arXiv:2601.00032v1 [physics.class-ph] 30 Dec 2025

受约束系统的转置规则

Federico Talamucci，佛罗伦萨，意大利

(收稿日期：2025年12月23日)

摘要。 本文研究非完整力学系统的动力学，重点探讨基本变分假设及转置规则的作用。我们分析切塔耶夫条件和约束的一阶变分如何为受运动学约束（包括对广义速度呈非线性的约束）的系统定义相容的虚位移。本文探讨交换关系成立所需的条件，阐明这些条件对所推导运动方程一致性的影响。通过详细考察这些变分恒等式与约束函数的拉格朗日导数之间的相互作用，我们阐明了依据达朗贝尔–拉格朗日原理建立的运动方程与通过扩展的时间积分变分原理得到的运动方程之间的差异。本研究旨在为将这些核心原理应用于非完整动力学提供更清晰的理论框架。

关键词：非完整力学系统 - 非线性运动学约束的虚位移 - 切塔耶夫条件 - 转置规则、交换关系。

*2020*年数学主题分类：70F25，70H03

1. 引言

非完整力学系统的动力学仍是分析力学中的基础性难题。与完整系统不同，完整系统中的可积约束使自由度能够直接约化；而非完整系统则涉及依赖于广义速度的不可积运动学约束。这种非可积性要求重新审视基本原理，尤其是虚变分及其与运动限制的相容性。因此，这些系统的运动方程如何表述，历来引发学术争论，并由此形成了多种有时相互冲突的理论方法。

本研究通过聚焦转置规则，对这些系统进行统一阐释。这一恒等式为处理非完整动力学中变分的各种约定搭起了桥梁。我们分析了该规则与理想虚位移的切塔耶夫条件及约束的一阶变分如何共同影响运动方程的表述。研究还探讨了这些原理之间的相互作用，以及它们对最终动力学模型的影响。

一个核心主题是分析变分算子与时间导数算子之间的交换关系。我们阐明，对这些关系采取不同假设并非只是形式上的差异，而是会从根本上影响所得方程的一致性与物理有效性。通过比较达朗贝尔–拉格朗日原理与广义时间积分变分原理（例如哈密顿–苏斯洛夫原理和变分力学），本文强调了其中的关键区别，并尝试为非完整动力学提供一个更加统一的视角。

1.1. 物理框架。 考虑一个由广义坐标 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 和速度 $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ 描述的力学系统，并受到 $\kappa < n$非完整约束

$$g_\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, \kappa. \tag{1.1}$$

假设这些约束是正则的，并满足非奇异条件：

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_\kappa)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}\right) = \kappa. \tag{1.2}$$

函数 g_ν 可以是关于速度 $\dot{q}_i$ 的线性函数，也可以是非线性函数。在线性情形下，(1.1) 具有如下形式

$$g_\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{n} a_{\nu,j}(\mathbf{q}, \mathbf{t})\dot{q}_j + b_\nu(\mathbf{q}, t). \tag{1.3}$$

如果存在函数 $f_\nu(\mathbf{q}\ t)$，使得：则该约束是可积的（完整约束）：

$$g_\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} f_\nu(\mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f_+\nu}{\partial t}. \tag{1.4}$$

条件 (1.2) 使我们能够将 (1.1) 写成显式形式。如有必要，可重新排列变量的索引，以确保约束关于 $(\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n)$ 的雅可比矩阵非零，从而可以写成

$$\dot{q}_{m+\nu} = \alpha_\nu(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t), \qquad \nu = 1, \dots, \kappa \tag{1.5}$$

其中 $m = n - \kappa$。在这种表述中，$(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m)$ 是独立的动能变量，相应的虚位移 $(\delta q_1, \ldots, \delta q_m)$ 也彼此独立。

1.2. **变分与转置规则**。

˘ **1.2.1.** 一阶变分与*Cetaev* 条件。对于可微函数 $F(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)$，我们区分两种变分：切塔耶夫变分 $\delta^{(c)}F$和全变分 $\delta^{(v)}F$，分别定义为

$$\delta^{(c)}F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i, \qquad \delta^{(v)}F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i. \tag{1.6}$$

从时间积分变分原理推导运动方程通常需要条件 $\delta^{(v)}g_\nu = 0$ 。反之，假设 $\delta^{(c)}g_\nu = 0$，即所谓的切塔耶夫条件 [4], ，则定义约束为理想或完善的。

˘ 尽管切塔耶夫条件主要是一项公设，但它有效地推广了完整理论。对于可积约束 $g_\nu = \frac{d}{dt}f_\nu$，该条件化简为 $\sum \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i}\delta q_i = 0$,—符合理想几何约束的标准定义。对于线性运动学约束 (1.3)，它正确地再现了经典虚位移条件$\sum a_{\nu,\ j}\delta q_j = 0$ [16]。

1.2.2. 转置规则。 变分 $\delta^{(c)}$ 和 $\delta^{(v)}$ 由转置规则联系起来

$$\delta^{(v)}F - \frac{d}{dt}\left(\delta^{(c)}F\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\left(\delta\dot{q}_i - \frac{d}{dt}\delta q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i F \delta q_i \tag{1.7}$$

其中，$\mathcal{D}_i F = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}$ 表示第 i 阶拉格朗日导数。项（$\delta\dot{q}_i - \frac{d}{dt}\delta q_i$）考虑了变分与时间导数算子可能不满足交换性的情况。假设 $\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$ 定义了标准交换关系。

将 (1.7) 应用于约束函数 g_ν ，可以严谨地比较条件 $\delta^{(c)}g_\nu = 0$ 和 $\delta^{(v)}g_\nu = 0$，并揭示它们对交换关系及约束的拉格朗日导数的依赖性。

