有限长导体圆柱的静电学：椭圆积分核积分方程与电容渐近行为

J. Ricardo de Sousa，亚马孙联邦大学物理系，3000，Japiim，69077-000，马瑙斯州，巴西。

arXiv:2601.00031v1 [physics.class-ph] 30 Dec 2025

摘要

我们研究处于恒定电势 V_0 下的薄有限长导电圆柱壳的静电学。利用轴对称性，我们将问题改写为关于轴向表面电荷密度的一维奇异积分方程，其核以完全椭圆积分表示。采用纳入平方根边缘奇异性的切比雪夫加权配点格式，可针对任意长径比 L/a 快速收敛地求得电荷分布和无量纲电容，并再现已知的长圆柱和短圆柱极限，同时为中间区域提供精确的基准值。该方法为有限长圆柱导体的静电学提供了一种简洁、数值稳健的参考表述。

1 引言

有限导体的静电学仍然是位势理论解析方法和高精度数值求解器的典型基准问题。在这类几何形状中，有限长正圆柱（亦即开口导电管）尤为重要，因为它连续地衔接两个奇异极限：细长体区域的特征是除端部附近外，表面电荷沿轴向变化较弱；而在短圆柱或环状区域中，长度在半径固定时趋于零，系统行为则由边缘效应主导。

有限长圆柱的电容和表面电荷分布是一个经典的静电问题，无法用初等函数给出闭式解，因此长期以来，人们一直通过数值和半解析方法对其进行广泛研究。早期的实验与理论研究可追溯至卡文迪许和麦克斯韦相关的经典电容测量与界限 [1,2]。此后，这一问题始终是一个严峻的测试案例：它兼具轴对称性和复杂的边缘奇异性，对分析和计算都构成挑战 [3]。

因此，开口圆柱几何一直受到应用电磁学和静电学领域的持续关注。20 世纪中叶的研究采用了边界积分法和矩阵法，在较宽的长径比范围内获得了数值数据和实用近似。在此背景下，Vainshtein 的工作以及 Kapitsa、Fock 和合作者的相关研究 [4–6] 被广泛视为有限长空心圆柱系统数值分析的里程碑 [7]。后续发展包括对偶积分方程的表述（通常可通过纽曼级数型构造化为线性方程组）、矩量法实现，以及用于工程应用的半经验参数化。特别是，Verolino 在对偶积分方程框架内表述了空心金属圆柱的表面电荷密度问题，并详细评估了经典近似方法 [8]。

另一些研究则着重将开口圆柱的电容作为整体观测量。早期研究已报告了经典的工程级公式和数值比较，后续研究则进一步改进这些近似方法，并列出涵盖管极限和环极限的高精度数值。Scharstein 的《管的电容》在这一领域经常被引用，现代综述也常将其与早期分析和数值结果并列讨论 [9]。较新的研究提出了解析和半解析表示方法，将显式奇异项与快速收敛的展开相结合，例如勒让德级数构造，从而得到符合既有基准的闭式或近闭式表达式 [10–18]。

尽管相关文献十分丰富，仍有两个实际问题尚未解决。第一，许多研究侧重于电容值或低参数拟合，而对于给定恒定电势下的高分辨率表面电荷分布，较少有研究以可直接复现且在较大长径比范围内数值稳定的形式给出达到出版级质量的结果。第二，即使已有电荷密度信息，边缘处可积的端点奇异性仍可能妨碍收敛性分析，除非离散化过程明确纳入正确的边缘行为。

从数学角度看，难点不在于求解拉普拉斯方程本身，而在于处理具有尖锐边缘的开放曲面所对应的混合（对偶）边界特性。有限长圆柱壳上的面电荷密度在边缘处呈普适的平方根型发散；未能显式体现这一特性的数值方法通常收敛缓慢，且可能变得病态。这一特点与带电导线、针状导体和细导体方面的广泛研究密切相似；在这些领域，历史上往往需要精心设计的基准计算，才能厘清相互竞争的近似方法。

本文研究半径为 a 、长度有限为 L 且保持均匀电势 V_0 的零厚度导电圆柱壳。我们的主要目标是构建一种数值稳健的实空间形式，既能解析边缘奇异性，又能在广泛的长径比范围内保持良好的条件数。为此，我们首先推导出一个精确的一维轴对称积分方程，其中表面电势通过一个非局域算子表示，该算子的核包含完全椭圆积分，源自环与环之间相互作用的方位角积分。随后，我们采用切比雪夫加权配点格式求解这一奇异积分方程，该格式通过构造将边缘奇异性因子分离出来。由此可获得快速收敛且稳定的表面电荷密度$\tilde{}$和无量纲电容 $C(\alpha) = C/(2\pi\varepsilon_0 a)$，其中 $\alpha = a/L$，并能够系统地

开展有限尺寸标度分析，以控制离散化误差并外推至连续极限。在建立这一实空间解之后，我们才重新考察经典的基于贝塞尔函数的双积分方程（谱）表示，并证明它会生成完全相同的椭圆核算子，从而提供独立的解析验证，并阐明不同数学方法如何编码相同的物理内容 [8]。

本文结构如下。第 2 节介绍物理模型，并推导描述轴向表面电荷密度的椭圆核积分方程。第 3 节介绍切比雪夫加权数值方法。第 4 节讨论长径比范围广泛时表面电荷密度和电容的数值结果，包括用于获得连续极限结果和渐近状态的外推过程。第 5 节给出基于对偶积分方程的等效谱公式，并明确建立两种方法之间的对应关系。最后，第 6 节总结主要结论并概述可能的扩展。

2 物理模型与积分方程

考虑一个沿 z–轴放置的薄（零厚度）导电圆柱壳，其半径为 a，有限长度为 L，占据区间 $-L/2 < z < L/2$。导体处于均匀静电势 V_0，如图 1 所示。在不存在外场时，该构型轴对称；因此，感应面电荷密度与方位角 φ 无关，只取决于轴向坐标，即，对于 $\rho = a$ 和 $z \in [-L/2, L/2]$，有 $\sigma(z)$。

本研究旨在确定处于恒定静电势下的有限导电圆柱壳上所感应的表面电荷密度 $\sigma(z)$。尽管这是静电学中的经典问题，但由于其非平凡的数学结构以及边缘效应所起的微妙作用，仍值得进一步研究。

我们采用两种互补的解析方法。第一种方法采用较为直接的表述，通过涉及完全椭圆积分的实空间积分表示来表达势。第二种方法则通过将静电势展开为贝塞尔函数，建立谱公式，并自然导出关于未知电荷分布的对偶积分方程组。

我们明确证明了这两种表述在数学上等价，它们从不同但一致的角度描述同一个物理问题。这种等价性不仅阐明了解的内在结构，也凸显了静电学中谱方法、非局部积分算子与经典核表示之间的联系。

在柱坐标中，由分布在侧表面 $\rho' = a$ 上的表面电荷密度产生的任意场点 $(\rho,\ \varphi,\ z)$ 处的静电势为

$$\Phi(\rho, z) = k_e \int_{-L/2}^{L/2} \int_{0}^{2\pi} \frac{\sigma(z')a\,dz'd\varphi'}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + (z - z')^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \varphi')}}, \tag{1}$$

