arXiv:2512.25039v1 [math.AG] 31 Dec 2025

非交换对称商叠的霍赫希尔德同调

RINA ANNO、VLADIMIR BARANOVSKY 和 TIMOTHY LOGVINENKO

Abstract. 我们证明了小DG范畴 $\mathcal{A}$ 的对称幂的霍赫希尔德同调满足一个轨形类型分解定理。在非交换几何中，这些对象可视为 $\mathcal{A}$ 的非交换对称商叠。我们利用这一分解证明， $\mathcal{A}$ 的对称幂的总霍赫希尔德同调同构于对称代数S^*(HH$_\bullet(\mathcal{A})$ $\otimes$ tk$[t]$)。我们采用显式方法——构造相关标准霍赫希尔德复形之间互为逆的同伦等价。随后，我们利用这些显式映射，将海森堡代数 $\mathcal{A}$ 的 Fock 空间结构、霍普夫代数结构，以及由 HH$_\bullet(\mathcal{A})$ 生成的自由 λ-环结构，从对称代数诱导到总霍赫希尔德同调上。

1. Introduction

本文旨在推进 DG 范畴的“轨形上同调理论”的发展，其灵感来自对扭曲群环（交叉积环）的 Hochschild 同调与循环同调的计算。

我们的出发点是以下众所周知的结果。设 $X = \operatorname{Spec} A$ 是代数闭域 k 上的光滑仿射簇，且 G 是通过群同态 $\alpha : G \to Aut(X)$ 作用于 X 的有限群。设 $A_\alpha[G]$ 为相应的扭曲群环。其同调群具有如下分解：

$$\mathrm{HC}_\bullet(A_\alpha[G], W) \simeq \Big(\bigoplus_{g\in G} \mathrm{HC}_\bullet(A(X^g), W)\Big)_G \tag{1.1}$$

其中 HC$_\bullet(\cdot, W)$ 是取值于模 W 的循环同调：对于不同的 W ，它分别给出 Hochschild 同调、循环同调和周期循环同调 [GJ93, §4]。此外， $A(X^g)$ 是不动点集 X^g 上的正则函数代数，而 $\big(\dots\big)_G$ 表示对 G 作用 g 取余不变量： $X^h \to X^{ghg^{-1}}$。

分解（1.1）分为两个步骤。第一步基于 Feigin 和 Tsygan 为任意 [FT87] 作用于 G 含单位代数 A 上的交换环 R所构造的谱序列。对于阶可逆于 G 中的有限 R，谱序列化为分解成由${}_gA$ 平凡 A-A-双模经 $g \in G$ [GJ93, §4]的作用得到的扭曲的直和 A。对于光滑交换 G，第二步是由 Brylinski 将这些直和项解释为 $X = \operatorname{Spec} A$ [Bry87]上 G-作用的不动点集。

分解（1.1）有许多几何推广：对于$\Bbbk$ [Bar03], 上的光滑拟射影簇，将其视为整体商光滑簇的HKR 同构的轨道空间版本 [ACH19]，以及最近针对导出 Deligne–Mumford叠的版本 [LS25]。

我们的目标是对（1.1）进行非交换推广，将 A替换为一个光滑且适当的 DG 范畴 $\mathcal{A}$。我们以非交换几何的视角为指导：在这一视角下，将小DG范畴视为按 Morita 等价考虑的

非交换概形 [KS09、KKP07、Kal07、Orl16、Efi20]。非交换分解（1.1）的第一步由 Nordstr¨om 针对域 $\mathcal{A}$ 上的任意小DG范畴 $\Bbbk$ （$\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ [Nor25b]建立。第二步则更为微妙，其关于不动点轨迹的诠释仍未解决；在该步骤中，我们预期 $\mathcal{A}$ 的光滑性将成为必要条件。

本文针对对称群 S_n 作用于 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 的情形进行讨论，其中 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 是 DG 范畴 $\mathcal{A}$ 的 n 次张量幂。几何不动点轨迹是对角线 $X^m \subset X^n$ ，可轻易地将其解释为张量幂 $\mathcal{A}^{\otimes m}$。S_n 的共轭类由无序分拆 $\lambda \vdash n$ 给出。记 $r_i(\lambda)$ 为 λ 中大小为 i 的部分数，记 $r(\lambda)$ 为部分总数。λ 的不动点轨迹是 $\mathcal{A}^{\otimes r(\lambda)}$，而中心化子在其上的作用为 $S_{\underline{r}(\lambda)} := S_{r_1(\lambda)} \times \cdots \times S_{r_n(\lambda)}$。根据 K¨unneth 公式 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{r(\lambda)})^{S_{r(\lambda)}} \simeq \mathrm{Sym}^{r(\lambda)} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$。我们的首个主要结果如下：

定理 1.1 (见定理 4.1)。设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴，且 $n \geq 0$。以下复合互为逆同构：

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \underset{\xi}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; \sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\lambda}})} \underset{\sum g_{\underline{\lambda}}}{\overset{\sum f_{\underline{\lambda}}}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n} \mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}), \tag{1.2}$$

其中 ν 和 ξ 是 *§4.1* 和 f_λ 以及 g_λ ——在 *§4.2* 中明确构造的映射。

S_n 在 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 上的作用是强的，即它通过自同构而非自等价作用。因此，我们可以使用 [GKL21, §4.8] 中引入的等变DG范畴形式体系。对于任意具有有限群 G的强作用的 DG 范畴 $\mathcal{A}$ ，等变范畴 $\mathcal{A} \rtimes G$是扭曲群环的一个类比，见定义 2.1。存在同构 $\mathrm{Mod}^G\text{-}\mathcal{A} \simeq \mathrm{Mod}\text{-}(\mathcal{A} \rtimes G)$，即 G-等变 $\mathcal{A}$-模与普通的 $(\mathcal{A} \rtimes G)$-模相同。因此，与 Kapranov 和 Ganter [GK14] 早期方法中的 $\mathrm{h}\mathcal{P}\mathrm{erf}^{S_n}\text{-}\mathcal{A}$ 相比，我们可以将 $\mathcal{A} \rtimes S_n$ 用于 $\mathrm{Sym}^n \mathcal{A}$。

在 Morita DG 增强框架中， $\mathcal{A} \rtimes S_n$和$h\mathcal{P}erf^{S_n}\text{-}\mathcal{A}$对应于同一个增强三角范畴 $\mathrm{Sym}^n \mathcal{A}$，即对称商栈 $[X^n/S_n]$的非交换类比。其优点在于， $\mathcal{A} \rtimes G$是一个小得多的范畴，许多计算也因此变得简单。特别是，式（1.2）中的显式同构 ν 和 ξ 给出了这种更简单表述下的分解；Nordstr¨om 在 [Nor25b] 中运用 [GK14]的形式体系得到了这一分解。

定理1.2 的分解意味着，总霍赫希尔德同调$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathrm{Sym}^n \mathcal{A})$ 可以赋予某种对称代数结构，这正是 [BFK23，猜想 3.24]以及 [GKL21，推论 8.6]中提出的猜想：

定理 1.2 （见定理4.2）。设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴。我们有显式的互逆同构

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \underset{\eta}{\overset{\zeta}{\underset{\simeq}{\rightleftarrows}}} S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes t\Bbbk[t]), \tag{1.3}$$

其中右端是 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes t\Bbbk[t]$ 的分次对称代数，其中 $t\Bbbk[t] = \Bbbk t \oplus \Bbbk t^2 \oplus \ldots$ 的次数为 $\deg = 0$。同构 η和 ζ是定理 (1.2) 中的同构与显式同构 *1.1*的复合 (4.14)。

我们显式构造定理1.1 和1.2 中的同构，这一点至关重要；具体而言，我们将它们构造为标准 Hochschild 复形之间的显式映射。对于任意分次向量空间 E，其对称代数 $S^*(E \otimes t\Bbbk[t])$

具有多种自然结构：霍普夫代数结构、由 λ生成的自由 E-环结构，以及海森堡代数 H_E 在 E上的 Fock 空间结构。 同构（1.3）使我们得以将这些结构转移到总霍赫希尔德同调$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$上，并显式计算结果。

特别是，我们的定理 1.2 的一个直接应用是， $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 是海森堡代数$H_{\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})}$ 的 Fock 空间。这推广了 Segal [Seg96] 和 Wang [Wan00]受 Nakajima [Nak97]和 Grojnowski [Gro95]著名的海森堡作用启发而得到的 K 理论结果。在 [GL25] 中，Gyenge 和第三作者利用本文的结果，显式计算了诱导的海森堡作用在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上的作用，并证明它与 [GKL21] 的范畴化海森堡作用的去范畴化结果相同。

在本文中，我们利用定理 1.2 中的同构来计算诱导的霍普夫代数结构以及 λ-环结构在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}$上的结构。我们的第三个主要结果是：

定理 1.3 （见定理 5.1）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴。定理*1.2* 的同构将标准的霍普夫代数运算 μ、 Δ、 u、 ϵ 以及 H 在 S^*（$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t]$）上的运算对应于以下 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$上的运算：

- 乘法映射 μ 由对所有 n、 $m\geq 0$ 求以下映射之和给出

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\otimes\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A})\xrightarrow{\simeq}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^m\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{n+m}\mathcal{A}).$$

- 余乘法映射 Δ 由对所有 $n\geq 0$ 以及所有子集求以下映射之和给出 $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ 的映射

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{Res}_{S_I\times S_{\bar{I}}}^{S_n}}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{|I|}\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^{n-|I|}\mathcal{A})\xrightarrow{\simeq}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{|I|}\mathcal{A})\otimes\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^{n-|I|}\mathcal{A}),$$

  其中 $\bar{I}=\{1,\dots,n\}\setminus I$，其中 S_I、 $S_{\bar{I}}<S_n$ 是仅置换 I 和 $\bar{I}$中的元素的子群，并且 $|I|$ 是 I的大小。
- 单位映射 u' 和余单位映射 ϵ' 分别由到$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^0\mathcal{A})\simeq\Bbbk$的包含映射和投影给出，
- 对映映射 H' 定义在$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上，形式为$(-1)^n$恒等映射。

最后，在第 5.2 节中，我们计算了 λ-环结构在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上的诱导结构，并讨论其与 Wang K关于 [Wan00] 的 -理论结果的异同。

在完成本文工作时，有人提醒我们，定理 1.1 和 1.2 中的分解已由 Nordstr¨om 在 [Nor25a]中独立且同时建立。他通过一般性考量建立了这些分解，但无法在 Hochschild 复形层面给出显式映射。采用他的方法，无法计算 λ-环结构在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上诱导出的 Fock 空间、霍普夫代数和 λ-环结构。

本文结构如下。第 2 节简要概述 DG 范畴的标准工具：张量积、模、Hochschild 复形、有限群作用下的半直积，以及 Hochschild 复形的 Eilenberg-Zilber 定理。特别地，对于任意函子 $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，我们有 $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$双模 $\mathcal{A}$ 的扭曲$_F\mathcal{A}$，以及计算该双模霍赫希尔德同调的 Hochschild 复形 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A},F)$。本文着重介绍显式映射和构造。第 3 节考虑循环置换 $t_n=(1,2,\dots,n)$ 作用于 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 的情形，并构造余不变元复形 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};t_n)_{t_n}$ 与 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$ 之间的显式同伦等价。第 4 节利用这一计算和 Eilenberg-Zilber 定理，写出定理中的显式同构

1.1 和1.2。第 5 节利用这些显式同构，计算直和上的霍普夫代数和 λ-环结构 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$，并将其表示为涉及 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 的标准代数构造。

致谢。 我们感谢 Adam Gyenge 和 Andreas Krug 提出的宝贵意见和建议。我们感谢 Hiraku Nakajima 向第三作者介绍了 Segal 的著作 [Seg96]和 Wang 的著作 [Wan00]。第一作者还要感谢 2025 年堪萨斯州立大学 SUMaR 的参与者——Matthew Garwacke、Caleb Hornbuckle、Ben Joseph 和 Emmerson Taylor。第一作者部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2243854 号资助。

2. Preliminaries

2.1. **DG 范畴、模与张量积**。 这里我们简要回顾 DG 范畴（本文中均假定为小范畴）的基础知识，主要是为了统一记号；更详细的介绍请参阅 [Kel06] 。域 $\Bbbk$ 上的 DG 范畴是一个范畴 $\mathcal{A}$ ，其中任意一对对象 a， b 之间的态射集合 ${}_a\mathcal{A}_b$ 是一个微分分次 $\Bbbk$-模，即一个 $\Bbbk$上的向量空间复形。态射记号 ${}_a\mathcal{A}_b$ 中顺序的反转，使得在处理 Hochschild 复形时更容易识别可复合的态射，因为态射的复合是通过复形之间的态射来描述的${}_a\mathcal{A}_b \otimes_\Bbbk {}_b\mathcal{A}_c \to {}_a\mathcal{A}_c$， $\alpha\otimes\beta\mapsto\alpha\beta$。

DG 范畴之间的 DG 函子是与态射上的微分相容的通常函子。

一个左 *DG* 模 M 在 DG 范畴 $\mathcal{A}$ 上是一个 DG-函子 $M:\mathcal{A}\to C_{dg}(\mathbf{k})$，其取值于 k 上复形的 DG 范畴。类似地，*右 DG* 模是一个从对偶范畴出发的函子 $\mathcal{A}^{op}$ 。因此，对于每个对象 $a\in obj(\mathcal{A})$，我们都有一个复形 ${}_aM := M(a)$，且对于任意一对对象 a,b，都有复形之间的态射 ${}_a\mathcal{A}_b\otimes_\Bbbk {}_bM\to {}_aM$ ；右 DG 模的情形也类似。

两个 DG 范畴 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ 的张量积 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ 的对象集为 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}_1)\times\mathrm{Ob}(\mathcal{A}_2)$，其态射为

$$ {}_{a_1,a_2}(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)_{b_1,b_2} := {}_{a_1}(\mathcal{A}_1)_{b_1}\otimes_\Bbbk {}_{a_2}(\mathcal{A}_2)_{b_2} $$

以及自然的复合（涉及 Koszul 符号规则）和单位元。

一个DG $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-双模 M，如果它是 $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2^{op}$ 上的左 DG 模，由复形 ${}_aM_b := M(a,b)$ 给出，与上述情形类似。本文的核心是这一概念的以下特殊情形。设 $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个 DG-函子。我们定义双模

$$ {}_F\mathcal{A}\in \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A} $$

通过设定

$$ {}_a({}_F\mathcal{A})_b := {}_{Fa}\mathcal{A}_b, $$

并令 $\mathcal{A}$ 在右侧自然作用、通过 F 在左侧作用：

$$ \alpha.(\beta).\gamma = F(\alpha)\beta\gamma\in {}_{Fc}\mathcal{A}_d \qquad \forall\ \alpha\in {}_c\mathcal{A}_a,\ \beta\in {}_{Fa}\mathcal{A}_b,\ \gamma\in {}_b\mathcal{A}_d. $$

2.2. **等变DG范畴**。 本文需要研究等变DG范畴——配备了强 群作用的DG范畴——以及其上的等变模。为此，[GKL21，§4。8] 并在 [GL25，§5。2]中进一步完善了一种新方法。该方法旨在用于研究

Morita 等价意义下的DG范畴，与 Kapranov 和 Ganter 在 [GK14]中提出的方法有所不同。下面我们简要概述一下，以便建立记号。

设 $\mathcal{A}$ 为一个小DG范畴。有限群 G 在 $\mathcal{A}$ 上的强作用是将 G 嵌入到 $\mathcal{A}$的DG自同构群中。特别地， G 通过自同构而非自等价起作用。这种情况相当罕见，但本文研究 $G = S_n$ 及其子群在张量幂 $\mathcal{A}^{\otimes n}$上的作用。在这种情况下，该作用是强作用。关于群以较弱的方式作用于DG范畴时的霍赫希尔德复形，讨论见 [Nor25b] 。

定义 2.1([GKL21], 定义 4.45)。半直积 $\mathcal{A} \rtimes G$ 是如下DG范畴：

- 对象 $\mathcal{A} \rtimes G =$ 对象 $\mathcal{A}$,
- 对于任意两个对象 a， $b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \rtimes G)$，其态射复形为

$$ {}_a\mathcal{A} \rtimes G_b := \bigoplus_{g \in G} {}_{ga}\mathcal{A}_b. $$

  我们用 (α, g) 表示对应于 $g \in G$ 和$\alpha \in {}_{ga}\mathcal{A}_b$ 项中的一个元素。于是 $\deg_{\mathcal{A}\rtimes G}(\alpha, g) = \deg_{\mathcal{A}} \alpha$ 且 $d_{\mathcal{A}\rtimes G}(\alpha, g) = (d_{\mathcal{A}}\alpha, g)$,
- $\mathcal{A} \rtimes G$ 中的复合与扭曲群环的情形类似，由下式给出：

$$ (\alpha_1, g_1) \circ (\alpha_2, g_2) = (\alpha_1 \circ g_1.\alpha_2, g_1 g_2). $$