1.2.3. 显式约束的转置规则。 对于显式形式 (1.5) 的约束，变分和拉格朗日导数变为

$$\delta^{(c)} g_\nu = \delta q_{m+\nu} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q} r} \delta q_r, \quad \delta^{(v)} g_\nu = \delta \dot{q}_{m+\nu} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \tag{1.8}$$

$$\mathcal{D}_i g_\nu = \begin{cases} -\mathcal{D}_i \alpha_\nu & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ \dfrac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_i} & \text{for } i = m+1, \ldots, n \end{cases}$$

将这些式子代入（1.7），可得到明确的转置规则

$$\begin{aligned} \delta^{(v)} g_\nu - \frac{d}{dt}\left(\delta^{(c)} g_\nu\right) &= \left[\delta \dot{q}_{m+\nu} - \frac{d}{dt}(\delta q_{m+\nu})\right] - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q} r}\left(\delta \dot{q}_r - \frac{d}{dt}\delta q_r\right) \\ &+ \sum_{r=1}^{m} \mathcal{D}_r \alpha_\nu \delta q_r - \sum_{\mu=1}^{\kappa} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}} \delta q_{m+\mu}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

在此框架下，切塔耶夫条件 $\delta^{(c)} g_\nu = 0$ 和变分 $\delta^{(v)} g_\nu = 0$以独立变量（q_r， $\dot{q}_r$）为基础定义了非独立变分 $\delta q_{m+\nu}$ 和 $\delta \dot{q}_{m+\nu}$。

1.3. 非完整系统的运动方程：概述。 为阐明变分（1.6）和转置规则（1.7）的作用，我们简要概述非完整动力学的两种主要方法：达朗贝尔–拉格朗日原理和广义时间积分变分原理。

1.3.1. 达朗贝尔–拉格朗日原理。该原理指出

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \tag{1.10}$$

对于任何与约束（1.1）相容的虚位移 $\delta \mathbf{q}$ 。利用切塔耶夫条件（（1.6）中的第一个条件），变分 $\delta \mathbf{q}$ 被限制在与 span($\nabla_{\dot{\mathbf{q}}} g_\nu$)正交的子空间内。这将导出带拉格朗日乘子的运动方程 μ_ν

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \mu_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.11}$$

值得注意的是，无需对交换关系 $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$、 $i = 1$，....., n作出明确假设，即可推导出这些方程。 —

1.3.2. 通过时间积分变分原理推导运动方程。将哈密顿原理推广到非完整系统仍是一个悬而未决且备受争议的问题 [3,6, 10, 11, 15, 22]。为解决这一问题，通常会引入两种主要的修正：

1. 受约束作用量：标准驻值条件被使用拉格朗日乘子的受约束泛函所取代 λ_ν:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{L} + \sum_{\nu=1}^{\kappa} \lambda_\nu g_\nu \right) dt = 0. \tag{1.12}$$

2. 非交换性：放宽标准交换关系后，得到哈密顿–苏斯洛夫原理 [16]„ 其表达式为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta L - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \right) dt = 0, \tag{1.13}$$

其中，项 $\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\delta q_i$ 计入了速度变分。结合这些方面并定义受约束拉格朗日量 $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \sum \lambda_\nu g_\nu$ 后，该原理可写为

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \mathcal{L}_R - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_i} \left(\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \right) dt = 0. \tag{1.14}$$

如果通过系数 $W_{i,\ j}$ 对非交换性（转置规则）进行建模，使得

$$\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i = \sum W_{i,j} \delta q_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

可推导出修正的变分非完整方程 [13, 20]:

$$\mathcal{D}_i \mathcal{L}_R - \sum_{j=1}^{n} W j, i \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.16}$$

与约束 $g_\nu = 0$一起，这些构成一个包含 $n + \kappa$ 个方程的系统。特殊情形和假设：

- 标准变分非完整力学：如果$W_{i,\ j} = 0$，则式（1.16）化为经典变分非完整形式 [1, 21]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q} i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \left(\lambda_\nu \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q} i} \right) - \dot{\lambda} \nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right). \tag{1.17}$$

这一表述不同于达朗贝尔–拉格朗日动力学（1.11），尽管在没有约束时，两者都会还原为标准的拉格朗日方程。

- 操作性假设：遵循 [13], 如果假设

$$\mathcal{D}_i g_\nu - \sum_{j=1}^{n} W_{j,i} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \quad \nu = 1, \ldots, \kappa \tag{1.18}$$

运动方程简化为

$$\mathcal{D}_i \mathcal{L} - \sum_{j=1}^{n} W_{j,i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\kappa} W_{j,i} \dot{\lambda} \nu \frac{\partial g \nu}{\partial \dot{q}_j}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.19}$$

确定 $W_{i,\ j}$ 仍然是这一框架中的核心理论挑战[20]。

2. 数学方面

为阐明后续分析，我们总结基本条件：

$$\begin{aligned}
&(A) \quad \delta^{(c)} g_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0 \\
&(B) \quad \delta^{(v)} g_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial q_i} \delta q_i + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = 0 \\
&(C_0) \quad \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}(\delta q_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \\
&(C) \quad \delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \sum_{j=1}^{n} W_{i,j} \delta q_j, \quad i = 1, \ldots, n \\
&(C_1) \quad \delta \dot{q}_r - \frac{d}{dt}(\delta q_r) = 0, \quad r = 1, \ldots, m
\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中（C_1）假设交换仅适用于独立变量。
具体的动力学方法由这些条件的选择决定。例如，(C_1) 假定交换仅对独立变量成立，而切塔耶夫表述 (1.11) 仅依赖于 (A)。相比之下，(A) 与 (C_0) 的组合对应于霍尔德原理 [23]。类似地，(B) 与 (C_0) 的结合构成了变分约束运动方程 (1.17) [1], ； 而更宽泛的假设 (C) 与 (B) 相结合，则导出了变分力学的最新推广 [13], [20]。

