一种新的快速多重打靶法：利用同时进行的 Floquet 向量计算，避免大型线性系统，以计算辛映射中的周期轨道

Bhanu Kumar[a], *

[a]密歇根大学数学系，*530 Church St.*，美国密歇根州安娜堡市，邮编 *48109*

arXiv:2601.00149v1 [math.DS] 1 Jan 2026

摘要

给定一个四维辛映射 F_0，其具有一个由不变环面层叠而成的正规双曲不变圆柱，其中旋转数为有理数的环面本身又由次谐波周期轨道（SPO）层叠而成。若 F_0属于一个扰动族 F_ε，人们通常希望计算在 $\varepsilon > 0$ 下仍然存在的这些 SPO。假设已识别出 F_0 的一个持续存在的 SPO，本文将开发一种拟牛顿法，同时求解该 SPO 及其 Floquet 向量和乘子。这进而使得可以针对扰动参数 ε进行延拓。随后，利用得到的 SPO 和 Floquet 向量，计算该 SPO 的弱稳定流形和不稳定流形的泰勒参数化（若它们存在）。我们的拟牛顿法基于对不变环面参数化方法的改造；本文首次将这一框架用于直接计算周期轨道点。与以往用于 SPO 的多重打靶法相比，新算法效率更高；值得注意的是，它适用于由 2 自由度系统的周期扰动产生的 2.5 自由度哈密顿流的频闪映射。这些工具已成功用于研究受扰天体系统中的共振轨道，相关结果总结如下，以展示这些方法的实用性。

关键词：周期轨道、次谐、共振、参数化方法、三体问题*2020*年数学主题分类：37C25, 37C27, 37J12, 70H12

1. 引言

在二维自由度哈密顿系统中，例如天体力学中著名的平面圆型限制性三体问题（PCR3BP），不稳定周期轨道及其附属的稳定/不稳定流形是全局动力学的关键驱动因素。这类周期轨道构成与二维圆柱微分同胚的单参数族，其轨道周期沿族变化。当此类二自由度哈密顿系统受到周期扰动，形成一个2.5自由度非自治哈密顿系统时，周期与扰动周期 T非共振的不稳定周期轨道 T_p 通常会在扰动强度足够小时持续存在为不变环面 [1]。另一方面，周期共振，即次谐的轨道持续存在的情况则更为微妙——其结果强烈依赖于在周期轨道和周期扰动上选取的初始相位。大多数相位对应的次谐轨道会被扰动破坏，但某些相位会产生在受扰动的2.5自由度系统中仍能持续存在为周期轨道的轨道。此外，若 $T_p/T = p/q$ 与 p互 $q \in \mathbb{Z}^+$ 素，这些周期轨道在2.5自由度系统中的周期将为 $pT = qT_p$，可能远长于它们在未受扰动的二维自由度哈密顿系统中的周期 T。

尽管上述讨论是在连续时间流的背景下进行的，但也可以通过辛映射给出等价的刻画。具体而言，在2.5自由度系统中，由于扰动的周期为 T_p，因此也可以考虑运动方程的时间-T_p 流映射的动力学。这

*通讯作者电子邮箱：bhkumar@umich.edu (Bhanu Kumar)

会产生一个作用于四维相空间的（辛）频闪映射。事实上，也可以在未扰动的二自由度情形下定义该映射，因此，2.5自由度系统的频闪映射就成为对二自由度系统映射的扰动。在此背景下，二自由度流的不稳定周期轨道族成为未受扰映射上的二维圆柱形正规双曲不变流形（NHIM），其上完全叶状分解为部分双曲型不变（一维）环面——每个环面都对应一条不同的流周期轨道。周期与扰动周期不共振的轨道会成为具有无理旋转数的环面，而周期共振的轨道则会成为具有有理旋转数的（未受扰映射的）不变环面。正如KAM理论所示， [2], 具有无理旋转数的大多数环面在扰动足够小时都会持续存在，而具有有理旋转数的环面 p/q 则不会。这些后一类环面本身又叶状分解为 q条未扰动二自由度系统频闪映射的迭代周期轨道；在这些映射周期轨道中，通常只有一个离散子集会在扰动下持续存在。

在流和映射中，由于有理数相较于无理数十分稀少，未扰动系统中的大多数不稳定轨道在扰动足够小时都会以环面的形式持续存在。然而，扰动强度较大时，这一结论未必成立。事实上， [3] 指出，在木星-木卫二-木卫三系统中用于描述航天飞行的 2.5自由度限制性四体问题模型中，上述长周期映射周期轨道会产生次级共振区域；这些区域可能以 Chirikov [4], 所述的方式发生重叠，从而摧毁其间的所有环面（对应于 PCR3BP 中的不稳定流周期轨道）。这种重叠由长周期轨道的分离曲线的交点所主导；这些分离曲线是弱稳定/不稳定子流形，包含在一个持续存在的正则双曲不变流形之中。因此，要理解此类受扰 2.5自由度系统（或等价地，其频闪映射）中带须环面的破坏，就需要计算这些长周期轨道及其附着的分离曲线。