- 对于任意 $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \rtimes G)$， a 的恒等态射为 $(\mathrm{Id}_a, 1_G)$。

按照此定义， $\mathcal{A} \rtimes G$ 上的模是 G<style id='7'}-等变模，取自 $\mathcal{A}$ 中 [GK14, §2.1。3]。

引理 2.2 ([GKL21], 引理 4.41)。存在互为逆的范畴同构

$$ \mathbf{Mod}\text{-}(\mathcal{A} \rtimes G) \leftrightarrows \mathbf{Mod}^G\text{-}\mathcal{A}, $$

$$ h\mathcal{P}erf\text{-}(\mathcal{A} \rtimes G) \leftrightarrows h\mathcal{P}erf^G\text{-}\mathcal{A}. $$

以下引理的第二部分用到了定义 4.22 或同上文献中阐述的完美包络概念。

对于任意 $g \in G$，自等价 $g\colon \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ 可扩展为 $\mathcal{A} \rtimes G$:

定义 2.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴， G 是一个强作用于 $\mathcal{A}$ 的群。对于任意 $g \in G$，定义自等价

$$ g\colon \mathcal{A} \rtimes G \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} \rtimes G $$

使其在对象上的作用与 g 相同： $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$，并在态射上按以下方式作用：$g(\alpha, f) = (g(\alpha)\ gfg^{-1})$。

2.3. **分拆**。

定义 2.4. 设 $n \geq 0$。 n 的（无序）分拆是由严格正整数 n_i 组成的无序集合 $\lambda := \{n_1, \ldots, n_m\}$，其中 $\sum_{i=1}^m n_i = n$。我们将其记为 $\lambda \vdash n$。

整数 n_i 是 λ的部分。我们用 $r(\lambda)$表示 λ的长度。这里指的是 λ中部分的总数，即 m。我们用 $r_k(\lambda)$表示 λ中大小为 k的部分数，也就是满足 $n_i = k$的 i 的数量。

对于 $n = 0$，我们采用如下约定：存在唯一一个 0 的分拆 0，使得$r(0) = r_k(0) = 0$。

定义 2.5。设 $n \geq 0$。 n 的一个有序分拆是 $(n_1、\ldots\ldots、 n_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$，其中 $\sum_{i=1}^m n_i = n$。我们将其记为 $(n_1、\ldots\ldots、 n_m) \vdash n$。

我们用 Forg 表示从 n 的所有有序分拆到 n 的所有无序分拆的遗忘映射，它会遗忘各部分的顺序。

定义 2.6。设 $n \geq 0$，且 $\lambda \vdash n$ 是一个无序分拆。定义 $r(\lambda)$ 为 $r(\lambda)$ 的有序分拆 $((r_1(\lambda)\ldots\ldots、 r_n(\lambda))$。

2.4. **DG 范畴的对称幂**。对于任意小DG范畴 $\mathcal{A}$ 以及任意 $n \geq 0$ 我们记 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 为 n重张量积（在 $\Bbbk$上），将其视为范畴 $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-双模中的一个对象，参见 [Kel94，§6。1]。换言之

$$ {}_a\left(\mathcal{A}^{\otimes n}\right)_b := \bigoplus_{a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathcal{A}} {}_a\mathcal{A}_{a_1} \otimes_\Bbbk {}_{a_1}\mathcal{A}_{a_2} \otimes_\Bbbk \cdots \otimes {}_{a_{n-1}}\mathcal{A}_b. $$

对于 $n = 0$，我们采用约定 $\mathcal{A}^{\otimes 0} = \mathsf{k}$。本文研究的主要对象将在下述定义中引入。

定义 2.7。设 $\mathcal{A}$是一个小DG范畴。设 $n \geq 0$，并设 $(n_1, \ldots, n_m) \vdash n$是一个有序分拆。定义

$$ S_{n_1,\ldots,n_m} := S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_m} < S_n, $$

并将 $(n_1, \ldots, n_m)$-次对称幂定义为 $\mathcal{A}$如下

$$ \mathcal{S}^{n_1,\ldots,n_m}\mathcal{A} := \mathcal{A}^{\otimes n} \rtimes \left(S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_m}\right). $$

定义 2.8。设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴。设 $n \geq 0$，并设 $\lambda \vdash n$ 是一个分拆。定义 S_λ和 $\mathcal{S}^\lambda\mathcal{A}$分别为 $S_{n_1,\ldots,n_m}$和 $\mathcal{S}^{n_1,\ldots,n_m}\mathcal{A}$的同构类，其中 $(n_1, \ldots, n_m)$ 满足 $\mathrm{Forg}(n_1, \ldots, n_m) = \lambda$。

我们对分次向量空间、向量空间复形等也作类似定义。所有这些都可以视为下述定义的特例；我们需要用它来处理 Hochschild 复形：

定义 2.9。设 $E \in \text{Pre-Tr}^-(\mathbf{Mod}\text{-}\Bbbk)$ 是一个关于 $\mathbf{Mod}\text{-}\Bbbk$ 的有界上方扭曲复形，参见 [AL24，§3]。设 $n \geq 0$并设 $(n_1, \ldots, n_m) \vdash n$为一个有序分拆。定义 $(n_1, \ldots, n_m)$ 次对称幂 E为

$$ \mathcal{S}^{n_1,\ldots,n_m}E := (E^{\otimes n})_{S_{n_1,\ldots,n_m}} \in \text{Pre-Tr}^-(\mathbf{Mod}\text{-}\Bbbk), $$

其中，下标表示对 $S_{n_1,\ldots,n_m}$ 的作用取余不变量；该作用置换相应的因子。

对于任意无序分拆 $\lambda \vdash n$，定义 $\mathcal{S}^\lambda E$ 为 $\mathcal{S}^{n_1,\ldots,n_m}E$ 的同构类，其中 $(n_1, \ldots, n_m)$ 任取满足 $\mathrm{Forg}(n_1, \ldots, n_m) = \lambda$ 的组合。

2.5. **双模的霍赫希尔德同调**。一旦我们有了一个 M 上的范畴 $\mathcal{A}$双模的概念，分解和导出函子的通常形式主义就可以以相当直接的方式扩展到范畴层面，参见 [Kel94，§2 以及 §3]，，通常的定义也有意义，参见 [Kel20，§6。8]对于情形 $M = \mathcal{A}$：

定义 2.10。设 $\mathcal{A}$ 是一个小的 DG-范畴，并设 $M \in \mathcal{A}$-**模**-$\mathcal{A}$。则的霍赫希尔德同调 M 为

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; M) := H^\bullet(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}} \mathcal{A}), \tag{2.1}$$

L另见 [Lod97, §1.1.3] [Bar03, §3, 步骤 4][Nor25b, §3.2]. 这里 $\otimes_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}}$ 是 DG-函子的导出函子

$$\otimes_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}} \colon \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}\mathcal{A} \to \mathbf{Mod}\text{-}\Bbbk \tag{2.2}$$

其中我们将左侧的 $\mathcal{A}$-作用与右侧的 $\mathcal{A}$-作用张量化，反之亦然。更准确地说，$\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-双模等价地说是右侧的 $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_\Bbbk \mathcal{A}$-模，或左侧的 $\mathcal{A} \otimes_\Bbbk \mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$-模。我们可以通过对象上的典范同构，将它们视为左侧和右侧的 $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_\Bbbk \mathcal{A}$-模

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes_\Bbbk \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_\Bbbk \mathcal{A}, \\ a \otimes b \quad &\mapsto \quad b \otimes a \end{aligned}$$

而对于右侧的态射，有一个由 Koszul符号规则决定的因子（± 1）。那么（2.2）就是关于此模结构进行张量化的函子。具体而言，它将任意一对 E，$F \in \mathcal{A}$-**模** -$\mathcal{A}$ 映射为一个 $\Bbbk$-模复形

$$E \otimes_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}} F := \Big(\bigoplus_{a,b \in obj(\mathcal{A})} {}_aE_b \otimes_\Bbbk {}_bF_a \Big) / \{ e \otimes \alpha.f.\beta - \beta.e.\alpha \otimes f \} \tag{2.3}$$

对于所有的 $e \in {}_aE_b$、$\alpha \in {}_b\mathcal{A}_c$、$f \in {}_cF_d$、$\beta \in {}_d\mathcal{A}_a$，以及对象 a、b、c、d 的四元组，其中 $\mathcal{A}$。注意，项 $e \otimes \alpha.f.\beta$ 属于 ${}_aE_b \otimes_\Bbbk {}_bF_a$，而 $\beta.e.\alpha \otimes f$ 属于 ${}_dE_c \otimes_\Bbbk {}_cF_d$。

L我们可以通过对任一变量取 h-投射分解来计算 $\otimes_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}}$。¯使用标准的对角双模 $\mathcal{A}$ 的 bar复形分解 $\mathcal{A}$，例如参见[AL21，第 2 节。11], 我们看到，$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; M)$ 同构于 Hochschild 复形 的卷积$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}; M)$ 取系数于 M 所得的上同调：

$$\cdots \to \bigoplus_{a,b,c \in \mathcal{A}} {}_aM_c \otimes_\Bbbk {}_c\mathcal{A}_b \otimes_\Bbbk {}_b\mathcal{A}_a \to \bigoplus_{a,b \in \mathcal{A}} {}_aM_b \otimes_\Bbbk {}_b\mathcal{A}_a \to \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} {}_aM_a \tag{2.4}$$

微分定义如下：

$$\begin{aligned} m_0 \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \quad \mapsto \quad & m_0.\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{n-1} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, m_0 \otimes \cdots \otimes \alpha_i\alpha_{i+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n + \\ & + (-1)^{n+|\alpha_n|(|m_0|+\cdots+|\alpha_{n-1}|)} \alpha_n.m_0 \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

主要示例。对于 $M = \mathcal{A}$，我们得到霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; \mathcal{A})$。若 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个函子，则定义 F-扭曲霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; F)$ 为 $\mathcal{A}$ 取系数于由 F 诱导的双模 ${}_F\mathcal{A}$ 所得的霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; {}_F\mathcal{A})$。

本文的主要计算是在 F 为由循环置换 $t_n =$(1，2，$\ldots n$)给出的置换函子 $\mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}^{\otimes n}$ 时进行的。

2.6. **洗牌置换**。通常的 K¨unneth 同构稍作调整后即可用于 DG 范畴。与 k-代数的情形一样，首先定义洗牌置换：

定义 2.11。令 $p, q \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$。定义 (p, q)-洗牌置换的子集

$$S_{p,q} := \left\{ \sigma \in S_{p+q} \;\middle|\; \sigma(i) < \sigma(j) \text{ if } \begin{array}{c} 1 \leq i < j \leq p, \\ \text{or} \\ p+1 \leq i < j \leq p+q. \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

洗牌置换 $\sigma \in S_{p,q}$ 的符号 $(-1)^\sigma$ 是它作为 S_n中的置换时的符号。

换言之，(p, q)-洗牌置换是置换群 S_{p+q}中保持前 p 个元素与最后 q 个元素相对顺序的元素。本文稍后需要计算如下定义的数：

定义 2.12。令 $p, q \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$。定义

$$Y_{p,q} := \begin{cases} \binom{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} & \text{either } p \text{ or } q \text{ is even}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

引理 2.13。令 $p, q \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$。则

$$Y_{p,q} = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} (-1)^\sigma. \tag{2.6}$$

证明。我们对 $p+q$ 使用归纳法。所有 $(p,\ q)$-洗牌置换 σ 都可以分为以下两类：$\sigma^{-1}(1) = 1$和 $\sigma^{-1}(1) = p+1$。前一类与同奇偶性的 $(p-1,\ q)$-洗牌置换一一对应；后一类与奇偶性相差 $(-1)^p$ 的 $(p,\ q-1)$-洗牌置换一一对应。因此

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q}} (-1)^\sigma = \sum_{\sigma \in S_{p-1,q}} (-1)^\sigma + (-1)^p \sum_{\sigma \in S_{p,q-1}} (-1)^\sigma.$$

通过直接计算，我们还得到

$$Y_{p,q} = Y_{p-1,q} + (-1)^p Y_{p,q-1}. \tag{2.7}$$

只需证明在 $p = 0$ 或 $q = 0$ 的情形下，(2.6) 仍成立；这显然成立。□

下面我们还需要用到洗牌置换的一个简单推广：

定义 2.14。设 $P,\ Q \subset \{1, \ldots, n\}$ 是两个不相交的子集。定义 $(P,\ Q)$-洗牌置换的子集

$$S_{P,Q} := \left\{ \sigma \in S_n \;\middle|\; \begin{array}{lll} \sigma(i) < \sigma(j) & \text{if} & i < j \text{ with } i, j \in P \text{ or } i, j \in Q, \\ \sigma(i) = i & \text{if} & i \neq P \cup Q \end{array} \right\} \tag{2.8}$$

洗牌置换 $\sigma \in S_{P,\ Q}$ 的符号 $(-1)^\sigma$，是其作为 S_n 中一个置换时的符号。

2.7. **K¨unneth 同构**。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 DG 范畴。众所周知的 K¨unneth 同构

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}; M) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{B}; N) \simeq \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{B}; M \otimes_{\Bbbk} N) \tag{2.9}$$

可用霍赫希尔德复形（2.4）表示如下。首先，我们在巴复形层面定义它：

定义 2.15。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 DG 范畴。令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别为它们的巴复形，并将其视为 $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$- 以及 $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-双模的扭曲复形[AL21，定义 2。24]。类似地，令 $\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}$ 为张量积范畴 $\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}$的巴复形。

定义 Eilenberg-Zilber映射

$$\mathrm{EZ}\colon \bar{\mathcal{A}}\otimes_{\Bbbk}\bar{\mathcal{B}}\to\overline{\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}}$$

从 $\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}$-$\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}$-双模的扭曲复形出发，构成分量

$$\mathcal{A}^{\otimes n}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}^{\otimes m}\xrightarrow{\sum_{\sigma\in S_{n-2,m-2}}(-1)^{\sigma}\iota_{\sigma}}\mathcal{A}^{\otimes n+m-2}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}^{\otimes n+m-2}\xrightarrow{\sim}(\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B})^{\otimes n+m-2}\tag{2.10}$$

其中 $n,m\geq 2$ 并且对于任意 $(n-2,m-2)$-洗牌 $\sigma\in S_{n-2,m-2}$ 映射

$$\iota_{\sigma}\colon \mathcal{A}^{\otimes n}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}^{\otimes m}\to\mathcal{A}^{\otimes n+m-2}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}^{\otimes n+m-2}$$

首先通过反复应用恒等映射插入映射给出

$$\mathcal{A}^{\otimes 2}\to\mathcal{A}^{\otimes 3}$$
$$\alpha_1\otimes\alpha_2\mapsto\alpha_1\otimes\mathrm{Id}_{a_1}\otimes\alpha_2\qquad\forall\,\alpha_i\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a_i,a_{i-1}),$$

将 $m-2$ 恒等映射插入 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 中，位置为 $\sigma((n-2)+1)+1$,$\sigma((n-2)+2)+1,\ldots,$ $\sigma((n-1)+m-2)+1$，然后再将$n-2$恒等映射插入位置 $\sigma(1)+1,\ldots,\sigma(n-2)+1$，位于 $\mathcal{B}^{\otimes(n+m-2)}$中。

由于对于任意 DG 范畴 $\mathcal{C}$ 和双模 L，我们都有 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{C};M)\simeq\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{C}\text{-}\mathcal{C}}L$，现在可以定义霍赫希尔德复形的埃伦伯格–齐尔伯态射：

定义 2.16. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 DG 范畴。埃伦伯格–齐尔伯态射

$$\mathrm{EZ}\colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};M)\otimes_{\Bbbk}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{B};N)\to\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B};M\otimes_{\Bbbk}N),\tag{2.11}$$

是以下复合

$$\begin{array}{c}\left(\bar{\mathcal{A}}\otimes_{\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}}M\right)\otimes_{\Bbbk}\left(\bar{\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{B}\text{-}\mathcal{B}}N\right)\\ \downarrow\sim\\ \left(\bar{\mathcal{A}}\otimes_{\Bbbk}\bar{\mathcal{B}}\right)\otimes_{\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}}\left(M\otimes_{\Bbbk}N\right)\\ \downarrow(2.10)\\ \overline{\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}}\otimes_{\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}\otimes_{\Bbbk}\mathcal{B}}\left(M\otimes_{\Bbbk}N\right).\end{array}\tag{2.12}$$