2.1. **交换的必要条件**。 因此，转置规则 (1.7) 揭示了各种假设下交换的必要条件：

命题 2.1。 若交换关系(C_0)成立，则：

- *Under* (A): $\delta^{(v)} g_\nu = -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i$,
- *Under* (B): $\dfrac{d}{dt}(\delta^{(c)} g_\nu) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i$,
- *Under* (AB): $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = 0$.

值得注意的是,
若

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = 0, \quad \nu = 1, \dots, \kappa. \tag{2.2}$$

成立，则 (1.7) 推出 $\delta^{(v)} g_\nu = \frac{d}{dt}(\delta^{(c)} g_\nu)$。– 在这种情况下，$(A)$ 和 (B) 等价。

命题的逆命题不成立：虽然这三个条件中的任意一个都意味着对所有 $\nu = 1, \dots, \kappa$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \left(\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i \right) = 0$,一但这并不能反过来推出 (C_0)，尽管 $\kappa < n$。

2.2. **双重假设 (A) 和 (B)**。 假设 (A) 起到物理层面的作用，通过虚位移刻画理想约束。相比之下，假设 (B) 主要涉及变分原理的实施以及变分法的形式技巧。组合假设 (AB) 在文献中得到了广泛讨论，常见于经典论著 [14, 19]以及当代模型中。然而，对于在交换关系 (C_0) 的框架下采用耦合 (AB)，人们普遍持怀疑态度；人们通常认为，在这种情况下只能考虑可积约束。根据近期的研究方法 [13, 20], ，以更一般的假设 (C)（见 (2.1)）替代 (C_0) 后，转置规则 (1.7) 允许 (AB) 和 (C) 即使在非完整系统中也能共存。具体而言，我们讨论以下问题：假设 (AB)，对于性质 (C_0) 和 (3.9) 可以得出什么结论？下文给出所讨论情形的一个示例：

命题 2.2。 假设 (AB)。如果交换关系 (C_0)得到验证，$_n$那么 $\sum \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = 0$.
$_{i=1}$

确实，若 (A) 和 (B) 均成立，则转置规则可化简为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \left(\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i \tag{2.3}$$

若 (C_0) 得到验证，则左侧的和为零，因此 (3.9) 必须成立。在 (AB) 的条件下，恒等式 (3.9) 是 (C_0) 的必要条件。与前面的评论类似，同一恒等式并不能推出交换 (C_0)，而只能推出$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} \left(\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\delta q_i\right) = 0$。

仅在假设 (A) 的条件下，我们就能证明条件 (3.9) 的一个有用刻画：

命题 2.3. 假设 $\delta^{(c)} g_\nu = 0$ 对 $\nu = 1, \ldots, \kappa$ 成立，则等式 *(3.9)* 成立当且仅当

$$\mathcal{D}_i g_\nu = \sum_{\mu=1}^{\kappa} \varrho_\mu^{(\nu)} \frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

对于某些系数 $\varrho\mu^{(\nu)}(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)$.

证明。若 (3.9) 对满足 (A) 的每个位移都成立，则由满秩条件 (1.2) 可立即得到 (2.4)。反过来，将 (2.4) 乘以 δq_i，并对 i 求和，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = \sum_{\mu=1}^{\kappa} \varrho_\mu^{(\nu)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

根据条件 (A)，该式为零。□
等价条件 (2.4) 表明，只有线性约束才能严格满足 (C_0)，因为非线性约束会在拉格朗日导数 $\mathcal{D}_i g_\nu$中引入二阶导数 $\ddot{q}_i$ 。

2.2.1. 位移的几何结构。采用向量-矩阵记号，令 $A = [\partial g_\nu / \partial q_j]$ 和 $B = [\partial g_\nu / \partial \dot{q}_j]$，$\nu = 1, \ldots, \kappa$, $j = 1, \ldots, n$，并令 $\delta\mathbf{q}\ \delta\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ 为变分列向量。条件 (AB) 对应于以下系统

$$\begin{cases} B\delta\mathbf{q} = \mathbf{0} & (A) \\ A\delta\mathbf{q} + B\delta\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} & (B) \end{cases} \tag{2.5}$$

主要结果总结于命题 2.4 和 2.5 中，它们刻画了在条件 (AB) 下包含位移 $\delta\mathbf{q}$ 和变分 δq 的线性空间。

命题 2.4。 在(AB)下，一致虚位移的集合 $\delta\mathbf{q}$ 是一个$(n-\kappa)$维子空间 $\mathbb{V}^{(n-\kappa)} = \ker B$。对于固定的 $\delta\mathbf{q}$，一致

变分 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 是由以下条件定义的一个仿射空间 $\mathbb{A}^{(n-\kappa)}$

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = \sum_{s=1}^{m} \psi_s \mathbf{w}_s - B^+ A\delta\mathbf{q} \tag{2.6}$$

其中 $\{\mathbf{w}_s\}$ 是 $\ker B$ 的基，且 B^+ 是 B的右逆。

证明。已知秩 $B = \kappa$，(A)的解空间是 B的核，也就是由 B的各行张成空间的正交补：

$$\mathbb{V}^{(n-\kappa)} = \ker B = \left\langle \frac{\partial g_1}{\partial\dot{\mathbf{q}}}, \ldots, \frac{\partial g_\kappa}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \right\rangle^{\perp}. \tag{2.7}$$