由于周期较长，尤其是当 q 较大时，通常需要采用多重打靶算法，从未扰动系统中进行数值延拓，才能计算这类持续存在的长周期不稳定周期轨道。例如，可以尝试求出周期轨道上的 q 个点，使得通过频闪映射（即 2.5 自由度系统的流，历时 T_p）传播第 i^{th} 个点后，得到第（$i+1$）$^{\text{th}}$ 个点（模 q）。在这种情况下，要用牛顿法求解四维空间中的 q 个点，需要求解一个 $4q \times 4q$ 阶线性方程组。此外，即使牛顿法已经收敛到所需的长周期轨道，要确定其完整的稳定性性质——包括潜在分离曲线（如果存在）的线性近似——传统上还需要单独执行一步，求出一个 $4q \times 4q$ 阶矩阵的特征向量。此处的牛顿迭代步骤和稳定性分析的复杂度均为 $O(q^3)$。如果 q 达到或超过约 100（这在分析不变环面的破裂时往往是必要的），整个过程的计算开销就可能相当大。

本文提出了一种高效的多重打靶算法，可同时计算这些长周期轨道及其对应的 Floquet 稳定乘子和方向。事实上，在求解长周期轨道的同时求解 Floquet 向量，使我们能够避免求解大型线性系统，因此该算法比以往仅求解轨道的方法更高效。为此，我们将 [1], 提出的参数化方法从计算不稳定不变环面及其中心、稳定和不稳定方向，推广到周期轨道的情形。尽管参数化方法 [5] 已在许多以往的研究中（例如 [6, 7, 8, 9]）用于计算具有不同性质的不变环面，但此前唯一将相关工具用于周期轨道的研究是 Calleja 等人 [10]的工作。不过，这篇论文仅研究了二维辛映射中的长周期轨道，而且只采用类似参数化方法的算法来寻找一条包含长周期轨道的一维曲线，而非轨道的实际点；轨道点本身只有在对这条曲线进行相位搜索并采用传统的大型基于矩阵的多重打靶方案后才得以求出。因此，我们认为，本文的方法首次将参数化方法用于直接计算此类长周期轨道。

此处所提出的方法适用于满足特定条件的任意四维辛映射扰动族，而不仅仅是频闪映射。因此，我们将在更一般的背景下介绍该方法：对于四维辛映射族，其未受扰映射在某个感兴趣的轨道附近具有一个二维圆柱形 NHIM，且其内部动力学是可积扭转映射，并完全由部分双曲不变环面构成。我们首先在第 2 节中精确定义问题设定与陈述，随后在第 3 节介绍一些来自天体力学的动机性背景和物理模型。第 4 节随后提出一种新的参数化方法式多重打靶算法，用于计算长周期轨道及其弗洛凯方向和乘子。接下来，第 [11, 5] 利用

5 节将介绍一种递归参数化方法，利用上述弗洛凯方向计算从某些长周期轨道发出的分离曲线。最后，第 6 节将总结应用天体力学研究中的一些成果；在这些研究中，该方法得到了成功实现和应用，以展示其效用。

本文包含若干证明，用以论证我们的方法并启发可能的改进，其中许多证明置于附录中（正文中也有相应引用）。对于主要关注算法实现细节的读者，这些证明可以略过而不会造成影响。同样，对于关注更严格结果的读者，也可以略过第 6 节中的实现细节。

2. 问题设定与陈述

2.1. 问题设定

本文将考虑定义在 $\mathbb{R}^4$ 上的辛映射族，该映射族依赖于扰动参数$\varepsilon \geq 0$。此类映射族记为 $F_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$。我们假设，未受扰映射 $F_{\varepsilon=0}$ 具有一个二维圆柱形正规双曲不变流形（NHIM） $\Xi_0 \subset \mathbb{R}^4$，其完全由一族部分双曲型（带须）不变一维环面叶状分解，因此每个此类环面的双曲方向都与该 NHIM 横截。我们还假设，映射族 F_ε 关于参数 ε 在 Ξ_0的某个邻域内于 $\varepsilon = 0$ 处可微。虽然或许可以放宽关于可微性以及相空间为 $\mathbb{R}^4$的假设，但本文仅考虑上述情形。

在正则双曲不变流形 Ξ_0 内，其每个组成不变环面都将具有一个旋转数 ω；从数学上讲，这意味着每个 F_0-不变环面都可以 [1] 使用一个函数 $K : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^4$ 进行参数化，使得

$$F_0(K(\theta)) = K(\theta + \omega) \tag{1}$$

现在，假设在 Ξ_0 中某个不变环面的至少一个邻域内，其中的环面满足扭转条件——也就是说，旋转数 ω 对于该邻域内的环面而言并非常数，而是单调变化的。这就意味着，该邻域内必定存在（无穷多个）具有共振旋转数的环面，即 $\frac{\omega}{2\pi}$ 为有理数[1]。下文将此类环面称为共振环面。