显式地，对于任意霍赫希尔德链

$$\underline{\alpha}=m\otimes\cdots\otimes\alpha_n\in\mathrm{HC}_n(\mathcal{A};M)$$
$$\underline{\beta}=n\otimes\cdots\otimes\beta_m\in\mathrm{HC}_m(\mathcal{B};N)$$

我们有

$$\mathrm{EZ}\left(\underline{\alpha}\otimes\underline{\beta}\right)=\sum_{\sigma\in S_{n,m}}(-1)^{\sigma}(-1)^{\deg_{\sigma}(\underline{\alpha},\underline{\beta})}(m\otimes n)\otimes\cdots\otimes(\alpha_i\otimes\mathrm{Id})\otimes\ldots(\mathrm{Id}\otimes\beta_j)\otimes\ldots\tag{2.13}$$

其中，在由 $\sigma\in S_{n,m}$ 索引的加项中，因子 $(\alpha_i\otimes$恒等映射$)$ 和 $($恒等映射$\otimes\beta_j)$ 分别出现在位置 $\sigma(i)$ 和 $\sigma(n+j)$。第二个符号的计算方法是令 $d_\sigma(\alpha,\beta)$ 为所有满足下述条件的 $0\leq i\leq n$ 和 $0\leq j\leq m$ 的 $\deg(\alpha_i)\deg(\beta_j)$ 之和：包含 α_i 的因子位于包含 β_j 的因子右侧。

如 [Lod97中所述，§4.2]态射 EZ 诱导出霍赫希尔德同调群的同构。逆同构由 Alexander-Whitney 映射诱导 [ML63，推论 X.7。2]

$$\mathrm{AW}((a_0 \otimes b_0) \otimes (a_1 \otimes b_1) \otimes \ldots \otimes (a_n \otimes b_n)) =$$

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{(2.14)} \left(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p \otimes a_{p+1} \otimes \ldots \otimes a_n\right) \otimes \left(b_{p+1} \ldots b_n b_0 \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_p\right)$$

其中符号为

$$p(n-p) + \sum_{i=0}^{n-1} \deg b_i \left(\sum_{j=i+1}^{n} \deg a_j\right) + \left(\sum_{i=p+1}^{n} \deg b_i\right) \left(\sum_{j=0}^{p} \deg b_j\right). \qquad (2.14)$$

2.8. **与常数的洗牌积**。我们引入以下概念：

定义 2.17。设 $\mathcal{A}$ 为一个 DG 范畴。设

$$\underline{\alpha} = \alpha_0 \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \in \mathrm{HC}_n(\mathcal{A})$$

为 $\mathcal{A}$ 中的一个 Hochschild（$n+1$）链，并设

$$\underline{\kappa} = \kappa_0 \otimes \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_m \in \mathrm{HC}_m(\mathbb{k})$$

为 k 中的一个 Hochschild（$m+1$）链。定义洗牌

$$\mathrm{Sh}\,(\underline{\alpha}, \underline{\kappa}) \in \mathrm{HC}_{n+m}(\mathcal{A}) \qquad (2.15)$$

为 $\alpha \otimes \kappa$ 在复合下的像_

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes \mathrm{HC}_\bullet(\mathbb{k}) \xrightarrow{K} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$$

其中第一个映射是 K¨unneth 态射（2.11），第二个映射则由典范 DG 范畴同构诱导：$\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$。

我们的主要应用是情形 $\kappa = 1^{\otimes(m+1)}$。具体而言，$\mathrm{Sh}\left(\alpha,\ 1^{\otimes(m+1)}\right)$ 是对所有 $\sigma \in S_{n,\ m}$ 求和，取在 $\mathcal{A}$ 中通过使用¯σ 将适当的恒等态射洗牌插入α而得到的 $n+m$-链。每个加项的符号为 $(-1)^{\sigma}$。

3. Long cycle case

设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴，且 $n \geq 1$。置换群 S_n 通过置换各个因子作用于张量幂 $\mathcal{A}^{\otimes n}$。例如，长循环$t_n := (1 \ldots n) \in S_n$通过范畴同构作用：

$$t_n \colon \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A}^{\otimes n}$$

它将

$$a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \to a_n \otimes a_1 \otimes \ldots a_{n-1}$$

作用于对象，并相应地作用于态射。我们用相同的记号t_n 表示上述置换函子；在不会引起混淆时，记 t_n 为 t。由于循环置换 t_n 与自身可交换，由它诱导的同构函子会诱导出一个同构

$$t_n \colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t).$$

令 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t_n)^{t_n}$ 表示 t的作用所对应的余不变量，即由对所有 $\alpha \in \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t_n)$成立的 $\alpha - t_n.\alpha$ 所生成的子空间的向量空间商。 _ _ _

本节的主要结果是构造两个互为逆的同伦等价

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};t_n)_{t_n} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}). \tag{3.1}$$

3.1. 记号。对于一条链

$$\underline{\alpha}_0 \otimes \cdots \otimes \underline{\alpha}_{m-1} \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^n;t)$$

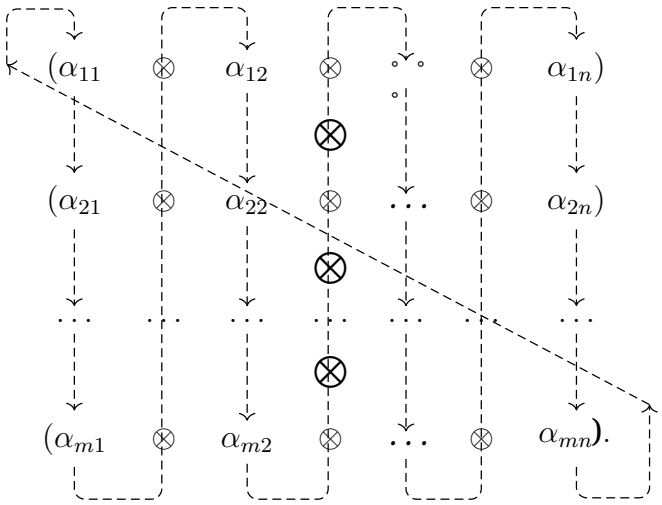
我们将对指标进行平移，并将其分解为如下基本链的乘积

$$\underline{\alpha}_i = \alpha_{(i+1)1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{(i+1)n} \tag{3.2}$$

对于某个

$$a_1, \cdots, a_{nm+1} \in \mathcal{A} \text{ with } a_1 = a_{nm+1},$$
$$\alpha_{ij} \in {}_{a_{(j-1)m+i+1}}\mathcal{A}_{a_{(j-1)m+i}}$$

（3.2）中的指标平移源于我们希望使用矩阵记法：上面的链可以可视化为



(3.3)

其中，点线表示态射 α_{ij} 可按何种顺序复合。我们将这样的链简记为 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}. \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

注意，对于 $n=1$，我们有

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^n;t) = \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}),$$

因此链

$$\alpha_1 \otimes \dots \alpha_m \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$$

在上述记号中表示为列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

同样，为了便于使用矩阵记法，我们将 $\mathbf{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$ 中链的记法从 $\alpha_0 \otimes \cdots \otimes \alpha_{m-1}$ 改为 $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m$。

例如，我们将 $\mathrm{HC}_3(\mathcal{A})$ 中的基本 4-链写作

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}.$$

每个 α_i 都是某个 $a_1,\dots,a_5\in\mathcal{A}$ 的态射 $a_{i+1}\to a_i$，其中 $a_5=a_1$：

$$a_1\xrightarrow{\alpha_4}a_4\xrightarrow{\alpha_3}a_3\xrightarrow{\alpha_2}a_2\xrightarrow{\alpha_1}a_1.$$

类似地，我们将 $\mathrm{HC}_2(\mathcal{A}^2;t)$ 中的一个基本 3-链写作

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{pmatrix}.$$

每个 α_{ij} 都是某个 $a_{11},a_{12},\dots,a_{41},a_{42}\in\mathcal{A}$ 的态射 $a_{(i+1)j}\to a_{ij}$，其中$a_{41}=a_{12}$ 且 $a_{42}=a_{11}$：

$$a_{11}\xrightarrow{\alpha_{32}}a_{32}\xrightarrow{\alpha_{22}}a_{22}\xrightarrow{\alpha_{12}}a_{12}\xrightarrow{\alpha_{31}}a_{31}\xrightarrow{\alpha_{21}}a_{21}\xrightarrow{\alpha_{11}}a_{11}.$$

3.2. 映射 f。

定义 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴。对于每个 $n\geq 1$，定义映射

$$f\colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};t)_t\to\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$$

通过对每个 $m\geq 1$ 定义映射 $f\colon \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^{\otimes n};t)_t\to\mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$ 为

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}.\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\begin{pmatrix}\alpha_{1(s+1)}\dots\alpha_{ms-1}\alpha_{1s}\\ \alpha_{2s}\\ \dots\\ \alpha_{ms}\end{pmatrix}\tag{3.6}$$

3.3. 映射 g.

定义 3.2. 设 $\mathcal{A}$ 为一个小DG范畴。对于每个 $n\geq 1$，定义映 p

$$g\colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})\to\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};t)_t$$

通过对每个 $m\geq 1$ 定义映射 $g\colon \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})\to\mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^{\otimes n};t)_t$ 为

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad\sum_{c\in\{1,\dots,n\}^m\text{ with }c_1=1}(-1)^{\sigma_c}\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ & & \dots & \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn}.\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

这里：

- 求和遍历所有满足 $c_i\in\{1,\dots,n\}$ 和 $c_1=1$ 的 $c=(c_1,\ \dots\dots,\ c_m)$。我们将每个 c_i 视为矩阵 (β_{ij}) 的第 i 行中的一个列位置的选择，并且总是选择第一行中的第一个位置。
- 我们将 $\sigma_c\in S_m$ 定义为这样的置换：其中 $\sigma_c(i)$ 是满足 $c_k<c_i$ 或满足 $c_k=c_i$ 且 $k\leq i$ 的 c_k 的数量。
- 我们定义

$$\beta_{ij}:=\begin{cases}\alpha_{\sigma_c(i)} & j=c_i,\\ \mathrm{Id} & j\neq c_i,\end{cases}$$

这个定义可以这样理解：取矩阵（β_{ij}），从β_{11}开始，按照其元素可复合的顺序（沿每一列向下，然后移至右侧一列的顶部），依次将 α_1，……，α_n放置在每一行所选的列位置上。其余位置填入恒等映射。由此得到一个矩阵，其中每一行恰好包含一个 α_i。置换 σ_c 对应于对 α_i从顶行到末行计数所得到的新排列顺序。

例如，对于 $n=2$ 和 $m=4$，映射 g 就是映射

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \alpha_3 & \mathrm{Id}\\ \alpha_4 & \mathrm{Id}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \alpha_3 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\\ \alpha_3 & \mathrm{Id}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_3\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \alpha_3 & \mathrm{Id}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_3\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_3\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\\ \alpha_2 & \mathrm{Id}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1 & \mathrm{Id}\\ \mathrm{Id} & \alpha_2\\ \mathrm{Id} & \alpha_3\\ \mathrm{Id} & \alpha_4\end{pmatrix}$$

3.4. 同伦 Φ. 我们首先需要以下辅助构造：

定义 3.3。设 $m,n\geq 1$。我们定义映射

$$B_{p,q,d,r,\underline{c}}\colon \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^{\otimes n})\to \mathrm{HC}_m(\mathcal{A}^{\otimes n}) \tag{3.8}$$

以……为参数

- $p\in\{1,\dots,m\}$,
- $q\in\{2,\dots,n\}$,
- $d\in\{1,\dots,p\}$,
- $r\in\{0,\dots,d-1\}$ 当 $q<n$ 且 $r=0$ 当 $q=n$,
- $\underline{c}=(c_1,\dots,c_r)\in\{1,\dots,n-q\}^r$,

是一个将任意链映射到

$$\underline{\alpha}:=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}.\end{pmatrix}$$

到由下式定义的链 $\beta=(\beta_{ij})$

行组：i		j	β_{ij}
1	1	1 否则	$\alpha_{(p+1)q}\dots\alpha_{mn}\alpha_{11}$ Id
2	$2,\ \dots\dots,\ r+1$	c_{i-1} 否则	$\alpha_{(\sigma_{\underline{c}}(i-1)+1)1}$ Id
3	$r+2,\ \dots\dots,\ d$	$n-q+1$ 否则	α_{i1} Id
4	$d+1,\dots,m+d-p$	$n-q+2,\dots,n$ 否则	$\alpha_{(i+p-d)(j-n+q-1)}$ Id
5	$(m+d-p+1)$	$n-q+2,\dots,n$ 否则	$\alpha_{1(j-n-q)}\dots\alpha_{d(j-n-q)}$ Id
6	$m+d-p+2,\dots,m+1$	$n-q+1,\dots,n$ 否则	$\alpha_{(i-m+p-1)(j-n+q)}$ Id

其中 $\sigma_{\underline{c}}\in S_r$与定义 3.2类似，是由各行产生的置换

当我们按照可复合的顺序，将 α_{21}、……、$\alpha_{(r+1)1}$ 分配到由 σ_c 选定的第 2、……、$r+1$ 行中的位置时。

定义 3.4。对每个 $n \geq 1$，定义一个次数为 -1 的映射

$$\Phi_n \colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t) \to \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t)$$

作为映射

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \Phi'_n \circ t^{s-1}, \tag{3.9}$$

其中 Φ'_n 是将任意链映射到

$$\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}. \end{pmatrix}$$

to

$$\sum_{p,q,d,r,\underline{c}} \sum_{\tau} \sum_{\upsilon} (-1)^{\sigma_{\underline{c}}} (-1)^{\tau} (-1)^{\upsilon} (-1)^{m+(m+d)(p+d)} \tau \upsilon B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}). \tag{3.10}$$

其中求和范围满足 p，q，d，r，c 如定义 3.3 所述，τ 遍历 $S_{\{r+2,\dots,m-p+d\},\ \{d+1,\dots,p\},\ m+1}$，$\upsilon$ 遍历 $S_{\{2,\dots,r+1\},\ \{r+2,\dots,m+1\},\ m+1}$。洗牌置换 τ 和 υ 通过置换链的矩阵形式的行来作用。最后，置换 $\sigma_c \in S_r$ 如定义 3.3所述。

定理 3.1。映射 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t)_t \to \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t)_t$ 相等：

$$d\Phi_n = g_n f_n - \mathrm{Id}\,.$$

证明。设 f'_n 是 f_n 的 $s = 1$ 加项，因此 $f_n = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} f'_n \circ t^{s-1}$。只需证明以下映射相等：$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t) \to \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t)$:

$$d\Phi'_n = g_n f'_n - \mathrm{Id}\,.$$

对于任意 $m \geq 1$，取任意基本 Hochschild 链 $\alpha \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^{\otimes n})$

$$\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}. \end{pmatrix}$$

我们需要证明

$$d\left(\Phi'_n(\underline{\alpha})\right) = -\Phi'_n(d\underline{\alpha}) + g_n f'_n(\underline{\alpha}) - \underline{\alpha}. \tag{3.11}$$

我们通过逐一考察左端 (3.11) 中和 $\Phi'_n(\alpha)$ 对应的和式 (3.10) 的每个加项，并对其求微分来验证这一点。结果中的每个加项都是 $\mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A}^{\otimes n})$ 的一个基本链，由一个涉及 α_{ij} 的 $(m \times n)$- 矩阵构成，其系数 ± 1 来自 (3.10) 中的符号扭曲以及 Hochschild 微分。对于每个这样的矩阵，我们指出，它恰好还会出现一次：要么出现在左端的和式 (3.10) 中，与 $d(\Phi'_n(\alpha))$ 对应；要么出现在右端的和式 (3.10) 中，与 $\Phi'_n(d\alpha)$ 对应；要么出现在项 $g_n f'_n(\alpha) - \alpha$ 中。我们指出其出现的位置，并验证符号恰好使这些项相消。

在证明的最后，我们将列出左端 $d(\Phi'_n(\alpha))$ 中与项 $g_n f'_n(\alpha) - \alpha$ 中的项相消的特殊和项。在证明的大部分过程中，我们将取左端 $d(\Phi'_n(\alpha))$ 中的和项，并找出相应的

