对称次模函数、不可交叉函数与结构次模性

Miles Simmons* Ishan Bansal† Joseph Cheriyan‡2026年1月5日

arXiv:2601.00140v1 [cs.DM] 31 Dec 2025

摘要

Diestel等人 [4] 引入了满足次模性这一性质的抽象分离系统的概念，并将其称为结构次模性。

Williamson等人 [9] 将满足以下条件的集合族 $\mathcal{F}$ 称为不可交叉：对于任意一对集合 A，$B \in \mathcal{F}$，要么二者都属于 $\mathcal{F}$，即 $A \cap B$，$A \cup B$；要么二者都属于 $\mathcal{F}$，即 $A - B$，$B - A$。Bansal等人 [1] 将满足以下条件的集合族 $\mathcal{F}$称为可塑：对于任意一对集合 A，$B \in \mathcal{F}$，集合 $A \cap B$，$A \cup B$，$A - B$，$B - A$中至少有两个属于 $\mathcal{F}$。我们称可塑集合族 $\mathcal{F}$ 满足结构次模性，若其满足以下条件：对于任意一对交叉集合 A，$B \in \mathcal{F}$，集合 $A \cap B$，$A \cup B$中至少有一个属于 $\mathcal{F}$，并且集合$A - B$，$B - A$ 中至少有一个属于 $\mathcal{F}$。

对于任意正整数 $d \geq 2$，我们构造一个满足结构次模性的可塑集合族 $\mathcal{F}$，使得 (a) 不存在对称次模函数 g 和 $\lambda \in \mathbb{Q}$，满足 $\mathcal{F} = \{S : g(S) < \lambda\}$；且 (b) $\mathcal{F}$ 不能划分为 d 个（或更少的）不可交叉集合族。

1 引言

Diestel等人 [4, 2, 3, 5, 6] 引入了满足次模性这一性质的抽象分离系统的概念，并将其称为结构次模性。他们的动机之一，是确定对于一类称为“分离”的对象，需要作出哪些最基本的结构假设，才能捕捉图中纠缠的本质，从而使其适用于更广泛的情境。

早在数十年前，Williamson等人 [9] 将集合族 $\mathcal{F}$ 定义为不可交叉的，若其满足以下条件：对于任意一对集合 A、$B \in \mathcal{F}$，要么 $A \cap B$、$A \cup B$ 均属于 $\mathcal{F}$，要么 $A - B$、$B - A$ 均属于 $\mathcal{F}$。他们利用这一概念，为覆盖不可交叉集合族设计并分析了一种原始-对偶近似算法，并证明该算法的近似保证为二。最近，Bansal等人 [1] 将集合族 $\mathcal{F}$ 定义为可塑的，若其满足以下条件：对于任意一对集合 A、$B \in \mathcal{F}$，四个集合 $A \cap B$、$A \cup B$、$A - B$、$B - A$ 中至少有两个属于 $\mathcal{F}$。Bansal等人 [1] 表明，对于覆盖满足性质 (γ) 的可塑集合族这一问题，Williamson等人 [9] 提出的原始-对偶算法能够达到近似保证 $O(1)$。（我们将在下一节讨论性质 (γ)；它是一种组合性质，[1] 的分析依赖于它，但与本文无关。）Simmons 在其学位论文中 [8]，使用了强可塑集合族这一概念。该概念与 Diestel等人 [4]，所说的结构次模性相同，因此本文采用“结构次模性”这一术语（而非“强可塑”）。若可塑集合族 $\mathcal{F}$ 满足以下条件，我们就称其具有结构次模性：对于任意一对交叉集合 A、$B \in \mathcal{F}$，集合 $A \cap B$、$A \cup B$ 中至少有一个属于 $\mathcal{F}$，且集合 $A - B$、$B - A$ 中至少有一个属于 $\mathcal{F}$。

获得满足结构次模性的可变集合族 $\mathcal{F}$ 的一种自然方法，是取任意对称次模函数的“次水平集”，即选取 $\mathcal{F} = \{S \subseteq V : g(S) < \lambda\}$，其中 $g : 2^V \to \mathbb{Q}$ 是对称次模函数，且 $\lambda \in \mathbb{Q}$。由此引出一个问题：每个满足结构次模性的可塑族是否都对应于某个对称次模函数的“次水平集”？我们通过构造一个特定的可塑族 $\mathcal{F}$，对这个问题给出了否定答案；该族满足结构次模性

*mjsimmons@uwaterloo.ca。组合学与优化系，滑铁卢大学，加拿大。
†ib332@cornell.edu。亚马逊，贝尔维尤，华盛顿州，美国。此项工作为外部工作，与在亚马逊的职位无关。
‡jcheriyan@uwaterloo.ca。组合学与优化系，滑铁卢大学，加拿大。

使得不存在对称次模函数 g 和 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 满足 $\mathcal{F} = \{S : g(S) < \lambda\}$ (命题 8)。此外，对于任意正整数 $d \geq 2$，我们的构造保证 $\mathcal{F}$ 不能被划分为d （或更少个）不可交叉集合族（命题 7）。

本文的结果基于第一作者学位论文中的一个子章节，参见 [8,第 2.3 章2]。

例 *1*。下面的例子展示了一个满足结构次模性的可塑族 $\mathcal{F}$，但不存在对称次模函数 g 和 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 使得 $\mathcal{F} = \{S : g(S) < \lambda\}$。更多详情请参见第 *3* 节。令 V 为长度为 *3* 的二进制向量集合。为方便记号，我们用数字 *0*，...，*7* 标记 V中的向量，使得 $0 = \vec{v}_{\{\}}$，$1 = \vec{v}_{\{1\}}$，$2 = \vec{v}_{\{2\}}$，$3 = \vec{v}_{\{1,2\}}$，$4 = \vec{v}_{\{3\}}$，$5 = \vec{v}_{\{1,3\}}$，$6 = \vec{v}_{\{2,3\}}$，$7 = \vec{v}_{\{1,2,3\}}$。

$$\mathcal{F} = \{V_1 = \{1,3,5,7\}, V_2 = \{2,3,6,7\}, V_3 = \{4,5,6,7\},$$
$$\{2,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{6,7\}\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{4,5,7\}\}$$