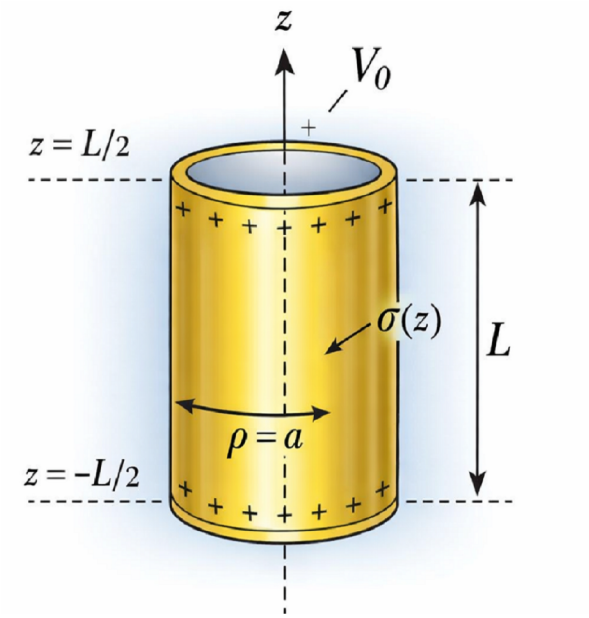

图 1：半径为 a 、长度有限的薄导电圆柱壳示意图。该圆柱壳沿 z轴放置，保持均匀静电势 V_0。圆柱体占据区域 $-L/2 < z < L/2$ ，且厚度为零。由于具有轴对称性且不存在外场，感应面电荷密度与方位角无关，仅取决于轴向坐标，即表面 $\rho = a$上的 $\sigma = \sigma(z)$。

其中 $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ 为静电常数。由于 $\sigma(z')$ 与 φ' 无关，可以用第一类完全椭圆积分$K(m)$解析地计算方位角积分，得到

$$\Phi(\rho, z) = 4k_e a \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(z') \frac{K[m(z')]}{\sqrt{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}} dz', \tag{2}$$

with

$$K[m(z')] = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m(z')\sin^2(\theta)}}, \tag{3}$$

以及椭圆参数

$$m(z') = \frac{4a\rho}{(\rho + a)^2 + (z - z')^2}. \tag{4}$$

在导体上施加狄利克雷边界条件 $\Phi(a,\ z) = V_0$ 后，方程 (2) 化为积分方程

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma(z')\mathcal{G}(z - z')dz' = \frac{\pi\varepsilon_0}{a} V_0, |z| < L/2, \tag{5}$$

其中核为

$$\mathcal{G}(q) = \frac{K\left(\frac{4a^2}{4a^2+q^2}\right)}{\sqrt{4a^2 + q^2}}. \tag{6}$$

方程 (5) 正是该问题的数学核心：确定 $\sigma(z)$，使其与 $\mathcal{G}(q)$ 的卷积在 $|z| < L/2$ 上为常数。当 $q \to 0$ 时，核具有弱（对数）奇异性

$$\mathcal{G}(q \to 0) \simeq \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{8a}{|q|}\right) + \mathcal{O}(1), \tag{7}$$

这意味着表面电荷在边缘处发散。在圆柱端部 $z \to \pm L/2$ 附近，通常预期会出现平方根发散 [3]

$$\sigma(z) \simeq \frac{\sigma_0}{\sqrt{\left(\frac{L}{2a}\right)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2}}, \tag{8}$$

其中，σ_0 是一个具有表面电荷密度量纲的常数。

3 切比雪夫加权数值方法

由于这种可积但强烈的边缘发散，对式（5）进行朴素离散化会导致收敛缓慢，还可能造成数值条件不良。为稳定计算，并从构造上确保正确的端点行为，我们引入切比雪夫加权参数化。

利用无量纲坐标 $x = (2/L)z \in [-1, 1]$，我们将表面电荷密度改写为

$$\sigma(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} p(x), \tag{9}$$

其中，权函数 $(1 - x^2)^{-1/2}$ 捕捉了 $x = \pm 1$ 处预期的平方根发散，而$p(x)$在 $[-1, 1]$ 上保持光滑。在适当情况下，我们用第一类多项式的截断切比雪夫展开 表示 $p(x)$ $T_n(x)$ [19–21]

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n T_n(x), \tag{10}$$

其中， N 是**谱截断阶数**，系数$\{c_n\}$ 通过数值方法求得。所得积分方程采用配置法求解，并结合高斯–切比雪夫求积，遵循针对弱奇异核的标准谱离散策略 [22–24]。

经过此变换，方程 (5) 化为以下定义在 x 上的积分方程：

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x')}{\sqrt{1 - x'^2}} \frac{K\left[\frac{16\alpha^2}{16\alpha^2 + (x - x')^2}\right]}{\sqrt{16\alpha^2 + (x - x')^2}} = \frac{\pi \varepsilon_0}{a} V_0, \tag{11}$$

其中， $\alpha = a/L$ 是无量纲几何参数。

我们在 $[-1, 1]$ 上采用 Nyström/配置离散，并结合针对切比雪夫权函数设计的高斯–切比雪夫求积来求解方程 (11)。具体如下：

1. **配置网格**。我们将区间 $x \in [-1, 1]$ 划分为 N_p 个面板，并在一组配点 $\{x_j, j = 1,2, ..N_c\}$ 处施加方程（11）（这些点可以是切比雪夫–洛巴托节点，也可以是映射到 $[-1, 1]$上的面板中点）。

2. **求积**。在每个面板上，使用 n_g-点高斯–切比雪夫求积公式计算在 x' 上的积分，该公式天然适用于权函数 $(1 - x^2)^{-1/2}$。这里， n_g 控制面板内求积的阶数。

3. **线性方程组**。离散化后得到稠密线性方程组

$$\sum_{j=1}^{N_c} A_{ij} p(x_j) = B_i, \tag{12}$$

其中， N_c 是配点条件的数量（等价地，也是未知节点值 $p(x_j)$的数量）。在我们的实现中，配点取在面板中点，因此 $N_c = N_p$。矩阵元素 A_{ij} 由在这些节点处计算的椭圆积分核以及相应的高斯–切比雪夫求积权重组装而成，而 B_i 表示给定的恒定电势。我们使用标准的稠密线性代数程序求解 $\{p(x_j)\}$ 。

4. **无量纲归一化**。我们报告无量纲密度 $\tilde{\sigma}(z) = a\sigma(z)/(\varepsilon_0 V_0)$，它消除了对 V_0 和 ε_0 的平凡依赖，并通过$\alpha = a/L$分离出几何依赖。

4 数值结果

为说明下文所示的计算，我们使用$N_p = 220$ 个面板对 x中的积分方程进行离散化，每个面板上取 $n_g = 16$ 个高斯–切比雪夫点。图2显示了 $\tilde{\sigma}(z)$随归一化坐标f z/L 的变化情况，对应的长径比为 $\alpha = 1/3$，1。0，2。0，以及5。0。在所有情况下，表面电荷密度均随 $z \to \pm L/2$ 单调增加，这与方程（8）预测的边缘发散一致。随着 α 增大，也就是说，随着圆柱体变短，两端在无量纲坐标 z/L中的距离逐渐缩小，边缘效应会更深入地延伸至内部区域，使整个圆柱体上的表面电荷密度都更高。