因此，$\delta\mathbf{q} = \sum_{r=1}^{m} \sigma_r \mathbf{w}_r$ 证明了第一部分。对于固定的 $\delta\mathbf{q}$，方程 (B) 是关于 $\delta\dot{\mathbf{q}}$的非齐次线性方程组。其通解为

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = \sum_{s=1}^{m} \psi_s \mathbf{w}s - B^+ A\delta\mathbf{q} \tag{2.8}$$

其中 $B^+ \in \mathbb{R}^{n\times\kappa}$ 是 B的右逆，即 $BB^+ = \mathbb{I}_\kappa$（回顾一下，$rankB = \kappa$与 B^+ 的存在是等价条件，且 $B^+\mathbf{b}$是方程组 $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$的一个特解，见 [7]）。第一项张成 $\ker B$（空间 $\mathbb{V}^{(n-\kappa)}$），而第二项是一个特解。这表明相容的 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 构成仿射空间 $\mathbb{A}^{(n-\kappa)}$，它由 $\mathbb{V}^{(n-\kappa)}$平移得到。□

利用矩阵 A 和 B，我们定义 $D = B - A \in \mathbb{R}^{\kappa\times n}$。关系式 (2.3) 可以写成向量矩阵形式：

$$B\left(\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q})\right) = D\delta\mathbf{q}. \tag{2.9}$$

命题 2.5. 假设(AB)。则：

(i) (C_0) 蕴含 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$. *(ii)* 若 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$，则 $\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) \in$核 B. *(iii)* 若 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$，则 $\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) \in \mathbb{A}^{(n-\kappa)}$，其中 $\mathbb{A}^{(n-\kappa)}$ 是 *(2.6)* 中定义的仿射空间。

证明。性质 (i) 可通过将条件 (C_0) 代入 (2.9) 直接得出：$\delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q})$。为证明 (ii)，假设 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$，则 (2.9) 化为 $B(\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}) = \mathbf{0}$；根据定义，这意味着该向量差属于 $\ker B = \text{span}\langle\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\rangle$。对于 (iii)，我们对相容条件 (A) $B\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$ 关于时间求导：

$$\dot{B}\delta\mathbf{q} + B\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) = \mathbf{0} \implies B\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) = -\dot{B}\delta\mathbf{q}. \tag{2.10}$$

在假设 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$ （即 $A\delta\mathbf{q} = B\delta\mathbf{q}$）下，方程 (2.10) 变为$B\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) = -A\delta\mathbf{q}$。这正是定义仿射空间 $\mathbb{A}^{(n-\kappa)}$（对应 $\delta\dot{\mathbf{q}}$）的非齐次系统 (2.5)。因此，$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q}) \in \mathbb{A}^{(n-\kappa)}$。□

2.2.2. 关于命题 *2.5* 的评注。 条件 $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$是交换规则 ($C_0$) 成立的必要条件，但并非充分条件。从物理角度看， $D\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$ 将差值 $\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q})$ 限制在 $\ker B$ 中。从几何角度看，这意味着若 $D\delta\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$，则 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 与 $\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{q})$ 对应的仿射空间互不相交，因为其底层线性系统具有相同的矩阵 B，但非齐次项各不相同 ($-A\delta\mathbf{q} \neq -B\delta\mathbf{q}$)。关于 (1.15) 中更广泛的假设 ($C$)，该假设常用于将变分非完整方法推广至非完整系统，我们将本文的方法与 [13]提出的条件 (1.18) 进行比较。尽管 (1.18) 可通过恒等式推出转置规则 (2.3)

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j} \left(\delta\dot{q}_j - \frac{d}{dt}(\delta q_j) \right) = 0, \quad \nu = 1, \dots, \kappa, \tag{2.11}$$

反过来通常并不成立。具体而言，(2.3) 仅对系数 Wi, j施加了 n 个约束，而 (1.18) 则要求 $\kappa \times n$ 个条件。因此， [13]中的关系构成了额外的假设，其表现为限制性要求，而非动力学的必然结果。

2.2.3. 显式约束与假设(C_1) （部分交换）。对于具有显式约束 (1.5) 的系统，假设 (A) 和 (B) 给出如下转置关系（见 (1.8) 和 (1.9)）

(2.12)
$$\delta\dot{q}_{m+\nu} - \frac{d}{dt}\delta q_{m+\nu} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_r} \left(\delta\dot{q}r - \frac{d}{dt}\delta q_r \right) - \sum_{r=1}^{m} \left(\mathcal{D}_r \alpha_\nu - \sum_{\mu=1}^{\kappa} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r,$$

其中 $\nu = 1, \dots, \kappa$和 $\alpha_\nu = \alpha_\nu(q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$。若进一步假设 ($C_1$)，即交换关系仅对 m 独立变量成立，则方程 (2.12) 可简化为

$$\delta\dot{q}_{m+\nu} - \frac{d}{dt}\delta q_{m+\nu} = -\sum_{r=1}^{m} \left(\mathcal{D}_r \alpha_\nu - \sum_{\mu=1}^{\kappa} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q_{m+\mu}} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r. \tag{2.13}$$

这一以哈密顿–苏斯洛夫原理为基础且得到广泛采用的框架 [16] [17, 22], 导出如下结果：

命题2.6. 在假设(A)、(B)和(C_1)下，当且仅当满足条件时，交换关系 $\delta\dot{q}_{m+\nu} = \frac{d}{dt}\delta q_{\overline{m+\nu}}$对因变量成立