令 $U_3 = V_3 - (V_1 - V_2)$，并令 $W_3 = U_3 - (V_2 - V_1)$；注意到 $(V_1 - V_2 - V_3) = \{1\}$，且 $(V_2 - V_1 - V_3) = \{2\}$。我们为 3 对交叉集合写出次模不等式，然后将这3个不等式相加：

$$\begin{aligned}
V_1, \quad V_2 &\qquad g(V_1) + g(V_2) - g(V_1 - V_2) - g(V_2 - V_1) \geq 0 \\
(V_1 - V_2), \quad V_3 &\qquad g(V_1 - V_2) + g(V_3) - g(V_1 - V_2 - V_3) - g(U_3) \geq 0 \\
(V_2 - V_1), \quad U_3 &\qquad g(V_2 - V_1) + g(U_3) - g(V_2 - V_1 - V_3) - g(W_3) \geq 0 \\
\textit{Sum of inequalities:} &\qquad g(V_1) + g(V_2) + g(V_3) - g(\{1\}) - g(\{2\}) - g(W_3) \geq 0
\end{aligned}$$

由于 $V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{F}$，我们有 $g(V_1) < \lambda, g(V_2) < \lambda, g(V_3) < \lambda$；又由于 $\{1\}, \{2\}, W_3 = \{4,7\} \notin \mathcal{F}$，我们有$g(\{1\}) \geq \lambda, g(\{2\}) \geq \lambda, g(W_3) \geq \lambda$。矛盾。

2 预备知识

对于正整数 k，我们用 $[k]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$。若 A, B 是 V（底集）的子集对，且四个集合 $A \cap B, V - (A \cup B)$ $A - B, B - A$ 均非空，则称它们交叉。

若对所有集合对 A、$B \subseteq V$, [7]，不等式 $g(A)+g(B) \geq g(A \cap B)+g(A \cup B)$均成立，则称定义在 V子集上的函数 g：$2^V \to \mathbb{Q}$ 为次模函数。若对所有集合 $S \subseteq V$，$g(S) = g(\bar{S}) = g(V - S)$，则称函数 g：$2^V \to \mathbb{Q}$ 为对称函数。对于对称次模函数 g：$2^V \to \mathbb{Q}$，我们有

$$g(A) + g(B) = g(A) + g(\bar{B}) \geq g(A \cap \bar{B}) + g(A \cup \bar{B}) = g(A - B) + g(B - A),$$

因为 $A \cap \bar{B} = A - B$ 且 $g(A \cup B) = g(A \cup B) = g(A \cap B) = g(B - A)$。

Diestel等人 [4] 称格（$L \vee \wedge$ $x\ y \in M$ $x \vee y$、、）的子集 M为次模的，若对于所有、，和 $x \wedge y$中至少有一个属于 M。分离系统（$\mathcal{S}$、$\leq$、$*$）是一个带有反序对合→ → →的偏序集

$*$。 $\mathcal{S}$ 中的元素称为定向分离。若分离系统 $\mathcal{S}$ 是给定全域 U 中分离的子集，且作为底层格 U的子集是次模的，则称其为结构次模的 。

接下来，我们讨论集合族 $\mathcal{F}$的性质（γ），不过本文不会用到这一性质。若对于任意集合 C、S_1、$S_2 \in \mathcal{F}$，只要 $S_1 \subsetneq S_2$, C 按包含关系极小，且C与 S_1、S_2均交叉，集合 $S_2 - (S_1 \cup C)$就为空集或属于 $\mathcal{F}$, [1]，则称集合族 $\mathcal{F}$ 满足性质（γ）。

3 集合族 $\mathcal{F}$的构造

令 $k \geq 3$ 为一个正整数。令 V 为长度为 k的二进制向量集合。我们用 $\vec{v}$表示 V的一个元素，并用 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$表示 $\vec{v}$的各个坐标。对于索引集合 $I \subseteq [k]$，我们用 $\vec{v}_I$表示满足以下条件的$\vec{v} \in V$：当且仅当 $j \in I$时，$\vec{v}_j = 1$。例如，$\vec{v}_{\{1\}} = (1, 0, .., 0)$，$\vec{v}_{\{1,k\}} = (1, 0, .., 0, 1)$，而 $\vec{v}_{[k]}$是每个坐标上都为 1 的向量。我们称 $\vec{v}_{\{1\}}, \vec{v}_{\{2\}}, \ldots, \vec{v}_{\{k\}}$为单位向量。对于索引 $i \in [k]$，令$V_i = \{\vec{v} \in V : \vec{v}_i = 1\}$；因此，$V_i$ 是 V中在第 i个坐标上取值为 1 的向量集合。

注意，单位向量恰好属于集合 $V_1, \ldots, V_k$中的一个，例如， $\vec{v}_{\{1\}}$属于 V_1，而不属于以下任何一个集合：$V_2, \ldots, V_k$。此外，注意对于任意满足 $i \neq j$的 $i, j \in [k]$，集合 V_i和 V_j交叉。算法 1 构造所需的族 $\mathcal{F}$。

算法 1： 族 $\mathcal{F}$ 构造

初始化： $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{V_1, ..., V_k\}$， $\ell = 1$。

开始第 ℓ 次迭代，令 $\mathcal{F}_\ell = \emptyset$:

1. 检查 $\mathcal{F}$ 中每一对相交的集合 A， B 。

   (a) 若 $A \cap B \notin \mathcal{F}$，则将 $A \cap B$ 加入 $\mathcal{F}_\ell$。 (b) 若 $A - B$， $B - A \notin \mathcal{F}$，i. 若 $A - B$ 和 $B - A$ 都包含单位向量，则将包含较大索引单位向量的集合加入 $\mathcal{F}_\ell$（即，假设 $A - B \ni \vec{v}_i$， $B - A \ni \vec{v}_j$， $j > i$，则将 $B - A$ 加入 $\mathcal{F}_\ell$）。ii. 若 $A - B$ 或 $B - A$ 中有一个包含单位向量，而另一个不包含单位向量，则将后者（不包含单位向量的集合）加入 $\mathcal{F}_\ell$。iii. 否则，将 $A - B$ 或 $B - A$ 中的一个加入 $\mathcal{F}_\ell$（任意选择）。