现在，考虑未受扰映射 F_0<style id='4'}，该环面的参数化K_0： $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^4$，以及其旋转数 $\omega = 2\pi p/q$ 对于某些 p, $q \in \mathbb{Z}^+$ 互质。式（1）则意味着

$$F_0^q(K_0(\theta)) = K_0(\theta + q\omega) = K_0(\theta + 2\pi p) = K_0(\theta) \tag{2}$$

换言之，这个共振环面上的任意一点 $K_0(\theta)$ 实际上都是映射 F_0 的一个 q 次迭代周期轨道的一部分，该轨道由 q 个不同的点 $K_0(\theta)$ $K_0(\theta+\omega)$……， $K_0(\theta+(q-1)\omega)$ 组成。此后，这类周期轨道称为次谐波 周期轨道。因此，F_0 的任何共振不变环面都完全被一系列连续的次谐波周期轨道所覆盖，每个 $\theta \in [0, \omega)$ 值对应一条轨道。

2.2. 问题：计算受扰次谐波周期轨道

虽然上述 NHIM、不变环面和次谐波周期轨道都是在未受扰映射 F_0 的背景下定义的，但现在考虑 $\varepsilon > 0$ 的情形。当 ε 足够小时，Fenichel [12] 及其他学者 [13] 的研究结果表明， F_0 不变 NHIM Ξ_0 应当延续到受扰映射 F_ε 中，成为受扰的二维圆柱形 NHIM Ξ_ε。随后，KAM理论 [2] 告诉我们，对于 $\varepsilon > 0$ 足够小的情形，满足扭转条件且具有充分无理（丢番图） $\frac{\omega}{2\pi}$ 的环面会在 Ξ_ε 内保持存在。另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，共振环面一般不会作为 F_ε 的不变环面继续存在；然而，这类环面上的有限个次谐波周期轨道通常会延续到受扰系统中。事实上，存在一种稳健的次谐波梅尔尼科夫理论 [14, 15]，可用于确定无穷多个次谐波周期轨道 $\{K_0(\theta)$ $K_0(\theta+\omega)$ $\ldots, K_0(\theta+(q-1)\omega)\}$ 中，哪些轨道在共振环面 $K_0(\theta)$ 上以 $\omega = 2\pi p/q$ 为周期，并会在 $\varepsilon > 0$ 时作为 F_ε 的周期轨道继续存在。映射 F_ε 的对称性也常可用于确定 F_0 中可能继续存在的次谐波周期轨道。

[1]我们采用如下约定：角度 θ 用区间 $[0, 2\pi]$ 表示，其中 0 与 2π 视为同一点。

现在我们可以提出本文要解决的关键问题：给定一条从 F_0 延续到受扰映射 F_ε 中的次谐波周期轨道，至少在 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们希望计算其对应的 F_ε 周期轨道。具体而言，若将持续存在的 F_0 次谐波周期轨道上的点记为 $X_0(k) = K_0(\theta + k\omega)$，其中 $k = 0, 1, \ldots, q-1$，使得 $F_0(X_0(k)) = X_0(k+1 \text{ 模 } q)$，我们希望求出满足该方程的点 $X_\varepsilon(k) \in \mathbb{R}^4$，$k = 0, 1, \ldots, q-1$

$$F_\varepsilon(X_\varepsilon(k)) = X_\varepsilon(k+1 \mod q) \tag{3}$$

对于所有 $k = 0, 1, \ldots\ldots, q-1$。此外，周期轨道还具有弗洛凯方向和乘子；理论上可以通过计算 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$ 的特征向量和特征值来求得它们，但在实际中，当 q 较大时，由于轨道不稳定（回想一下，它包含在正则双曲不变流形中），这种方法并不准确。因此，为了找到弗洛凯方向和乘子，我们将转而尝试求解方程

$$DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\bar{P}_\varepsilon(k) = \bar{P}_\varepsilon(k+1 \mod q)\bar{\Lambda}_\varepsilon \tag{4}$$

对于矩阵 $\bar{P}_\varepsilon(k) \in \mathbb{C}^{4\times4}$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$，其中包含各点 $X_\varepsilon(k)$ 处的弗洛凯方向，而 $\bar{\Lambda}_\varepsilon \in \mathbb{C}^{4\times4}$ 为对角矩阵，其中包含弗洛凯乘子。请注意，由此求得的 $\bar{P}_\varepsilon(k)$ 的列确实会是 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$ 的特征向量，因为将式 (4) 应用 q 次可得 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))P_\varepsilon(k) = P_\varepsilon(k)\Lambda_\varepsilon^q$; ¯ ¯考虑到 Λ_ε 是对角矩阵，这意味着 P_ε 的列是 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$ 的特征向量。