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = 0, \quad \nu = 1, \dots, \kappa. \tag{2.14}$$

证明。注意到式（2.13）的右端等价于 $-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i$（见式（1.9）），即可直接得出结论。 □

2.2.4. 历史背景与 (C_1) 作为假设。 交换规则的选择决定了非完整力学的不同处理方法。Volterra、Hamel 和 Pars [16, 19], 所支持的所有变量全局交换 (C_0)，意味着 d/dt与 δ 始终交换。相反，Suslov、Levi-Civita 和 Amaldi 引入了仅限于独立变量的部分交换 (C_1)。虽然 (C_1)简化了全局交换与条件 $\mathcal{D}_i g_\nu \delta q_i = 0$之间的联系，但它仍然只是一种假设。若缺少这一假设，所得的变分原理以及运动方程不同表述之间的对应关系都会显著减弱。

3. 非完整约束的类别

我们分析几类特殊约束，并区分相对于广义速度的线性与非线性表述。

3.1. **线性运动学约束**。 考虑如下形式的约束 $g_\nu(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t) = \sum a_{\nu,\ i}\dot{q}_i + b_\nu = 0$。转置规则（1.7）表示为

$$\delta^{(v)} g_\nu - \frac{d}{dt}\delta^{(c)} g_\nu = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j}\left(\delta\dot{q}_j - \frac{d}{dt}\delta q_j\right) - \sum j = 1^n D_j g_\nu \delta q_j. \tag{3.1}$$

在切塔耶夫条件（假设 A）下， $\delta^{(c)} g_\nu = 0$，这一表述与虚位移的标准处理方式重合 [16]

3.1.1. 显式形式与交换。当约束以显式形式给出为$\dot{q}_{m+\nu} = \sum_{r=1}^{m} \xi_{\nu,\ r}\dot{q}_r + \eta_\nu$时，转置规则变为

$$\begin{aligned} \delta^{(v)} g_\nu - \frac{d}{dt}\delta^{(c)} g_\nu &= \left[\delta\dot{q}_{m+\nu} - \frac{d}{dt}\delta q_{m+\nu}\right] - \sum_{r=1}^{m}\xi_{\nu,r}\left(\delta\dot{q}_r - \frac{d}{dt}\delta q_r\right) \\ &- \sum_{r,s=1}^{m}\beta_{sr}^{m+\nu}\dot{q}_s\delta q_r - \sum_{r=1}^{m}\gamma_r^\nu \delta q_r. \end{aligned} \tag{3.2}$$

系数 $\beta_{sr}^{m+\nu}$和 γ_r^ν 体现了约束的非可积性和时间依赖性。如果假设 (C_1)（独立变量的交换）成立，则第一项求和为零。对于自治约束 $(\eta_\nu = 0,\ \partial_t \xi = 0)$，$\gamma_r^\nu = 0$。

3.1.2. 线性齐次约束。对于约束 $g_\nu = \sum a_{\nu,\ j}(\mathbf{q})\ \dot{q}_j = 0$，$_n$条件 $\sum D_j g_\nu \delta q_j = 0$ 至关重要。用向量表示法，这要求$_{j=1}$

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbb{A} \delta\mathbf{q} = 0, \quad \text{where } \mathbb{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}\nu}{\partial \mathbf{q}}\right)^T - \frac{\partial \mathbf{a}\nu}{\partial \mathbf{q}}. \tag{3.3}$$

由于 $\mathbb{A}$ 是反对称的，当 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\delta\mathbf{q}$ 平行时，该乘积为零。
情况 $n = 2$：由于 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\delta\mathbf{q}$ 都属于与 $\mathbf{a}_\nu$ 正交的一维空间，因此它们必然平行；所以 (3.3) 始终成立。
情况 $n > 2$：正交空间的维数为 ≥ 2，因此 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\delta\mathbf{q}$ 不一定平行，(3.3) 可能不为零。

3.1.3. 恰当约束。恰当约束（或可积约束） g_ν 对于某个函数 $f_\nu(\mathbf{q}\ t)$ 满足 (1.4)。这种约束是线性的，其系数为 $a_{\nu,j} = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}$ 和 $b_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial t}$。关系式 $\frac{\partial \dot{f}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_i}$，$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{f}_\nu}{\partial q_i}$ 推出 $D_i \dot{f}_\nu \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{f}_\nu}{\partial q_i} \equiv 0$。因此，转置规则变为

$$\delta^{(v)} \dot{f}_\nu - \frac{d}{dt}\left(\delta^{(c)} \dot{f}_\nu\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}\left(\delta\dot{q}_j - \frac{d}{dt}\delta q_j\right). \tag{3.4}$$

˘由于 g_ν 的切塔耶夫条件与完整约束下虚位移的标准定义一致，因此我们有 $\delta^{(c)} \dot{f}_\nu = 0$ （假设 A）。此外，如果交换关系（C_0）成立，那么 $\delta^{(v)} \dot{f}_\nu = 0$ （假设 B）。在标准完整系统中，（3.4）中的所有三个项都为零。

注 3.1. 关系 (C_0)) 的必要性源于 $f_\nu = 0$ 与 $\dot{f}_\nu = 0$ 之间的一致性。定义 $\delta^{(v)} f_\nu = \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}\delta q_j$ 后，可得 $\frac{d}{dt}(\delta^{(v)} f_\nu) = \delta^{(v)} \dot{f}_\nu$，当且仅当运算 d/dt 和 $\delta^{(c)}$ 对任意函数 f_ν 可交换。