2. 如果 $\mathcal{F}_\ell = \emptyset$，则所有交叉集合对在 $\mathcal{F}$ 中都具有所需的子集。返回满足结构次模性的集合族 $\mathcal{F}$。

3. 否则，将 $\mathcal{F}_\ell$ 中的所有集合添加到 $\mathcal{F}$，更新 $\ell \to \ell + 1$，然后进入下一次迭代。

图 1 展示了 $\mathcal{F}$的迭代构造。

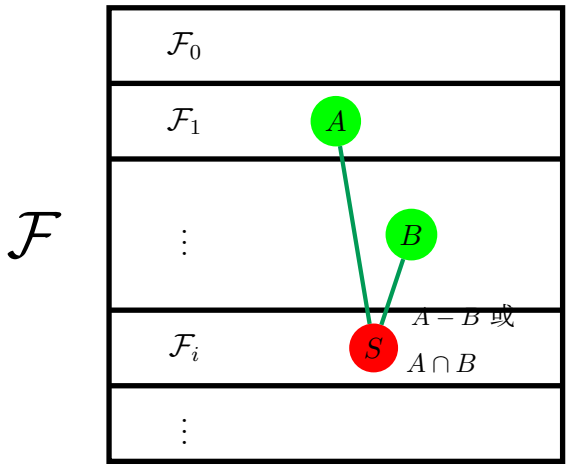

图1：算法 $\mathcal{F}$返回的集合族的迭代构造1 如图所示； $\mathcal{F}_0$、 $\mathcal{F}_1$、.....、 $\mathcal{F}_i$表示在第 $\mathcal{F}$0 次迭代中添加到、1、.....、 i的集合子族。在第 i次迭代中，对于当前 A中的每个交叉集合对 B，某些集合 $\mathcal{F}$、 $A \cap B$、 $A - B$（不在当前 $B - A$中）会被放入 $\mathcal{F}$。 $\mathcal{F}_i$。

例 2。 我们给出一个 $k = 3$的示例。节点名称显示在图 2中。为方便记号，我们用数字 V来标记 0、.....、7 中的向量，使得 $0 = \vec{v}_{\{\}}$， $1 = \vec{v}_{\{1\}}$， $2 = \vec{v}_{\{2\}}$，$3 = \vec{v}_{\{1,2\}}$， $4 = \vec{v}_{\{3\}}$， $5 = \vec{v}_{\{1,3\}}$， $6 = \vec{v}_{\{2,3\}}$， $7 = \vec{v}_{\{1,2,3\}}$。$\mathcal{F}_0 = \{V_1 = \{1,3,5,7\}, V_2 = \{2,3,6,7\}, V_3 = \{4,5,6,7\}\}\mathcal{F}_1 = \{\{2,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{3,7\},\{5,7\},\{6,7\}\}$ $\mathcal{F}_2 = \{\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{4,5,7\}\}\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ 满足结构次模性。

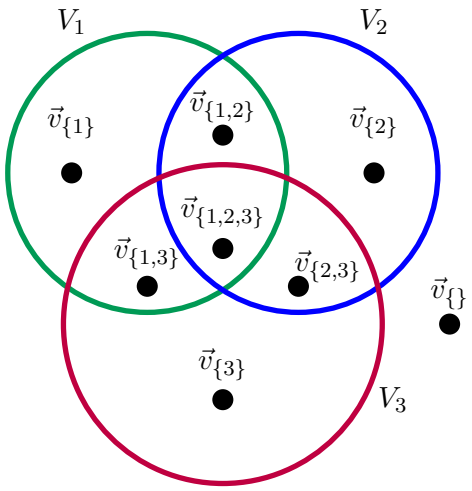

图 2：示意图　　算法 1 的 $k = 3$。向量 $\vec{v} \in V$和集合 V_1、V_2、V_3 如图所示　　.

4 集合族 $\mathcal{F}$ 的分析

我们对算法的分析依赖于几个引理。第一个引理关注于在开始时被放入 V_1、.....、V_k 中的集合 $\mathcal{F}$。第二个引理说明算法1 会终止。

第三个引理，即引理 3，是我们的关键引理。该引理使我们能够将包含一个单位向量 $S \in \mathcal{F}$ （设为 $\vec{v}_i$（满足 $S \notin \{V_1, \ldots, V_k\}$））的集合写成两个交叉集 S'、S''之差；这两个交叉集属于 $\mathcal{F}$，且各自包含一个单位向量，并满足 S'' 来自早于 S 的迭代，且 S'' 中的单位向量索引小于 i；此外， S' 来自早于 S 或与 S 相同的迭代。基于该引理，我们在引理 $\mathcal{F}$ 4、5、6中推导出集合族 $\mathcal{F}$ 的相关性质。

本节最后给出命题 7 ，证明 $\mathcal{F}$ 无法划分为 $d < k$ 个不可交叉集合族。

引理 1. 设 $\mathcal{F}$ 为算法 1的输出。

(i) 每个集合 $S \in \mathcal{F}$都是集合 $V_1, \ldots, V_k$之一的子集。

(ii) 每个集合 $S \in \mathcal{F}$ 至多包含一个单位向量；此外，若 S 包含 $\vec{v}_{\{i\}}, i \in [k]$，则 S 是 V_i的子集。

证明。 (i) 对包含 S的子族 $\mathcal{F}_i$ 的索引 i 进行归纳。归纳假设指出， $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{i-1}$ 中的每个集合都是集合 $V_1, \ldots, V_k$ 之一的子集。归纳基础成立，因为 $S \in \mathcal{F}_0$ 意味着对于某个 $i \in [k]$，有 $S = V_i$。在归纳步骤中，注意到 $S \in \mathcal{F}_i$ 意味着 $S = A \cap B$ 或 $S = A - B$，其中集合 $A, B \in \mathcal{F}$ 是在较早的一次迭代中加入 $\mathcal{F}$ 的。根据归纳假设，对于某个 $j \in [k]$，有 $A \subseteq V_j$。因此， $A \cap B, A - B \subseteq V_j$。

