arXiv:2601.00104v1 [math.CO] 31 Dec 2025

均匀超图中团的隔离问题的解答

Peter Borg

马耳他大学理学院数学系
马耳他
peter.borg@um.edu.mt

摘要

超图 F 的一个同构副本称为 F-副本。令 K_k^r 表示顶点集为 $[k]=\{1,\dots,k\}$ 的完全 r-均匀超图（也就是说， K_k^r 的边是 $[k]$ 的所有 r 元子集）。给定一个 r-均匀、具有 n 个顶点的超图 H， H 的 K_k^r-隔离数记作 $\iota(H,K_k^r)$，定义为 D 的最小子集的大小，其中 D 是 H 的顶点集的子集，且其闭邻域 $N[D]$ 与 H 中所含 K_k^r-副本的顶点集相交（等价地说， $H-N[D]$ 不含 K_k^r-副本）。本文证明，若 $2\le r\le k$ 且 H 连通，则 $\iota(H,K_k^r)\le \binom{n}{k+1}$，除非 H 是一个 K_k^r-副本，或 $k=r=2$ 且 H 是一个 5-圈。这解决了 Li、Zhang 和 Ye 最近提出的一个问题。关于 $r=2$ 的结果（即 H 是图）由 Fenech、Kaemawichanurat 和作者证明，并被用于证明任意 r 的情形。关于 $r=2$ 的极值结构已由多位作者确定。我们利用这一结果确定任意 r 的极值结构。

1 引言

除非另有说明，我们用大写字母（如 X ）表示集合或图，用小写字母（如 x ）表示非负整数或集合中的元素。正整数集记作 $\mathbb{N}$。对于 $n\ge 1$， $[n]$ 表示集合 $\{1,\dots,n\}$（即 $\{i\in\mathbb{N}\colon\ i\le n\}$）。我们将 $[0]$ 视为空集 $\emptyset$。任意集合均视为有限集。由集合构成的集合称为族。大小为 k 的集合称为 k元集，或简称为 k集。对于集合 X， X 的幂集（即 X的子集族）记作 2^X，而 X的 k元子集族记作 $\binom{X}{k}$（即$\binom{X}{k}=\{A\subseteq X\colon |X|=k\}$）。关于图论的标准术语，请参阅 [40]。本文所用的大多数图术语均在 [2] 中定义。

超图 H 是一对 $(X,\ Y)$，其中 X 是一个集合，记作 $V(H)$，称为 H 的顶点集； Y 是 2^X 的一个子族，记作 $E(H)$，称为 H 的边集。 $V(H)$ 的元素称为 H 的顶点，而 $E(H)$ 的元素称为

H 的超边，或简称 H 的边。若 $|V(H)| = n$，则称 H 为 n-顶点超图。若 $E(H) \subseteq \binom{V(H)}{r}$，则称 H 为 r-均匀的。图是 2-均匀超图。r-均匀超图也称为 r-图。我们可以将一条边 $\{v, w\}$ 表示为 vw。若 $v, w \in e \in E(H)$ 且 $v \neq w$，则称 w 为 H 中 v 的邻点。若 $v \in e \in E(H)$，则称 e 与 H 中的 v 关联。对于 $v \in V(H)$，H 中 v 的邻点集记作 $N_H(v)$；集合 $N_H(v) \cup \{v\}$ 记作 $N_H[v]$，称为 H 中 v 的闭邻域。对于 $X \subseteq V(H)$，集合 $\bigcup_{v \in X} N_H[v]$ 记作 $N_H[X]$，称为 H 中 X 的闭邻域；超图 $(X, E(H) \cap 2^X)$ 记作 $H[X]$，称为由 X 诱导的 H 的子超图；超图 $H[V(H) \setminus X]$ 记作 $H - X$。若不会引起混淆，下标 H 可以省略；例如，$N_H(v)$ 可简写为 $N(v)$。

如果 F和 H是超图，$f\colon V(F) \to V(H)$ 是一个双射，并且 $E(H) = \{\{f(v) : v \in e\} : e \in E(F)\}$，那么我们称 H是 F的同构副本，或称 H与 F同构，并记作 $H \simeq F$。因此，F的同构副本是通过对 F的顶点重新标记而得到的超图。我们也称其为 F-副本。如果 F和 H是满足 $V(F) \subseteq V(H)$ 且 $E(F) \subseteq E(H)$ 的超图，那么称 F 是 H的子超图，并称 H 包含 F。

r-图 $([k], \binom{[k]}{r})$ 记作 K_k^r，称为 k-团。对于 $r = 2$，K_k^r 简记为 K_k。我们称包含在 r-图 H 中的 K_k^r-副本为 k-团（属于 H。对于$n \geq 3$，图 $([n], \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}\})$ 记作 C_n。C_n 的同构副本称为 n-圈，或简称为圈。若对于每个满足 $v \neq w$ 的 v，$w \in V(H)$，都存在某些 e_1、.....、$e_t \in E(H)$，使得$v \in e_1$、$w \in e_t$，并且对每个 $i \in [t-1]$ 都有 $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$，则称超图 H 是连通的。