$d(\Phi'_n(\alpha))$ 左端中的和项，或 $\Phi'_n(d\alpha)$ 右端中的和项，它们会与这些和项相消。我们的分析清楚地表明，右端 $d(\Phi'_n(\alpha))$ 中的所有和项都会被消去。

我们首先假设 $\tau = \upsilon =$ 恒等映射$_{S_{m+1}}$。这是我们分析的主要内容。现在考虑以下情形：

$p, q, d, r,$ and $\underline{c}$ generic:

我们从 p、q、d、r 和 c 在（3.10）中取一般值开始，此时定义 $B_{p,\,q,\,d,\,rc}(\alpha)$ 的定义 3.3 中表格所列出的全部六个行范围均存在且非空。明确地说，这意味着 $r \geq 2$、$d \geq r+1$、$d < p < m$，以及 $q < n$。

我们为 $dB_{p,\,q,\,d,\,rc}(\alpha)$ 的每个加项构造抵消项。记 $d_iB_{p,\,q,\,d,\,rc}(\alpha)$ 为将 $B_{p\,,\,q\,,\,d\,,\,rc}(\alpha)$ 的第 i 行与第 $(i+1)$ 行合并后所得的加项。我们为 $d_iB_{p\,,\,q\,,\,d\,,\,rc}(\alpha)$ 构造抵消项的方式，仅取决于表格中 $B_{p,\,q,\,d,\,rc}(\alpha)$ 的行组及 i 的行组和 $i+1$ 的行组；该表见定义 3.3。因此，只需检查以下情形；其中，情形 (pq) 指 i 属于组 p 且 $i+1$ 属于组 q 的情形：

- (12)：这是情形 $i = 1$。它有两个子情况。如果 $c_1 = 1$，则抵消项为

$$B_{p-1,q,d-1,r-1,(c_2,\ldots,c_r)}(d_1\underline{\alpha}).$$

如果 $c_1 > 1$，那么它是

$$d_{m+1}\tau B_{p,q,d,r,(c_2,\ldots,c_r,c_1-1)}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = ((m+1)m\ldots(r+1)).$$

- (22)：有两个子情况。如果 $c_i = c_{i+1}$，则抵消项为

$$B_{p-1,q,d-1,r-1,(c_1,\ldots,c_i,c_{i+2},\ldots,c_r)}(d_{\sigma_{\underline{c}}(i)}\underline{\alpha}).$$

如果 $c_i \neq c_{i+1}$，那么它是

$$d_iB_{p,q,d,r,(c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},c_i,c_{i+2}\ldots,c_r)}(\underline{\alpha}).$$

- (23)：这是情形 $i = r+1$。抵消项为

$$d_{r+1}\tau B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = ((r+1)(r+2)).$$

- (33)：抵消项为

$$B_{p-1,q,d-1,r,\underline{c}}(d_i\underline{\alpha}).$$

- (34)：这是情形 $i = d$ 抵消项为

$$d_d\upsilon B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \upsilon = (d(d+1)).$$

- (44)：抵消项为

$$B_{p,q,d,r,\underline{c}}(d_{i+p-d}\underline{\alpha}).$$

- (45)：这是情形 $i = m-p+d$。抵消项为

$$B_{p,q,d,r,\underline{c}}(d_m\underline{\alpha}).$$

- (56)：这是情形 $i = m-p+d+1$。抵消项为

$$d_{m-p+d+1}\upsilon B_{p,q,d+1,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \upsilon = ((m-p+d+1)\ldots(d+1)).$$

- (66)：抵消项为

$$B_{p-1,q,d,r,\underline{c}}(d_{i-m+p-1}\underline{\alpha}).$$

- (61)：这是情形 $i = m + 1$。抵消项为

$$d_1 \tau \upsilon B_{p-1,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = (2 \dots (r+2)) \, , \upsilon = ((r+2) \dots (d+1)) \, .$$

p、q、d、r，以及 c 非一般情形：

以下情形中，定义 $B_{p,\,q,\,d,\,rc}(\alpha)$（定义 3.3）中表格所列出的六个行范围中，有一个或多个不存在。3.3

在上述分析的基础上，还需补充以下情形，在这些情形中我们需要描述抵消项：

- (13)：这是情形 $r = 0$，但 $d \geq 2$。有两种子情况。若 $q = n$，则抵消项为

$$B_{p-1,n,d-1,0,\emptyset}(d_1 \underline{\alpha}),$$

其中 $\emptyset$ 是 c 在 $r = 0$ 时的值。若 $q < n$，则抵消项为

$$d_{m+1} \tau B_{p,q,d,1,(n-q)}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = ((m+1)m \dots 2) \, .$$

- (14)：这是情形 $r = 0$、$d = 1$、$p < m$。抵消项是

$$B_{p+1,q,1,0,\emptyset}(d_{m+1} \underline{\alpha}).$$

- (15)：这是情形 $r = 0$、$d = 1$、$p = m$ 有两种情形。如果 $q = n$，那么抵消项本身就在右端 (3.10) 上。如果 $q \neq n$，那么抵消项是

$$B_{1,q+1,1,0,\emptyset}(d_{m+1} \underline{\alpha}).$$

- (24)：这是情形 $d > 1$、$r = d - 1$、$p < m$。抵消项 is

$$d_d \tau B_{p,q,d,d-1,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = (d(d+1)) \, .$$

- (25)：这是情形 $d > 1$、$r = d - 1$、$p = m$。抵消项 is

$$d_d \tau B_{m,q,d,d-1,\underline{c}}(\underline{\alpha}) \quad \text{with} \quad \tau = (d(d+1)) \, .$$

- (35)：这是情形 $d > 1$、$r < d - 1$、$p = m$。抵消项 is:

$$d_d B_{m,q,d-1,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}).$$

- (51)：这是情形 $d = p$。有两种子情况。如果 $q = 2$，抵消项是 $g_n f_n'(\alpha)$ 中对应于 g_n 的加项，该加项由以下索引标记：

$$\underline{c}' = (1, c_1, \dots, c_r, n-1, \dots, n-1, n, \dots, n) \in \{1, \dots, n\}^m \, , \tag{3.12}$$

其中分别有 $p - 1 - r$ 个 $n - 1$ 和 $m - p$ 个 n。若 $q \neq 2$，则抵消项为

$$d_1 \tau B_{m,q-1,d,r,(c_1,\dots,c_r,n-q+1,\dots,n-q+1)}(\alpha) \quad \text{with} \quad \tau = (23 \dots (d+1)).$$

最后，假设 υ 非平凡。那么 $d(\upsilon B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}))$ 有三类加项。第一类是微分合并了分别属于两个行子集、且经 υ 洗牌的两行。接着令 υ' 为 υ 与交换这两行的对换的复合。那么 $d(\upsilon' B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}))$ 中有一个相同的加项，它来自合并同样的两行。(3.10) 中的所有符号扭转都保持不变，除了 $(-1)^{\upsilon'} = -(-1)^{\upsilon}$。由此可知，这两个加项相互抵消。

$d(\upsilon B_{p,\,q,\,d,\,r,\,\underline{c}}(\underline{\alpha}))$ 中的第二类和项，是指不属于第一群、但其中被合并的两行也彼此相邻的那些和项

在 $B_{p,\ q,\ d,\ r,\ c}(\alpha)$ 中。因此， $d(B_{p,\ q,\ d,\ r,\ c}(\alpha))$ 中存在一个将这两行合并的和项。上述分析给出了该和项的抵消项 X 。令 $\upsilon' \in S_m$ 为从 υ 得到的置换，其中将合并后的两行视为一行。于是， $\upsilon' X$ 将抵消 $d(\upsilon B_{p,\ q,\ d,\ r,\ c}(\alpha))$ 中所需的和项。剩下的工作是证明 $\upsilon' X$ 作为 (3.11) 中的一个和项存在。我们通过分析上述分析中在 $\tau = \upsilon =$ 恒等映射情况下所有适用的抵消项来验证这一点。首先，当 $X = B_\bullet($ $d_\bullet \alpha)$ 时，显然 $\upsilon' X$ 也是 $\Phi'_n(d\alpha)$ 的一个和项。其余情况如下：

- (12)，子情形 $c_1 > 1$。于是
$$\upsilon' X = \upsilon' d_{m+1}\tau B_{p,\ q,\ d,\ r,\ (c_2,\ldots,c_r,c_1-1)}(\alpha) = d_{m+1}\tau\upsilon B_{p,\ q,\ d,\ r,\ (c_2,\ldots,c_r,c_1-1)}(\alpha)$$
其中 $\tau = ((m+1)m\ldots(r+1))$。
- (22)，子情形 $c_i \neq c_{i+1}$。于是
$$\upsilon' X = \upsilon' d_i B_{p,\ q,\ d,\ r,\ (c_1,\ \ldots\ldots,\ c_{i-1},\ c_{i+1},\ c_i,\ c_{i+2}\ldots,\ c_r)}(\alpha) = d_i \upsilon B^{p,\ q,\ d,\ r,\ (c_1,\ \ldots,\ c_{i-1},\ c_{i+1},\ c_i,\ c_{i+2}\ldots,\ c_r)}(\alpha)。$$
- (23)。然后
$$\upsilon' X = \upsilon' d_{r+1}\tau B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) = d_{r+1}\tau\upsilon B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}),$$
其中 $\tau = ((r+1)(r+2))$。
- (56)。然后
$$\upsilon' X = \upsilon' d_{m-p+d+1}\upsilon'' B_{p,q,d+1,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) = d_{m-p+d+1}\upsilon\upsilon'' B_{p,q,d+1,r,\underline{c}}(\underline{\alpha})$$
where $\upsilon'' = ((m-p+d+1)\ldots(d+1))$.
- (61)。在
$$\upsilon' X = \upsilon' d_1\tau\upsilon'' B_{p-1,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}) = d_1\tau(t_{m+1}\upsilon t_{m+1}^{-1}\upsilon'')B_{p-1,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha})$$
其中 $\tau = (2\ldots(r+2))$ $\upsilon'' = ((r+2)\ldots(d+1))$ $t_{m+1} = (1\ldots m+1)$。
- (13)，子情形 $q < n$。于是
$$\upsilon' X = \upsilon' d_{m+1}\tau B_{p,q,d,1,(n-q)}(\underline{\alpha}) = d_{m+1}\upsilon\tau B_{p,q,d,1,(n-q)}(\underline{\alpha}),$$
其中 $\tau = ((m+1)m\ldots 2)$.
- (51)。在子情形 $q = 2$中，回忆一下， X 是 $g_n f'_n(\alpha)$ 中与 g_n 所索引的加项相对应的加项， c' 如（3.12）中所述。于是 $\upsilon' X$是 $g_n f'_n(\alpha)$ 中与 $\upsilon' c'$相对应的加项。

在子情形 $q \neq 2$ 中，
$$\upsilon' X = \upsilon' d_1\tau B_{m,q-1,d,r,(c_1,\ldots,c_r,n-q+1,\ldots,n-q+1)}(\underline{\alpha}) = \\ = d_1\tau' B_{m,q-1,d,r,(c_1,\ldots,c_r,n-q+1,\ldots,n-q+1)}(\underline{\alpha}),$$
where $\tau = (23\ldots(d+1))$ and $\tau' = t_{m+1}\upsilon t_{m+1}^{-1}\tau$.

第三类也是最后一类加项，是那些不属于第一行组、且其中待合并的两行在 $B_{p,\ q,\ d,\ r,\ c}(\alpha)$ 中并不相邻的加项。这必然意味着，待合并的两行中一行参与了洗牌υ，而另一行没有参与。此类情形有三种，其中情形（ij）指的是：待合并的两行在被 υ置换之前，属于定义 i 和 j 中的行组，即表 3.3中的：

- (24)：当洗牌置换 υ 将行组 4 的第一行（顶行）移到紧邻第 $d+1$ 行之下时，就会出现这种情况。此时，对 $d_{r+1}(\upsilon B_{p,\ q,\ d,\ r,\ c}(\alpha))$ 的抵消项为
$$d_{r+1}\left(\tau\upsilon B_{p,q,d,r,\underline{c}}(\underline{\alpha})\right) \qquad \text{with } \tau = ((r+1)(r+2)).$$

- (35)：当 v 将第 3 个行组的底行一路洗牌到第 $m-p+d+1$ 行，也就是第 5 个行组正上方时，就会出现这种情况。抵消项为

$$vd_{d+m-p}B_{p,q,d-1,r,\underline{c}}(\underline{\alpha}).$$

  其中，$v' \in S_m$ 是在源侧的 $\{1,\dots,m+1\}$中跳过 d 而由 $v \in S_{m+1}$ 得到的，而在目标侧则为 $v\,(d)$。
- (14)：当第 2 个行组为空、第 3 个行组存在，但 v 将第 4 个组的顶行一路洗牌置于第 2 行时，就会出现这种情况。抵消项为

$$v'B_{p+1,q,d,r,\emptyset}(d_{m+1}\underline{\alpha}),$$

  其中，$v' \in S_m$ 是在源侧的 $\{1,\dots,m+1\}$中跳过 $d+1$ 而由 $v \in S_{m+1}$ 得到的，而在目标侧则为 $v\,(d+1)$。

类似的分析将任意 τ 的情形归约为 $\tau =$恒等映射的情形。 □

3.5. **同伦** Ψ。 我们首先需要引入一些整数值函数：

定义 3.5。 对于任意整数 $k,l \geq 1$，定义：

$$N_{k,l} := \sum_{c\in\{1,\dots,l\}^k} (-1)^{\sigma_c}. \tag{3.13}$$

其中置换 $\sigma_c \in S_k$ 与定义 3.2中的相同。

换言之，$N_{k,l}$ 表示在一个 $k\times l$ 矩阵中每行选取一个元素的方式数，并按由行的诱导置换的符号所决定的奇偶性计数。该置换通过从左到右依次沿列向下移动，记录遇到所选元素的顺序，再据此排列其所在的行而得到。

引理 3.6。

$$N_{k,l} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} N_{k-j,i-1}Y_{j,k-j}.$$

证明。 右端的每个和项都计数了在一个 $k\times l$ 矩阵中每行选取一个元素的（带符号）方式数，其中 i 列中恰好选有 j 个元素，而列 $i+1,\dots,l$ 中没有选取任何元素。□

引理 3.7。 对于奇数 k，有 $N_{k+1,l} = N_{k,l}$。

证明。 我们通过对 k,l 进行双重归纳法来证明这一点。对于所有 l，都有 $N_{1,l} = l$。为了计算$N_{2,l}$，我们对第一行中该项的位置 m 求和：

$$N_{2,l} = \sum_{m=1}^{l}(l-m+1)-(m-1) = \sum_{m=1}^{l} l+2-2m = l(l+2)-2\frac{l(l+1)}{2} = l.$$

假设对于所有 $N_{i,j}$，当 $i \le k$、$j \le l$ 和 $i+j < k+l$ 时，该结论成立。令$k = 2s+1$。那么

$$\begin{aligned}
N_{2s+2,l} &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{2s+2} N_{2s+2-j,i-1}Y_{j,2s+2-j} \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{t=1}^{s} N_{2s+2-2t,i-1}Y_{2t,2s+2-2t} + 1 \qquad (\text{since } Y_{a,b} = 0 \text{ for odd } a,b) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{t=1}^{s} N_{2s+2-2t,i-1}(Y_{2t-1,2s+2-2t} + Y_{2t,2s+2-2t-1}) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{t=1}^{s} N_{2s+1-(2t-1),i-1}Y_{2t-1,2s+2-2t} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{t=1}^{s} N_{2s+1-2t,i-1}Y_{2t,2s+2-2t-1} + 1 \\
&= N_{2s+1,l}.
\end{aligned}$$

□

定义 3.8。令 n，m，p，$q \in \mathbf{Z}$，其中 n，m，$p \ge 1, q \ge 0, p+q \le m$。我们定义

$$T^{p,q}_{m,n} := \frac{1}{n}(-1)^{(p-1)(m-p-q)}Y_{p-1,q}\sum_{s=1}^{n} N_{p-1,s-1}N_{q,n-s}.$$

引理 3.9。令 $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$，其中 $n, m, p \ge 1$，$q \ge 0$，$p+q \le m$。则：*(1)* $T^{p,\ m^{q},\ n} = (-1)^{p-1}T^{p,\ m-1,\ n}_{q}$。*(2)* 对于偶数 p 和奇数 q，有 $T^{p,\ m^{q},\ n} = 0$。*(3)* 对于奇数 $p > 1$ 和偶数 $q > 0$，有

$$T^{p,q}_{m,n} = (-1)^{m}T^{p-1,q}_{m,n} + T^{p,q-1}_{m,n} \tag{3.14}$$

证明。对于 (1)，注意到在 m 的定义中，唯一依赖于 $T^{p,\ m^{q},\ n}$的是符号扭曲 $(-1)^{(p-1)(m-p-q)}$。对于 (2)，注意根据定义 $Y_{p-1,\ q} = 0$ 对于偶数 p 和奇数 q。最后，(3)由引理3.7和公式 (2.7) 得出。□