（ii）第二部分由第一部分以及集合 V_1、.....、V_k 的定义推出。 □

引理 2。 算法1终止。

证明。 根据引理 1，算法添加到 $\mathcal{F}$中的每个集合都是集合 V_1、……、V_k之一的子集。这些子集的数量有限。显然，由集合 V_1、……、V_k 的所有子集组成的族满足结构次模性。

□

事实 1。 设 A、$B \in \mathcal{F}$ 是各自包含一个单位向量的集合。如果 A、B 中的单位向量各不相同，那么 A、B 交叉，当且仅当 $A \cap B$ 非空。

证明。若 $A \cap B$、$V - (A \cup B)$ $A - B$、$B - A$ 均非空，则 A 与 B 交叉。设 $\vec{v}_{\{i\}}$ 属于 A，$\vec{v}_{\{j\}}$ 属于 B，且 $i \neq j$。由于 $\vec{v}_{\{i\}} \in A$、$\vec{v}_{\{i\}} \notin B$，以及 $\vec{v}_{\{j\}} \in B$、$\vec{v}_{\{j\}} \notin A$（根据引理 1），我们有 $A - B$、$B - A \neq \emptyset$。此外，注意到 $\vec{v}_{\{\}} \in V - (A \cup B)$，因为 $\vec{v}_{\{\}} \notin V_1 \cup \cdots \cup V_k$。因此，$A$、$B$ 交叉，当且仅当 $A \cap B$ 非空。 □

引理 3。 设 $S \in \mathcal{F}_\ell, \ell \geq 1$ 是一个包含单位向量的集合，记为 $\vec{v}_i \in S, i \in [k]$。那么存在一对交叉集合 S'，$S'' \in \mathcal{F}$，使得 $S = S' - S''$，并且有 $S' \ni \vec{v}_i, S' \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h, S'' \ni \vec{v}_j, j < i, S'' \in \bigcup_{h=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_h$。

证明。 对包含 S 的子族 $\mathcal{F}_\ell$ 的指标 ℓ 使用归纳法。

归纳假设：设 $S \in \mathcal{F}_\ell$ 是一个包含单位向量的集合，记为 $\vec{v}_{\{i\}} \in S$。那么存在一对交叉集合 $S' \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$，$S'' \in \bigcup_{h=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_h$，使得 $S = S' - S''$，单位向量 $\vec{v}_{\{i\}}$ 属于 S'，并且 S'' 包含一个单位向量 $\vec{v}_{\{j\}}$，满足 $j < i$。（可能 $S' \in \mathcal{F}_\ell$，也就是说，S' 可能与 S 属于同一个子族。注意，归纳法是成立的，因为 $S = S' - S''$ 和 S'，S'' 交叉，因此 $|S'| > |S|$。）

归纳基础：适用于子族 $\mathcal{F}_1$，其中 $\ell = 1$。算法添加到 $\mathcal{F}_1$ 中的集合具有如下形式：对于指标 $i, j \in [k], i \neq j$，为 $V_i - V_j$ 或 $V_i \cap V_j$。注意，每个单位向量恰好属于集合 $V_1, \ldots, V_j$ 中的一个，因此，任何形式为 $V_i \cap V_j$ 的集合都不含单位向量。然后，根据算法中使用的构造，对于指标 $i, j \in [k], j < i$，$S = V_i - V_j$。因此，归纳基础成立。

归纳步骤：设 $S \in \mathcal{F}_{\ell+1}$ 是一个包含单位向量的集合，设该向量为 $\vec{v}_{\{i\}} \in S$。由于算法 1 将 S添加到 $\mathcal{F}_{\ell+1}$，因此存在一对交叉集合 $A, B \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$，使得 $S = A \cap B$或 $S = A - B$或 $S = B - A$（并且算法由于 A, B 将 S 添加到 $\mathcal{F}_{\ell+1}$）。

> ⊛如果 S 是 A、B 的集合差，那么我们固定记号，使得 $S = A - B$；如果 $S = A \cap B$，那么我们选择 A、B，使得 $|A| \geq |B|$，且 $|A|$ 尽可能大（在所有满足 $S = A \cap B$ 的集合 A、$B \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$ 的交叉对中）。

情况 1：假设 $S = A - B$；注意 $\vec{v}_{\{i\}} \in S$。根据算法 1 的步骤 (b)(i)，$A \ni \vec{v}_{\{i\}}$，并且 B 包含一个单位向量 $\vec{v}_{\{j\}}$，满足 $j < i$。因此 $S' = A$，$S'' = B$，证毕。

情况 2：现在假设 $S = A \cap B$。由于 $\vec{v}_{\{i\}} \in S$，注意 A、B 是 V_i 的真子集（如果 $A = V_i$ 或 $B = V_i$，那么 A、B 就不会交叉）。

> 由于 $A \notin \{V_1, \ldots, V_k\}$、$A \ni \vec{v}_{\{i\}}$ 和 $A \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$（注意 $S \in \mathcal{F}_{\ell+1}$、$A \notin \mathcal{F}_{\ell+1}$），根据归纳假设，存在交叉集合对 A'，A''，使得 $A = A' - A''$、$A' \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$、$A'' \in \bigcup_{h=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_h$、$\vec{v}_{\{i\}} \in A'$、$\vec{v}_{\{j\}} \in A''$ 和 $j < i$。
>
> 因此，我们有 $S = (A' - A'') \cap B$，这等价于 $S = (A' \cap B) - A''$。