如果 $D \subseteq V(H) = N[D]$，则称 D 为 H的支配集。H 的最小支配集的大小称为 H 的支配数，记为$\gamma(H)$。如果 $\mathcal{F}$ 是一个超图集，且 F 是 $\mathcal{F}$中某个超图的同构副本，那么称 F为 $\mathcal{F}$-图。如果 $D \subseteq V(H)$，使得 $N[D]$与 H所包含的$\mathcal{F}$-图的顶点集相交，则称 D为 H的 $\mathcal{F}$-隔离集。注意，当且仅当 D不包含 $\mathcal{F}$-图时，D 才是 H的$\mathcal{F}$-隔离集。假设 $(\emptyset, \emptyset) \notin \mathcal{F}$。令 $\iota(H, \mathcal{F})$ 表示 H的最小 $\mathcal{F}$-隔离集的大小。如果$\mathcal{F} = \{F\}$，则在这些定义和记号中，我们可以用 F替换 $\mathcal{F}$。显然，对于 $r \geq 2$，D 是 H 的 K_1^r-隔离集，当且仅当 D 是 H的支配集，因此$\gamma(H) = \iota(H, K_1^r)$。显然，$\iota(H, \mathcal{F}) \leq \gamma(H)$。

Caro 和 Hansberg [15] 首先提出了对图的隔离集的研究。这是对支配集研究的自然推广 [20, 21, 25–28]。该领域最早的结果之一是 Ore [36] 关于任意连通 n顶点图 $G \not\simeq K_1$ 的支配数的上界 $n/2$（见 [25]）。删除支配集的闭邻域后，得到的图不含顶点；而删除 K_2隔离集的闭邻域后，得到的图不含边。在文献中，K_2隔离集也称为顶点-边支配集。考虑任意连通n顶点图 G。Caro 和 Hansberg [15] 证明了 $\iota(G, K_2) \leq n/3$，除非 $G \simeq K_2$或 $G \simeq C_5$。Żyliński [44] 独立地证明了这一结果，并解决了文献 [8]中的一个问题。Fenech、Kaemawichanurat 和本文作者 [5]证明了以下推广结果，从而解决了文献 [15]中的一个问题。

定理 1（[5]） 若 $k \geq 1$ 和 G 是一个连通的 n 顶点图，那么，除非出现以下情况之一：

$G \simeq K_k$ 或 $k = 2$ 和 $G \simeq C_5$,

$$\iota(G, K_k) \leq \frac{n}{k+1}. \tag{1}$$

此外，存在一个图 $B_{n,\,k}$，使得 $\iota(B_{n,\,k}, K_k) = \lfloor n/(k+1) \rfloor$。

$B_{n,\,k}$ 的一个显式构造见 [5]，并在下文的构造 1 中加以推广。Ore 的结果对应于情形 $k = 1$，Caro、Hansberg 和 Żyliński 的结果对应于情形 $k = 2$。在 (1) 中达到界的图，对于 $k = 1$，由 [24, 37] 确定；对于 $k = 2$，由 [9, 31] 确定；对于 $k = 3$，由 [16] 确定；对于 $k \geq 4$，由 [17] 确定。关于 n 的其他此类隔离数上界见 [1–4, 18, 41–43]。值得一提的是，极大外平面图上的支配和隔离问题得到了特别深入的研究 [6, 7, 13, 15, 19, 22, 23, 29, 32, 34, 35, 38, 39]，，这主要是因为它们与 Chvátal 艺术画廊定理 [19] 有关。与支配问题的发展类似，隔离问题也在向多个方向拓展，例如全隔离 [10, 14] 和隔离博弈 [11]。

Li、Zhang 和 Ye [33] 询问了定理 1 的超图版本。更准确地说，他们询问对于连通的 r-图 H [33,问题 3.1 和 3.2]，，$\iota(H, K_k^r)$ 的最佳可能上界，并证明了 $\iota(H, K_r^r) \leq n/r$，同时询问 $\iota(H, K_r^r) \leq n/(2r-1)$ 是否成立（除非 H 是某个例外 r-图的成员）。我们在定理 2 中给出了答案。为了陈述我们的结果，我们需要以下构造。

构造 1 任取满足 $2 \leq r \leq n$ 的 n、k、$r \in \mathbb{N}$，以及任意连通的 k-顶点 r-图 F。根据带余除法，存在 q、$s \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ 使得 $n = q(k+1) + s$ 且 $0 \leq s \leq k$。令 $Q_{n,\,k}$ 为一个大小为 $q + s$ 的集合，并令 v_1，……，v_{q+s} 为 $Q_{n,\,k}$ 的元素。若 $q \geq 1$，则令 F_1，……，F_q 为 F 的同构副本，使得这些 $q+1$ 集合 $V(F_1)$ ……、$V(F_q)$ 以及 $Q_{n,\,k}$ 两两不交；对于每个 $i \in [q]$，令 $\emptyset \neq \mathcal{W}_i \subseteq \{e \in \binom{\{v_i\} \cup V(F_i)}{r} : v_i \in e\}$，并令 H_i 为满足 $V(H_i) = \{v_i\} \cup V(F_i)$ 且 $E(H_i) = E(F_i) \cup \mathcal{W}_i$ 的 r-图。若 $q = 0$ 且 H 是一个不是 F-同构副本的 n-顶点 r-图，或者 $q \geq 1$、T 是一个满足 $V(T) = Q_n$ 的连通 r-图，k、T' 是一个连通的 r-图，满足 $\{v_i : i \in [q+s] \setminus [q]\} \subseteq V(T') \subseteq \{v_i : i \in [q+s] \setminus [q]\} \cup V(H_q)$，并且对每个 $e \in E(T')$ 都有 $v_q \in e$，且 H 是满足 $V(H) = V(T') \cup \bigcup_{i=1}^{q} V(H_i)$ 且 $E(H) = E(T) \cup E(T') \cup \bigcup_{i=1}^{q} E(H_i)$ 的 r-图，则称 H 为一个商 r-图为 T、余 r-图为 T' 的 (n, F)-良好 r-图；对于每个 $i \in [q]$，称 H_i 为 H 的一个 F-构成部分，并称 v_i 为 H_i 在 H 中的 F-连接。若一个 (n, F)-良好 r-图的余 r-图没有顶点（因此 $s = 0$），则称其为纯的。显然，一个 (n, F)-良好 r-图是一个连通的 n-顶点 r-图。