命题 3.10. 设 $m, n \in \mathbb{Z}$ 满足 $m, n \ge 1$. 设

$$\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$$

是任意一个长度为 m的 *Hochschild* 链。

Let

$$\mathrm{HC}_{\bullet}(\mathcal{A}^{\otimes n}; t)_t \underset{g_n}{\overset{f_n}{\rightleftarrows}} \mathrm{HC}_{\bullet}(\mathcal{A}). \tag{3.15}$$

分别为定义3.2 和3.1中定义的映射。于是

$$f_n g_n(\underline{\alpha}) = \sum_{\substack{1\le p\le m \\ 0\le q\le m-p}} T^{p,q}_{m,n}\,\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ p+q \\ in\ total \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}\right). \tag{3.16}$$

证明。 根据定义， $g_n(\alpha)$ 的加项由 $c \in \{1,\dots,n\}^m$其中 $c_1 = 1$枚举。我们将 c视为一个选择，即在一个 $m \times n$矩阵的每一行中选取一个元素。对应的加项就是这个矩阵，其中 α_1、...、 α_n按循环次序 (3.3) 放置在所选元素的位置。所有其他元素均填入恒等映射。该加项的符号是置换 σ_c 的符号，其中规定$\sigma_c(i)$ 为放置在第 $\alpha_\bullet$ 行中的 i 的指标，参见 §3.3。

将 f_n 应用于这样的矩阵，会得到一个以其各列为指标的和。对于每一列，我们取矩阵中其余的列，按循环次序（3.3）将它们复合，再与该列的首项作前复合。符号不变，因此所有 m 加项的符号均为（-1）$^{\sigma_c}$，但会多出一个系数 $\frac{1}{n}$。

由此可知，左端 $f_n g_n(\alpha)$ 的加项恰好就是右端求和中的那些项。剩下只需证明系数相同。

固定任意的 $1 \le p \le m$ 和 $0 \le q \le m-p$。设 X 是右端相应洗牌积中的任意一个加项。取左端中对 X 有贡献的 $c \in \{1,\dots,n\}^m$ 以及一列 $1 \le s \le m$ 的任意一种选取。对元素 c_2、.....、 c_m 应用任意一个置换 $\tau \in S_{m-1}$，只要该置换保持 $c_i = s$ 的相对顺序以及 $c_i \neq s$ 的相对顺序，就会得到行中具有 $\sigma'_c = \tau\sigma_c$ 的新选取 c'。在左端，加项 c' 和 s 对 $\tau(X)$ 的贡献，其符号与 c 和 s 的贡献符号相差 $(-1)^\tau$。因此在左端， X 和 $\sigma(X)$ 的系数相差 $(-1)^\tau$。另一方面，根据洗牌积的定义，右端也同样如此。

因此，只需证明右端洗牌积中任意一个加项的系数与其在左端的系数相同。

令 X 为洗牌积中的加项，其中 $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_{m-q}$ 上方有 $p-1$ 个恒等映射，其余 q 个恒等映射位于它们下方。任取对左端的 X 有贡献的 $c \in \{1,\dots,n\}^m$ 和 $1 \le s \le m$。这意味着 $c_{p+1} = \cdots = c_{m-q} = s$，并且存在 p 个元素 c_i，满足 $c_i < s$；还存在q ，满足 $c_i > s$。现在令 $S_{p-1+q} < S_{m-1}$ 为置换前 $p-1$ 个和最后 q 个条目的子群，并令$\tau \in S_{p-1,q} \subset S_{p-1+q}$ 为任意一个洗牌。然后，类似于上面的做法，将 τ 应用于 $c_2,\dots,c_m$，得到满足 $\sigma' = \tau\sigma_c$ 的 c'。由于矩阵中交换的各行在第 s 列都包含恒等映射，在左端， c' 和 s 对同一个加项 X 有贡献，但符号相差 $(-1)^\tau$。

$S_{p-1,q}$ 在 c 上的作用没有稳定子，其轨道恰好包含一个元素 c'，其中 $c'_1,\dots,c'_p < s$ 且 $c'_{m-q+1},\dots,c'_q > s$。因此，为了计算所有 $c \in \{1,\dots,n\}^m$ 和固定的 s 对左端 X 的贡献，我们只需计算满足 $c_1,\dots,c_p < s$ 且 $c_{m-q+1},\dots,c_q > s$ 的 c 所贡献的部分，再将结果乘以 $Y_{p-1,q} = \sum_{\tau\in S_{p-1,q}}(-1)^\tau$。

接下来只需计算 c 和满足以下条件的 s 对 X 的贡献：

- $c_1 = 1$,
- $c_{p+1} = \cdots = c_{m-q} = s$,
- $1 \le c_2,\dots,c_p \le s-1$,
- $s+1 \le c_{m-q+1},\dots,c_q \le n$.

就选择 $m \times n$ 矩阵各行中的元素而言，这意味着我们所选的元素必须位于四个大小为 1×1 的子矩阵中，$(p-1)\times(s-1)$，$(m-p-q)\times 1$ 以及 $q\times(n-s)$ 中。我们可以自由选择每个子矩阵内元素的任意排列方式。循环次序 (3.3) 依次遍历这四个子矩阵：先遍历第一个子矩阵中的所有元素，再遍历第二个子矩阵中的所有元素，依此类推。这意味着 σ_c 是分别对应于每个子矩阵的四个置换的乘积

子矩阵。因此，所有可能的 c 和 s，按符号 $(-1)^{\sigma_c}$ 计数后，贡献为

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} N_{1,1}N_{p-1,s-1}N_{s,1}N_{q,n-s} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} N_{p-1,s-1}N_{q,n-s}.$$

乘以 $Y_{p-1,\ q}$ 后，我们得到左端 X 的总系数。显然，这与右端 X 的系数 $T^{p,\ m}{}^{q,}_{n}(-1)^{(p-1)(m-p-q)}$ 相符。这里，$(-1)^{(p-1)(m-p-q)}$ 是 X 出现在洗牌积中的符号。□

由此，我们将所需的同伦 Ψ 定义如下：

定义3.11。对于每个 $n \geq 1$，定义一个次数为 -1 的映射

$$\Psi_n \colon \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}) \to \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$$

该映射将任意链

$$\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$$

to

$$(-1)^m \sum_{\substack{1\leq p\leq m \\ 0\leq q\leq m-p \\ p+q \text{ even}}} T^{p,q}_{m,n}\,\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ p+q+1 \\ \text{in total} \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}\right). \tag{3.17}$$

定理3.2。我们有

$$d\Psi_n = f_n g_n - \mathrm{Id}\,.$$

证明。对于任意 $m \geq 1$，取任意一个长度为 m 的 Hochschild 链。

$$\underline{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathrm{HC}_{m-1}(\mathcal{A})$$

洗牌积满足莱布尼茨法则。此外，对于任意满足 $p+q$ 为偶数的 $1 \leq p \leq m$ 和 $0 \leq q \leq m-p$，我们有

$$d\begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_{p+1} \\ \alpha_{p+2} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-p-q-1} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \cdots \\ \alpha_{p+j}\alpha_{p+j+1} \\ \cdots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix} + (-1)^m \begin{pmatrix} \alpha_{m-q}\ldots\alpha_m\alpha_1\ldots\alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{m-q-1} \end{pmatrix}$$

and

$$d\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ p+q+1\\ \text{in total}\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ p+q\\ \text{in total}\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}$$

由此可得， $d(\Psi_n(\alpha))$ 是以下各和项之和：

- 对所有 $1\le p\le m$ 和 $0\le q\le m-p$

$$\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix}\alpha_{m-q+1}\dots\alpha_m\alpha_1\dots\alpha_p\\ \alpha_{p+1}\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_{m-q}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ p+q\\ \text{in total}\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

系数为

$$\begin{cases}T^{p,q}_{m,n} & p+q \text{ even}\\ (-1)^m T^{p-1,q}_{m,n}+T^{p,q-1}_{m,n} & p+q \text{ odd}\,.\end{cases}$$

- 对所有 $1\le p\le m$、 $0\le q\le m-p$ 和 $1\le j\le m-p-q-1$

$$\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix}\alpha_{m-q+1}\dots\alpha_m\alpha_1\dots\alpha_p\\ \alpha_{p+1}\\ \dots\\ \alpha_{p+j}\alpha_{p+j+1}\\ \dots\\ \alpha_{m-q}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ p+q+1\\ \text{in total}\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

系数为

$$\begin{cases}(-1)^{m+j}\,T^{p,q}_{m,n} & p+q \text{ even}\\ 0 & p+q \text{ odd}\,.\end{cases}$$

另一方面，

$$d\underline{\alpha}=d\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_j\alpha_{j+1}\\ \dots\\ \alpha_m\end{pmatrix}+(-1)^{m-1}\begin{pmatrix}\alpha_m\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\tag{3.18}$$

因此， $\Psi_n(d\underline{\alpha})$ 是以下和项之和：

- 对于所有 $1\le p\le m$ 和 $0\le q\le m-p$

$$\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix}\alpha_{m-q+1}\dots\alpha_m\alpha_1\dots\alpha_p\\ \alpha_{p+1}\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_{m-q}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ p+q\\ \text{in total}\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

系数为

$$\begin{cases} (-1)^{m-1}\, T^{p-1,q}_{m-1,n} + T^{p,q-1}_{m-1,n} & p \text{ even}, q \text{ odd}\ , \\ 0 & \text{otherwise}\ . \end{cases}$$

• 对所有的 $1 \le p \le m$, $0 \le q \le m-p$ 和 $1 \le j \le m-p-q-1$

$$\mathrm{Sh}\left(\begin{pmatrix} \alpha_{m-q+1} \dots \alpha_m \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha_{p+1} \\ \dots \\ \alpha_{p+j}\alpha_{p+j+1} \\ \dots \\ \alpha_{m-q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ p+q+1 \\ \text{in total} \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

具有系数

$$\begin{cases} (-1)^{m+p+j}\, T^{p,q}_{m-1,n} & p+q \text{ even} \\ 0 & p+q \text{ odd}\ . \end{cases}$$

现在，将 $d(\Psi_n(\alpha))$和 $\Psi_n(d\alpha)$中各加项的系数相加，得到 $(d\Psi_n)(\alpha)$中的系数，再应用引理3.9，即可得出所需结论。□

4. Noncommutative orbifold decomposition

设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴。本节中，我们使用互为逆的同伦等价

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n}; t_n)_{t_n} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}).$$

在 §3 中显式构造，以（同样显式地）定义非交换轨形分解：

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{\underline{\lambda} \vdash n} \mathrm{Sym}^{r(\underline{\lambda})}\, \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}), \tag{4.1}$$

其中，关于分次向量空间对称幂的记号 $\mathrm{Sym}^{r(\underline{\lambda})}$ 在 §2.4 中作了解释。

我们分两步构造分解（4.1）。

4.1. 从商栈的霍赫希尔德同调到群扭曲的霍赫希尔德同调。 第一步具有很强的一般性，适用于任意商栈（在强群作用下），而不仅限于对称情形。

定义 4.1。 设 $\mathcal{A}$是一个带有有限群强作用的小DG范畴 G，参见§2.2。定义映射

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A} \rtimes G) \underset{\xi}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} \left(\bigoplus\nolimits_{g \in G} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}; g)\right)_G \tag{4.2}$$

如下。映射 ν 发送

$$(\alpha_0, \sigma_0) \otimes \dots \otimes (\alpha_m, \sigma_m) \in \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A} \rtimes G)$$

$$\downarrow$$

$$(\sigma_0 \dots \sigma_m)^{-1}(\alpha_0) \otimes (\sigma_1 \dots \sigma_m)^{-1}(\alpha_1) \otimes \dots \otimes (\sigma_m)^{-1}(\alpha_m) \in \mathrm{HC}_m(\mathcal{A}^n; (\sigma_0 \dots \sigma_m)^{-1}).$$

这是对 [Bar03，命题 3 的推广。5]。映射 ξ 是复合

$$\Big(\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\Big)_G \to \bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g) \xrightarrow{\sum_{g\in G}\xi_g} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G) \tag{4.3}$$

其中第一个映射为

$$[\underline{\alpha}] \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h.\underline{\alpha} \tag{4.4}$$

且每个

$$\xi_g\colon\ \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g) \to \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$$

是映射

$$\alpha_0\otimes\cdots\otimes\alpha_m \mapsto \big((\mathrm{Id},g^{-1})\circ(\alpha_0,\mathrm{Id})\big)\otimes(\alpha_1,\mathrm{Id})\otimes\cdots\otimes(\alpha_{m-1},\mathrm{Id})\otimes(\alpha_m,\mathrm{Id}). \tag{4.5}$$

引理 4.2. 映射 ν 和 ξ_g 定义 ***4.1*** 均定义良好：它们与扭曲复形 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$ 中的 *Hochschild* 微分相容，
$\Big(\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\Big)_G$, *and* $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)$.

证明。 显然，映射 ν和 ξ_g与 Hochschild 微分的常规项相交换。剩下需要验证的是，这对于循环置换项 d_{cyc}也成立。

对于映射 ν，我们有

$$\begin{aligned}
&\nu\big(d_{cyc}\big((\alpha_0,\sigma_0)\otimes\cdots\otimes(\alpha_{m-1},\sigma_{m-1})\otimes(\alpha_m,\sigma_m)\big)\big) =\\
&=\nu\big((-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}(\alpha_m,\sigma_m)(\alpha_0,\sigma_0)\otimes\cdots\otimes(\alpha_{m-1},\sigma_{m-1})\big) =\\
&=(-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}(\sigma_m\sigma_0\ldots\sigma_{m-1})^{-1}(\alpha_m)(\sigma_0\ldots\sigma_{m-1})^{-1}(\alpha_0)\otimes\cdots\otimes\sigma_{m-1}^{-1}(\alpha_{m-1}),
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&d_{cyc}\nu\big((\alpha_0,\sigma_0)\otimes\cdots\otimes(\alpha_{m-1},\sigma_{m-1})\otimes(\alpha_m,\sigma_m)\big) =\\
&=d_{cyc}\big((\sigma_0\ldots\sigma_m)^{-1}(\alpha_0)\otimes\cdots\otimes(\sigma_{m-1}\sigma_m)^{-1}(\alpha_{m-1})\otimes(\sigma_m)^{-1}(\alpha_m)\big) =\\
&=(-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}(\sigma_m\sigma_0\ldots\sigma_m)^{-1}(\alpha_m)(\sigma_0\ldots\sigma_m)^{-1}(\alpha_0)\otimes\cdots\otimes(\sigma_{m-1}\sigma_m)^{-1}(\alpha_{m-1}) =\\
&=\sigma_m^{-1}\Big((-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}(\sigma_m\sigma_0\ldots\sigma_{m-1})^{-1}(\alpha_m)(\sigma_0\ldots\sigma_{m-1})^{-1}(\alpha_0)\otimes\cdots\otimes(\sigma_{m-1})^{-1}(\alpha_{m-1})\Big).
\end{aligned}$$

因此， $d_{cyc}\nu$ 和 νd_{cyc} 在取 G-余不变量后相等。

对于每个 $g\in G$，对于映射 ξ_g，我们有

$$\begin{aligned}
&\xi_g\left(d_{cyc}\left(\alpha_0\otimes\cdots\otimes\alpha_m\right)\right) =\\
&=\xi_g\left((-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}g(\alpha_m)\alpha_0\otimes\cdots\otimes\alpha_{m-1}\right) =\\
&=(-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}\left(\left(\mathrm{Id},g^{-1}\right)\circ\left(g(\alpha_m)\alpha_0,\mathrm{Id}\right)\right)\otimes\cdots\otimes\left(\alpha_{m-1},\mathrm{Id}\right),
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&d_{cyc}\left(\xi_g\left(\alpha_0\otimes\cdots\otimes\alpha_m\right)\right) =\\
&=d_{cyc}\left(\left(\left(\mathrm{Id},g^{-1}\right)\circ\left(\alpha_0,\mathrm{Id}\right)\right)\otimes\cdots\otimes\left(\alpha_m,\mathrm{Id}\right)\right) =\\
&=\left(\left(\alpha_m,\mathrm{Id}\right)\circ\left(\mathrm{Id},g^{-1}\right)\circ\left(\alpha_0,\mathrm{Id}\right)\right)\otimes\cdots\otimes\left(\alpha_{m-1},\mathrm{Id}\right) =\\
&=(-1)^m(-1)^{\alpha_m|\alpha_0,\cdots\alpha_{m-1}}\left(\left(\mathrm{Id},g^{-1}\right)\circ\left(g(\alpha_m)\alpha_0,\mathrm{Id}\right)\right)\otimes\cdots\otimes\left(\alpha_{m-1},\mathrm{Id}\right).
\end{aligned}$$

