的非线性表现为：速度变换公式取决于两位观察者相交时刻粒子的位置。当然，对于所有经过共同的时空原点的恒定速度轨迹而言，这种非线性完全不可见；对于这些轨迹，速度变换 $v'^i_0 = \frac{\epsilon^i{}_j(v^j_0 - v^j)}{\gamma+\beta_k v^k_0}$ 与线性惯性变换的速度变换相同。此外，由于在加撇坐标系中测得的未加撇观察者的速度为 $v'^i = -\frac{\epsilon^i{}_j v^j}{\gamma}$，人们通常希望施加$\epsilon^i{}_j v^j = \gamma v^i$这一条件。通过适当选择加撇空间坐标轴的方向和尺度，这总是可以做到的；然而，一般而言没有理由施加爱因斯坦互易公设，尤其是在希望研究不具有空间宇称对称性的理论时。

现在很容易看出，除非 B_i 和 C 都为零，否则上述广义推动变换无法在所有情况下保持光速不变；也就是说，光速的恒定性会自动要求惯性变换是线性的。只需证明，$(\epsilon^{-1})^i{}_j v'^i_0$ 的范数无法与 x^i_0 无关，除非 $B_i = 0$ 和 $C = 0$。若要保持光速不变，$(1+B_k x^k_0)(v^j_0 - v^j) - (C+B_k v^k_0)x^j_0$ 的范数平方必须与 $(\gamma+\beta_\ell v^\ell_0)(1+B_m x^m_0) - (C+B_\ell v^\ell_0)\beta_m x^m_0$的平方成比例，而且比例常数不能依赖于 x^i_0，也不能依赖于 v^i_0的方向。比较 x^i_0 的二次项系数，得到条件

$$\begin{aligned}&|\vec{v}_0 - \vec{v}|^2 B_i B_j - 2(C+B_k v^k_0)(v_{0,(i} - v_{(i)}B_{j)} + (C+B_k v^k_0)^2\delta_{ij}\\ &\qquad \stackrel{!}{=} \left|\epsilon^{-1}v'_0\right|^2 [(\gamma+\beta_k v^k_0)B_i - (C+B_k v^k_0)\beta_i][(\gamma+\beta_\ell v^\ell_0)B_j - (C+B_\ell v^\ell_0)\beta_j].\end{aligned} \tag{86}$$

如果 B_i 和 C 不同时为零，那么这一等式就要求矩阵 $\delta_{ij} + w_{(i}B_{j)}$，其中$w_i \equiv -\frac{2}{C+B_j v^j_0}(v_{0,i} - v_i) + \frac{|\vec{v}_0-\vec{v}|^2}{(C+B_j v^j_0)^2}\frac{B_i}{}$，在不同的 w_i（对应于 v^i_0 的不同方向）下具有秩 1，但 B_i 相同；如果至少有

两个空间维度，这显然是不可能的。因此只需考虑一个空间维度的情形，此时所有系数都只是数字，而比例关系条件可写为

$$(v_0 - v)^2 \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{\epsilon} v_0'\right)^2 (\gamma + \beta v_0)^2 \tag{87}$$

$$-(vB + C)(v_0 - v) \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{\epsilon} v_0'\right)^2 (\gamma + \beta v_0)(B\gamma - C\beta) \tag{88}$$

$$(vB + C)^2 \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{\epsilon} v_0'\right)^2 (B\gamma - C\beta)^2; \tag{89}$$

然而，要使 $v_0 = \pm c$ 的正负两种取值都满足等式，就必须有 $\gamma = -v\beta$，而这正是可逆性所禁止的取值。因此，无论维数如何，只有在 $B_i = 0$ 和 $C = 0$ 的情况下，才能从所有起始点向所有方向保持光速不变；随后爱因斯坦的推导便可照常进行，只是假设线性（或等价地，齐次性）如今被消除了。