在下一节中，我们将证明以下结果。

定理 2 如果 $2 \leq r \leq k$ 和 H 是一个连通的 n 顶点 r 图，那么，除非 $H \simeq K_k^r$ 或 $k = r = 2$ 和 $H \simeq C_5$,

$$\iota(H, K_k^r) \leq \frac{n}{k+1}. \tag{2}$$

此外，$\iota(H, K_k^r) = \lfloor n/(k+1) \rfloor$ 若 H 是 (n, K_k^r)-良的。

如上所述，达到式 (1) 中界的图已经完全确定。它们是当 $r=2$ 时达到式 (2) 中界的 r- 图。我们确定当 $r\geq 3$ 时达到式 (2) 中界的 r- 图。

在 [16], Chen、Cui 和 Zhang 定义了 10 个具有相同顶点集 $\{a_1,\ldots,a_8\}$ 的连通的8顶点图 $A_1,\ldots,A_{10}$，并证明了在 [2] 中，圈隔离界 $n/4$ 由图 $G\not\supset K_3$ 达到，当且仅当 G 是纯的 (n,K_3)-良图或 $\{C_4,A_1,\ldots,A_{10}\}$-图。因此，他们还证明了式 (1) 中的界由 $k=3$ 达到，当且仅当 G 是纯的 (n,K_3)-良图或 $\mathcal{G}_3$-图，其中 $\mathcal{G}_3=\{A_i\colon i\in[10]\setminus\{2\}\}$。在 [17], Chen、Cui 和 Zhong 研究了情形 $k\geq 4$。他们定义了一个顶点集为 $\{a_1,\ldots,a_{10}\}$ 的连通的10顶点图 A，以及 $k+2$ 个具有相同顶点集 $\{a_1,\ldots,a_{2k+2}\}$ 的连通 $(2k+2)$-顶点图 $A_k^1,\ldots,A_k^{k+2}$。令 $\mathcal{G}_4=\{A,A_4^1,\ldots,A_4^6\}$，并令 $\mathcal{G}_k=\{A_k^1,\ldots,A_k^{k+2}\}$，其中 $k\geq 5$。他们证明，对于 $k\geq 4$，式 (1) 中的界达到，当且仅当 G 是纯的 (n,K_k)-良图或 $\mathcal{G}_k$-图。因此， [16, 17] 中的结果可归纳如下。

定理3（[16, 17]) 对于 $k\geq 3$，式 *(1)* 中等号成立当且仅当 G 是一个纯的（n,K_k）-良图或一个 $\mathcal{G}_k$-图。

设 $e_3^1=\{a_1,a_2,a_3\}$, $e_3^2=\{a_1,a_2,a_5\}$, $e_3^3=\{a_1,a_3,a_5\}$, $e_3^4=\{a_1,a_5,a_6\}$, $e_3^5=\{a_1,a_5,a_7\}$, $e_3^6=\{a_2,a_3,a_4\}$, $e_3^7=\{a_2,a_4,a_8\}$, $e_3^8=\{a_3,a_4,a_8\}$, $e_3^9=\{a_4,a_7,a_8\}$,$e_3^{10}=\{a_5,a_6,a_7\}$, $e_3^{11}=\{a_5,a_6,a_8\}$, $e_3^{12}=\{a_5,a_7,a_8\}$和 $e_3^{13}=\{a_6,a_7,a_8\}$。设 $\mathcal{E}_3^1=\{e_3^i\colon i\in\{2,5,6,8,13\}\}$, $\mathcal{E}_3^2=\{e_3^i\colon i\in\{1,4,6,9,10,13\}\}$, $\mathcal{E}_3^3=\mathcal{E}_3^2\cup\binom{\{a_5,a_6,a_7,a_8\}}{3}$,$\mathcal{E}_3^4=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{10}\}$, $\mathcal{E}_3^5=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{11}\}$, $\mathcal{E}_3^6=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{12}\}$, $\mathcal{E}_3^7=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{13}\}$, $\mathcal{E}_3^8=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{10},e_3^{11}\}$, $\mathcal{E}_3^9=\mathcal{E}_3^3\setminus\{e_3^{12},e_3^{13}\}$和 $\mathcal{E}_3^{10}=\mathcal{E}_3^2\cup\{e_3^3,e_3^7\}$。对于每个 $i\in[10]$，令$H_3^i=(\{a_1,\ldots,a_8\},\mathcal{E}_3^i)$。设 $\mathcal{H}_3^3=\{H_3^i\colon i\in[10]\}$。设 $e_4^1=\{a_1,a_2,a_5,a_6\}$, $e_4^2=\{a_1,a_6,a_7,a_{10}\}$, $e_4^3=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $e_4^4=\{a_3,a_4,a_8,a_9\}$和 $e_4^5=\{a_7,a_8,a_9,a_{10}\}$。设 $H_4^4=(\{a_1,\ldots,a_{10}\},\{e_4^1,\ldots,e_4^5\})$ 和 $H_4^3=(\{a_1,\ldots,a_{10}\},\binom{e_4^1}{3}\cup\cdots\cup\binom{e_4^5}{3})$。令$\mathcal{H}_4^3=\{H_4^3\}$ 和 $\mathcal{H}_4^4=\{H_4^4\}$。在下一节中，我们还将证明以下结果。