因此， $d_{cyc}\xi_g$ 和 $\xi_g d_{cyc}$ 相等。 □

命题 4.3。 映射 ν 和 ξ 定义 *4.1* 中的 互为同伦等价，因此诱导出互逆的同构

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)\underset{\xi}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}}\left(\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A};g)\right)_G. \tag{4.6}$$

证明。 复合 $\nu\xi$ 是 $\left(\bigoplus_{g\in G}\mathbf{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\right)_G$ 的恒等映射。复合 $\xi\nu$ 是 $\mathbf{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$的自同态，它将任意链

$$(\alpha_0,\sigma_0)\otimes(\alpha_1,\sigma_1)\otimes\cdots\otimes(\alpha_m,\sigma_m)\in\mathrm{HC}_m(\mathcal{A}\rtimes G)$$

映射为链

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g\alpha_0,g\sigma_0\dots\sigma_m g^{-1})\otimes(g(\sigma_1\dots\sigma_m)^{-1}(\alpha_1),\mathrm{Id})\cdots\otimes(g\sigma_m^{-1}(\alpha_m),\mathrm{Id})\in\mathrm{HC}_m(\mathcal{A}\rtimes G).$$

记作 $\beta_i^j=(\sigma_i\dots\sigma_j)^{-1}\alpha_i$，表示 $0\le i\le j\le m$。 $\xi\nu$与（4.4）在 $\mathbf{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$ 上的同伦由如下次数为 -1 的自同态给出，它将任意链

$$(\alpha_0,\sigma_0)\otimes(\alpha_1,\sigma_1)\otimes\cdots\otimes(\alpha_m,\sigma_m)\in\mathrm{HC}_m(\mathcal{A}\rtimes G)$$

映射为链

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g.\Bigg(\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r,(s_1,\dots,s_r)\vdash m-p}\sum_{J\subset\{p+1,\dots,m+1\}}(-1)^{(4.7)}(\beta^m_{m-p-r+1}\dots\beta^m_m\alpha_0,\sigma_0)\otimes\\ \otimes(\alpha_1,\sigma_1)\otimes\dots\otimes(\alpha_p,\sigma_p)\otimes X_{p+1}(p,\underline{s},J)\otimes\dots\otimes X_{m+1}(p,\underline{s},J)\Bigg)+\\ +\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i-1}(g(\beta^m_1\dots\beta^m_m),g\sigma_0)\otimes(\mathrm{Id},\sigma_1)\otimes\dots\otimes(\mathrm{Id},\sigma_i)\otimes(\mathrm{Id},g^{-1})\\ \otimes(\mathrm{Id},g\sigma_{i+1}g^{-1})\otimes\dots\otimes(\mathrm{Id},g\sigma_m g^{-1}),\end{aligned}$$

其中 J是 $\{p+1,\dots,m+1\}$ 的一个子集，使得对所有 $i\in\{p+1,\dots,m+1\}$，都有 $\sum_{j\in J,\ j<i}s_j\ge|\{j\notin J,p<j\le i\}|$；特别地， $p+1\in J$总是成立。此外，令 $k(i)=|\{j\in J,\ j<i\}$，再令

$$X_i(p,s_1,\dots,s_r,J)=(\mathrm{Id},\sigma_{p+s_1+\dots s_{k(i)}+1}\dots\sigma_{p+s_1+\dots s_{k(i)+1}})$$

如果 $i\in J$，并且

$$X_i(p,s_1,\dots,s_r,J)=(\beta^{p+s_1+\dots+s_{k(i)}-i+k(i)}_{i-k(i)},\mathrm{Id})$$

如果 $i\notin J$。换句话说，在 $(\alpha_p,\ \sigma_p)$ 之后，我们将每个 $(\alpha_i,\ \sigma_i)$ 拆分为 $(\alpha_i,$ 恒等映射$)$ 和 (恒等映射 σ_i)，根据 $\mathcal{A}\rtimes S_n$ 中的关系将其中一些 (恒等映射 σ_i) 移向左侧，将其中一些相乘，并将一些 $(\beta^m_q,$ 恒等映射) 从右端旋转到链的第一项中，所有这些操作都是为了使剩余项总数为 $m+2$。我们将 $(s_1,\ \dots,\ s_r)$ 视为集合 $\{\sigma_{p+1},\dots,\sigma_m\}$ 的有序分拆，并将集合 J 视为 (恒等映射 σ_i) 的乘积最终所在的指标集合。于是， $\sigma_0,\ \dots,$ $\sigma_{p+s_1+\dots+s_{k(i)}}$ 是位于第 i 项左侧的那些项。

第二个求和中的符号为

$$\left(\sum_{i=0}^{m-p-r}\deg\alpha_i\right)\cdot\left(\sum_{i=m-p-r+1}^{m}\deg\alpha_i\right)+(p+m-1)r+\sum_{j\in J}j-p-k(j). \tag{4.7}$$

□

4.2. 从 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_\lambda)_{C(\sigma_\lambda)}$ 到 $\mathrm{Sym}^{r(\lambda)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$。 对于 S_n的每个共轭类 $\lambda\vdash n$，选取代表元

$$\sigma_\lambda := \big(1\dots n_1\big)\big((n_1+1)\dots(n_1+n_2)\big)\dots\big((n_1+\dots+n_{r(\lambda)-1}+1)\dots n\big)\in S_n$$

其中，$n_1\le n_2\le\dots\le n_{r(\lambda)}$ 是将 λ 的各部分按非递减顺序排列的唯一方式。例如，若 $\lambda=\{1112333344\}$，则

$$\sigma_\lambda=(1)(2)(3)(45)(678)(9\ 10\ 11)(12\ 13\ 14)(15\ 16\ 17)(18\ 19\ 20\ 21)(22\ 23\ 24\ 25).$$

这一选择（或任何其他选择）定义了一个同构

$$\Big(\bigoplus_{\sigma\in S_n}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};\sigma)\Big)_{S_n}\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\lambda\vdash n}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_\lambda)_{C(\sigma_\lambda)},\tag{4.8}$$

其中 $C(-)$ 表示一个群元素的中心化子。该同构由投影到相应的直和项给出。

于是我们定义：

定义 4.4。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小DG范畴。对于任意 $n\ge 0$ 和任意 $\lambda\vdash n$，定义映射

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_\lambda)_{C(\sigma_\lambda)}\underset{g_\lambda}{\overset{f_\lambda}{\rightleftarrows}}\mathrm{Sym}^{r(\lambda)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})\tag{4.9}$$

由复合给出

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_\lambda)_{C(\sigma_\lambda)}\underset{\mathrm{EZ}}{\overset{\mathrm{AW}}{\rightleftarrows}}\Big(\bigotimes_{i=1}^{r(\lambda)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n_i};t_{n_i})_{t_{n_i}}\Big)_{S_{r(\lambda)}}\underset{\otimes g_{n_i}}{\overset{\otimes f_{n_i}}{\rightleftarrows}}\Big(\bigotimes_{i=1}^{r(\lambda)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})\Big)_{S_{r(\lambda)}}$$
$$\Big\|$$
$$\mathrm{Sym}^{r(\lambda)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}),$$

其中

- EZ 和 AW 是 Eilenberg-Zilber 映射与 Alexander-Whitney 映射，它们将 Künneth 同构及其逆映射提升到 Hochschild 复形的层面，参见 §2.7。我们首先在不取余不变量的情况下应用这些映射，使用 $\mathcal{A}^{\otimes n}=\bigotimes_{i=1}^{r(\lambda)}\mathcal{A}^{n_i}$ 和 $\sigma_\lambda=t_{n_1}\times\dots\times t_{n_{r(\lambda)}}\in S_{n_1}\times\dots\times S_{n_{r(\lambda)}}<S_n$。为说明它们可以下降到余不变量空间，我们注意到，EZ 和 AW 将右端每个 t_{n_i} 的作用与 $t_{n_i}\in S_{n_i}<S_{n_1}\times\dots\times S_{n_{r(\lambda)}}<S_n$ 左端的作用交织在一起。此外，它们将左端 $S_{r(\lambda)}$ 的作用与右端 $S_{r(\lambda)}<S_n$ 的作用交织在一起；后者是在 n_1、……、$n_{r(\lambda)}$ 中置换大小相同的部分的子群。最后，$C(t_{n_1}\times\dots\times t_{n_{r(\lambda)}})$ 由 $\langle t_{n_1}\rangle\times\dots\langle t_{n_{r(\lambda)}}\rangle$ 和 $S_{r(\lambda)}$ 生成。
- 映射 f_{n_i} 和 g_{n_i} 是在§3中构造的互逆同伦等价，参见§3.2和§3.3。
- 第二个竖直等式源于我们对按有序分拆索引的对称幂所采用的记号，参见§2.4。

4.3. 非交换轨形分解。 现在我们将迄今构造的所有映射汇集起来，以证明本文的主要定理：

定理 4.1 (非交换轨形分解)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴，且 $n\ge 0$。以下复合互为同伦

等价，它们是 Mod-$\Bbbk$ 上扭曲复形之间的同伦等价：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n A) & \underset{\xi}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} & \left(\bigoplus_{\sigma\in S_n} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma)\right)_{S_n} \\ & & \uparrow{\scriptstyle (4.8)^{-1}} \quad \downarrow{\scriptstyle (4.8)} \\ & & \bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\lambda}})} \end{array} \quad \underset{\sum g_{\underline{\lambda}}}{\overset{\sum f_{\underline{\lambda}}}{\rightleftarrows}} \quad \bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n} \mathrm{Sym}^{r(\underline{\lambda})} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}), \tag{4.10}$$

其中 ν 和 ξ 是 §4.1 中构造的映射， f_λ 和 g_λ 则是在 §4.2中构造的映射。

特别地，将向右的复合记为 ζ_n ，将向左的复合记为 η_n。它们诱导出互逆的同构：

$$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \underset{\eta_n}{\overset{\zeta_n}{\underset{\simeq}{\rightleftarrows}}} \bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n} \mathrm{Sym}^{r(\underline{\lambda})} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}). \tag{4.11}$$

证明。 由命题4.3可知，映射 ν和 ξ互为同伦等价。根据构造，映射（4.8）是一个同构。最后，根据定义 4.4中的构造，映射 f_λ 和 g_λ 是 Eilenberg-Zilber 映射和 Alexander-Whitney 映射 EZ 与 AW 同 $\otimes f_{n_i}$ 和 $\otimes g_{n_i}$复合而成的。前两者是互逆的同伦等价，它们提升了 K¨unneth 同构及其逆，参见 §2.7。后两者根据定理 3.1 和3.2是互逆的同伦等价。

最后，由于底域的特征为 0，取余不变量是一个正合函子。因此，对（4.10）取上同调，我们得到（4.11）。□

4.4. **对称代数结构**。本节中，我们注意到，非交换轨形分解（4.10）定义了总霍赫希尔德同调 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 与对称代数$S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes t\Bbbk[t])$ 之间的一个显式同构。接着，我们在 §5 中利用这一点，将对称代数上存在的一些众所周知的结构转移到总霍赫希尔德同调上。

我们先引入一些记号。回顾一下，对于任意 $E \in$ **Pre-Tr$^-$(Mod-k)** 以及任意 n 的有序分拆 $(n_1,\dots,n_m)$，我们记

$$\mathrm{Sym}^{n_1,\dots,n_m} E := (E^{\otimes n})_{S_{n_1,\dots,n_m}} \simeq \mathrm{Sym}^{n_1} E \otimes \mathrm{Sym}^{n_2} E \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{n_m} E.$$

将 $t\mathbf{k}[t]$ 视为一个 k-向量空间，因此也视为 **Mod-k** 中的一个对象。它有一个基 $\{t, t^2, t^3, \dots, \}$。对于任意 $E \in$ **Pre-Tr$^-$(Mod -k)**，我们有

$$E \otimes t\Bbbk[t] \simeq \bigoplus_{i\geq 1} E \otimes t^i.$$

为简洁起见，记 Et^i $E \otimes t^i$。我们有

$$\begin{aligned} S^*(E \otimes t\Bbbk[t]) &:= \bigoplus_{m\geq 0} \mathrm{Sym}^m(E \otimes t\Bbbk[t]) \simeq \bigoplus_{m\geq 0} \mathrm{Sym}^m(\bigoplus_{i\geq 1} Et^i) \simeq \\ &\simeq \bigoplus_{m\geq 0} \bigoplus_{\substack{m_1,m_2,\dots\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\\ \sum m_i = m}} \mathrm{Sym}^{m_1,m_2,m_3,\dots} E \ \ (t^1)^{m_1}(t^2)^{m_2}\dots \end{aligned} \tag{4.12}$$

由于我们仅将 $t\mathbf{k}[t]$ 视为向量空间，在对称代数（t^i）中$^j \neq t^{ij}$.

接下来，我们利用以下事实重新组合这些和项：每个有序分拆 m_1， m_2，.....of m is r (λ) of the unique unordered partition $\lambda \vdash n$ where $n = \sum m_i i$ and λ has _

m_1 个大小为 1 的部分， m_2 个大小为 2 的部分，依此类推。例如，在上面的和式中，7 的有序分拆 (4，0，1，2，0，.....) 为单项式编了索引

$$(t^1)^4 t^3 (t^4)^2 = t^1 t^1 t^1 t^1 t^3 t^4 t^4.$$

我们可以将同一个单项式视为由 15 的无序分拆{1111344} 所索引。因此，对任意 $n \geq 0$ 和任意 $\lambda \vdash n$，我们定义

$$t^{\underline{\lambda}} := t^{n_1} t^{n_2} \dots t^{n_{r(\underline{\lambda})}},$$

并将上式重新分组为:

$$\bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{\underline{\lambda} \vdash n} \left(\mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} E \right) t^{\underline{\lambda}}. \tag{4.13}$$

我们引入以下记号。对于任意 $n \geq 0$ 和 $\lambda \vdash n$，$\mathrm{Sym}^{r(\lambda)} \underline{E}$ 中的任意元素都可以写成基本元素之和

$$\underline{s}_1 \otimes \dots \otimes \underline{s}_n \qquad \underline{s}_i \in \mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} E,$$

并进一步记作

$$\underline{s}_i = s_{i1} \vee \dots \vee s_{ir_i(\underline{\lambda})} \qquad s_{ij} \in E.$$

这里我们区分每个 $\mathrm{Sym}^{r_i(\lambda)} E$中的斜交换乘积 $\vee$，以及 $\mathrm{Sym}^{r_1(\lambda)} E \otimes \dots \otimes \mathrm{Sym}^{r_n(\lambda)} E$中的普通张量积 $\otimes$。

例如，当 $n = 15$ 和 $\lambda =$(1111344) 时，我们有

$$t^{\underline{\lambda}} = t^1 t^1 t^1 t^1 t^3 t^4 t^4,$$

$$\mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} = \mathrm{Sym}^4 E \otimes E \otimes \mathrm{Sym}^2 E,$$

而 $\mathrm{Sym}^{r(\lambda)} E$ 中的任意元素都可写成形如以下元素之和

$$\underline{s} = (s_{11} \vee s_{12} \vee s_{13} \vee s_{14}) \otimes (s_{31}) \otimes (s_{31} \vee s_{32}).$$

因此我们有一个同构

$$S^*(E \otimes t\Bbbk[t]) \simeq \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{\underline{\lambda} \vdash n} \left(\mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} E \right) t^{\underline{\lambda}}. \tag{4.14}$$

它将任意

$$s_1 t^{n_1} \vee s_2 t^{n_2} \vee \dots \vee s_m t^{n_m} \in S^*(E \otimes t\Bbbk[t])$$

满足 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$的元素映射为

$$(s_1 \vee \dots \vee s_{m_1}) \otimes (s_{m_1+1} \vee \dots \vee s_{m_1+m_2}) \otimes \dots \otimes (s_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} \vee \dots \vee s_n) t^{\underline{\lambda}}$$