3.1.4. 通过积分因子得到可积约束。约束 g_ν 可通过积分因子 ϕ_ν（$\mathbf{q}$ t）变为可积约束，当且仅当 $\phi_\nu g_\nu$ 是恰当的，即

$$\phi_\nu(\mathbf{q}, t) g_\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} f_\nu(\mathbf{q}, t). \tag{3.5}$$

这意味着 g_ν 是关于 $\dot{\mathbf{q}}$ 的线性函数，其系数为$a_{\nu,\ j}$ 和 b_ν，并满足

$$\phi_\nu a_{\nu,j} = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_j}, \qquad \phi_\nu b_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial t}. \tag{3.6}$$

式 (3.5) 的必要（且局部充分）闭合条件为

$$\begin{cases} \phi_\nu \left(\dfrac{\partial a_{\nu,i}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial a_{\nu,j}}{\partial q_i} \right) = a_{\nu,j} \dfrac{\partial \phi_\nu}{\partial q_i} - a_{\nu,i} \dfrac{\partial \phi_\nu}{\partial q_j} \\ \phi_\nu \left(\dfrac{\partial b_\nu}{\partial q_j} - \dfrac{\partial a_{\nu,j}}{\partial t} \right) = a_{\nu,j} \dfrac{\partial \phi_\nu}{\partial t} - b_\nu \dfrac{\partial \phi_\nu}{\partial q_j} \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 $\phi_\nu = 1$ 恢复了标准恰当性条件。尽管 $\phi_\nu = 0$ 理论上可能引入多余的构形，但 (3.7) 表明，在这些点上， g_ν 和 ϕ_ν 的梯度成比例，从而确保 $g_\nu = 0$ 与$\phi_\nu g_\nu = 0$ 等价。

命题 3.1。 如果 g_ν 满足 *(3.5)*，其拉格朗日导数 $\mathcal{D}_j$ 满足

$$\phi_\nu \mathcal{D}_j g_\nu = g_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial q_j} - \dot{\phi}_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j}. \tag{3.8}$$

证明：由于 $\mathcal{D}_j f_\nu = 0$，展开 $\mathcal{D}_j(\phi_\nu g_\nu)$可得

$$\frac{d}{dt}\left(\phi_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j} \right) - \phi_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial q_j} - g_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial q_j} = \phi_\nu \mathcal{D}_j g_\nu + \dot{\phi}_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j} - g_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial q_j} = 0. \quad \square$$

推论 3.1。 在约束流形 $g_\nu = 0$上，有 $\phi_\nu \mathcal{D}_j g_\nu = -\dot{\phi}_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j}$。 —

乘以 δq_j 并对 j求和，得到：

命题 3.2。 设 $g_\nu = 0$ 满足 *(3.5)*。若虚位移 δq_j 满足˘C*etaev* 条件（假设 A），则

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_j g_\nu \delta q_j = 0 \tag{3.9}$$

无论 $\phi_\nu \neq 0$ 在何处。

例 3.1. 考虑 $g_1 = q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 = 0$。这里 $\mathcal{D}_1 g_1 = 2\dot{q}_2$ 和 $\mathcal{D}_2 g_1 = -2\dot{q}_1$。它们各自都不为零，但在切塔耶夫条件 $q_2 \delta q_1 - q_1 \delta q_2 = 0$ 下，总和 $2(\dot{q}_2 \delta q_1 - \dot{q}_1 \delta q_2)$ 会消失，因为它与 g_1 成正比。

总之，可通过积分因子积分的约束类别推广了恰当系统的性质，确保转置规则 (1.7) 化为 $\delta^{(v)} g_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} (\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i)$ 的形式（只要满足切塔耶夫条件），这与恰当约束的表现一致。尽管恰当性 ($\overline{\mathcal{D}_j} g_\nu = 0$) 足以保证 (3.9) 成立，但积分因子的存在提供了更广泛的

充分条件。转置规则的简化形式并非恰当约束所独有，而是适用于任何能够借助积分因子一致定义虚功的系统。即使各个拉格朗日导数可能不为零，它们的加权和仍为零。这引出了一个有趣的逆问题：我们或许会想知道，在假设 (*A*) 下，若 (3.9) 成立，是否意味着该约束必定属于 (3.5) 所述类型。若确实如此，这一类别便界定了简化转置规则的适用范围。"

3.2. **非线性运动学约束**。非完整力学通常关注关于广义速度呈线性或仿射形式的约束（例如滚动圆盘），而非线性约束则会带来重大的理论复杂性。在这类情况下，虚变分的相容性以及理想性原理——尤其是切塔耶夫条件方面——需要谨慎处理，因为标准变分原理往往需要进行大幅修改。

此类模型最早可追溯至阿佩尔–哈梅尔机构 [8]，这是文献中广泛讨论的基准系统 [12]。尽管在物理实现方面存在挑战，非线性限制在理论背景下自然出现，例如对速度大小的约束、速度之间的平行性或正交性约束，以及非完整摆 [2]。

我们重点关注两类非线性约束：齐次约束和与空间坐标无关的约束。

3.2.1. 齐次约束。约束 $g_\nu(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)$ 是次数为 p 的正齐次函数，当且仅当 $g_\nu(\mathbf{q}\ \lambda\dot{\mathbf{q}}\ t) = \lambda^p g_\nu(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)$。根据欧拉定理，这意味着

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_i} = p g_\nu = 0 \quad (\text{on } g_\nu = 0). \tag{3.10}$$