注1。请注意，X_ε 和 $\bar{P}_\varepsilon$ 可以看作从集合 $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ 到 $\mathbb{R}^4$ 和 $\mathbb{C}^{4\times4}$ 的函数；事实上，采用 $X_\varepsilon(k)$ 和 $\bar{P}_\varepsilon(k)$ 这种记法，而不是将 k 作为下标，¯旨在突出 X_ε 和 P_ε 这一表述。希望这有助于更轻松地与不变环面参数化的情形进行比较和类比（例如，比较式（1）和（3））。

3. 动机：哈密顿流映射与物理模型

二自由度自治哈密顿系统及其 2.5 自由度周期非自治扰动，是可能产生第2.1节所述情形的最常见情况之一。因此，我们现在介绍这些系统的一些背景知识、将其重新表述为四维辛映射的方法，以及天体力学中的一些具体现实例子，稍后将用这些例子说明本文的方法。熟悉二自由度哈密顿流的 2.5 自由度周期扰动的频闪映射，以及此类扰动对其周期轨道的影响的读者，可以直接跳至第4节，不会有任何影响。

3.1. 二维自由度哈密顿系统与流周期轨道的正则双曲不变流形

若使用 $\mathbb{R}^4$ 位置-动量坐标（x, y, p_x, p_y）表示，则该空间上的二维自由度哈密顿动力系统由时间无关哈密顿函数 H_0： $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 以及下列运动方程给出

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial p_x} \quad \dot{y} = \frac{\partial H_0}{\partial p_y} \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H_0}{\partial x} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H_0}{\partial y} \tag{5}$$

如上所述，这是一个连续时间流，而不是像第2.1节中那样的映射。然而，运动方程（式5）的任意固定时间流映射——即对任意$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$，在该固定时间内按照式（5）推进所得到的映射——在 $\mathbb{R}^4$ 上产生一个辛映射。此外，由于哈密顿量与时间无关，仅是（x, y, p_x, p_y）的函数，能量 H_0 沿系统轨迹是一个运动常数。

在这类二自由度哈密顿系统中，用于刻画系统全局动力学的最重要轨迹之一，是（连续时间流中的）不稳定周期轨道。这些不稳定轨道之所以备受关注，是因为它们附带的稳定/不稳定流形，其交点能够产生穿越相空间大范围区域的轨迹，并打破输运屏障。不稳定周期轨道通常连续地形成单参数族；在局部范围内，这个参数往往可以取为沿周期轨道保持恒定的哈密顿量能量值 H_0。通常，轨道周期也会沿周期轨道族连续变化。二自由度哈密顿系统中的不稳定周期轨道，其单周期（弗洛凯）矩阵具有实特征值 1、1、 λ 和 λ^{-1}，其中 $|\lambda| < 1$。

请注意，从拓扑角度看，连续时间流中的任意周期轨道都与环面微分同胚 $\mathbb{T}$。现在，给定一个不稳定周期轨道族，考虑该族中所有周期轨道的并集。所得集合将是二自由度哈密顿系统相空间中的一个二维圆柱流形 Ξ_0 $\mathbb{R}^4$。此外，在 Ξ_0的每一点，都存在横向于该流形的稳定与不稳定方向，它们正是构成 Ξ_0的周期轨道的稳定与不稳定弗洛凯特征向量。另一方面，每条周期轨道的广义单位特征空间构成该点处 NHIM 的切空间。由于相空间是四维的，而 Ξ_0 是二维的，因此在 Ξ_0的任意一点，稳定与不稳定方向连同二维流形的切空间张成整个相空间。这意味着 Ξ_0 是 正则双曲不变流形 (NHIM)，它是不稳定的二自由度系统流的一个不变流形。关于流中的 NHIM 的严格定义，参见 [12]。

3.1.1. 示例：平面圆型限制性三体问题（*PCR3BP*）

PCR3BP 是一个二自由度哈密顿系统，用于描述一个无穷小粒子（可视为航天器）在质量为 m_1 和m_2 的两个大天体（统称为主天体）的引力作用下的运动。在该模型中， m_1 和 m_2 围绕它们的质心做圆轨道运动。单位也经过归一化，使两个主天体之间的距离为 1，它们的公转周期为 2π，且 $\mathcal{G}(m_1+m_2)$为 1。我们定义质量比 $\mu = {}_{m_1+m_2}^{m_2}$，并采用以主天体质心为原点的会合旋转非惯性笛卡尔坐标系，使m_1 和 m_2 始终位于 x轴上。在平面 CRTBP 中，我们还假设航天器与主天体在同一平面内运动。在这种情况下，运动方程由哈密顿量 [16]生成

$$H_0(x,y,p_x,p_y) = \frac{p_x^2+p_y^2}{2} + p_x y - p_y x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \tag{6}$$