当然，人们可以自由地研究洛伦兹破缺相对论理论 [12], ；这样做也有充分理由，因为即使在最高能量下，狭义相对论在局部仍几乎无法保证有效。本文所考察的非线性变换提供了在保持惯性定律的同时破坏洛伦兹对称性的全部方式。特别是，随后自然出现的向量空间结构使人们能够构造局部破缺洛伦兹对称性的广义相对论推广：将等效原理理解为相应局部惯性系的存在，就像传统广义相对论是从局部洛伦兹系构造出来的一样。本文的目的并不是试图对那些能够产生可行的、虽破坏洛伦兹对称性但仍具有惯性的相对论理论的不同非线性惯性变换子群进行分类，尤其是因为目前并不清楚其中是否有任何一种在物理上具有充分动机。然而，作为教学练习，此类探索非常适合本科阶段的初学研究者，因为所需的大多只是代数运算和一些灵性。

5 高维施瓦茨导数

此前，我们证明了满足非线性微分方程 (30)、(31) 和 (32) 的 $f(t,\ \vec{x})$ 的最一般解是射影线性变换 (49)。这里，我们将证明，这些非线性微分方程等价于施瓦茨微分方程的一种适当的高维推广；这也同时表明，后者的一般解是射影线性变换。

首先，我们注意到 (29) 和 (32) 立即推出

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(i}} \frac{\partial^3 f}{\partial x^j \partial x^k \partial x^{\ell)}} = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i} \partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^{\ell)}}. \tag{90}$$

原方程（30）表示 $\mathcal{S}_t f(t,\ \vec{x}) = 0$，而现在，这个方程在特殊情形$i = j = k = \ell$下表示，对于每个独立的空间坐标 x^i，都有 $\mathcal{S}_{x^i} f(t,\ \vec{x}) = 0$。这里的四阶空间方程显然要强得多，我们现在也将其推广到时空坐标的所有组合。

仍然根据（29）和（32），我们还可以计算以下组合

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}+3\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^j\partial x^{k)}}\right)=\frac{3}{2}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(i}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^{k)}} \tag{91}$$

$$\frac{1}{6}\left(3\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^i\partial x^j}+3\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^{j)}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2+\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{j)}}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\right)\right] \tag{92}$$

$$\frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right)=\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}. \tag{93}$$

因此，写作 $x^0\equiv ct$，其中常数 c 的引入纯粹是出于维数上的考虑，并像往常一样将时空指标写作 $\mu\in\{0,i\}$，我们可知约束方程 (30)、(31) 和 (32) 蕴含

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(\mu}}\frac{\partial^3 f}{\partial x^\nu\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}}=\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(\mu}\partial x^\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}}. \tag{94}$$

现在反过来证明，(94) 实际上等价于约束方程 (30)、(31) 和 (32)。为此，我们注意到 (94) 中包含的五个方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 \tag{95}$$

$$3\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=6\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i} \tag{96}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^{j)}}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j} \tag{97}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^3 f}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}+3\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^j\partial x^{k)}}=6\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(i}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^{k)}} \tag{98}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial^3 f}{\partial x^j\partial x^k\partial x^{\ell)}}=\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i}\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^{\ell)}}. \tag{99}$$

依次单独求出三阶导数，即可得到

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 \tag{100}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^i}=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i} \tag{101}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^i\partial x^j}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2-2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{j)}}+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}+\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}, \tag{102}$$

接下来是

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} = -\frac{3}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 + 6\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}$$
$$- 6\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}} - 3\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^{k)}} + \frac{6}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{(i}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^{k)}} \quad (103)$$

and

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i}\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^{\ell)}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^\ell}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 + 4\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{\ell)}}$$
$$- 4\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^k}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{\ell)}} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^{\ell)}} + 4\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^{\ell)}}. \quad (104)$$

接下来，请注意

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 + \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^j}, \quad (105)$$

随后是

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}$$
$$+ 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} + \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{(j}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{k)}\partial x^i}. \quad (106)$$

因此，上述关于 $\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^i \partial x^j}$ 的方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}} + \frac{2}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^j}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{j)}}\right)\right]. \quad (107)$$

同理，我们计算

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^5}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 - \frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^i} - 2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{k)}} + \frac{2}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^{(j}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{k)}\partial x^i}, \quad (108)$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}\right)-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}\right]$$
$$=3\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^5}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2-9\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}+6\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^j}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}$$
$$+3\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^{k)}}-\frac{3}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(i}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^{k)}}. \quad (109)$$