在圆柱体中心 $z = 0$，我们得到

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}(\alpha = 1/3) \simeq 0.5844 \\ \tilde{\sigma}(\alpha = 1) \simeq 1.1466 \\ \tilde{\sigma}(\alpha = 2) \simeq 1.9160 \\ \tilde{\sigma}(\alpha = 5) \simeq 3.9371 \end{cases} . \tag{13}$$

除上述总结的定性趋势外，本文的主要贡献在于方法层面：方程 (5) 给出了一个精确的边界积分公式，其核为椭圆积分核，但其中的弱对数奇异性 使直接离散化的条件数较差。通过利用加权表示 $\sigma(z) = (1 - x^2)^{-1/2} p(x)$ 对端点行为进行解析提取，剩余未知量 $p(x)$ 变得光滑，可通过采用高斯–切比雪夫求积的配点法精确求得。由此得到的计算方法稳定且收敛迅速，无需临时平滑处理或端点拟合，即可刻画边缘主导区，并为固定势下的 $\sigma(z)$ 提供可复现的参考解。

4.1 有限尺寸标度

为估算中心密度的连续极限值，我们对一系列逐渐加密的切比雪夫面板离散化方案计算 $\tilde{\sigma}(0)$，同时保持每个面板内的求积阶数不变。具体而言，对于每个 N_c ，我们使用每个面板上 $n_g = 16$ 个高斯 – 切比雪夫点计算面板积分，从而求解辅助未知函数 $p(x)$ 对应的离散化积分方程。随后，通过对配点节点进行插值，得到中心值 $\tilde{\sigma}(0)$。

在渐近区，我们将数据拟合为 leading finite$-N_c$ form

$$\tilde{\sigma}(0, N_c) = \tilde{\sigma}_\infty(0) + \frac{A}{N_c} + \mathcal{O}(N_c^{-2}), \tag{14}$$

这等价于对 $\tilde{\sigma}(0)$ 关于 $1/N_c$ 进行线性回归。将拟合限制在足够大的 N_c （此处为 $N_c \geq 220$）范围内，可以抑制前渐近曲率，并得到稳定的截距$\tilde{\sigma}_\infty(0)$，我们将其作为 $N_c \to \infty$ 极限的最佳估计。

图3展示了数值配点方案的有限尺寸标度分析。我们将圆柱体中心密度 $\tilde{\sigma}(0)$ 绘制为 $1/N_c$ 的函数。基于离散化方案序列 $N_c = \{220, 260, 300, 340\}$ 进行的最小二乘外推得到收敛值 $\tilde{\sigma}_\infty(0) \approx 1.1461309$，对应于 $\alpha = 1$。对于任意长径比 $\alpha = a/L$，也可以进行相同的外推。在

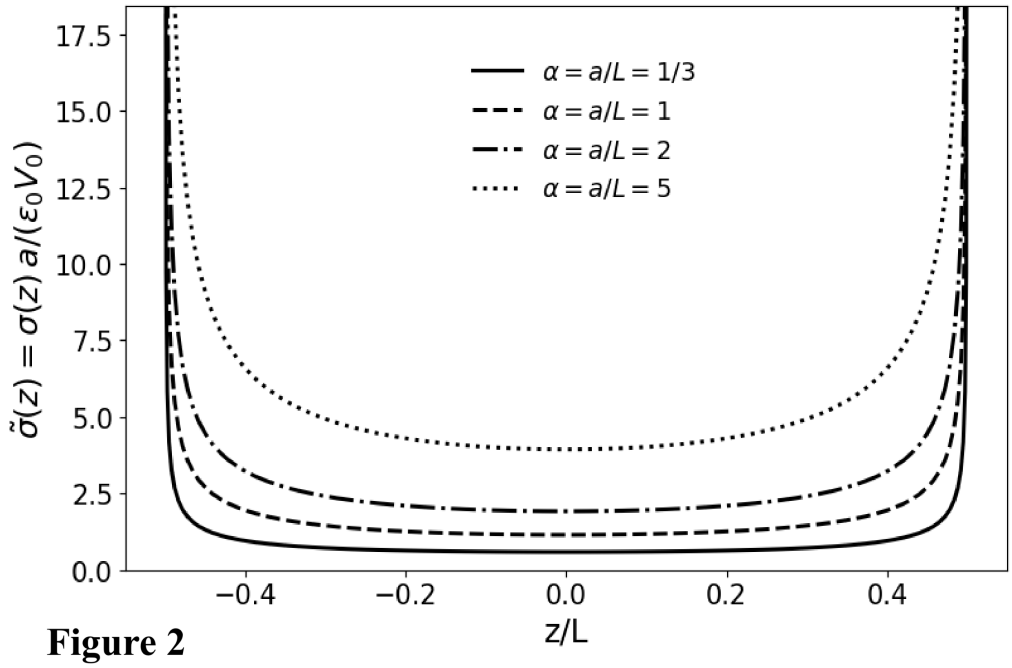

Figure 2

图2：处于均匀电势 V_0 下的开口导电圆柱侧壁上的无量纲表面电荷密度。曲线显示了 $\tilde{\sigma}(z) = a\,\sigma(z)/(\varepsilon_0 V_0)$ 随归一化轴向坐标 z/L 的变化，分别对应四种长径比 $\alpha = 1/3$，1，2 和 5（不同线型）。纵轴范围经过限制，以突出内部区域；在 $z/L = \pm 1/2$ 附近的快速上升反映了开口端边缘（圆周边缘）的电荷聚集。

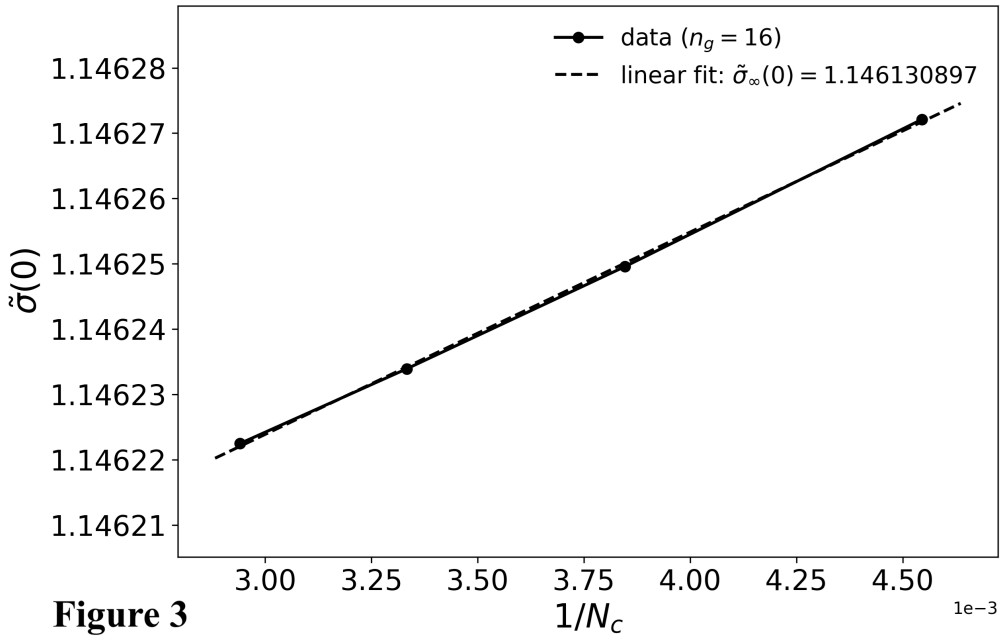

Figure 3

图3：数值计算得到的圆柱中心表面电荷密度的有限尺寸标度。对于 $\alpha = 1$，绘出无量纲中心值 $\tilde{\sigma}(0)$ 随 $1/N_c$ 的变化关系，其中 N_c 是用于积分方程轴向离散化的切比雪夫面板数，面板内求积固定使用 $n_g = 16$ 个高斯–切比雪夫点。在渐近区（$N_c \geq 220$）内，数据近似呈直线分布，这与主导离散化误差 $\tilde{\sigma}(0,\ N_c) = \tilde{\sigma}_\infty(0) + A/N_c + \mathcal{O}(N_c^{-2})$ 相符。虚线为相应的线性最小二乘拟合，其截距给出了 $N_c \to \infty$ 外推值 $\tilde{\sigma}_\infty(0)$。