其中 $n = \sum n_i$、$\lambda = \{n_1, \dots, n_m\}$ 和 $m_i = r_i(\underline{\lambda})$。逆同构将任意

$$\underline{s}_1 \otimes \dots \otimes \underline{s}_n t^{\underline{\lambda}} \in \left(\mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} E \right) t^{\underline{\lambda}},$$

to

$$(s_{11} t^1) \vee (s_{12} t^1) \vee \dots \vee (s_{nr_n(\underline{\lambda})} t^n).$$

因此，我们得到 $\mathcal{S}^n \mathcal{A}$的总霍赫希尔德同调的如下描述:

定理 4.2。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴。定义映射

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n A) \underset{\eta}{\overset{\zeta}{\rightleftarrows}} S^*(\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes t\Bbbk[t]) \tag{4.15}$$

为以下复合

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n A)\underset{\sum_n\eta_n}{\overset{\sum_n\zeta_n}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{n\geq 0}\bigoplus_{\underline{\lambda}\vdash n}\mathrm{Sym}^{r(\underline{\lambda})}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})\,t^{\underline{\lambda}}\underset{(4.14)}{\overset{(4.14)^{-1}}{\rightleftarrows}}S^*(\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$$

那么， ζ 和 η 是互逆的同伦等价。特别地，它们诱导出互逆的同构：

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n A)\underset{\eta}{\overset{\zeta}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}}S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t]). \tag{4.16}$$

证明。 映射（4.14）是一个同构，并且根据定理 4.1 映射 $\sum_n\zeta_n$和 $\sum_n\eta_n$ 互为同伦等价。

□

5. Hopf algebra and λ-ring structures

本节中，我们使用文献 §4 中建立的 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathbf{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n A)$与 $S^*(\mathbf{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$之间的显式同构 η 和 ζ，以比较并定义这些空间上的一些结构。

5.1. **霍普夫代数结构。** 对于任意 $\Bbbk$-向量空间 E，其张量代数 $T^*(E)$ 自然地构成一个霍普夫代数，而对称代数 $S^*(E)$ 是它的霍普夫子代数，参见 [Swe69, §4。0]。对于 $S^*(E)$，该霍普夫代数结构与李代数 E 的泛包络代数结构一致，其中李括号为零。

我们回顾相关细节，以引入记号：

定义 5.1。 设 $\mathcal{A}$是一个小DG范畴，且 $E\in\mathbf{Pre\text{-}Tr}^-(\mathcal{A})$。对称代数 $S^*(E)$是一个霍普夫代数，其运算如下：

- Multiplication $\mu\colon S^*(E)\otimes S^*(E)\to S^*(E)$ given by
$$(s_1\vee\cdots\vee s_n)\otimes(t_1\vee\cdots\vee t_m)\to s_1\vee\cdots\vee s_n\vee t_1\vee\cdots\vee t_m,$$
- Comultiplication $\Delta\colon S^*(E)\to S^*(E)\otimes S^*(E)$ given by
$$(s_1\vee\cdots\vee s_n)\to\sum_{\{i_1,\dots,i_m\}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^p(s_{i_1}\vee\cdots\vee s_{i_m})\otimes(s_{j_1}\vee\cdots\vee s_{j_{n-m}}),$$
where $\{j_1,\dots,j_{n-m}\}=\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_m\}$ and the sign twist $(-1)^p$ is the product of $(-1)^{\deg(s_{i_k})\deg(s_{j_l})}$ for each $i_k>j_l$,
- Unit $u\colon\Bbbk\to S^*(E)$ and counit $\epsilon\colon S^*(E)\to\Bbbk$ given by the inclusion of and the projection onto $S^0(E)=\Bbbk$,
- Antipode map $H\colon S^*(E)\to S^*(E)$ given on $S^n(E)$ by $(-1)^n\,\mathrm{Id}$.

特别地，这在对称代数$S^*(\mathbf{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$上定义了霍普夫代数结构。接下来我们计算相应的霍普夫代数结构在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathbf{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n A)$上的形式：

定理 5.1。 设 $\mathcal{A}$ 是一个小*DG*范畴。定理 ζ 和 η *4.2* 中的同构

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\underset{\eta}{\overset{\zeta}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}}S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t]).$$

确定霍普夫代数运算 μ、 Δ、 u、 ϵ和 H 在 $S^*(\mathbf{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$ 中（定义 *5.1*），并定义 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上的以下运算：

- 映射

$$\mu'\colon \Big(\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\Big)\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\Big)\to\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$$

由对所有 n、$m\geq 0$ 的映射求和得到

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\otimes\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{EZ}}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^m\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^{n+m}\mathcal{A}).\quad(5.1)$$

- 映射

$$\Delta'\colon \bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\to\Big(\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\Big)\otimes\Big(\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\Big)$$

由对所有 $n\geq 0$ 以及所有子集 $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ 的映射求和得到

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}^{S_n}_{S_I\times S_{\bar I}}} & \mathrm{HC}_\bullet\left(\mathcal{A}^{\otimes n}\rtimes(S_I\times S_{\bar I})\right)\\ & & \downarrow\simeq\\ & & \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^{|I|}\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^{n-|I|}\mathcal{A})\xrightarrow{\mathrm{AW}}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^{|I|}\mathcal{A})\otimes\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^{n-|I|}\mathcal{A}),\end{array}$$

其中 $I=\{1,\dots,n\}\setminus I$，其中 S_I、$S_{\bar I}<S_n$ 是仅置换 I 和 I 中元素的子群，而 $|I|$ 是 I 的大小。

- 映射 $u'\colon \Bbbk\to\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 和 $\epsilon'\colon \bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\to\Bbbk$ 由包含映射和到 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^0\mathcal{A})\simeq\Bbbk$ 的投影给出，
- 由：$\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\to\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 给出的映射，在$\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$上为$(-1)^n$恒等映射。

特别地，μ'、Δ'、u'和 ϵ' 在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$上定义了交换霍普夫代数结构。

证明。关于单位映射 u、余单位映射 ϵ和对映映射 H 分别与映射 u'、ϵ'及映射 H' 相对应的断言显然成立。

对于乘法 μ，鉴于同构 (4.14)，只需证明对于任意 $m,n\geq 0$，对于任意 $\nu\vdash m$ 和 $\lambda\vdash n$，以及任意 $x\in\mathrm{Sym}^\nu\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 和 $y\in\mathrm{Sym}^\lambda\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 有

$$\zeta(\mu(xt^\nu\otimes yt^\lambda))=\mu'(\zeta(xt^\nu)\otimes\zeta(yt^\lambda))).\quad(5.2)$$

其中一个 ζ，映射 ξ 定义于式（4.3）为

$$\Big(\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\Big)_G\xrightarrow{(4.4)}\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\xrightarrow{\sum_{g\in G}\xi_g}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$$

可以改写为

$$\Big(\bigoplus_{g\in G}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A};g)\Big)_G\xrightarrow{\sum_{g\in G}\xi_g}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)_G\xrightarrow{(4.4)}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G).$$

鉴于此，(5.2) 等价于以下图表的交换性：

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})^{\otimes r(\underline\nu)})_{S_{\underline r(\underline\nu)}}\otimes(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})^{\otimes r(\underline\lambda)})_{S_{\underline r(\underline\lambda)}} & \twoheadrightarrow & (\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})^{\otimes r(\underline\nu+\underline\lambda)})_{S_{\underline r(\underline\nu+\underline\lambda)}}\\ \downarrow{\scriptstyle(\otimes g_{m_i})\otimes(\otimes g_{n_j})} & & \downarrow{\scriptstyle(\otimes g_{m_i})\otimes(\otimes g_{n_j})}\\ \Big(\bigotimes_{\underline\nu}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes\bullet};t_\bullet)_{t_\bullet}\Big)_{S_{\underline r(\underline\nu)}}\otimes\Big(\bigotimes_{\underline\lambda}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes\bullet};t_\bullet)_{t_\bullet}\Big)_{S_{\underline r(\underline\lambda)}} & \twoheadrightarrow & \Big(\bigotimes_{\underline\nu+\underline\lambda}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes\bullet};t_\bullet)_{t_\bullet}\Big)_{S_{\underline r(\underline\nu+\underline\lambda)}}\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{EZ}\otimes\mathrm{EZ}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{EZ}}\\ \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m};\sigma_{\underline\nu})_{C(\sigma_{\underline\nu})}\otimes\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_{\underline\lambda})_{C(\sigma_{\underline\lambda})} & \xrightarrow{\mathrm{EZ}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m+n};\sigma_{\underline\nu}\times\sigma_{\underline\lambda})_{C(\sigma_{\underline\nu}\times\sigma_{\underline\lambda})}\end{array}\quad(5.3)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m};\sigma_{\underline{\nu}})_{C(\sigma_{\underline{\nu}})}\otimes \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes n};\sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\lambda}})} & \xrightarrow{\mathrm{EZ}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m+n};\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\nu}})\times C(\sigma_{\underline{\lambda}})} \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_{\sigma_{\underline{\nu}}}\otimes\xi_{\sigma_{\underline{\lambda}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}}}} \\
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A})_{S_m}\otimes \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})_{S_n} & \xrightarrow{\mathrm{EZ}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^n\mathcal{A})_{S_m\times S_n} \\
\downarrow{\scriptstyle (4.4)\otimes(4.4)} & & \downarrow{\scriptstyle (4.4)} \\
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A})\otimes \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{EZ}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^n\mathcal{A})
\end{array} \tag{5.4}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m+n};\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\nu}})\times C(\sigma_{\underline{\lambda}})} & \twoheadrightarrow & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m+n};\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}})_{C(\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}})} \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_{\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}}}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{\sigma_{\underline{\nu}}\times\sigma_{\underline{\lambda}}}} \\
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^n\mathcal{A})_{S_m\times S_n} & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{m+n}\mathcal{A})_{S_{m+n}} \\
\downarrow{\scriptstyle (4.4)} & & \downarrow{\scriptstyle (4.4)} \\
\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}^n\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}} & \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{m+n}\mathcal{A})
\end{array} \tag{5.5}$$

其中：

- $\bigotimes_\nu \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes\bullet};t_\bullet)_{t_\bullet}$ 表示 $\bigotimes_{i=1}^{r(\nu)} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m_i};t_{m_i})^{t_{m_i}}$，其中我们使用 ν 各部分按非递减顺序排列的唯一排序 $m_1\le\cdots\le m_{r(\nu)}$。
- 双箭头表示由较大的群的作用取余不变量所得到的商映射。
- 标记为 $(\otimes g_{m_i})\otimes(\otimes g_{n_j})$、EZ、$\xi_\bullet$ 和 $\xi_\bullet\otimes\xi_\bullet$ 的箭头，表示按所示方式取余不变量后相应映射的像。

这些交换图可以纳入如下一个大型交换图：

(5.3)	
(5.4)	(5.5)

在这个大型交换图中，周界左下半部分的复合给出式（5.2）的左端，而右上半部分的复合给出式（5.2）的右端。

（5.3）中的上方方块显然交换：右侧竖直箭头按定义就是使该方块交换的唯一箭头。（5.3）中的下方方块由 Eilenberg-Zilber 映射的结合性而交换。

（5.4）中的上方方块交换，因为映射 $\xi_\bullet$ 与 Eilenberg-Zilber 映射 [GL25，引理 5。17]相容。（5.4）中的下方方块交换，因为对称化映射（4.4）与 Eilenberg-Zilber 映射相容：前者置换张量幂 $\mathcal{A}$的 Hochschild 链的列，而后者在保持列位置不变的同时洗牌各行。

（5.5）中的上方方块交换，因为诱导函子

$$\mathrm{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}\colon h\mathcal{P}erf\left(\mathcal{A}^{n+m}\rtimes(S_m\times S_n)\right)\to h\mathcal{P}erf\left(\mathcal{A}^{n+m}\rtimes S_{m+n}\right)$$

在可表对象上限制为全忠实嵌入

$$\mathcal{A}^{n+m}\rtimes(S_m\times S_n)\hookrightarrow\mathcal{A}^{n+m}\rtimes S_{m+n}$$

由包含映射 $S_m\times S_n<S_{m+n}$给出。（5.5）中的下方方块交换，因为对于任意带有有限群 $\mathcal{A}$强作用的小DG范畴 G，G 对 $\mathcal{A}\rtimes G$ 的作用在霍赫希尔德同调层面上变为平凡 [GL25，引理 5。15]。因此 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)_G=\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}\rtimes G)$，故（4.4）是恒等映射。

因此我们得出，乘法 μ 由同构 ζ识别为 μ'。类似的分析将余乘法 Δ 被识别为 Δ' 这一命题归结为验证 [GL25，引理 5。18]中的图表可交换。□

5.2. K-理论的平行结果与 λ-环结构。设 $\mathcal{A}$为一个小 DG 范畴。设 $\mathcal{A}$ 作为增强三角范畴与光滑射影簇 X 上相干层的有界导出范畴 $D(X)$ 等价。也就是说，存在一个精确等价 $D_c(\mathcal{A}) \simeq D(X)$，它由 $\mathcal{A}$ 与 X [的标准 DG 增强之间的 Morita 等价诱导而来（GKL21，第 4 节）。4] [To¨e07][LO10]。由 HKR 定理的整体版本 [（Swa96，推论 2；6], [Kon03，定理 4.6；2], [C˘a05，定理 4），9], 我们有 $HH_\bullet(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{p\geq 0} H^{\bullet-p}(X, \Omega^p)$。当 k = C 时，由庞加莱引理进一步得到 $HH_\bullet(\mathcal{A}) \simeq H^\bullet(X,$ C)，再由陈特征同构 [（AH61，第 2 节）4] 可得同构 $HH_\bullet(\mathcal{A}) \simeq K^\bullet(X) \otimes$ C，它是 Z/2-分次向量空间的同构，其中 $K^\bullet(X)$ 表示 X 的拓扑K-理论。

对于任意有限群 G 作用于 X，在 [AS89，定理 2] Atiyah 和 Segal 给出了复化等变拓扑 K-理论按 G-作用的不动点轨迹分解的结果：

$$K^\bullet_G(X) \otimes \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{[g]\in G} K^\bullet(X_g)_{C(g)} \otimes \mathbb{C}, \tag{5.6}$$

其中，求和遍历 G的共轭类代表元，X_g表示 $g \in G$的不动点轨迹，而 $C(g)$ 表示 $g \in G$的中心化子。等变 K-理论 $K^\bullet_G(X)\otimes\mathbb{C}$可视为全局商栈 K的 $[X/G]$-理论，而分解 (5.6) 可视为第二作者 K对 X 的轨形Hochschild同调（以及更一般地说，循环同调）分解的早期 [Bar03，定理 1，所给出的理论类比；本文将这一结果推广到了1]非交换情形。

Segal [Seg96，命题 1。4] 以及 Wang [Wan00，定理 3]利用分解式（5.6）将总对称商栈 K-理论 X 识别为一个对称代数：

$$\bigoplus_{n\geq 0} K^\bullet_{S_n}(X^n) \otimes \mathbb{C} \simeq S^*\left(K^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t]\right). \tag{5.7}$$

这是一个 K-理论类比，对应于我们关于霍赫希尔德同调的定理4.2。Segal 和 Wang 利用它给出了 $\bigoplus_{n\geq 0} K^\bullet_{S_n}(X^n)\otimes\mathbb{C}$ 作为 $K^\bullet(X$的海森堡代数的 Fock 空间结构。关于我们非交换情形下这种海森堡代数作用的霍赫希尔德同调类比，见 [GL25]。

Wang 还在 $\bigoplus_{n\geq 0} K^\bullet_{S_n}(X^n)$ ⊗C 上定义了霍普夫代数和 λ-环结构。霍普夫代数结构 [Wan00, §2] 是通过同构（5.7）从对称代数的标准霍普夫代数结构映射而来的。它是我们关于霍赫希尔德同调的定理 5.1 的一个 K-理论类比。λ-环结构 [Wan00, §3] 是利用同构（5.7）构造的，并证明其同构于由 $K^\bullet(X)$ ⊗C 自由生成的 λ- 环。

在本节中，我们研究在我们的非交换情形下，$\bigoplus_{n\geq 0}$HH($\mathcal{S}^n\mathcal{A}$) 上是否存在类似的 λ-环结构。

λ环是格罗滕迪克 [Gro71, §I.1-2] 提出的一个概念，用于公理化定义在 X 上向量丛的格罗滕迪克环 $K_0(X)$上通过取外幂所赋予的结构。因此，λ环是一个带单位的交换环 R，并配备一族集合论运算 λ^i：$R \to R$ 对于 $i \geq 0$满足某些条件 [Gro71, §I.1-2] [Ber71, D´ef. 2.4]。另请参阅 [Knu73], [AT69], 以及较新的文献 [Yau10]。λ环结构也可以用亚当斯运算 ψ^i来定义：$R \to R$，而在一个域上