以及方程 (5)。这里， $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2+y^2}$和 $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}$分别表示航天器到 m_1 和 m_2的距离。请注意，PCR3BP 的运动方程具有时间反演对称性；如果 $(x(t)\ y(t)\ t)$ 是方程 (5)-(6) 在 $t>0$ 下的解，那么 $(x(-t)\ -y(-t)\ t)$ 就是其在 $t<0$ 下的解。

3.2. 二自由度系统的周期扰动：二点五自由度情形

在实际应用中，通常需要对二自由度哈密顿系统添加周期扰动。例如，PCR3BP 模型包含来自两个大天体的引力，但有时可能需要进行更精确的分析，将第三个大天体的影响也纳入考虑（详见 3.2.1）。对二自由度哈密顿系统施加此类周期性强迫作用，通常会形成一个定义在五维扩展相空间 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}$上的非自治时间周期二点五自由度哈密顿系统。此时的运动方程由方程（7）以及时间周期哈密顿函数（8）给出。

$$\dot{x} = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_x} \quad \dot{y} = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_y} \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial y} \qquad \dot{\theta}_p = \Omega_p \tag{7}$$

$$H_\varepsilon(x,y,p_x,p_y,\theta_p) = H_0(x,y,p_x,p_y) + H_1(x,y,p_x,p_y,\theta_p;\varepsilon) \tag{8}$$

其中， $\theta_p\in\mathbb{T}$ 是表示周期扰动相位的角度， H_0 是第 3.1 节中的 2自由度系统哈密顿量， H_1 : $\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 是时间周期效应引起的哈密顿摄动，并满足$H_1(x,y,p_x,p_y,\theta_p;0) = 0$， $\varepsilon>0$和 Ω_P 分别是扰动参数和摄动频率。 ε 表示扰动强度， $\varepsilon=0$ 为未受扰的 2自由度系统，而 Ω_P 是预先假定已知的恒定频率。来自 H_1 的扰动具有 $2\pi/|\Omega_p|$周期。注意，哈密顿函数 H_ε 将不再沿轨迹保持恒定。

3.2.1. 示例：平面同心圆限制性四体问题

平面同心圆限制性四体问题 [17] （圆形限制性四体问题）是一个2.5自由度哈密顿系统，由PCR3BP受到周期性第三体扰动而产生。它描述航天器在三个 大质量天体 m_1、 m_2和 m_3 的引力作用下的运动，其中 $m_1>>m_2$， m_3。假设 m_2 和m_3 绕 m_1 沿共面同心圆轨道运行，轨道半径分别为 r_{12} 和 r_{13}；其中 m_2 的运动不会影响 m_3 ，反之亦然。根据开普勒第三定律， $_2$ 和$_3$ 的角速度Ω

绕 m_1 运行的 m_2 和 m_3 的角速度取决于质量和轨道半径，对于 $i=2$，3，有$\Omega_i=\sqrt{\mathcal{G}(m_1+m_i)/r_{1i}^3}$，其中 $\mathcal{G}$ 表示万有引力常数。在平面CCR4BP中，假设 m_2 和 m_3 的圆轨道以及航天器轨迹均位于同一平面内。

定义 $\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2}$和 $\varepsilon=\frac{m_3}{m_1+m_2}$，并采用与 m_1-m_2 PCR3BP 类似的方式对质量、长度和时间单位进行归一化，使得 $\mathcal{G}(m_1+m_2)$、r_{12}和 Ω_2 均为 1。这样，平面CCR4BP的运动方程便可写成通常用于 m_1-m_2 圆形限制性三体问题的同一旋转坐标系下的形式。m_1 和 m_2 位于旋转坐标系的 x轴上，且将 m_1-m_2 质心作为坐标系原点。采用这些单位和坐标系后，x轴与从 m_1 指向 m_3 的矢量之间的角度，即为第3.2节定义的扰动相位角 θ_p。运动方程由式（7）给出，其中 $\theta_p=\Omega_3-1$，以及2.5自由度时周期哈密顿量（推导见 Blazevski 和 Ocampo [17]）

$$H_\varepsilon(x,y,p_x,p_y,\theta_p)=\frac{p_x^2+p_y^2}{2}+p_xy-p_yx-\frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2}-\frac{\varepsilon}{r_3}+\varepsilon\frac{x\cos\theta_p}{r_{13}^2}+\varepsilon\frac{y\sin\theta_p}{r_{13}^2} \tag{9}$$

此处，$(x_3,y_3)=(-\mu+r_{13}\cos(\theta_p)\ r_{13}\sin(\theta_p))$ 给出了 m_3 的位置，而 $r_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}$、$r_2=\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}$ 以及 $r_3=\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$ 分别表示航天器到 m_1、m_2 和 m_3 的距离。请注意，当 $\varepsilon=0$ 时，式（9）就是式（6）的 m_1-m_2 哈密顿量；事实上，PCR3BP 和圆形限制性四体问题都属于第3.2节和式（8）所述的框架，只需取 H_0 如式（6）所示，并且

$$H_1(x,y,p_x,p_y,\theta_p,\varepsilon)=\varepsilon\left[-\frac{1}{r_3}+\frac{x\cos\theta_p}{r_{13}^2}+\frac{y\sin\theta_p}{r_{13}^2}\right] \tag{10}$$