实践中，我们发现 $N_c \to \infty$ 截距与直接的 $N_c = 220$ 结果仅有微小差异：对于本文考虑的 α 范围，修正 $\Delta\tilde{\sigma}(0) = |\tilde{\sigma}(0,\ N_c = 220) - \tilde{\sigma}_\infty(0)|$相较于 $\tilde{\sigma}(0)$ 随 α 的整体变化幅度很小。因此，尽管图3明确展示了针对 $\alpha = 1$的这一过程，但论文中报告的 $N_c = 220$ 数值已能很好地近似外推得到的连续极限密度；有限$-N_c$ 外推主要用于定量验证数值收敛性。

这些结果意义重大，因为表面密度直接决定局部法向场，$E_n(z) = \sigma(z)/\varepsilon_0$，因此，计算剖面能够量化最大场出现的位置，以及几何形状变化时场在端部附近集中的程度。在实际电极设计中，这种端部集中往往决定击穿和发射阈值；因此，针对 $\sigma(z)$ 的精确基准为估算有限圆柱电极中的峰值场增强提供了一种可控方法。此外，本文提出的框架——精确核加端点感知离散化——只需稍作修改，即可扩展到分段电极、非均匀边界电势或耦合导体构型，因此它是一个实用的计算模板，而非一次性的计算方案。

4.2 电容

由表面电荷密度 $\sigma(z)$的数值解可直接得到另一个值得关注的量，即有限圆柱导体的自电容。对于保持在均匀电势 V_0下的孤立导体，电容能够简洁地整体表征其静电响应，并且特别适合与经典结果及渐近近似进行比较。

我们通过侧表面上的总电荷定义几何相关电容系数 $C_{11} \equiv C(\alpha)$：

$$C(\alpha) = \frac{1}{V_0} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(z') 2\pi a dz', \tag{15}$$

因此，按照定义，总电荷满足 $Q = C(\alpha)V_0$。相应的静电自能为

$$U(\alpha) = \frac{1}{2} C(\alpha) V_0^2, \tag{16}$$

这为系统提供了具有能量意义的表征，并为数值解提供了另一种整体诊断方法。

由于电容对整个表面电荷分布进行积分，因此它同时对主体区域的行为和边缘奇异性敏感，从而成为检验数值精度的严格标准。此外，电容对长径比 $\alpha = a/L$ 的依赖使得我们能够直接评估长圆柱区域与短圆柱区域之间的过渡，便于与已知的渐近结果及此前报道的基准值进行比较。

4.2.1 渐近状态

在进行式（15）的完整数值解之前，考察空心圆柱电容器在物理上相关的渐近极限是很有启发性的。这些极限区域有助于深入了解表面电荷分布的结构，阐明边缘奇异性的起源及其作用，并可作为分析基准，用于评估数值结果。特别是，渐近分析揭示了该问题如何在长圆柱（细长体）极限与短圆柱（环状）极限之间过渡，从而突出了各情况下主导静电学行为的不同物理机制。

长圆柱（$\alpha << 1$）在细长圆柱极限下，$\alpha << 1$ **(**$L >> a$**)**，电容呈现出熟悉的对数依赖关系，这与横向尺度较小的三维导体相关。一个便捷的推导来自细长体近似：远离边缘处，电荷变化缓慢，因此可将圆柱体建模为线密度为 $\lambda \simeq Q/L$ 的近似均匀线电荷。在代表性位置（例如中平面附近）处评估表面上的势，可得其渐近形式

$$V_0 \simeq \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{2L}{a}\right) - 1\right], \tag{17}$$

其中，占主导地位的 $\ln(2L/a)$ 项具有普适性，而加性常数则体现了三维几何中的端部修正（麦克斯韦的经典形式） [2]。求解$C = Q/V_0$ 可得

$$\widetilde{C}(\alpha) = \frac{C(\alpha)}{2\pi\varepsilon_0 a} \simeq \frac{(1/\alpha)}{\ln(2/\alpha) - 1},\ \alpha << 1. \tag{18}$$

该表达式突出了电容随长度 L “近似线性”增长的特征（因为$1/\alpha = L/a$），但这一增长受到缓慢变化的对数因子 $\ln（2/\alpha）$ 的修正。尽管 $\ln（2/\alpha）\ \to \infty$随 $\alpha \to 0$ 增大，但其变化非常缓慢，而 $1/\alpha$ 则无限增长；综合效果是$\widetilde{C}(\alpha)$在 $\alpha \to 0$时发散，其增长弱于纯线性标度，但在理想化极限下仍然无界。

下面给出 $N_c = 220$ 的无量纲电容的代表性数值。结果清楚地揭示了当 $\alpha \to 0$ 时电容的奇异行为，这对应于细长圆柱极限。具体而言，我们发现

$$\begin{cases} \widetilde{C}_\infty(\alpha = 0.1) \simeq 4.96 \\ \widetilde{C}_\infty(\alpha = 0.05) \simeq 7.58 \\ \widetilde{C}_\infty(\alpha = 0.02) \simeq 14.20 \\ \widetilde{C}_\infty(\alpha = 0.01) \simeq 23.73 \end{cases}. \tag{19}$$

这些数值表明，随着长径比减小，电容迅速增大，这反映了该区间内端部效应的影响日益显著，以及与之相关的表面电荷密度发散。

许多经典数据表以高斯单位制报告有限长圆柱的静电容量，此时电容的量纲为长度，通常表示为 C/a 与 $x = L/a$之比。在

具体而言，参考文献 [13] 的表1在 $C^{(H)}/a$列中给出了空心（开放）圆柱体的高精度基准值。为将这些数据与我们基于国际单位制的归一化进行比较，我们定义无量纲电容 $C(\alpha) = C_{\mathrm{SI}}/(2\pi\varepsilon_0 a)$，其中 $\alpha = a/L = 1/x$，并采用换算关系 $C_{SI} = 4\pi\varepsilon_0 C_G$。由于参考文献 [13] 报告的是 $C_G/a = C^{(H)}/a$，映射关系可简化为 $C(\alpha) = 2C_G/a$。本文的表1总结了这一换算，并将所得基准值与通过表面电荷解和总电荷积分（式（15））得到的数值结果进行了比较。对于有代表性的细长圆柱体（ $x = 10$，20，50，100，即 $\alpha = 0.1$，0。05，0。02，0。01），两者的吻合度仍达到亚百分比水平，从而为侧表面上计算得到的电荷密度以及电容提取过程提供了外部验证。