定理4 对于 $3\leq r\leq k$，当且仅当 H 是一个纯的(n,K_k^r)-良好r-图，或者 $3\leq k\leq 4$ 和 H 是一个 $\mathcal{H}_k^r$-图时，*(2)* 中等号成立。

我们将 r-图的情形转化为图的情形。这样，我们便能由定理 1 得到定理 2，并由定理3得到定理4。

2 证明

现在我们开始着手证明定理 2 和定理4。

对于一个集合族 $\mathcal{A}$，其族 $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\binom{A}{s}$ 记作 $\partial_s(\mathcal{A})$，称为 $\mathcal{A}$ 的 阶影。对于一个超图 H，我们用 $H^{(s)}$ 表示顶点集为$V(H)$、边集为 $\partial_s(E(H))$ 的 s-图。

引理 1 设 $2\leq s\leq r\leq k$，且 H 是一个 r-图。*(i)* 对任意 $D\subseteq V(H)$, $N_H[D]=N_{H^{(s)}}[D]$。*(ii)* 若 D 是 $H^{(s)}$ 的一个 K_k^s-隔离集，则 D 是 H 的一个 K_k^r- 隔离集。*(iii)* $E(H)\subseteq\{V(R)\colon R\text{ 是 }H^{(s)}\}$ 的一个 r- 团。

(iv) 若 $e \in E(H^{(s)})$ 且 $H^{(s)}$ 仅包含一个满足 $e \in E(F)$ 的 K_r^s-同构副本 F，则 $V(F) \in E(H)$。*(v)* 若 $e \in E(H)$ 且 H 不含满足 $e \in E(F)$ 的 k-团 F，则不存在满足 $I^{(r)} = H$ 的 k-图 I。

证明。令 $D \subseteq V(H)$。我们有 $D \subseteq N_H[D] \cap N_{H^{(s)}}[D]$。令 $v \in V(H)$。假设 $v \in N_H[D] \setminus D$。那么，$v \in N_H[u]$ 对某个 $u \in D$ 成立，因此 $u, v \in e$ 对某个 $e \in E(H)$ 成立。令 $e' \subseteq e$ 满足 $u, v \in e'$ 且 $|e| = s$。那么，$e' \in H^{(s)}$，因此 $v \in N_{H^{(s)}}[u]$。于是，$N_H[D] \subseteq N_{H^{(s)}}[D]$。现在假设 $v \in N_{H^{(s)}}[D] \setminus D$。那么，$u, v \in e$ 对某个 $u \in D$ 和 $e \in E(H^{(s)})$ 成立。由于 $e \subseteq e'$ 对某个 $e' \in E(H)$ 成立，故 $v \in N_H[u]$。于是，$N_{H^{(s)}}[D] \subseteq N_H[D]$。由于 $N_H[D] \subseteq N_{H^{(s)}}[D]$，(i) 得证。

假设 D 是 $H^{(s)}$ 的一个 K_k^s-隔离集，且 H 包含 K_k^r 的一个同构副本 B。那么，$B^{(s)}$ 是包含在 $H^{(s)}$ 中的 K_k^s 的一个同构副本。因此，$N_{H^{(s)}}[D] \cap V(B^{(s)}) \neq \emptyset$。由 (i)，$N_H[D] \cap V(B^{(s)}) \neq \emptyset$。由于 $V(B^{(s)}) = V(B)$，(ii) 得证。

如果 $e \in E(H)$，那么 $(e, \binom{e}{s})$ 是 $H^{(s)}$ 的一个 r-团。由此可得 (iii)。

假设 $e \in E(H^{(s)})$，且 $H^{(s)}$ 只包含一个满足 $e \in E(F)$ 的 K_r^s-同构副本 F。对于某个 $e' \in E(H)$，有 $e \subseteq e'$。令 $F' = (e', \binom{e'}{s})$。那么，$e \in E(F')$，且 F' 是包含在 $H^{(s)}$ 中的一个 K_r^s- 同构副本，因此 $F' = F$。我们有 $V(F) = V(F') = e' \in E(H)$，故 (iv) 得证。

假设 $e \in E(H)$ 且 I 是一个满足 $I^{(r)} = H$ 的 k-图。那么，对某个 $e' \in E(I)$，有 $e \subseteq e'$。令 $F' = (e', \binom{e'}{r})$。于是 $e \in E(F')$，且 F' 是包含于 H 中的 K_k^r-同构副本。由此得到 (v)。□

引理 1 (ii) 的逆命题不成立。事实上，若 $s < r < k$ 且 $H = ([k], \binom{[k]}{r} \setminus \{[r]\})$，则 H 不包含 K_k^r- 同构副本，而 $H^{(s)}$ 是一个 K_k^s- 同构副本（因此 $\emptyset$ 是 H 的 K_k^r- 隔离集，但不是 $H^{(s)}$ 的 K_k^s-隔离集）。