子情形 2.1：假设 A'、B 交叉。于是算法将 $A' \cap B$ 添加到 $\mathcal{F}$，并且由于 A'、$B \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$，我们有 $A' \cap B \in \bigcup_{h=0}^{\ell+1} \mathcal{F}_h$。回想一下，$\vec{v}_{\{i\}} \in A \cap B \subseteq A' \cap B$ 和 $\vec{v}_{\{j\}} \in A''$。接下来，注意到 $A' \cap B \cap A''$ 非空，因此，根据事实 1，$A' \cap B$ 和 A'' 交叉。（如果 $A' \cap B \cap A''$ 为空，那么我们将有 $S = (A' \cap B) - A'' = (A' \cap B)$，这与我们对 A、B 的选择矛盾，因为 $A' \supsetneq A$，并且根据 ⊛，我们会选择 A'、B。）因此，$S' = A' \cap B$、$S'' = A''$，问题得证。

子情形 2.2：假设 A' 和 B 不交叉。首先，注意到 B 是 A'的真子集，因为 $A' \cap B$ 非空（$\vec{v}_{\{i\}} \in A' \cap B$），且 $A - B \subset A'$（因为 $A = A' - A''$）。接下来，注意到 $B \cap A''$ 非空；否则，若 $B \cap A''$ 为空，就会产生矛盾：$S = (A' \cap B) - A'' = B - A'' = B$。因此，$A''$ 和 B 交叉，因为 $\vec{v}_{\{i\}} \in A \cap B \subseteq B$ 且 $\vec{v}_{\{j\}} \in A''$（应用事实 1）。最后，注意到$S = (A' \cap B) - A'' = B - A''$，于是取 $S' = B$、$S'' = A''$ 即可得证。

□

引理 4. 令 $S \in \mathcal{F}_\ell, \ell \geq 1$ 为一个包含单位向量的集合，记作 $\vec{v}_i \in S, i \in [k]$。那么， S 可以表示为一个表达式，记作 *express*(S,i)，该表达式由集合 $V_1,\ldots,V_i$（即索引属于 $[i]$ 的 $\mathcal{F}_0$ 集合）构成，使得 *express*(S,i) 具有以下形式： $\big($ *express*(S',i) $-$ *express*$(S'',\hat{}\,j)\big)$，其中$\hat{}\,j < i$。此外，*express*(S,i) 中的第一项是 V_i，而该表达式中的其他每一项（“底层”项）都具有 $V_j, j < i$ 的形式。

证明。 我们反复应用引理 3，从表达式 $S = S' - S''$开始，其中 $S' \ni \vec{v}_i$， $S' \in \bigcup_{h=0}^{\ell} \mathcal{F}_h$且 $S'' \ni \vec{v}_{\hat{j}}$， $\hat{}\,j < i$， $S'' \in \bigcup_{h=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_h$，直到每个集合 R在 express(S， i) 中都是一个 $\mathcal{F}_0$(即 $R \in \{V_1,\ldots,V_k\}$)。

每当我们应用引理 3 将集合 R改写为 $R'-R''$的形式时，请注意， R''来自比 R 更早的一次迭代（即 $R'' \in \mathcal{F}_{\ell''}$，其中 $\ell'' < \ell$）；而 R' 要么来自比 R 更早的一次迭代，要么与 R来自同一次迭代；在后一种情况下，我们有 $|R'| > |R|$ （因为 R'、R'' 是满足$R = R' - R''$的交叉集合对）。我们用 $\vec{v}_{\{i'\}}$ 表示 R 中的单位向量（因此， $R \subset V_{i'}$、 $R \neq V_{i'}$）。注意， R' 包含单位向量 $\vec{v}_{\{i'\}}$ （即 R中的单位向量），而 R'' 包含一个单位向量 $\vec{v}_{\{j'\}}$，其中 $j' < i'$。因此，改写过程最终会得到一个由集合 V_1、……、V_i表示的表达式。

此外，注意到表达式 express(S,i) 中的第一项是 V_i，而该表达式中所有其他“底层”项的指标都小于 i。具体来说，若将括号中的表达式 express(S,i) 表示为一棵二叉树，其中每个节点代表一个集合 R，该集合按照引理 3 被改写为 $R'-R''$ 的形式，那么，这棵树底层的节点代表集合 V_1、……、V_k；最左侧的底层节点代表 V_i，其余每个底层节点分别代表集合 V_1、……、V_{i-1}。 □

引理 5。 设 $S \in \mathcal{F}_\ell, \ell \geq 1$ 是一个包含单位向量的集合，设该单位向量为 $\vec{v}_i \in S, i \in [k]$。令 I 为指标集 $\{i\} \cup I_\oplus$，其中 $I_\oplus$ 是 $\{i+1,\ldots,k\}$ 的子集。则 S 包含向量 $\vec{v}_I$。因此， $|S| \geq 2^{k-i}$。

证明。根据引理 4，我们可以将 S改写为关于集合 V_1、……、V_i的形式 express(S,i)，使得 express(S,i)具有 (express(S',i) $-$ express($S'',\hat{}\,j$)) 的形式，其中$\hat{}\,j < i$。此外，express(S,i)中的第一项为 V_i，而该表达式中的其他每一项均具有 V_j、$j < i$的形式。

显然， V_i包含向量 $\vec{v}_I$，而且， $\vec{v}_I$不属于集合 V_j， $j < i$ 中的任何一个（注意，每个向量$\vec{v} \in V_j$ 都有 $\vec{v}_j = 1$，而向量 $\vec{v}_I$ 在第 j 个坐标上为零）。因此，根据 express(S， i) 的性质， S包含 $\vec{v}_I$。

注意，存在 2^{k-i} 个形如 I的指标集（因为 $\{i+1,\ldots,k\}$有 2^{k-i} 个不同的子集）。 □

引理 6。 由算法 $\mathcal{F}$ 计算得到的集合族*1* 满足以下条件：

(a) 对于每个 $i \in [k-1]$, $\{\vec{v}_{\{i\}}\} \notin \mathcal{F}$。 ***(b)*** 对于 $i,j \in [k]$，其中 $i < j$, $V_i - V_j \notin \mathcal{F}$。 ***(c)*** 对于 $i \in \{3,\ldots,k\}$，设 W_i 是一个满足 $\vec{v}_{\{i\}} \in W_i$, $\vec{v}_{[k]} \in W_i$ 和 $\vec{v}_{\{1,i\}} \notin W_i$ 的集合。那么 $W_i \notin \mathcal{F}$。