表1：开放式空心导体圆柱体（仅侧表面）无量纲电容的基准。参考值取自文献 [13] 的表1（第 $C^{(H)}/a$列），是 $x = L/a$ 的函数；我们采用 $\alpha = a/L = 1/x$ 以匹配本文记号。要将文献 [13] 中的数据转换为 SI 制， $C_{SI} = 4\pi\varepsilon_0 a$（$C^{(H)}/a$）；等价地，在我们的归一化中，$\widetilde{C}$（$\alpha$）$= C/$（$2\pi\varepsilon_0 a$）$= 2$（$C^{(H)}/a$）。最后一列报告的相对误差为 $\Delta = \frac{|\widetilde{C}_{[13]} - \widetilde{C}_{\text{this}}|}{\widetilde{C}_{[13]}}$。在所测试的长径比范围内，结果一致性达到低于百分之一的差异水平。

$x = L/a$	$\alpha = a/L$	$C^{(H)}/a$ [13]	$\widetilde{C}(\alpha) = (2/a)\,C^{(H)}$ [13]	本文工作	$\Delta(\%)$
10	0.1	2.479711	4.959422	4.960616	0.024
20	0.05	3.788663	7.577326	7.580178	0.038
50	0.02	7.092673	14.185346	14.195725	0.073
100	0.01	11.854900	23.709800	23.739575	0.126

表1中残留的低于百分之一的差异是可以预期的，其来源有两个密切相关的方面。首先，文献 [13]中的基准值采用了不同的高精度数值方法（Love型积分方程方法及相关方案）获得，而我们则使用切比雪夫加权参数化，并结合 Nyström／配点法和分片求积，求解椭圆核边界积分方程。由于两种方法采用了不同的离散化方案，其截断误差和求积误差并不相同。在我们的实现中，主要的数值不确定性由有限分辨率参数（N_c，n_g）以及对可积边缘奇异性的精确处理所控制；后者会显著影响用于提取 C（α）、方程（15）的总电荷积分的收敛性。

其次，差异的量级与第 4.1 节独立量化的有限$-N_c$ 效应一致。如图3中的中心密度有限尺寸标度分析及式（14）的主导修正形式所示， $N_c \to \infty$ 外推结果与直接 $N_c = 220$ 计算结果仅有微小差异。由于电容是通过全局积分对同一数值电荷密度求得的，因此也会继承量级相近的离散化误差（在固定 n_g时，误差主要由 N_c 决定）。因此，表1中观察到的偏差自然可归因于积分算子的数值计算及边缘分辨电荷积分中残留的$\mathcal{O}(1/N_c)$（以及次级$\mathcal{O}(N_c^{-2})$）离散化误差，而非任何系统偏差。增大 N_c （或对 $C(\alpha)$进行显式 $N_c \to \infty$ 外推）可进一步减小剩余差异。

短圆柱（$\alpha >> 1$）在极端短圆柱极限 $L \to 0$ （即 $\alpha = a/L \to \infty$）下，侧表面 $\rho = a$, $|z| < L/2$ 在几何上收缩为环状物体。从侧壁（$\rho = a$）表面电势的轴对称库仑表示（1）出发，该表示以纵向密度 $\sigma(z)$为参量：

$$\Phi(a,z) = V_0 = k_e \int\limits_{-L/2}^{L/2} a\sigma(z')dz' \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{(z-z')^2 + 2a^2\sin^2(\varphi')}}. \tag{20}$$

方位角积分可用完全椭圆积分表示；对于 $|z - z'| << a$（当 $L << a$ 时这一条件一致成立），其标准近奇异展开将核化简为沿 z 的对数相互作用：

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{(z-z')^2 + 2a^2\sin^2(\varphi')}} \simeq \frac{2}{a}\ln\left(\frac{8a}{|z-z'|}\right) + \mathcal{O}\left[\frac{(z-z')^2}{a^3}\ln\left(\frac{8a}{|z-z'|}\right)\right]. \tag{21}$$

因此，在领先阶上，静电势满足

$$V_0 = 2k_e \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sigma(z')\ln\left(\frac{8a}{|z-z'|}\right)dz' + \text{subleading } \mathcal{O}\left[(L/a)^2\ln(a/L)\right]. \tag{22}$$

引入无量纲变量 $x = 2z/L \in [-1,1]$，并考虑到表面电荷密度预期会在圆柱端部发散，我们采用领先阶假设

$$\sigma(z) \simeq \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{23}$$

利用经典 对切比雪夫测度 [28 加权的对数势所满足的恒等式],

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln|x-x'|}{\sqrt{1-x^2}}dx' = -\pi\ln 2, \ |x| < 1. \tag{24}$$

并注意到 $|z - z'| = (L/2)|x - x'|$, 积分方程在领先阶上化简为，且与 x 无关：

$$V_0 = \frac{LA}{4\varepsilon_0}\ln\left(\frac{32a}{L}\right). \tag{25}$$

求解振幅 A，得到

$$A = \frac{4\varepsilon_0 V_0}{L\ln(32a/L)}. \tag{26}$$

将式 (26) 代入试探形式 (23)，可得无量纲表面电荷密度

$$\widetilde{\sigma}(z) = \frac{a}{\varepsilon_0 V_0}\sigma(z) \simeq \frac{4\alpha}{\ln(32\alpha)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x = \frac{2z}{L}, \alpha = \frac{a}{L} >> 1. \tag{27}$$

利用渐近表达式 (27)，可得总感应电荷

$$Q = \int_{-L/2}^{L/2} 2\pi a\sigma(z')dz' = 2\pi a\frac{L}{2}A\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi^2 aLA. \tag{28}$$

因此，电容可表示为

$$C = \frac{Q}{V_0} \simeq \frac{4\pi^2\varepsilon_0 a}{\ln(32\alpha)}\ (L << a), \tag{29}$$

~并利用无量纲定义 $C(\alpha) = C/(2\pi\varepsilon_0 a)$，最终得到

$$\widetilde{C}(\alpha) \simeq \frac{2\pi}{\ln(32\alpha)}\ (\alpha >> 1). \tag{30}$$

这一渐近结果最初由 Lebedev 和 Skal'skaya [11] 通过对偶积分方程方法得到。

这一对数定律与电容文献中针对空心圆柱的标准短管环近似一致；当长度远小于半径时，该近似适用。具体而言，若干文献给出的首项渐近行为为

$$C \propto \frac{a}{\ln\left(\text{const} \times L/a\right)}, \tag{31}$$

通常采用半长度记法 $\ell = L/2$表示，因此得到 $\ln(16a/\ell) = \ln(32a/L)$ [11]。针对空心圆柱的高精度计算也明确考察了极小的 L/a，结果与短长度区域内这种缓慢的 $1/\ln(a/L)$ 衰减一致 [12–17]。

Arun 等人最近提出了一种相关但在概念上有所不同的方法，用于计算静电能和电容 [18], ；他们引入了一种代数—拓扑方法，用于计算复杂导体构型中的储存静电能和三维麦克斯韦电容。该框架强调全局拓扑不变量以及静电场的基于网络的表示，为传统边界积分或谱方法表述提供了替代方案。相比之下，本文着重于基于积分方程的直接连续体描述，其核具有清晰的物理意义，因而能够明确刻画表面电荷密度及其奇异行为。这些互补的方法展现了可用于电容计算的理论工具的多样性，也凸显了几何依赖效应在有限静电系统中的重要性。