（3.10）与切塔耶夫条件（假设 A）在形式上的相似性，使许多作者在齐次约束 [5] 中采用后者。

注 3.2. 对于显式函数 *(1.5)*，若约束是任意次数的齐次函数，则函数 $\dot{q}_{m+\nu} = \alpha_\nu$ 关于速度 $\dot{q}_k$ （$k = 1, \ldots, m$）是 *1* 次齐次函数。因此，它们满足欧拉齐次函数定理

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$$

将 (A) 与欧拉恒等式 (3.10) 结合，可得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \\ \dfrac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\mathbf{q} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

这意味着广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 和虚位移$\delta\mathbf{q}$ 均处于式（2.7）所定义的同一向量空间内。

3.2.2. 二次齐次约束。 考虑二次齐次多项式约束，这类约束代表了广泛的非完整约束：

$$g_\nu = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{i,k}^{(\nu)}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

关于速度的偏导数为 $\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_{j,i}^{(\nu)} + \gamma_{i,j}^{(\nu)}\right)\dot{q}_i$。因此，与式（3.11）第二行相对应的切塔耶夫条件（A）可表示为

$$\delta^{(c)} g_\nu = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_{j,i}^{(\nu)} + \gamma_{i,j}^{(\nu)}\right)\dot{q}_i\right] \delta q_j = 0.$$

这些约束的转置规则变为

$$\delta^{(v)} g_\nu = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j}\left(\delta\dot{q}_j - \frac{d}{dt}(\delta q_j)\right) - \sum_{j=1}^{n} D_j g_\nu \delta q_j \tag{3.12}$$

其中， $D_j g_\nu$ 是 g_ν的拉格朗日导数。式（3.12）的物理解释取决于所采用的变分假设：如果我们假设（C_0）（交换），$_n$那么式（3.12）可化简为 $\delta^{(v)} g_\nu = -\sum D_j g_\nu \delta q_j$，并且我们预期 $\delta^{(v)} g_\nu \neq 0$。如果假设（$AB$）$_{j=1}$，那么式（3.12）对应于式（2.3），且无法满足标准交换关系（C_0）。

一般而言，条件 (3.9) 对于二次约束并非恒等式。根据命题3，其成立要求 $D_j g_\nu$ 是系数 $\frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{q}_j}$ 的线性组合：

$$D_j g_\nu = \sum_{\mu=1}^{\kappa} \varrho_\mu^{(\nu)} \frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{q}_j}$$

对于某些函数 $\varrho_\mu^{(\nu)}(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}})$，而通常情况并非如此。

最后，将假设 (*A*) 和 (*B*) 与 (2.1) 中的陈述 (*C*) 相结合——该陈述旨在调和 vakonomic 方法与非完整方法 [20]——可将 (3.12) 转化为

$$\sum_{j=1}^{n}\left(D_j g_\nu - \sum_{i=1}^{n} W_{i,j}\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}i}\right)\delta q_j = 0 \tag{3.13}$$

其中 δq_j 满足条件 (*A*)。虽然令系数 $n \times n$ Wi, j 相等通常只会为每个约束得到一个条件，但 [13] 表明括号中的每一项都应为零。由此得到关于 $W_{i,j}$ 的 $\kappa \times n$ 个条件，它们以 $\gamma_i^{(\nu)}{}_{,j}$、其空间导数以及加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 表示。

3.2.3. 仅依赖速度的约束。我们考察约束函数仅依赖速度和时间的特殊情形：

$$g_\nu = g_\nu(\dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \tag{3.14}$$

这类约束的一个物理实例是规定某点速度大小的约束，例如 $|\dot{\mathbf{q}}| = C(t)$，其中 $C(t)$ 是给定的非负函数。
变分和拉格朗日导数可简化如下：

$$\delta^{(c)} g_\nu = \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\delta\mathbf{q}, \qquad \delta^{(v)} g_\nu = \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\delta\dot{\mathbf{q}}, \qquad D_j g_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

于是，一般的转置关系 (1.7) 变为

$$\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\delta\mathbf{q}\right) = \frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\left(\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\cdot\delta\mathbf{q} \tag{3.15}$$

假设满足切塔耶夫条件 (*A*) 后，要求 (2.4)——等价于拉格朗日导数之和 (3.9) 为零——可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \sum_{\mu=1}^{\kappa}\varrho_\mu\frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{3.16}$$

其中，系数 ϱ_μ 是 $(\dot{\mathbf{q}}\ t)$ 的函数。如果假设 (*B*) 也成立，则关系式 (3.15) 意味着

$$\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\left(\delta\dot{\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\delta\mathbf{q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\cdot\delta\mathbf{q}.$$

由此可知，当且仅当约束满足条件 (3.16) 时，标准交换关系 (C_0) 成立。

注释 3.3。 条件 $\frac{\partial g_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot\delta\dot{\mathbf{q}} = 0$ 是茹尔丹原理 [9], 的核心组成部分，该原理适用于一般约束 $g_\nu(\mathbf{q}\ \dot{\mathbf{q}}\ t)$。在该原理框架下交换关系的有效性将在[18]中进一步讨论。

4. 结论与最后评论

本研究通过分析切塔耶夫条件（A）、约束的全变分（B）与交换关系（C）之间的相互作用，为评估非完整力学的一致性ˇ提供了严格的框架。通过将转置规则用作连接这些形式体系的桥梁，我们阐明了这些基本恒等式在推导运动方程中的作用。