证明。 **部分 (a)：** 根据引理 5，任意包含单位向量 $S \in \mathcal{F}$的集合 $\vec{v}_{\{i\}}$， $i \in [k-1]$的大小为 $\geq 2^{k-i} \geq 2$。因此，对于 $i \in [k-1]$， $\mathcal{F}$不包含由单位向量 $\vec{v}_{\{i\}}$构成的单元素集合。

（b）部分： 注意，向量 $\vec{v}_{\{i,j\}}$ 同时属于 V_i 和 V_j，因此不属于集合 $V_i - V_j$。另一方面，根据引理5，如果集合 $S \in \mathcal{F}$ 包含单位向量 $\vec{v}_{\{i\}}$，那么 S 也包含向量 $\vec{v}_{\{i,j\}}$。因此，集合 $V_i - V_j$ 不属于 $\mathcal{F}$。

（c）部分： 注意，向量 $\vec{v}_{\{1,i\}}$ 属于 V_1 和 V_i，但不属于集合 V_j、 $j \in \{2,\ldots,k\} - \{i\}$ 中的任何一个。反设 W_i 属于 $\mathcal{F}$；注意到 $W_i \neq V_i$ （因为 $\vec{v}_{\{1,i\}} \in V_i$ 和 $\vec{v}_{\{1,i\}} \notin W_i$）。

根据引理 4，我们可以将 W_i 改写为关于集合 V_1、……、V_i 的形式 express(W_i,i)，使得 express(W_i,i) 具有 (express(S',i) $-$ express($S'',\hat{}\,j$)) 的形式，其中$\hat{}\,j < i$。此外，express(W_i,i) 中的第一项是 V_i，而该表达式中的其他每一项都具有 $V_j, j < i$ 的形式。

由于 $\vec{v}_{\{1,i\}} \notin W_i$，可知项 V_1 出现在 express(W_i， i) 中，也就是说，我们从 V_i 中移除 V_1 或 V_1 的一个子集，以得到 W_i。由于 $\vec{v}_{[k]} \in W_i$，我们从 V_i 中移除的是 V_1 的一个真子集（否则，如果我们从 V_i 中移除 V_1，那么就会从 W_i 中移除 $\vec{v}_{[k]}$）。这就产生了矛盾，因为 express(W_i， i) 没有形如 (V_1 − ($V_j \ldots$)) 的子表达式（因为根据 express(W_i， i) 的定义，我们会得到 $j < 1$）。

□

命题　　第 7 节。集合族 $\mathcal{F}$ 不能划分为 $d < k$ 个不可交叉集合族　　s.

证明。 对于 i, $j \in [k]$, 由于 $i < j$, 注意到:

(a) $V_i \cup V_j$ 不属于 $\mathcal{F}$, 因为根据引理 1, $\mathcal{F}$中的每个集合都是集合 V_1、.....、 V_k中的某一个的子集。

(b) $V_i - V_j$ 不属于 $\mathcal{F}$, 根据引理 6的第 (b) 部分。

现在, 假设 $\mathcal{F}$ 可以划分为 $d < k$ 个不可交叉集合族。那么, 集合 V_i 和V_j中的两个集合, 其中 i, $j \in [k]$, $i < j$, 将处于该划分的同一个"块"中, 即 V_i和 V_j将属于同一个不可交叉集合族, 记为 $\mathcal{F}$。这将违反不可交叉性, 因为 $V_i \cup V_j \notin \mathcal{F}$ 和 ˆ$V_i - V_j \notin \mathcal{F}$。

□

5 对称次模函数与 $\mathcal{F}$的比较

本节的目标是证明以下结果。

命题 8. 不存在对称次模函数 $g: 2^V \to \mathbb{Q}$ 和 $\lambda \in \mathbb{Q}$, 使得$\mathcal{F} = \{S: g(S) < \lambda\}$。

给定一个图 $G = (V, E)$, 以及定义在边上的非负容量 $c: E \to \mathbb{Q}$, 割容量函数$c(\delta_G(\cdot)): 2^V \to \mathbb{Q}$ 是一个对称次模函数。（回忆一下, $c(\delta_G(S)) := \sum_{e \in \delta_G(S)} c_e$。）命题 8 表明, 族 $\mathcal{F}$ 无法实现为某个赋权图的小割族; 换言之, 不存在任何赋权图 $G = (V, E)$ c和 $\lambda \in \mathbb{Q}$, 使得 $\mathcal{F} = \{S: c(\delta_G(S)) < \lambda\}$。

我们用以下反证法证明命题 8。设 $g(\cdot)$ 是基集 V 上任意一个对称次模函数（回想一下, $\mathcal{F}$是 V 的子集族）。对于任意一对交叉集 $A, B \subseteq V$, 我们有不等式 $g(A) + g(B) \geq g(A - B) + g(B - A)$。设 $k \geq 3$ 是一个正整数。回想一下, 算法 1 从集合 $V_1, \ldots, V_k$开始, 并构造 $\mathcal{F}$。假设存在 $g(\cdot)$和 $\lambda \in \mathbb{Q}$, 使得$\mathcal{F} = \{S: g(S) < \lambda\}$。我们着重考虑 $2k - 3$ 对交叉集（将在下文讨论）及其对应的$2k - 3$ 不等式。将这些 $2k - 3$ 个不等式相加, 得到不等式

$$g(V_1) + g(V_2) + \cdots + g(V_k) - g(\{\vec{v}_{\{1\}}\}) - g(\{\vec{v}_{\{2\}}\}) - g(W_3) - \cdots - g(W_k) \geq 0, \quad (*)$$