然而，对于零厚度导电壳，这一极限是奇异的：该问题不再是严格意义上的二维表面导体边值问题，而是有效趋近于一维支撑；在这种情况下，光滑表面电荷密度和唯一电容的概念需要额外的横向尺度。在实际中，物理上的"环"会通过有限的导线半径或壁厚（例如细环面）进行正则化，此时电容变为有限值，但会以对数形式依赖于该横向尺度。因此，尽管环状解释在几何上是正确的，本文理想化模型的 $\alpha \to \infty$ 极限

壳应被视为形式渐近式，而不是与厚度无关的普适性预测；因此，我们的数值结果旨在适用于有限的 α，此时壳层模型是适定的。因此，我们并不声称零厚度模型具有普适的 $\alpha \to \infty$ 电容；该渐近式是形式上的。

对于环形导体这一特例，其中心半径为 a ，圆形截面的半径为 R，无量纲电容由文献 [25–27] 给出如下

$$\widetilde{C} = \frac{8\pi}{a}\sqrt{a^2 - R^2}\left[\frac{1}{2}\frac{Q_{-1/2}(a/R)}{P_{-1/2}(a/R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_{n-1/2}(a/R)}{P_{n-1/2}(a/R)}\right], \tag{32}$$

其中， Q_s 和 P_s 分别表示第一类和第二类勒让德函数。我们将以高斯单位制给出的原始电容表达式改写为 SI~单位制。在我们的记号中，这对应于变换 $C(\alpha) = 2C_G/a$，如上文所述。

式（32）的渐近展开由最低阶项主导，在极限 $a >> R = L/2$下得到

$$\widetilde{C}(\alpha) \simeq \frac{2\pi}{\ln(32\alpha)},$$

从而再次证实了式（30）。

对于相反的短圆柱区域，需要注意：当 $\alpha \to \infty$时，一些表格趋近于有限常数，这对应于具有有限厚度、类似圆盘的（由端盖主导的）导体。在我们的问题中，导体是开口圆柱壳（仅有侧表面），且壁厚为零；在这一模型中，短圆柱极限呈环状并且是奇异的，而物理上的正则化需要额外的横向尺度（壁厚或导线半径）。因此，只有细长体数据项（$x << 1$、$\alpha >> 1$）才应当用于与当前壳层模型进行直接的定量比较。

4.2.2 不同长径比下的电容特性

~图4总结了无量纲电容 $C(\alpha)$ 在广泛长径比范围 $\alpha = a/L$ 内的数值特性。结果在定量上平滑连接了~细长圆柱极限 $\alpha \to 0$ ($L >> a$)（其中 $C(\alpha)$ 快速增长，并且可由公式 (18) 中的经典麦克斯韦对数渐近式准确描述）与短圆柱极限 $\alpha \to \infty$($L << a$)（在该极限下，响应越来越由边缘区域主导，且~对几何形状的依赖仅呈对数关系）。插图展示了 $1/C(\alpha)$ 与 $\ln \alpha$ 的关系，明确体现了这一缓慢变化趋势，并验证了公式 (30) 中理想零厚度壳层预期的大$-\alpha$ 行为。

除教学价值之外，本文的有限长度圆柱体解还为端部主导的静电学提供了定量基准，可直接用于两个应用场景。**(i) 高压设备** 和**引线端子工程**：击穿和表面闪络往往始于几何不连续处（端部、三结合部区域以及曲率突变处），这些位置的局部电场会得到增强；因此，对 $\sigma(z)$ 中端部奇异性以及几何电容 $C(\alpha)$ 如何随长径比变化进行受控描述，可为高压系统（包括

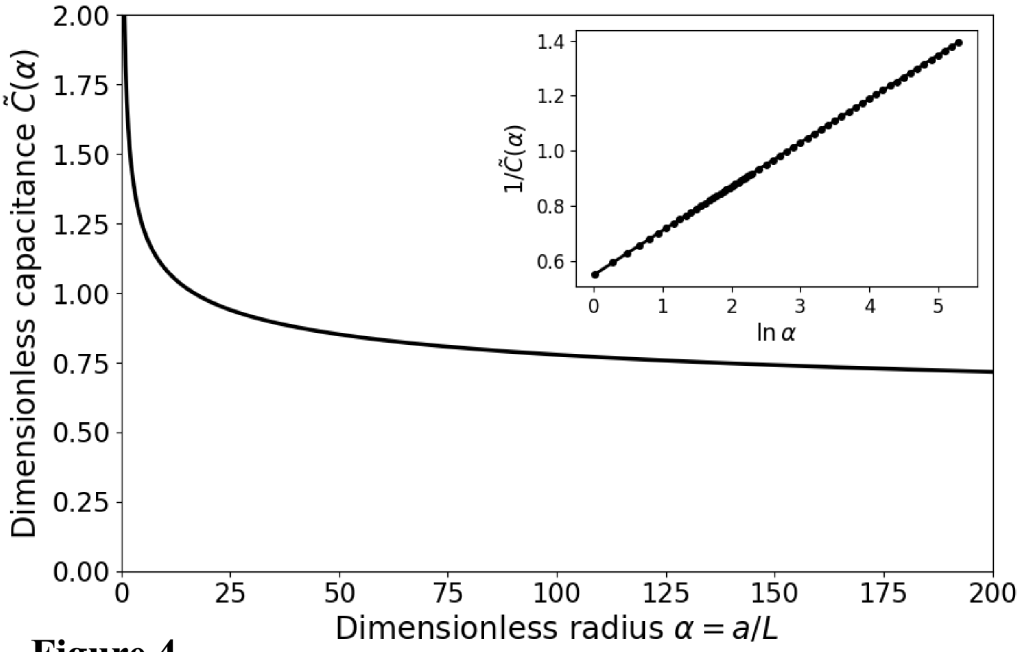

Figure 4

图4：处于均匀电势 V_0 下的开口导电圆柱（仅侧表面）的无量纲总电容，随长宽比参数 $\alpha = a/L$ 变化。绘制的量为 $C(\alpha)$，由数值计算得到的表面电荷分布（式（15））求得。纵轴范围限制在 $0 \leq C(\alpha) \leq 2.0$，以突出其在$\alpha \to 0$ （长圆柱极限）时的快速增长，同时保留中等 α 下的细节。插图： $1/C(\alpha)$ 随 $\ln \alpha$ 的变化，突显短圆柱区域 $\alpha \gg 1$ 中缓慢的对数趋势，见式（30）。

电极成形和绝缘引线结构) [29–33]。**(ii) 电容计量**和**带保护电极结构**：采用保护环和内凹式设计，正是为了抑制或修正边缘电场；使用圆柱电极时，残余边缘电场贡献往往是限制因素所在的系统误差。因此， $C(\alpha)$ 和 $\sigma(z)$ 提供了按几何结构区分的输入数据，可用于验证有限元法/边界元法修正，并用于构建/校准带保护标准器和可计算电容器不确定度预算 [34–37]。

更广泛地说，渐近形式 (18) 对细长导体的电容随长度近乎线性变化这一熟知规律进行了定量描述，同时明确给出了在实际长径比下可能产生影响的缓慢对数修正。工程近似中常会定性地提及这一修正，而本文的处理则为细长区域与短小且由边缘效应主导的区域之间提供了受控的衔接，并给出了基准曲线 $C(\alpha)$，可用于验证降阶模型、边界元求解器或有限电极的简化电路表示。