3.3. 频闪映射、正则双曲不变流形、环面和次谐周期轨道

假设我们有一族2自由度哈密顿流的不稳定周期轨道。这一族将构成一个二维圆柱形 NHIM，记为 $\Xi_0\subset\mathbb{R}^4$。如第 2.2 节所述，对于映射的情形，NHIM 在动力学受到足够小的扰动后仍然存在 [12]。然而，要将这一持续性结果应用于我们在 $\mathbb{R}^4$上对2自由度哈密顿流施加时周期扰动的情形，原系统和受扰系统必须定义在同一相空间上。对于受扰的2.5自由度系统而言，情况并非如此：由于加入了扰动相位角 $\theta_p\in\mathbb{T}$，其相空间是 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}$，而不是 $\mathbb{R}^4$。

为了从扩展相空间 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}$ 转到定义在 $\mathbb{R}^4$ 上、更适于微扰分析的动力系统，可以使用频闪映射。回顾第3.2节，2.5自由度系统的相位角 θ_p 具有恒定频率 Ω_p，因此其周期为 $T_p=|2\pi/\Omega_p|$。频闪映射F_ε：$\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}$因此定义为：根据含扰动参数 ε的2.5自由度运动方程（7）和（8），将扩展相空间中的点映射经过时间 T_p后的状态。根据此定义，对于任意 $\theta_0\in[0,2\pi)$，映射 F_ε 会将相空间截面 $\Sigma_{\theta_0}=\{(x,y,p_x,p_y,\theta_p)\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{T}:\ \theta_p=\theta_0\}$ 中的点映射到该截面自身；这是因为按照动力学 $\theta_p=$，以 Ω_p 的速率将 θ_p 积分频闪映射时间 $T_p=|2\pi/\Omega_p|$，只会使 θ_p 以 $\Omega_pT_p=2\pi$ 的角速度旋转一整周，或转过 -2π，回到其初始角度值。

由于对于任意 θ_0，Σ_{θ_0} 在 F_ε 的作用下映射到自身，因此可以考察 F_ε 在任意 Σ_{θ_0} 上的受限动力学；本质上，每个 Σ_{θ_0} 都是该 2.5自由度系统的一个庞加莱截面，其对应的庞加莱映射为 F_ε。此外，通过一个简单的投影 $(x,y,p_x,p_y,\theta_0)\to(x,y,p_x,p_y)$（舍去最后一个不变坐标），显然每个 Σ_{θ_0} 都与 $\mathbb{R}^4$ 微分同胚。因此，固定 θ_0 的某个取值后，稍微滥用一下记号，实际上可以将 F_ε 视为一个从 $\mathbb{R}^4$ 映射到自身的辛映射，正如所期望的那样。此外，虽然上述讨论和频闪映射的定义用到了 2.5自由度系统中扰动的周期 T_p，但同样可以根据未扰动的 2自由度系统的运动方程，定义一个时间为 T_p 的映射 $F_0:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，将 $\mathbb{R}^4$ 上的点进行映射。由此可得到一族依赖于扰动参数 $\varepsilon\geq0$ 的辛庞加莱映射 $F_\varepsilon:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，其中 $F_{\varepsilon=0}$ 对应于未扰动系统 —— 正如第 2.1 节开头所述的问题设定。

按照第 2.1 节所述方式定义的一族频闪映射，我们现在也在此背景下刻画二自由度流周期轨道的正则双曲不变流形Ξ_0。首先，由于 Ξ_0 是二自由度流的正则双曲不变流形，因此它也将是未受扰映射 F_0的正则双曲不变流形，因为 F_0 的动力学是基于同一个流定义的，因而具有相同的不变性和法向双曲性。此外，由于 Ξ_0 的每条组成周期轨道在二自由度流下都是不变的，因此在 F_0下也不变。

由于流周期轨道与一维环面微分同胚，这意味着二自由度流的每条不稳定周期轨道都对应于 F_0的一个不稳定（带须）一维不变环面。由于根据定义， Ξ_0 完全由不稳定周期轨道叶状分解，因此它也完全由 F_0的带须不变环面叶状分解，正如第 2.1 节的问题设定所要求的那样。此外，如果运动方程（7）—（8）在邻域 $\varepsilon = 0$ 内关于 ε 在 Ξ_0处可微，那么映射 F_ε 也同样可微。