(107) 的解为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(j}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{k)}}+\frac{\partial f}{\partial t}h_{jk}(\vec{x}), \quad (110)$$

其中 $h_{jk}=h_{kj}$ 满足 $\frac{\partial h_{jk}}{\partial t}=0$。将此表达式代入 (109)，得到

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}=3\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(i}}\right)h_{jk)}, \quad (111)$$

它已经自动与时间无关。最后，将 (110) 代入剩余的方程 (104)，得到简单条件

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 h_{i(j}h_{k\ell)}=0. \quad (112)$$

总之，高维施瓦茨微分方程 (94) 等价于

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2 \quad (113)$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^i}=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i} \quad (114)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{j)}}+\frac{\partial f}{\partial t}h_{ij} \quad (115)$$
$$\partial_i h_{jk}=3\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{(i}}\right)h_{jk)} \quad (116)$$
$$h_{i(j}h_{k\ell)}=0. \quad (117)$$

然而，二次约束 $h_{i(j}h_{k\ell)}=0$ 等价于条件 h_{ij} 是一个反对称矩阵[14],，但由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$具有对称性，$h_{ij}$ 被迫为对称矩阵。 ——

[14]证明很简单。取二次条件 $h_{i(j}h_{k\ell)}=0$ 的特殊情形 $j=k=\ell=i$，立即可知矩阵的所有对角元素均为零，即 $h_{ii}=0$（指标不求和）。再取特殊情形 $k=i$ 和 $\ell=j$，可知 $h_{ij}(h_{ij}+h_{ji})+h_{ii}h_{jj}=0$（指标不求和）。由于所有对角元素均为零，这便确定了 $h_{ij}(h_{ij}+h_{ji})=0$，其最一般的解就是 $h_{ij}=-h_{ji}$（这也包含了对于固定的 i 和 j，h_{ij} 可能为零的情况，因为交换 i 和 j 后，即 $h_{ji}(h_{ij}+h_{ji})=0$，该条件也必须成立）；此后 $h_{i(j}h_{k\ell)}$ 显然恒等于零。

在式（110）中，因此 $h_{ij}=0$。由此，我们证明了二者等价

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^{(\mu}}\frac{\partial^3 f}{\partial x^\nu\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}}=\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(\mu}\partial x^\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}} \quad\Longleftrightarrow\quad & \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2\\ & \frac{\partial^3 f}{\partial t^2\partial x^i}=-\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)^2+\frac{2}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i}\\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2\frac{\frac{\partial f}{\partial x^{(i}}}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^{j)}}\end{aligned}\tag{118}$$

高维施瓦茨导数方程 (94) 与原约束方程 (30)、(31) 和 (32) 之间。

因此，我们将任意多个变量 x^μ 的函数 $f(x)$ 的施瓦茨导数适当地推广为四阶全对称非线性微分算子

$$\mathcal{S}_{\mu\nu\rho\lambda}(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x^{(\mu}}\frac{\partial^3 f}{\partial x^\nu\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}}-\frac{3}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(\mu}\partial x^\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\rho\partial x^{\lambda)}}.\tag{119}$$

因此，本文证明了这个高维施瓦茨微分算子的核恰好由分式线性变换构成，

$$\mathcal{S}_{\mu\nu\rho\lambda}(f)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad f(x)=\frac{\alpha+\beta_\mu x^\mu}{\gamma+\delta_\nu x^\nu},\tag{120}$$