电容为有限圆柱导体的静电响应提供了简洁的整体表征。由于它对整个表面电荷分布进行积分，因此既对整体行为敏感，也对前述渐近分析讨论的边缘奇异性敏感。因此， $C(\alpha)$ 随长径比的变化为数值解提供了严格的诊断标准，也自然地将问题中不同的物理状态联系起来。

5 谱公式

在谱方法中，导电圆柱壳外部真空区域内的静电势表示为轴对称拉普拉斯模态的汉克尔（傅里叶–贝塞尔）叠加，即

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^\infty A(k) J_0(k\rho) e^{-k|z|} dk, \tag{33}$$

其中， $A(k)$ 是先验未知的谱系数，用于表征导体的有限几何形状。该表示直接源自柱坐标下轴对称拉普拉斯方程的分离变量法：对于每个横向波数 k， $J_0(k\rho)$ 给出 $\rho = 0$ 处的正则径向本征函数，而轴向依赖关系 $e^{-k|z|}$ 选取远离平面 $z = 0$ 时的衰减解，并保证无穷远处的正则性。绝对值 $|z|$ 确保了适用于当前几何形状的 z 偶对称性，而对 k 的连续积分则反映了无界径向区域。经典的有限空心圆柱对偶积分方程处理方法中也采用了密切相关的汉克尔表示 [4–8]。

在圆柱壳表面施加边界条件， $\Phi(a, z) = V_0$ 对于 $|z| < L/2$，方程（33）化为积分方程

$$\int_0^\infty A(k) J_0(ka) e^{-k|z|} dk = V_0, \ |z| < L/2. \tag{34}$$

方程（34）是关于谱系数 $A(k)$ 的第一类*Fredholm*积分方程。由于它仅在轴向坐标的有限区间上成立，其求逆并非易事；在经典文献中，补充导体 [4–8]之外的正则性条件后，会得到一个对偶积分方程耦合系统。

与其直接确定 $A(k)$，不如将其与具有明确物理意义的表面电荷密度 $\sigma(z)$ 联系起来。后者由表面处势的法向导数得到，

$$\sigma(z) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}. \tag{35}$$

利用方程 (33) 和恒等式 $J_0'(k\rho) = -kJ_1(k\rho)$，可得

$$\sigma(z) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} kA(k)J_1(ka)e^{-k|z|}dk, \tag{36}$$

其中， $J_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数。方程 (36) 表明，谱系数$A(k)$ 起到了表面电荷密度的拉普拉斯–汉克尔变换的作用。形式上对这一关系求逆，可写为

$$A(k) = \frac{1}{\varepsilon_0 J_1(ka)} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(z)e^{-k|z|}dk, \tag{37}$$

这将谱系数显式表示为未知电荷密度 $\sigma(z)$ 的函数。这一步在思路上是标准的（与经典的对偶积分方程构造相似 [7,8]），但在这里，我们用它将 $A(k)$ 完全消去，转而用 $\sigma(z)$ 表示。

将方程 (37) 代入边界条件 (34)，并交换积分次序，可得到关于 $\sigma(z)$ 的闭合积分方程：

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma(z') \left[\int_0^{\infty} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} e^{-k|z-z'|}dk\right] e^{-k|z|}dk = \varepsilon_0 V_0. \tag{38}$$

因此，在谱框架下，该问题归结为关于 $\sigma(z)$ 的单个实空间积分方程，其核由方括号中的逆谱积分给出。在经典的对偶积分方程文献中， [7, 8], 通常通过直接在贝塞尔空间中处理方程 (34)–(36) 来开展分析。我们的目标有所不同：我们仅将谱表示用作一种工具，以系统地还原第 2 节通过直接环间积分得到的同一实空间算子。

方程 (38) 中出现的核可以利用涉及贝塞尔函数的标准积分恒等式显式求出。具体而言，可得

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} e^{-k|z-z'|}dk = \frac{1}{a} \frac{K\left(\frac{4a^2}{4a^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{4a^2+(z-z')^2}}, \tag{39}$$

其中， $K(m)$ 表示第一类完全椭圆积分，该恒等式可追溯至贝塞尔积分的标准表格 [28]。将方程 (39) 代入方程 (38)，恰好得到此前从环与环之间的相互作用推导出的实空间积分方程 (5)。换言之，方程 (5) 和 (34) 是同一静电边值问题在数学上等价的两种表述：前者以物理空间中的椭圆积分核表示，后者则以谱振幅 $A(k)$ 和对偶积分方程表示。

基于贝塞尔函数展开的谱公式强调解的模态结构，并自然导出对偶积分方程，如参考文献 [4–8] 所示。本文通过显式消去谱系数并计算贝塞尔积分得到实空间形式，由此借助包含椭圆积分的核，完整显现了沿圆柱表面的非局域相互作用。这两种方法的等价性可直接由汉克尔–拉普拉斯变换的求逆得到，并表明椭圆积分核不过是底层谱算子的实空间表示。在这两种形式中，圆柱体的有限长度体现为核的奇异行为，使表面电荷密度在边缘附近呈现可积发散 $z = \pm L/2$。这种行为与所选表示无关，反映了静电学中边缘效应的普遍性。尽管文献中分别讨论过这两种观点，本文的推导提供了一个显式消去步骤，可得椭圆积分核的闭式表达；随后在第 3 节中，我们将利用该表达设计一种结合受控外推的边缘感知离散化方法。

6 结论

本文研究了保持均匀电势的有限长度薄导电圆柱壳的静电学问题。我们首先直接在实空间中对问题进行表述，得到一个关于表面电荷密度的积分方程，其核以完全椭圆积分表示。这一表述以直观的物理方式描述了导体不同轴向微元之间的相互作用，并且特别便于数值实现。所得电荷分布准确地捕捉了圆柱端部附近强烈的电荷积聚，以及这种积聚对几何长径比 L/a 的依赖关系。

随后，我们使用贝塞尔函数对静电势进行谱表示，重新考察了同一问题。通过显式消去谱系数，我们证明了谱公式与具有椭圆积分核的实空间积分方程完全等价。这种等价关系阐明了两种常用但往往被分别介绍的方法之间的联系，并表明它们只是同一基本静电问题的不同表示形式。

通过积分方程方法获得的数值结果，可准确确定有限长导体圆柱的总感应电荷，进而确定其电容。这类构型在多种应用中具有实际意义，包括真空器件电极、纳米尺度导电结构、圆柱形传感器以及电容式储能系统组件的建模。此外，该方法

还可轻松推广至更一般的边界条件、非均匀势或耦合的多导体几何结构。

总体而言，本文分析为有限长圆柱导体的静电学提供了统一且一致的框架，兼具物理上的直观性、数学上的严谨性和数值上的高效性。我们预计，本文所确立的椭圆核表述与谱贝塞尔表示之间的等价关系，将有助于相关静电问题的解析研究与计算实现。