最后，在确认辛庞加莱映射族 F_ε 以及由二自由度流周期轨道构成的 F_0-不变正则双曲不变流形 Ξ_0均满足第2.1节的假设后，我们现在考察这些流周期轨道在 Ξ_0 内形成的 F_0-不变环面的性质。设$\mathbf{x}_0 \in \Xi_0$ 是二自由度流中某个周期为 T 的周期轨道上的一点；将二自由度系统的时间-t 流映射记为 $\phi(\mathbf{x}\ t)$：$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$，并定义 K_0：$\mathbb{T} \to \mathbb{R}^4$为 $K_0(\theta) = \phi(\mathbf{x}_0, \frac{\theta}{2\pi}T)$，则有 —

$$F_0(K_0(\theta)) = F_0\left(\phi\left(\mathbf{x}_0, \frac{\theta}{2\pi}T\right)\right) = \phi\left(\mathbf{x}_0, \frac{\theta}{2\pi}T + T_p\right) = K_0\left(\theta + \frac{2\pi}{T}T_p\right) \tag{11}$$

中间的等式成立，是因为 F_0 是二自由度系统的时间-T_p 流映射。注意到 K_0 的像是由该周期轨道形成的整个 F_0-不变环面，因此它构成了该环面的参数化。比较式（11）与式（1）可知，该环面在 F_0下的旋转数为$\omega = 2\pi T_p/T$。因此，最后这个表达式将二自由度流周期轨道的轨道周期 T 与相应 F_0-不变环面的旋转数 ω 联系起来。现在假设，NHIM 至少某一部分中的流周期轨道在二自由度流下的周期 T 单调变化。那么，相应 F_0-不变环面的旋转数 $\omega = 2\pi T_p/T$ 将满足第2.1节的扭转条件。因此，也可以保证存在该节所定义的具有共振旋转数的环面，并且第2.1–2.2 节其余部分的讨论同样成立。

总之，我们已经证明，对于由二维自由度哈密顿系统的周期扰动所产生的 2.5 自由度哈密顿系统的频闪映射，只要该二维自由度系统包含一族不稳定周期轨道，只需对轨道周期及关于ε2.1节所设定的可微性作出少量额外假设——本文自此将采用这些假设——即可满足相关条件。这些额外假设在实践中通常都成立；例如，在研究 PCR3BP 的 2.5 自由度平面 CCR4BP 扰动时，只要扰动第三天体的轨道不与所考虑的 PCR3BP 不稳定周期轨道族相交，这两个条件就都成立，具体见$(x,\ y)$ 空间。此外，频闪映射的降维特性也使某些计算和可视化更加简单。因此，在本文余下部分中，我们只针对第2.1节中的四维辛映射介绍我们的方法，但这些方法同样适用于 2.5 自由度哈密顿流，且不失一般性。

注 2。 最后，为进一步澄清，我们还针对流导出的频闪映射情形，给出了共振环面以及次谐波周期轨道的另一种描述。具体而言，回顾第2.1 节可知，共振环面是具有 $\frac{\omega}{2\pi}$ 有理数的环面。鉴于 $\omega = 2\pi T_p/T$ 在此处，共振的 F_0-不变环面因此对应于具有 T_p/T 有理数的轨道——换言之，即二自由度流周期轨道的周期与扰动周期之间发生共振。在这种情况下，若$\frac{\omega}{2\pi} = T_p/T = p/q$，则第2.1 节中任何延续到 $\varepsilon > 0$ 情形的次谐映射周期轨道，其周期都将为 q 次频闪映射迭代，相当于在相应的 2.5自由度系统流中的时间 F_ε——等价于 qT_p。

4. 一种计算次谐周期轨道和 Floquet 向量的高效方法

在本节中，我们将针对第 F_ε 2节所述的四维辛映射扰动族，开发并实现一种高效的拟牛顿算法，以同时计算不稳定的次谐周期轨道及其弗洛凯方向和乘子。我们将介绍该方法的解析细节和推导过程，以及数值实现所需考虑的问题。该方法在很大程度上受到 [1] 提出的参数化方法的启发，该方法用于计算不变环面及其中心方向、稳定方向和不稳定方向。本节中的许多讨论和证明都与该文的结构十分相似。不过，为了处理周期轨道而非环面，我们还对该方法进行了若干重大改动，文中将逐一说明。

4.1. 不变流形参数化方法

参数化方法是一种通用技术，可用于计算动力系统中的多种不变对象。 [5] 我们将介绍若干应用。其思路是，给定一个映射 $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，如果已知存在一个 F-不变对象，它与某个模型流形 $\mathcal{M}$微分同胚，那么我们便可以求解函数 $W\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}^d$ 以及微分同胚 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使其满足不变性方程

$$F(W(s)) = W(f(s)) \tag{12}$$

对所有 $s \in \mathcal{M}$均成立。 W 称为不变流形的参数化，而 f 则称为 $\mathcal{M}$上的内部动力学。式（12）意味着 F 将像集 $W(\mathcal{M})$ 映射到其自身，因此 $W(\mathcal{M})$ 是整个空间中的不变对象 $\mathbb{R}^d$。