其中 α、γ、β_μ 和 δ_μ 为常数。对于变量 z 的一维情形，算子 $\mathcal{S}_{zzzz}(f)$ 显然是通常的施瓦茨微分算子 $\mathcal{S}_z f$ 的 $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ 倍，但两者的核唯一的区别在于，$\mathcal{S}_{\mu\nu\rho\lambda}(f)=0$ 也允许常数解。之所以存在这种区别，是因为 (119) 作用于单个函数 $f(x)$，而不是函数向量 $f^\mu(x)$；但它实际上只是完整高维施瓦茨算子的第一个分量。该算子的核是所有射影线性变换 $f^\mu(x)=\frac{\alpha^\mu+\beta^\mu{}_\nu x^\nu}{\gamma+\delta_\rho x^\rho}$ 的集合；对此，我们可以除以雅可比矩阵行列式的平方，从而只得到可逆的射影线性变换。此外，尽管本文通过使用额外的物理性条件 $\frac{\partial f}{\partial t}\neq 0$ 和 $\det\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\neq 0$ 求解这些微分方程，但这些条件实际上并非必要[15]；仅施加可逆性条件 (64)，仍可得到解 (60) 和 (61)。

最后，我们应当指出，高维施瓦茨导数（119）与数学文献中给出的其他定义有所不同。之所以存在多种选择，部分原因是通常有许多方法可以将一维微分算子推广为高维中的类似算子。另一个原因则源于一个巧合——在 CP^1，上，M¨obius 群等于 PSL(2,C)，即射影线性变换群，也就是（全局）共形变换群。在所有更高维的情形中，M¨obius 群仅为共形变换群，它并不等同于射影线性群。在二维实空间中，这两个概念合而为一；但在更高维时则有所不同，因此许多高维施瓦茨导数的推广都着眼于它与 M¨obius 变换（及其推广）的联系 [13]。这里介绍的高维推广似乎与 Ovsienko 在 [14], 中给出的定义最为接近，该定义适用于辛向量空间的拉格朗日子空间。

[15]整个过程中，我们都不需要用到空间雅可比矩阵 $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$ 的可逆性。至于 $\frac{\partial f}{\partial t}$，如果在定义域内存在一个它不为零的开邻域，那么前面的推导无需修改即可成立，而由连续性可知，整个连通定义域上的解也相同。否则，只需寻找处处满足 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ 的原始约束方程的解。这是一个更简短且非常相似的练习，最终同样得到射影线性解。

致谢

感谢 Jacob Barandes 与我进行了富有启发性的讨论，并鼓励我写下这一推导。

参考文献

[1] A. Einstein, “运动物体的电动力学,” 《物理学年鉴》**322**，第10期，891-921页（1905年）[2] A. Einstein, “广义相对论基础,” 《物理学年鉴》**49**，第7期，769-822页（1916年）[3] A. Cayley, “论施瓦茨导数与多面体函数”（1880），重印于《数学论文集》，剑桥大学出版社，148-216页（2009）[4] V. Ovsienko 和 S. Tabachnikov，《射影微分几何：从施瓦茨导数到微分同胚群的上同调》，剑桥大学出版社（2005）[5] P. Di Francesco、P. Mathieu 和 D. S´en´echal，“共形场论”，施普林格出版社（1997）[6]J. Maldacena、D. Stanford 和 Z. Yang，“二维近反德西特空间中的共形对称性及其破缺”，《物理学进展》**2016**，第12期，12C104（2016）[arXiv:1606.01857][7] L. Bers，“自守形式与一般 Teichm¨uller 空间”，载于《复分析会议论文集：明尼阿波利斯，*1964*》，施普林格·柏林·海德堡，109-113页（1965）[8] J.-L. Lagrange，“地图的绘制”，《柏林皇家科学院与美术院新论文集》，161-210页（1779）[9] R. Hartshorne，《射影几何基础》，W.A. Benjamin, Inc.（1967）.[10] F. Klein，“论所谓的非欧几何”，《数学年刊》**4(4)**，573–625页（1871）.[11] F. Klein，“论洛伦兹群的几何基础”，《数学论文集》，第19卷，533-552页（1921）[12] S. Liberati，“洛伦兹不变性检验：2013年更新”，Class. Quant. Grav. **30**，133001（2013）[arXiv:1304.5795][13] B. Osgood 和 D. Stowe，“黎曼流形的施瓦茨导数与共形映射”，《杜克数学杂志》，**67(1)**，57-99页（1992）[14] V. Ovsienko，“拉格朗日施瓦茨导数与辛斯图姆理论”，《图卢兹科学院数学科学系年刊》，第2卷，第1期，73-96页（1993）