除了这些可能的拓展之外，本文的结果不止解决了一个经典的边值问题，还为各种长径比下的轴向表面电荷~分布 $\sigma(z/L)$ 和无量纲电容 $C(\alpha)$ 提供了可用作基准的高质量数据。由于数值试探形式中已纳入边缘奇异性，且通过有限尺寸标度量化了收敛性，这些结果为静电学中的高精度边界元、有限元和矩量法求解器提供了严格的测试。在特定情况下，任何旨在解析有限长圆柱导体边缘场的数值方案，都可以利用本文报告的参考分布进行验证，既可检验全局可观测量（电容），也可检验局部行为（近边缘电荷积聚）。从这个意义上说，采用椭圆核积分表述和切比雪夫加权离散化的有限长导体圆柱，可作为一种可重复使用的基准几何体，服务于计算静电学的未来发展。

利益冲突声明

作者声明，不存在已知的竞争性财务利益或个人关系可能影响本文所报告的研究工作。

致谢

作者感谢使用基于人工智能的语言模型（ChatGPT、OpenAI），以协助改进本文部分内容的英语表达和清晰度。所有科学内容、研究结果和诠释均由作者独自负责。

参考文献

[1] H. Ca 卡文迪许，《电学研究》，Henry Cavendish（大学出版社，1879年）。

[2] J. C. Maxwell，《论长而细的圆柱体及具有显著厚度的圆盘的电容》，《伦敦数学学会会刊》。**9**，94（1877年）。

[3] J. Lekner，《导电圆柱体与球体的静电学》，AIP 出版社，纽约州梅尔维尔（2021年）。

[4] L. Kapitsa、V. A.Fock 和 L. A. Vainshtein，《有限长空心圆柱体的静态边界问题》，*Zh. Tekh. Fiz.* **29**，1177（1959） [*Sov. Phys. Tech. Phys.* 4，1077（1960）]。

[5] *L. A. Vainshtein*，《有限长空心圆柱体的静态边界问题》*II*：数值结果，*Zh. Tekh. Fiz. 32*，*1157*（*1962*）[*Sov. Phys. Tech. Phys. 7*，*855*（*1963*）]。[6] *L. A.Vainshtein*，《有限长空心圆柱体的静态边界问题》*III*：近似公式，*Zh. Tekh. Fiz. 32*，*1165*（*1962*）[*Sov. Phys. Tech. Phys. 7*，*861*（*1963*）]。[7] *J. D. Jackson*，重新探讨细直导线上的电荷密度，*Am. J. Phys. 68*，*789*（*2000*）。[8] *L. Verolino*，空心圆柱的电容，*Electr. Engin.*（柏林）*78*，*201*（*1995*）。[9] *R. W. Scharstein*，《管的电容》，*J. Electrostatics 65*，*21*（*2007*）。[10] *E. Romashets*、*M. Vandas* 和 *C. Şen*，导电空心圆柱壳电容的闭式表达，*J. Electrostatics 126*，*103866*（*2013*）。[11] *N. N. Lebedev* 和 *I. P. Skal'skaya*，利用对偶积分方程求解有限长空心导体圆柱的静电问题，*Sov. Phys.-Techn. Phys. 18*，*28*（*1973*）。[12] *H. Gu*、*L. Huang*、*P. Yang* 和 *T. Luo*，立方体和空心圆柱的电容，*ar Xiv:2505.13148*（*2025*）。[13] *G. Paffuti*，圆柱系统中的电容与力的结果，*arXiv:1801.08202*（*2018*）。[14] *C. M. Butler*，有限长导电圆柱管的电容，*J. Appl. Phys. 51*，*5607*（*1980*）。[15] *J. Lekner*，开口导电圆柱的内外表面电荷密度及四极矩，*J. Electrostatics 136*，*104124*（*2025*）。[16] *W. R. Smythe*，带电直圆柱体，*J. Appl. Phys. 27*，*917*（*1956*）。[17] *J. Lekner*，开口导电圆柱电容的插值公式，*J. Electrostatics 136*，*104132*（*2025*）。[18] *A. D. Arun*、*S. Chandra*、*S. Thirunavukkarasu*、*M. P. Rajiniganth*、*N. Malathi* 和 *M. Sivaramakrishna*，一种基于新型代数拓扑方法的储存静电能与三维麦克斯韦电容计算方法，*J. Electrostatics 135*，*104065*（*2025*）。[19] *L. N. Trefethen*，《*MATLAB* 中的谱方法》，*SIAM*（*2000*）。[20] *J. P. Boyd*，《切比雪夫与傅里叶谱方法》，*Dover Publications*，*Dover* 数学丛书，米尼奥拉，纽约州（*2001*）。[21] *C. Canuto*、*M. Y. Hussaini*、*A. Quarteroni* 和 *T. A. Zang*，《谱方法：单区域基础》，科学计算，第*1*卷，柏林-海德堡，*Springer*（*2006*）。

[22] *Rainer Kress*，《线性积分方程》，第*3*版，《应用数学科学》第*82*卷，*Springer*，*Cham*（瑞士），*2014*。[23] *K. Atkinson*，《第二类积分方程的数值解》，剑桥大学出版社，剑桥（*1997*）。[24] *J. Helsing* 和 *R. Ojala*，《拉普拉斯方程边界附近层势的计算》，*J. Comput. Phys. 227, 2899*（*2008*）。[25] *W. M. Hicks*，《关于环面函数》，伦敦皇家学会哲学汇刊 *A 31, 609*（*1881*）。[26] *F. W. Dyson*，《锚环的势》，伦敦皇家学会哲学汇刊 *184, 43*（*1893*）。[27] *S. C. Loh*，《利用环面函数计算环面的电势和电容》，加拿大物理学杂志 *37, 698*（*1959*）。[28] *I. S. Gradshteyn* 和 *I. M. Ryzhik*，《积分、级数与乘积表》，学术出版社，纽约，*2007*。[29] *L. Chen*、*J. M. K. MacAlpine*、*X. Bian*、*L. Wang* 和 *Z. Guan*，《输电线导线电晕起始电压确定方法的比较》，*J. Electrostatics 71, 269*（*2013*）。[30] *J. R. Riba*、*C. Abomailek*、*P. Casals-Torrens* 和 *F. Capelli*，《目视电晕试验的简化与成本降低》，*IET* 发电、输电与配电 *12, 834*（*2018*）。[31] *A. L. Souza* 和 *I. J. S. Lopes*，《污染聚合物表面电晕起始的实验研究》，*IEEE* 电介质与电气绝缘汇刊 *22, 1321*（*2015*）。[32] *J. D. Stein*，《紧凑型高压真空馈通装置》，科学仪器评论 *47, 1555*（*1976*）。[33] *W. C. Heerens* 和 *F. C. Vermeulen*，《边缘几何形状改进的开尔文保护环电容器的电容》，*J. Appl. Phys. 46, 2486*（*1975*）。[34] *A. M. Thompson* 和 *D. G. Lampard*，《静电学新定理及其在可计算电容标准中的应用》，自然 *177, 888*（*1956*）。[35] *K. Jones* 和 *A. C. Corney*，《*PEL* 可计算电容器》，计量学 *24, 1*（*1987*）。[36] *W. K. Clothier*，《一种可计算电容标准》，计量学 *1, 36*（*1965*）。[37] *M. W. Keller*、*A. L. Eichenberger*、*J. M. Martinis* 和 *N. M. Zimmerman*，《利用瓦特天平、可计算电容器和单电子隧穿器件构建计量学三角》，计量学 *45, 330*（*2008*）。