其中 $W_3, \ldots, W_k$是 V 的子集, 但未出现在 $\mathcal{F}$中; 接下来我们将定义 $W_3, \ldots, W_k$。回想一下, $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{F}$, 并且根据引理 6(a), $\{\vec{v}_{\{1\}}\}, \{\vec{v}_{\{2\}}\} \notin \mathcal{F}$。由于 $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{F}$, 我们有 $g(V_i) < \lambda, \forall i \in [k]$。由于 $\{\vec{v}_{\{1\}}\}, \{\vec{v}_{\{2\}}\} \notin \mathcal{F}$且 $W_3, \ldots, W_k \notin \mathcal{F}$, 我们有 $g(\{\vec{v}_{\{1\}}\}) \geq \lambda, g(\{\vec{v}_{\{2\}}\}) \geq \lambda, g(W_i) \geq \lambda, \forall i \in \{3, \ldots, k\}$。因此, 不等式 (∗) 不可能成立。这便得到了所需的矛盾。

接下来, 我们列出 $2k - 3$ 交叉集合对, 并在下文说明∗的不等式 $k = 4$。这 $2k - 3$交叉集合对由两个列表组成。第一个列表包含以下 $k - 1$ 集合对; 引理9 （见下文）表明, 其中每一对都是交叉集合:

$$\begin{aligned} V_1, &\quad V_2 \\ (V_1 - V_2), &\quad V_3 \\ (V_1 - V_2 - V_3), &\quad V_4 \\ &\cdots \\ (V_1 - V_2 - \cdots - V_{k-1}), &\quad V_k. \end{aligned}$$

对于 $i = 3, \ldots, k$, 我们将 U_i定义为集合 $V_i - (V_1 - V_2 - \cdots - V_{i-1})$。因此, $U_3 = V_3 - (V_1 - V_2)$、 $U_4 = V_4 - (V_1 - V_2 - V_3)$、.....、 $U_k = V_k - (V_1 - V_2 - \cdots - V_{k-1})$。对于 $i = 2, \ldots, k - 1$, 注意 U_{i+1}是上文列出的第 i对交叉集合中的一个集合差。第二个列表包含以下 $k - 2$ 对

集合；引理9 （见下文）表明，这些集合各自构成交叉集的一对 s:

$$\begin{aligned}(V_2 - V_1), &\quad U_3\\ (V_2 - V_1 - V_3), &\quad U_4\\ \cdots &\\ (V_2 - V_1 - V_3 - \cdots - V_{k-1}), &\quad U_k.\end{aligned}$$

我们将 W_3 定义为集合 $U_3 - (V_2 - V_1)$，对于 $i = 4, \ldots, k$，我们将 W_i 定义为集合 $U_i - ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i-1})$。因此， $W_3 = U_3 - (V_2 - V_1)$， $W_4 = U_4 - (V_2 - V_1 - V_3)$， $\ldots$， $W_k = U_k - (V_2 - V_1 - \cdots - V_{k-1})$。注意，上述第二个列表中第一对交叉集合的两个集合差为 $(V_2 - V_1) - U_3$ 和 W_3；对于 $i = 2, \ldots, k-2$，上述第二个列表中第 i 对交叉集合的两个集合差为 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1}) - U_{i+2}$ 和 W_{i+2}。此外，注意 $(V_2 - V_1) - U_3 = (V_2 - V_1) - \big(V_3 - (V_1 - V_2)\big) = (V_2 - V_1 - V_3)$；对于 $i = 2, \ldots, k-2$，注意 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1}) - U_{i+2} = ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1}) - \big(V_{i+2} - (V_1 - V_2 - \cdots - V_{i+1})\big) = ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+2})$，因为第一项对应的集合 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1})$ 与集合 $(V_1 - V_2 - \cdots - V_{i+1})$ 不相交。

引理 9. *(a)* 在第一个列表中，任意一对集合都是交叉的。

(b) 在第二个列表中，任意一对集合都是交叉的。

证明。 **(a):** 设 i 是 $\{1, \ldots, k-1\}$中的一个指标。第 i对集合是第一个列表中的$V_1 - V_2 - \cdots - V_i)$ V_{i+1}。注意，单位向量 $\vec{v}_{\{1\}}$ 属于集合 $(V_1 - V_2 - \cdots - V_i)$，而单位向量 $\vec{v}_{\{i+1\}}$ 属于集合 $(V_{i+1}$。这两个集合的交集非空，因为向量 $\vec{v}_{\{1,i+1\}}$ 同时属于这两个集合。因此，根据事实1，这两个集合是交叉的。

(b): 设 i 是 $\{1, \ldots, k-2\}$中的一个指标。第二个列表中的第一对集合是 $(V_2 - V_1)$ U_3。对于 $i \geq 2$，第二个列表中的第i对集合是 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1})$ U_{i+2}。注意，单位向量 $\vec{v}_{\{2\}}$ 属于第一个集合（即 $(V_2 - V_1)$ 或 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+1})$），而单位向量 $\vec{v}_{\{i+2\}}$ 属于第二个集合（即 (U_{i+2})）。这两个集合的交集非空，因为向量 $\vec{v}_{\{2,i+2\}}$ 同时属于这两个集合。因此，根据事实 1，这两个集合是交叉的。

□

引理10. 集合 $W_3 = U_3 - (V_2 - V_1)$ 不在 $\mathcal{F}$ 中，而对于 $i = 4, \ldots, k$，集合 $W_i = U_i - ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i-1})$ 不在 $\mathcal{F}$ 中。

证明。设 i 是 $\{4, \ldots, k\}$ 中的一个指标。注意， $W_i = U_i - ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i-1}) = V_i - (V_1 - V_2 - V_3 - \cdots - V_{i-1}) - ((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i-1})$。显然，单位向量 $\vec{v}_{\{i\}}$ 属于 W_i，因为 $\vec{v}_{\{i\}} \in V_i$，且对于 $j = 1, \ldots, i-1$， $\vec{v}_{\{i\}} \notin V_j$。此外，向量 $\vec{v}_{[k]}$ 属于 W_i，因为该向量属于 V_i，且该向量不属于集合 $(V_1 - V_2 - V_3 - \cdots - V_{i-1})$ 或 $((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i-1})$。向量 $\vec{v}_{\{1,i\}}$ 不属于 W_i，因为该向量属于集合 V_1, V_i，且对于 $j = 1, \ldots, i-1$， $\vec{v}_{\{1,i\}} \notin V_j$，因此，$\vec{v}_{\{1,i\}}$ 同时属于集合 V_i 和 $(V_1 - V_2 - V_3 - \cdots - V_{i-1})$。于是，根据引理6(c)，集合 W_i 不属于 $\mathcal{F}$。