特征零时，这些运算可以是满足以下条件的任意环同态 ψ^1 =恒等映射以及 $\psi^m \circ \psi^n = \psi^{mn}$，参见 [Knu73，第 49] [Wil82，命题 1。2]。

给定任意 $E \in \mathbf{Mod\text{-}k}$，对称微分分次代数 $S^*(E \otimes t\mathbf{k}[t])$ 具有自然的λ-环结构，其定义为

$$\psi^m(vt^n) := vt^{mn} \qquad \forall\, v \in E, n \geq 0. \tag{5.8}$$

在此结构下，$S^*(E \otimes t\mathbf{k}[t])$ 是由 E 生成的自由 λ-环。它满足如下泛性质：对于任意其他在 $\mathbf{k}$ 上的 DG λ-环 R，若其亚当斯运算是 Mod-k-同态，则 DG λ-环同态 $S^*(E \otimes t\mathbf{k}[t]) \to R$与 Mod-k-态射 $E \to R$ 一一对应。该对应由限制到 $E \otimes t \subset S^*(E \otimes t\mathbf{k}[t])$ 给出。

因此，定理 4.2 的同构 ζ 和 η

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \underset{\eta}{\overset{\zeta}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\simeq}}}} S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A}) \otimes t\Bbbk[t])$$

赋予总霍赫希尔德同调 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 一个分次λ-环结构，其乘法为 (5.1)，亚当斯运算为

$$\psi^m\colon\ \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A}) \to \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^{mn}\mathcal{A}).$$

对于 $n = 1$，它们由以下复合给出

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}) \xrightarrow{g_m} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m}; t_m)_{t_m} \xrightarrow{(4.4)} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m}; t_m) \xrightarrow{\xi_{t_m}} \mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A}),$$

更高阶的 n 也可类似地定义。

The K-theoretic λ-ring construction in [Wan00, §3] 与我们的构造不同，具体如下。不同于 $HH_\bullet(\mathcal{A})$，拓扑 K-理论 $K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C}$ 具有自然的 λ-环结构，其乘法由向量丛的张量积给出，而 λ-运算则由外幂给出。相应的亚当斯运算 $\psi^m_{K(X)}\colon\ K^\bullet(X) \to K^\bullet(X)$ 可利用分解（5.7）描述如下。

设 V 是 X 上的一个向量丛。在 X^m 上赋予 $V^{\boxtimes m} := V \boxtimes V \boxtimes \cdots \boxtimes V$ 自然的 S_m 作用，该作用通过置换各因子实现。赋值$V \mapsto V^{\boxtimes m}$ 定义了一个映射 $\boxtimes m\colon\ K^\bullet(X) \to K^\bullet_{S_n}(X^n)$。定义

$$\psi^m_{K(X)}\colon K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\boxtimes m} K^\bullet_{S_m}(X^m) \otimes \mathbb{C} \simeq \sum_{\underline{\lambda}\vdash m} \mathrm{Sym}^{\underline{r}(\underline{\lambda})} K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C}t^{\underline{\lambda}} \twoheadrightarrow K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C}t^m, \tag{5.9}$$

其中，最后一个映射是投影到由 m 的长循环分拆 (m) 给出的加项。每个 $\psi^m_{K(X)}$：$K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C} \to K^\bullet(X) \otimes \mathbb{C}$ 都是一个自同构；通过陈示性，它被识别为 $H^*(X, \mathbb{C})$ 的自同构，该自同构在 $H^{2k}(X, \mathbb{C})$ 和 $H^{2k-1}(X, \mathbb{C})$ 上分别通过乘以 m^k 起作用。

在 λ-环结构是通过 [Wan00，§3] 在 $\bigoplus_{n\geq 0} K^\bullet_{S_n}(X^n) \otimes \mathbb{C}$ 上构造的，它经由同构 $\bigoplus_{n\geq 0} K^\bullet_{S_n}(X^n) \otimes \mathbb{C}$ 由对称代数 $S^*(K^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t])$ 上的 λ-环结构诱导而来，其亚当斯运算定义为

$$\psi^m(vt^n) := \psi^m_{K(X)}(v)t^{mn} \qquad \forall\, v \in K^\bullet(X), n \geq 0.$$

将此与定义由分次向量空间生成的自由 λ-环的典范 Adams 运算（5.8）相比较，我们看到，在 [Wan00, §3] 中构造于 $S^*(K^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t])$ 上的 λ-环结构并非典范自由结构。不过，由于 $\psi^m_{K(X)}$ 是自同构，它通过 $S^*(K^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t])$ 的 λ-环自同构同构于典范结构；该自同构将 $K^\bullet(X)t^n$ 通过 $\psi^n_{K(X)}$ 映至 $K^\bullet(X)t^n$。

由于 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 没有自然的 λ-环结构，我们使用典范 Adams 运算（5.8）在 $S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$ 上定义了 λ-环结构，进而在 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 上定义了该结构。因此，在交换情形下，HKR 与 Chern 特征同构 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\simeq K^\bullet(X)\otimes\mathbb{C}$ 并未将我们在 $S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$ 上的 λ-环结构与 [Wan00, §3] 中 $S^*(K^\bullet(X)\otimes_{\mathbb{C}} t\mathbb{C}[t])$ 上的结构相对应。但由 orbifold HKR 同构 [ACH19, Theorem 1.15] 构造出的同构 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})\simeq K^\bullet_{S_n}(X^n)\otimes\mathbb{C}$，是否可能将 $\bigoplus_{n\geq 0}\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{S}^n\mathcal{A})$ 与 $\bigoplus_{n\geq 0}K^\bullet_{S_n}(X^n)\otimes\mathbb{C}$ 上诱导的 λ-环结构对应起来?

我们的 λ-环结构并非 [Wan00，§3] 中结构的非交换类比，这并非疏忽。若真如此，我们就会在 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 上构造出 $K^\bullet(X)\otimes\mathbb{C}$ 上亚当斯运算 $\psi^m_{K(X)}$ 的非交换类比。由于 $\psi^m_{K(X)}$ 的特征子空间在 $K^\bullet(X)\otimes\mathbb{C}$ 上恢复了 $H^*(X,\mathbb{C})$ 的上同调分次，我们就会在 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$ 上构造出非交换霍奇分解 $H^{i,\,j}$ 。

不过有趣的是，对于 $\mathrm{HH}_0(\mathcal{A})$ 中的对象 $\mathcal{A}$ 在定义（5.9）的两个步骤中所对应的类，我们现在都有了非交换类比。赋值 $V\mapsto V^{\boxtimes m}$ 对应于将 $a\in\mathcal{A}$ 映射为 HH_0 中对象 $a^{\otimes m}$ 在 $\mathcal{S}^m\mathcal{A}$ 中的对称幂等元 $\sum_{\sigma\in S_m}\sigma$ 的类。这恰好是与可表示 $\mathcal{A}^{\otimes m}$-模 $a^{\otimes m}$ 相对应的 $\mathcal{S}^m\mathcal{A}$-模的欧拉类；该模带有一个 S_n-等变结构，其作用是置换它的因子。

另一方面，投影 $K^\bullet_{S_m}(X^m)\otimes\mathbb{C}\to K^\bullet(X)\otimes\mathbb{C}$ 在我们的情形下对应于复合

$$\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{S}^m\mathcal{A})\xrightarrow{\nu}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m};t_m)_{t_m}\xrightarrow{f_m}\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}). \tag{5.10}$$

该复合首先将对象 $a^{\otimes m}$ 的对称幂等元 $\sum_{\sigma\in S_m}\sigma$ 映射到 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A}^{\otimes m};t_m)_{t_m}$ 中的恒等映射 $\mathrm{Id}_{a^{\otimes m}}$，然后再映射到 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{A})$ 中的恒等映射 $\mathrm{Id}_a\in$ 。

因此，在非交换情形中重复 K-理论 Adams 运算的步骤，ψ_m 会在 HH_0 的对象 $\mathcal{A}$的类上产生平凡运算。这与我们在上文对 λ上的 $S^*(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})\otimes t\Bbbk[t])$ 结构的定义一致。值得关注的是，映射 $V\mapsto V^{\boxtimes m}$的非交换类比能否扩展到整个 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{A})$，以及它与投影（5.10）的复合是否为恒等映射。

References

[ACH19] Dima Arinkin、Andrei C˘ald˘araru 和 Marton Hablicsek，导出交的形式性与 *orbifold HKR* 同构，《代数杂志》**540** (2019)，100–120，arXiv:1412.5233。[AH61] Michael Atiyah 和 Friedrich Hirzebruch，向量丛与齐性空间，《微分几何》（Carl B. Allendoerfer 编），《纯数学专题讨论会论文集》，第 3 卷，美国数学会，1961 年，第 7–38 页。[AL21] Rina Anno 和 Timothy Logvinenko，模的 *Bar* 范畴与张量函子的同伦伴随，《国际数学研究通知》**2021** (2021)，第 2 期，1353–1462，arXiv:1612.09530。[AL24] ，无界扭曲复形，《代数杂志》**647** (2024)，794–822，arXiv:2303.11796。[AS89] Michael Atiyah 和 Graeme Segal，关于等变欧拉示性数，《几何与物理杂志》**6** (1989)，第 4 期，671–677。[AT69] Michael Atiyah 和 David Orme Tall，群表示、λ-环与 *J*-同态，《拓扑学》**8**(1969)，第 3 期，253–297。[Bar03] Vladimir Baranovsky，作为周期循环同调的轨形上同调，《国际数学杂志》**14**(2003)，第 08 期，791–812。

[Ber71] Pierre Berthelot，《关于 λ-环的一般论》，《交理论与黎曼–罗赫定理》（SGA 6），《数学讲义》，第 225 号，Springer-Verlag，1971 年，第 297–364 页。[BFK23] Pieter Belmans、Lie Fu 和 Andreas Krug，曲面上点的希尔伯特概形的霍赫希尔德上同调，arXiv:2309.06244，2023。[Bry87] Jean-Luc Brylinski，循环同调与等变理论，《傅里叶学院年刊》37 (1987)，第 4 期，15–28。[Cˇa05] Andrei Cˇaldˇararu，Mukai 配对 II：霍赫希尔德–科斯坦特–罗森伯格同构，《数学进展》194 (2005)，第 1 期，34–66。[Efi20] Alexander I. Efimov，代数几何中的某些 DG 范畴的同伦有限性，《欧洲数学学会杂志》22 (2020)，第 9 期，2897–2942，预印本 arXiv:1308.0135。[FT87] Boris Feigin 和 Boris Tsygan，具有二次关系的代数、泛包络代数及群代数的循环同调，《K-理论、算术与几何：莫斯科大学研讨会，1984–1986》（Yuri I. Manin 编），《数学讲义》，第 1289 卷，Springer-Verlag，柏林、海德堡，1987 年，第 210–239 页。[GJ93] Ezra Getzler 和 John D.S. Jones，交叉积代数的循环同调，《纯粹与应用数学杂志》445 (1993)，161–174。[GK14] Nora Ganter 和 Mikhail Kapranov，范畴的对称幂与外幂，《变换群》19 (2014)，第 1 期，57–103，arXiv:1110.4753。[GKL21] ´Ad´am Gyenge、Clemens Koppensteiner 和 Timothy Logvinenko，范畴的海森堡范畴，即将发表于《美国数学会回忆录》，(2021)。[GL25] ´Ad´am Gyenge 和 Timothy Logvinenko，向量空间的海森堡代数与霍赫希尔德同调，arXiv:2511.03649，(2025)。[Gro71] Alexander Grothendieck，层类与黎曼–罗赫定理，《交理论与黎曼–罗赫定理》（SGA 6），《数学讲义》，第 225 号，Springer-Verlag，1971 年，第 20–77 页。[Gro95] Ian Grojnowski，瞬子与仿射代数 I：希尔伯特概形与顶点算子，《数学研究快报》3 (1995)，第 2 期，275–291，arXiv:alg-geom/9506020。[Kal07] Dmitri Kaledin，非交换几何中的同调方法，http:// imperium.lenin.ru/~kaledin/tokyo/，2007。[Kel94] Bernhard Keller，导出 DG 范畴，《高等师范学校科学年刊》27 (1994)，第 1 期，63–102。[Kel06] ，关于微分分次范畴，《国际数学家大会论文集》，西班牙马德里，2006 年，第 II 卷，欧洲数学会，苏黎世，2006 年，arXiv:math/0601185，第 151–190 页。[Kel20] B. Keller，霍赫希尔德（上）同调与导出范畴，2019 年 4 月在伊斯法罕代数表示论学校及会议上的讲座扩展笔记，可从作者主页获取，(2020)。[KKP07]Ludmil Katzarkov、Maxim Kontsevich 和 Tony Pantev，镜像对称的霍奇理论方面，载于《从霍奇理论到可积性与拓扑量子场论：tt*-几何》（Ron Y. Donagi 和 Katrin Wendland 编），《纯数学专题讨论会论文集》，第 78 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007 年，第 87–174 页。[Knu73] Donald Knutson，《λ-环与对称群表示论》，《数学讲义》，第 308 号，Springer-Verlag，1973 年。[Kon03] Maxim Kontsevich，泊松流形的变形量子化，《数学物理快报》66 (2003)，第 3 期，157–216。[KS09] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman，关于 A_∞-代数、 A_∞-范畴与非交换几何的笔记，《同调镜像对称》，《物理学讲义》，第 757 卷，Springer Berlin Heidelberg，2009 年，第 1–67 页。[LO10] Valery A. Lunts 和 Dmitri O. Orlov，三角范畴增强的唯一性，《美国数学会杂志》23 (2010)，853–908，arXiv:0908.4187。[Lod97] Jean-Louis Loday，《循环同调》，《数学科学基础丛书》，第 301 号，Springer，1997 年。[LS25] N.Sibilla L.Fu、M.Porta 和 S.Scherotzke，导出 Deligne–Mumford 叠的霍赫希尔德–科斯坦特–罗森伯格同构，预印本 arxiv:2509.00501，(2025)。[ML63] Saunders Mac Lane，《同调》，《数学科学基础丛书》，第 114 卷，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，1963 年。

[*Nak*97] *Hiraku Nakajima*，海森堡代数与射影曲面上的点的希尔伯特概形，《数学年刊》*145 (1997)*，第 *2* 期，*379–388*，*arXiv:alg-geom/9507012*。[*Nor25a*] *Ville Nordstr¨om*，*DG* 范畴对称幂的霍赫希尔德同调分解定理，*arXiv:2511.03269*，*2025*。[*Nor25b*] ，*DG* 范畴上的有限群作用与霍赫希尔德同调，《加拿大数学通报》*(2025)*，*1–21*。[*Orl*16] *Dmitri Orlov*，光滑且适当的非交换概形与 *DG* 范畴的粘合，《数学进展》*302 (2016)*，*59–105*，*arXiv:1402.7364*。[*Seg*96] *Graeme Segal*，等变 *K* 理论与对称积，预印本，*1996*。[*Swa*96] *Richard G. Swan*，准射影概形的霍赫希尔德上同调，《纯粹与应用代数杂志》*110 (1996)*，*57–80*。[*Swe*69] *M. Sweedler*，霍普夫代数，*W.A. Benjamin Inc.*，*1969*。[*To¨e*07] *Bertrand To¨en*，*dg* 范畴的同伦论与导出莫里田理论，《数学发明》*167 (2007)*，第 *3* 期，*615–667*，*arXiv:math/0408337*。[*Wan*00] *Weiqiang Wang*，等变 K 理论、花环积与海森堡代数，《杜克数学杂志》*103 (2000)*，第 *1* 期，*1–23*。[*Wil*82] *ClarenceWilkerson*，*λ*-环、二项式整环与 *CP(∞)* 上的向量丛，《代数通讯》*10 (1982)*，第 *3* 期，*311–328*。[*Yau*10] *Donald Yau*，*λ*-环，*World Scientific*，*2010*。

电子邮箱：*ranno@math.ksu.edu*
Department of Mathematics, Kansas State University, 138 Cardwell Hall, Manhattan, KS 66506, USA电子邮箱：*vbaranov@math.uci.edu*
Department of Mathematics, UC Irvine, Irvine, CA 92697-3875, USA电子邮箱：*LogvinenkoT@cardiff.ac.uk*School of Mathematics, Cardiff University, Senghennydd Road, Cardiff, CF244AG, UK