定理 2 的证明。若 $r = 2$，则结论由定理 1 得出。假设 $r \geq 3$。若 $n \leq k$，则除非 $H \simeq K_k^r$，否则 $\iota(H, K_k^r) = 0$。假设 $n \geq k+1$。令 G 为图 $H^{(2)}$。由于 H 是连通的，G 连通。由于 $n \geq k+1$，$G \not\simeq K_k$。由于 $r \geq 3$，$G \not\simeq C_5$。令 D 为 G 的一个最小 K_k-隔离集。由定理 1，$|D| \leq n/(k+1)$。根据引理 1 (ii)，D 是 H 的一个 K_k^r-隔离集。由此得到 (2)。

现在假设 H 是一个 (n, K_k^r)-良好的 r-图，且恰有 q K_k^r 个组成部分，如构造 1 所示。则 $q = \lfloor n/(k+1) \rfloor$。若 $q = 0$，则 $\iota(H, K_k^r) = 0$。假设 $q \geq 1$。则 $\{v_1, \ldots, v_q\}$ 是 H 的一个 K_k^r-隔离集。若 D 是 H 的一个 K_k^r-隔离集，那么，由于 $H_1 - v_1, \ldots, H_q - v_q$ 是 K_k^r 的副本，对于每个 $i \in [q-1]$，都有 $D \cap V(H_i) \neq \emptyset$，并且 $D \cap (V(H_q) \cup V(T')) \neq \emptyset$。因此，$\iota(H, K_k^r) = q$。□

定理4的证明。我们首先证明必要条件。因此，设 H在（2）中达到界。令 G 和 D 如定理2的证明中所述。由定理 1，$|D| \leq n/(k+1)$。根据引理 1 (ii)，D 是 H的 K_k^r-隔离集，因此 $|D| \geq \iota(H, K_k^r)$。我们有 $n/(k+1) = \iota(H, K_k^r) \leq |D| \leq n/(k+1)$，所以 $|D| = n/(k+1)$。由定理3，G 是一个纯的 (n, K_k)-良图或一个 $\mathcal{G}_k$-图。

假设 G 是一个纯的 (n, K_k)-良好图。我们可以假设 G 如构造 1（带有 $F = K_k$）所示。因此，$Q_{n,k} = \{v_1, \ldots, v_q\}$，$V(G) = Q_{n,k} \cup \bigcup_{i=1}^q V(F_i)$，并且对每个 $i \in [q]$，都有 $V(F_i) \simeq K_k$，$N_G[V(F_i)] = V(F_i) \cup \{v_i\}$，于是

$N_H[V(F_i)] = V(F_i) \cup \{v_i\}$ 由引理 1 (i) 得出。令 $Q = Q_{n,k}$。假设对于某个 $j \in [q]$，有 $H[V(F_j)] \not\simeq K_k^r$。假设 $q \geq 2$。令 $Q' = Q \setminus \{j\}$。由于 $G[Q]$ 是连通的，$H[Q]$也是连通的，因此 $v_j \in N_H[Q']$。由此可得，Q'是 K_k^r 的一个隔离集。我们有$|Q'| < q = n/(k-1)$，这与 $\iota(H, K_k^r) = n/(k+1)$ 矛盾。因此，对每个 $i \in [q]$，都有 $H[V(F_i)] \simeq K_k^r$，于是 H 是一个纯的（n, K_k^r）-良好 r-图。现在假设 $q = 1$。我们有$1 = q = n/(k+1) = \iota(H, K_k^r)$，因此 H包含一个 K_k^r-同构副本 I。由于 $n = k+1 = |V(I)|+1$,$V(H) = V(I) \cup \{v\}$ 对某个 $v \in V(H) \setminus V(I)$ 成立。由于 H 是连通的，H 是一个纯的（n, K_k^r）-良好 r-图。

现在假设 G 是一个 $\mathcal{G}_k$-图。不妨设 $G \in \mathcal{G}_k$。假设 $k \geq 4$。令 $J \in \{A_k^1, \ldots, A_k^{k+2}\}$。于是，$a_{k+2} \in N_J[a_1] \subseteq \{a_1, \ldots, a_{k+2}\}$且 $a_1 \in N_J[a_{k+2}] \subseteq \{a_1, a_{k+2}, \ldots, a_{2k+2}\}$（见 [17]）。因此，$a_1 a_{k+2} \in E(J)$，并且对于每个$v \in V(J) \setminus \{a_1, a_{k+2}\}$，都有 $J[\{v, a_1, a_{k+2}\}] \not\simeq K_3$。由于 $r \geq 3$，J不含有满足 $a_1 a_{k+2} \in E(F)$ 的 K_r-同构副本 F。根据引理 1 (v)，$H^{(2)} \neq J$，所以 $G \neq J$。因此，$k = 4$且 $G = A$。G的 4-团为 $G[e_4^1]$、……、$G[e_4^5]$，而 G的 3-团集合为 $\bigcup_{i=1}^5 \{G[T]\colon T \in \binom{e_4^i}{3}\}$（见[17]）。根据引理 1 (iii)，$E(H) \subseteq E(H_4^r)$。令 $a_1' = a_8$、$a_2' = a_3$、$a_3' = a_7$、$a_4' = a_1$和 $a_5' = a_2$。根据引理 1 (i)，对于每个 $v \in V(H)$，都有 $N_H[v] = N_G[v]$。对于每个 $i \in [5]$，$H - N_H[a_i'] = H - N_G[a_i'] = H[e_4^i]$，因此 $H[e_4^i] \simeq K_4^r$，因为 $\iota(H, K_4^r) = n/(k+1) = 10/5 = 2$。因此，$\bigcup_{i=1}^5 \binom{e_4^i}{r} \subseteq E(H)$，从而 $H = H_4^r$。