类似的论证表明， $W_3 \notin \mathcal{F}$。 □

将对应于交叉集合的 $2k-3$ 对的 $2k-3$ 不等式相加时，其中若干项会相互抵消，只留下 $g(V_1)$.....， $g(V_k)$、 $-g(\{\vec{v}_{\{1\}}\})$、 $-g(\{\vec{v}_{\{2\}}\})$、 $-g(W_3)$.....， $-g(W_k)$这些项。更具体地说，对于第一个列表中的第 i个交叉对，当 $i \in \{1, \ldots, k-2\}$时，项 $-g(V_1 - V_2 - \cdots - V_{i+1})$与第一个列表中第（$i+1$）个交叉对的项 $+g(V_1 - V_2 - \cdots - V_{i+1})$相抵消；而当 $i \in \{2, \ldots, k-1\}$时，项 $-g(U_{i+1})$与第二个列表中第（$i-1$）个交叉对的一项相抵消；第一个列表中第一个交叉对的项 $-g(V_2 - V_1)$与第二个列表中第一个交叉对的一项相抵消。最后，对于第二个列表中的第 i个交叉对，当 $i \in \{1, \ldots, k-3\}$时，项 $-g((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+2})$与第二个列表中第（$i+1$）个交叉对的项 $+g((V_2 - V_1) - V_3 - \cdots - V_{i+2})$相抵消。

命题 8 由上述讨论和引理 9、10即可得出。下一个结果可由这些命题推出。

定理 11. 对于任意正整数 $d \geq 2$，算法 *1* 构造一个满足结构次模性的可变集合族 $\mathcal{F}$，使得：***(a)*** 不存在对称次模函数 $g : 2^V \to \mathbb{Q}$ 且$\lambda \in \mathbb{Q}$ 满足 $\mathcal{F} = \{S : \ g(S) < \lambda\}$；并且 ***(b)*** $\mathcal{F}$ 不能划分为 d （或更少个）不可交叉集合族。

例 3. 下面这个包含 $k = 4$ 的例子说明了上述讨论。注意 $U_3 = V_3 - (V_1 - V_2)$、 $U_4 = V_4 - (V_1 - V_2 - V_3)$、 $W_3 = U_3 - (V_2 - V_1)$、 $W_4 = U_4 - (V_2 - V_1 - V3)$。另外，注意 $(V_1 - V_2 - V_3 - V_4) = \{\vec{v}_{\{1\}}\}$，以及 $(V_2 - V_1 - V_3 - V_4) = \{\vec{v}_{\{2\}}\}$。我们有 $2k - 3 = 5$ 对交叉集合及其对应的不等式。

$$
\begin{aligned}
V_1,\ V_2 &\quad g(V_1) + g(V_2) - g(V_1 - V_2) - g(V_2 - V_1) \geq 0 (V_1 - V_2) \\
V_3 &\quad g(V_1 - V_2) + g(V_3) - g(V_1 - V_2 - V_3) - g(U_3) \geq 0 (V_1 - V_2 - V_3) \\
V_4 &\quad g(V_1 - V_2 - V_3) + g(V_4) - g(V_1 - V_2 - V_3 - V_4) - g(U_4) \geq 0 (V_2 - V_1) \\
U_3 &\quad g(V_2 - V_1) + g(U_3) - g(V_2 - V_1 - V_3) - g(W_3) \geq 0 (V_2 - V_1 - V_3) \\
U_4 &\quad g(V_2 - V_1 - V_3) + g(U_4) - g(V_2 - V_1 - V_3 - V_4) - g(W_4) \geq 0 \text{不等式之和：} g(V_1) \\
&+ g(V_2) + g(V_3) + g(V_4) - g(\{\vec{v}_{\{1\}}\}) - g(\{\vec{v}_{\{2\}}\}) - g(W_3) - g(W_4) \geq 0
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Ishan Bansal、Joseph Cheriyan、Logan Grout 和 Sharat Ibrahimpur。通过将原始-对偶方法推广到不可交叉函数之外，改进近似算法。*Algorithmica*，86(8):2575–2604，2024。doi:10.1007/s00453-024-01235-2。

[2] Reinhard Diestel。抽象分离系统。*Order*，35(1):157–170，2017年4月。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s11083-017-9424-5，doi:10.1007/s11083-017-9424-5。

[3] Reinhard Diestel、Philipp Eberenz 和 Joshua Erde。图中块与纠缠的对偶定理。*SIAM* 离散数学杂志，31(3):1514–1528，2017。doi:10.1137/16M1077763。

[4] Reinhard Diestel、Joshua Erde 和 Daniel Weißauer。抽象分离系统中的结构次模性与纠缠。组合理论杂志 *A* 辑，167：155–180，2019。网址：https://doi.org/10.1016/j.jcta.2019.05.001。

[5] Reinhard Diestel 和 Sang-il Oum。纠缠-树对偶：图、拟阵及其他领域中的情形。*Combinatorica*，39(4)：879–910，2019 年 8 月。doi:10.1007/s00493-019-3798-5。

[6] Christian Elbracht、Jay Lilian Kneip 和 Maximilian Teegen。次模分离系统的结构，2021 年。网址：https://arxiv.org/abs/2103.13162，arXiv:2103.13162。

[7] Alexander Schrijver。组合优化：多面体与效率，算法与组合学第 24 卷。Springer，柏林、海德堡、纽约，2003 年。

[8] Miles Simmons。《小割与灵活图连通性问题》封面。硕士学位论文，滑铁卢大学，滑铁卢，安大略省，加拿大，2025年9月。网址：https://hdl.handle.net/10012/22426。

[9]David P. Williamson、Michel X. Goemans、Milena Mihail 和 Vijay V. Vazirani。用于广义斯坦纳网络问题的原始-对偶近似算法。*Combinatorica*，15(3)：435–454，1995年。doi:10.1007/BF01299747。