4.1. 几何与分析结果总结。 我们分析的核心发现植根于命题 2.4 和 2.5 所提供的几何刻画，可概括如下：

• 变分空间的结构。命题 2.4 证明，尽管虚位移 $\delta\mathbf{q}$ 属于子空间 $\mathbb{V}_{(n-\kappa)} = \ker B$，一致的速度变分 $\delta\dot{\mathbf{q}}$ 却位于仿射空间 $\mathbb{A}_{(n-\kappa)}$。这一区别对于正确应用变分原理至关重要：条件 **(***A***)** 和 **(***B***)** 同时成立在数学上限制很强，通常与标准交换关系 **(***C*$_0$**)** 不相容。

• 交换性的局限。命题 2.5 阐明了拉格朗日导数矩阵的作用。算子 δ 与 d/dt 之间的交换并非普遍性质，而是严格取决于条件 $\sum_i D_i g_\nu \delta q_i = 0$。若该恒等式不成立，变分路径与时间微分路径便分离到互不相交的仿射空间中，这凸显了变分（vakonomic）方法与微分（非完整）方法之间的根本分歧。ˇ

• 线性与非线性动力学。对于线性运动学约束，切塔耶夫条件仍是最一致的方法。然而，对于非线性齐次约束，转置规则可作为一种诊断标准，从而系统地确定一致变分的结构要求。

4.2. 比较分析与物理洞见。 本工作的一个重要贡献，是对我们简约的几何方法与近期文献中更为严格的假设进行了批判性比较，例如某些变分非完整模型中使用的系数 $W_{i,j}$。我们的分析表明，与 [13] 中提出的 $\kappa \times n$ 条件相比，转置规则 **(2.3)** 是一种更简洁、透明的假设。后者虽能推出我们的结果，但反向推导并不成立。鉴于 [13] 中的条件施加了显著更多的约束，却缺乏明确的物理依据，我们认为，我们的推导为非经典动力学提供了更为稳健的基础。

4.3. **未来展望**。 对这些数学基础的深入理解，为理论与应用力学开辟了重要的研究方向。未来的研究将聚焦于：

1. W_i、$_j$ 和 $\varrho_\mu^{(\nu)}$系数在高度非线性情形下的物理解释；2. 将这些推导出的必要条件应用于先进工程和机器人系统，因为非经典约束和非线性约束在这些系统中日益普遍；3. 从陈述（C）的角度，协调变分力学变分方法与达朗贝尔–拉格朗日方法。

参考文献

[1] 阿诺德, V. I.，科兹洛夫, V. V.，涅什塔特, A. I.（2006）《经典力学与天体力学的数学问题》，第三版，E. M. S.，《动力系统 III》，施普林格[2]贝嫩蒂, S.（2011）《非完整双摆：非线性非完整系统的一个例子》，《规则与混沌动力学》，1 n. 5，417–442。[3] 克龙斯特伦, C.（2010）《非完整系统与相关变分系统的相容性》，《夸美纽斯大学物理学报》第 L–LI 卷，第 1、2 期，25–36。[4] ˇ切塔耶夫, N. G.（1962）《论高斯原理》，《分析力学论文集》323，科学学院。[5] 弗兰纳里 M. R.（2011）《非完整系统的达朗贝尔–拉格朗日分析动力学》，《数学物理学杂志》52，032705 1–29。[6] 弗兰纳里 M. R.（2005）《非完整约束之谜》，《美国物理学杂志》73，265–272。[7] 戈卢布, G. H.，范·洛恩, C. F.（2013）《矩阵计算》第4版，约翰斯·霍普金斯大学出版社。[8] Hamel, G.（1909）《理论力学》，施普林格出版社，柏林。[9] 茹尔丹, P. E. B.（1909）《关于高斯最小约束原理的一种类比》，《纯粹与应用数学季刊》8L 153–157。[10] 克鲁普科娃, O.（2009）《非完整变分原理》，《物理学杂志 A：数学与理论》42，185201。[11] 莱莫斯, N. A.（2022）《非完整力学与变分力学的完全不等价性》，Acta Mech. 233，47–56。[12] 李, S. M.，贝拉卡达尔, J.（2007）《约束动力系统中变分力学模型和切塔耶夫模型的有效性》，《数学物理报告》60 第1期，107–115。[13] 利布雷, J.，拉米雷斯, R.，萨多瓦斯卡娅, N.（2014）《变分力学的新方法》，《非线性动力学》78，2219–2247。[14] 卢里, A. I.（2002）《分析力学》，施普林格出版社，柏林、海德堡。[15] 梅, F.（2000）《非完整力学》，Appl. Mech. Rev. 11，283–305。[16] 涅马克 Ju. I.，富法耶夫 N. A.（1972）《非完整系统动力学》，普罗维登斯：美国数学学会，《数学专著译丛》33。[17] J. G. Papastravidis, J. G.（1992）《非线性非完整系统的时间积分变分原理》，《应用数学杂志》64，985–991。[18] 帕帕斯塔夫里迪斯, J. G.（1992）《论 Jourdain 原理》，《国际工程科学杂志》30 第2期，135–140[19] Pars, L. A.（1965）《分析动力学论》，伦敦：海涅曼教育图书公司有限公司。

[20] Pastore, A.，Giammarini, A.，Grillo, A.（2024）调和 Kozlov 的变分非完整方法与传统非完整方法：两个基准问题的解，力学**235**，2341–2379。[21] Ray, J. R.（1966）非完整约束，《美国物理学杂志》**34**，406—408。[22] V. V. Rumyantsev，V. V.，非完整系统的哈密顿原理形式，《力学、自动化与机器人》**2**，第 10 期，1035–1048，2000。[23] Rumyantsev, V. V.（1973）论切塔耶夫原理（俄文），苏联科学院通报**210** 第 4 期，787–790。作者地址：*Federico Talamucci*，意大利佛罗伦萨大学，电子邮件：federico.talamucci@unifi.it。