现在假设 $k = 3$。由于 $3 \leq r \leq k$, $r = 3$。令 $J \in \{A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$。于是，$a_5 \in N_J[a_1] \subseteq \{a_1, \ldots, a_5\}$和 $a_1 \in N_J[a_5] \subseteq \{a_1, a_5, \ldots, a_8\}$（见 [16]）。因此，$a_1 a_5 \in E(J)$，并且对每个 $v \in V(J) \setminus \{a_1, a_5\}$，都有 $J[\{v, a_1, a_5\}] \not\simeq K_3$。由引理 1 (v)，$H^{(2)} \neq J$，所以 $G \neq J$。因此，对某个 $j \in \{1, 3, 4, 5\}$，有 $G = A_j$。令 $X = \{1, 3, 4, 5\}$。对每个 $i \in X$，令 $\mathcal{K}_i$ 为 A_i 的 3-团的顶点集族，并令$S_i = \{(e, V(F))\colon F$是 A_i 中唯一满足 $e \in E(F)\}$ 的 3-团。令

$$S_5' = \{(a_1a_2, e_3^1), (a_3a_5, e_3^3), (a_1a_6, e_3^4), (a_3a_4, e_3^6), (a_2a_8, e_3^7), (a_4a_7, e_3^9), (a_5a_7, e_3^{10}), (a_6a_8, e_3^{13})\}.$$

可以验证，$S_5' \subseteq S_5$和 $\mathcal{K}_5 = \{T\colon (e,T) \in S_5'$，其中某个 $e \in E(A_5)\}$。因此，若 $j = 5$，则由引理 1 (iii) 和 (iv)，$E(H) = \mathcal{K}_5$，从而 $H = H_3^{10}$。由于 $E(A_3) \subseteq E(A_5)$，类似地可得，若 $j = 3$，则 $H = H_3^2$。令 $S_1' = \{(a_2a_5, e_3^2), (a_1a_7, e_3^5), (a_2a_3, e_3^6), (a_3a_8, e_3^8), (a_6a_7, e_3^{13})\}$。由于 $S_1' \subseteq S_1$和 $\mathcal{K}_1 = \{T\colon (e,T) \in S_1'$，其中某个 $e \in E(A_1)\}$，若 $j = 1$，则可得 $H = H_3^1$。最后，设$j = 4$。令 $S_4' = \{(a_1a_2, e_3^1), (a_1a_6, e_3^4), (a_3a_4, e_3^6), (a_4a_7, e_3^9)\}$。由引理 1 (iv)，$S_4' \subseteq S_4$、$e_3^1$、$e_3^4$、$e_3^6$、$e_3^9$是 H 的超边。令 $\mathcal{E}^*$ 为这 4 条超边构成的集合，并令 $Z = \{a_5, a_6, a_7, a_8\}$和 $\mathcal{E}' = \binom{Z}{3}$。我们有 $\mathcal{E}^* \subseteq E(H)$、$\mathcal{E}_3^3 = \mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}'$和$\mathcal{K}_4 = \mathcal{E}_3^3$。由引理 1 (iii)，$E(H) \subseteq \mathcal{E}_3^3$。由于 $a_5a_8 \in E(G)$，我们有 $e_3^{11} \in E(H)$ 或 $e_3^{12} \in E(H)$。设 $e_3^{11} \in E(H)$。由于 $a_6a_7 \in E(G)$，我们有 $e_3^{10} \in E(H)$ 或$e_3^{13} \in E(H)$。若 $e_3^{10} \in E(H)$，则 $H \in \{H_3^3, H_3^6, H_3^7, H_3^9\}$。若 $e_3^{13} \in E(H)$，则由于$a_5a_7 \in E(G)$，我们有 $e_3^{10} \in E(H)$ 或 $e_3^{12} \in E(H)$，因此 $H \in \{H_3^3, H_3^4, H_3^6\}$。现在设$e_3^{11} \notin E(H)$。于是，$e_3^{12} \in E(H)$。由于 $e_3^{11} \notin E(H)$ 且 $a_6a_8 \in E(G)$，故 $e_3^{13} \in E(H)$。因此，$H \in \{H_3^5, H_3^8\}$。

现在我们证明充分条件。由定理 2，$\iota(H, K_k^r) = n/(k+1)$，其中 H 是一个纯的 (n, K_k^r)-良好 r-图。现在假设 $3 \leq k \leq 4$ 和 $H \in \mathcal{H}_k^r$。容易验证，若 $3 = r = k$，则对每个 $i \in [8]$，$H - N_H[a_i]$ 都包含一个 K_3^3-同构副本，因此我们有 $1 < \iota(H, K_3^3) \leq n/(k+1) = 2$，从而 $\iota(H, K_3^3) = n/(k+1)$。类似地，若 $3 \leq r \leq k = 4$,

那么 $H-N_H[a_i]$对每个 $i\in[10]$都包含一个 K_k^r同构副本，因此 $\iota(H,\ K_k^r)=2=n/(k+1)$。□

3 $k<r$ 的情形

对于 $k<r$，求得 $\iota(H,K_k^r)$ 的尽可能紧的上界这一问题本质上有所不同。在这种情况下， K_k^r 没有边，因此若 $k\geq 2$，则 K_k^r 不连通。一般而言，给定一组超图 $\mathcal{F}$，如果 $\mathcal{F}$ 中的某些成员不连通，那么 $\mathcal{F}$-隔离集的某些理想性质就无法保证。特别是，若 $\mathcal{H}$ 是 H 的连通分量集，则当 $\mathcal{F}$ 中的成员连通时， $\iota(H,\mathcal{F})=\sum_{I\in\mathcal{H}}\iota(I,\mathcal{F})$；但在其他情况下， $\iota(H,\mathcal{F})$ 未必是 $\sum_{I\in\mathcal{H}}\iota(I,\mathcal{F})$；参见 [4, 第 2] 节。

我们提出如下问题。

问题 1 对于 $r\geq 3$ 和 $1\leq k<r\leq n$，使得对于每个连通的 n 阶 r 图 H， $\iota(H,K_k^r)\leq cn$ 成立的最小有理数 $c=c(n,k,r)$ 是多少？

正如第 1 节所指出的，对于 $k=1$，问题 1 是著名的 r 图支配问题。对于 $r\in\{3,4\}$，文献 [12, 30] 证明了 $\gamma(H)\leq n/r$，且该界是紧的。对于 $r=5$，文献 [12] 证明了 $\gamma(H)\leq 2n/9$。

问题 1 与支配问题有如下关系。

定理 5 如果 $1\leq k<r$ 和 H 是一个 r-图，则

$$\gamma(H)-k+1\leq\iota(H,K_k^r)\leq\gamma(H). \tag{3}$$

此外，对于每个 $q\geq 1$，都存在两个连通的 r-图 H 和 I，使得$\iota(H,\ K_k^r)=\gamma(H)=q=\iota(I,\ K_k^r)=\gamma(I)-k+1$。

证明。正如第 1 节所指出的， $\iota(H,\ K_k^r)\leq\gamma(H)$ 显然成立。由于 $k<r$， $V(H)$ 的子集D是 H的 K_k^r-隔离集，当且仅当 $|V(H)\setminus N[D]|\leq k-1$。令 D为 H的一个最小 K_k^r-隔离集，并令 $D'=V(H)\setminus N[D]$。于是， $|D'|\leq k-1$, $D\cup D'$是 H的一个支配集，因此 $\gamma(H)\leq|D\cup D'|=|D|+|D'|\leq\iota(H,\ K_k^r)+k-1$。因此，(3) 得证。

令 $q\geq 1$和 $n=q(r+1)$。设 H是构造 1 中的一个纯 (n,K_r^r)-良好 r-图（因此恰有 q K_r^r 个组成部分），其中 $\mathcal{W}_i=\{e\in\binom{\{v_i\}\cup V(}{F_i})$: 对每个 $i\in[q]$， $v_i\in e\}$。令 $X=\{v_1,\ldots,v_q\}$。那么， X是 H的支配集。若 D_H是 H的一个 K_k^r-隔离集，则由于 H_1-v_1，……， H_q-v_q是 K_r^r的副本（因此包含 K_k^r的副本），我们对每个 $i\in[q]$都有 $D_H\cap V(H_i)\neq\emptyset$。因此，我们有 $q\leq\iota(H,K_k^r)\leq\gamma(H)\leq|X|=q$，从而 $\iota(H,K_k^r)=\gamma(H)=q$。令$R_1'$，……，$R_{k-1}'$，$S_1'$，……，$S_{k-1}'$为两两不相交的集合，使得对每个 $i\in[k-1]$, $|R_i'|=r-1$, $|S_i'|=1$ 且 $R_i'\cap V(H)=\emptyset=S_i'\cap V(H)$。对每个 $i\in[k-1]$，令$R_i=\{v_q\}\cup R_i'$和 $S_i=R_i'\cup S_i'$。令 I为连通的 $(n+(k-1)r)$ 顶点 r-图，其顶点集为 $V(H)\cup\bigcup_{i=1}^{k-1}S_i$，边集为 $E(H)\cup\bigcup_{i=1}^{k-1}\{R_i,S_i\}$。我们有$V(I)\setminus N_I[X]=\bigcup_{i=1}^{k-1}S_i'$，所以 $|V(I)\setminus N_I[X]|\leq k-1$，从而 X是 I的一个 K_k^r-隔离集。如上所述，若 D_I是 I的支配集，或是 I的一个 K_k^r-隔离集，则 D_I与 $V(H_1)$……，$V(H_q)$中的每一个都有交。因此， $\iota(I,K_k^r)=|X|=q$。令 D_I为 I的一个最小支配集。对每个 $i\in[k-1]$，我们有 $S_i'\subseteq N_I[D_I]$，故 $D_I\cap S_i\neq\emptyset$。因此， $|D_I|\geq q+k-1$。由于 $X\cup\bigcup_{i=1}^{k-1}S_i'$是 I的支配集， $\gamma(I)=q+k-1=\iota(I,K_k^r)+k-1$。□

参考文献

[1] K. Bartolo、P. Borg、D. Scicluna，《图中正方形的隔离》，《离散数学》347（2024年），论文 114161。[2] P. Borg，《圈的隔离》，《图与组合》36（2020年），631–637。[3] P. Borg，《连通图的隔离》，《离散应用数学》339（2023年），154–165。[4] P. Borg，《正则图、星图和 k-色图的隔离》，《离散数学》349（2026年），论文 114706。[5] P. Borg、K. Fenech、P. Kaemawichanurat，《 k-团的隔离》，《离散数学》343（2020年），论文 111879。[6] P. Borg、P. Kaemawichanurat，《极大外平面图的部分支配》，《离散应用数学》283（2020年），306–314。[7] P. Borg、P. Kaemawichanurat，《美术馆定理的推广》，《组合学年刊》27（2023年），31–50。[8] R. Boutrig、M. Chellali、T.W. Haynes、S.T. Hedetniemi，《图中的顶点-边支配》，《数学方程》90（2016年），355–366。[9] G. Boyer、W. Goddard，《不相交隔离集与具有最大隔离数的图》，《离散应用数学》356（2024年），110–116。[10] G. Boyer、W. Goddard、M.A. Henning，《图中的全隔离》，《数学方程》99（2025年），623–633。[11]B. Brešar、T. Dravec、D.P. Johnston、K. Kuenzel、D.F. Rall，《图上的隔离博弈》，arXiv:2409.14180 [math.CO].[12] C. Bujtás、M.A. Henning、Z. Tuza，《均匀超图中的横截集与支配》，《欧洲组合学杂志》33（2012年），62–71。[13] C.N. Campos、Y. Wakabayashi，《极大外平面图的支配集》，《离散应用数学》161（2013年），330–335。[14] Y. Cao、X. An、B. Wu，《图中 k-团的全隔离》，《离散数学》348（2025年），论文 114689。[15] Y. Caro、A. Hansberg，《部分支配——图的隔离数》，Filomat 31（2017年），3925–3944。[16] S. Chen、Q. Cui、J. Zhang，《具有最大圈孤立数的图的刻画》，《离散应用数学》366（2025年），161–175。[17] S. Chen、Q. Cui、L. Zhong，《具有最大 k-团孤立数的图的刻画》，《离散数学》348（2025年），114531。[18] J. Chen、S. Xu，《图中的 P_5-隔离》，《离散应用数学》340（2023年），331–349。[19] V. Chvátal，《平面几何中的组合定理》，《组合理论杂志 B 辑》18（1975年），39–41。[20] E.J. Cockayne，《无向图的支配——综述》，载于：《数学讲义》第642卷，Springer，1978年，141–147。

[21] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi, 《图中的支配理论初探》, Networks 7（1977年）, 247–261。[22] M. Dorfling, J.H. Hattingh, E. Jonck, 《极大外平面图中的全支配 II》, 《离散数学》339（2016年）, 1180–1188。[23] M. Dorfling, J.H. Hattingh, E. Jonck, 《极大外平面图中的全支配》, 《离散应用数学》217（2017年）, 506–511。[24] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch, J. Roberts, 《支配数为图阶数一半的图》, Periodica Mathematica Hungarica 16（1985年）, 287–293。[25] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, 《图支配基础》, Marcel Dekker, Inc., 纽约, 1998年。[26] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater（编）, 《图支配：高级主题》, Marcel Dekker, Inc., 纽约, 1998年。[27] S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar, 《图支配参考文献及支配参数的一些基本定义》, 《离散数学》86（1990年）, 257–277。[28] S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar（编）, 《支配专题》, 载于《离散数学年刊》第48卷, North-Holland Publishing Co., 阿姆斯特丹, 1991年；重印自《离散数学》86（1990年）。[29] M.A. Henning, P. Kaemawichanurat, 《极大外平面图中的半配对支配》, 《组合优化杂志》38（2019年）, 911–926。[30] M.A. Henning, H.C. Swart, 《广义支配参数的界》, Quaestiones Mathematicae 13（1990年）, 237–257。[31] M. Lemańska, M. Mora, M.J. Souto-Salorio, 《隔离数等于图阶数三分之一的图》, 《离散数学》347（2024年）, 论文编号113903。[32] M. Lemańska, R. Zuazua, P. Żyliński, 《极大外平面图中的全支配集》, 《图与组合》33（2017年）, 991–998。[33] M. Li, S. Zhang, C. Ye, 《超图的部分支配》, 《图与组合》40（2024年）, 论文编号109。[34] Z. Li, E. Zhu, Z. Shao, J. Xu, 《极大外平面图和平面图的支配集》, 《离散应用数学》198（2016年）, 164–169。[35] L.R. Matheson, R.E. Tarjan, 《平面图中的支配集》, European Journal of Combinatorics 17（1996年）, 565–568。[36] O. Ore, 《图论》, 载于《美国数学会专题讲座出版物》第38卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 1962年。[37] C. Payan, N.H. Xuong, 《支配平衡图》, 《图论杂志》6（1982年）, 23–32。[38] S. Tokunaga, 《极大外平面图的支配集》, 《离散应用数学》161（2013年）, 3097–3099。[39] S. Tokunaga, T. Jiarasuksakun, P. Kaemawichanurat, 《极大外平面图的隔离数》, 《离散应用数学》267（2019年）, 215–218。[40] D.B. West, 《图论导论》, 第二版, Prentice Hall, 2001年。

[41] J. Yan, 《菱形图的孤立》, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 45（2022年）, 1169–1181。[42] G. Zhang, B. Wu, $K_{1,\ 2}$-图的孤立, 《离散应用数学》304（2021年）, 365–374。[43] G. Zhang, B. Wu, 《无三角形图的圈孤立数》, 《离散数学》347（2024年）, 论文编号114190。[44] P. Żyliński, 《图中的顶点-边支配》, 《数学方程》93（2019年）, 735–742。