4.2. 次谐周期轨道与 *Floquet* 向量的参数化方法式方程

假设对于某个 $\varepsilon > 0$，我们旨在计算 F_ε 的一个次谐周期轨道（下文简称 SPO），该轨道对应于一个预期能够持续存在的、经过 q 次迭代的未扰映射次谐周期轨道（属于 F_0）。如第 2.2 节所述，我们希望找到点 $X_\varepsilon(k) \in \mathbb{R}^4$，使其属于 F_ε-SPO 并满足方程

$$F_\varepsilon(X_\varepsilon(k)) = X_\varepsilon(k+1 \mod q) \tag{13}$$

对于所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$。式（13）可以类似于第 4.1 节的框架来解释，其中$\mathcal{M} = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ 且 f（s）$= s+1$ 模 q；它也与式 1中的环面不变性方程相似，因此可以将 [1]中的环面参数化方法应用于 SPO。

此外，回顾第 2.2节，我们还试图求解式（4），以求得由 X_ε给出的 SPO 的弗洛凯方向和乘子。因此，对于拟牛顿法，我们还将加入一个形式相同的方程，但对弗洛凯矩阵采用略有不同的假设；尽管如此，这些假设仍能使式（4）也易于求解。具体而言，我们将寻找矩阵 P_ε（k） Λ_ε（k） $\in \mathbb{C}^{4\times 4}$ 使得

$$DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))P_\varepsilon(k) = P_\varepsilon(k+1 \mod q)\Lambda_\varepsilon(k) \tag{14}$$

对于所有 $k = 0$、1、.....、$q-1$。此外，我们将规定每个 $\Lambda_\varepsilon(k)$ 都具有近对角形式

$$\Lambda_\varepsilon(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & T & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_u(k) \end{bmatrix} \tag{15}$$

而非 fully-di 角 l $\bar{\Lambda}_\varepsilon$ of Secti 2 2 Here, $T, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ and $\lambda_s(k), \lambda_u(k) \in \mathbb{R}$ 是 be f 开启。

在上述 $\Lambda_\varepsilon(k)$中，我们采用如下约定：$\lambda_s(k)$和 $\lambda_u(k)$表示对应于横截包含该SPO的二维NHIM Ξ_ε 方向的稳定与不稳定SPO Floquet乘子（回顾第2.2节）。另一方面， λ_1 和 λ_2 表示沿 Ξ_ε切向的动力学的乘子。回顾第2.2节中定义的 $\bar{P}_\varepsilon(k) \in \mathbb{R}^4$，它包含点 $X_\varepsilon(k)$处SPO的弗洛凯方向，其列向量是单值矩阵$DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$的特征向量。类似地，不难看出，上述 $P_\varepsilon(k)$的第1、3和4列也将是 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$的特征向量，分别对应于特征值 λ_1^q、 $\prod_{k=0}^{q-1}\lambda_s(k)$和 $\prod_{k=0}^{q-1}\lambda_u(k)$。 $DF_\varepsilon^q(X_\varepsilon(k))$的第四个特征值将为 λ_2^q；然而，由于公式（15）中的非对角项 T， P_ε 的第2列不会是其对应的特征向量。相反，第2列将位于分别对应于 λ_1^q 和 λ_2^q 的特征向量张成空间中。尽管如此，给定公式（13）—（14）的一组解，也很容易确定这个最后的特征向量。

正如第 4.6 节末尾将要说明的，同时求解 X_ε、 P_ε 和 Λ_ε，实际上比单独求解 X_ε 更高效。与 [1] 的环面参数化方法类似（本方法由此改编而来），我们将介绍一种用于求解方程 (13)-(14) 的拟牛顿法，该方法利用Λ_ε 的近对角形式，对每个微分修正步骤中得到的线性方程组进行解耦。该方法只需进行代数运算、指标移位，以及求解标量值序列对应的一维方程。最后请注意，公式（14）实际上是欠定的；我们可以改变每个 k处稳定与不稳定方向的尺度；在第 4.3.4 节中，我们将利用这一点使 Λ_ε 保持恒定。

注释 3。注意，对于任意可逆矩阵 $V \in \mathbb{C}^{4\times 4}$，如果 X_ε、 P_ε、 Λ_ε 是方程 (13)-(14) 的解，那么矩阵 $\tilde{P}_\varepsilon(k) = P_\varepsilon(k)V$ 和 $\tilde{\Lambda}_\varepsilon(k) = V^{-1}\Lambda_\varepsilon(k)V$ 也会给出公式（ 14 ）的解。这使我们能够在方程（ 15 ）的形式、第 2.2节所需的完全对角形式以及其他形式之间改变 Λ_ε ； 这些其他形式也会在拟牛顿过程中出现。

4.3. 预备知识：常见方程与过程的求解方法

在接下来的讨论中，会反复用到一些基本过程。因此，在介绍拟牛顿法的初始化和步进算法的细节之前，我们先讨论一些后续第 4.4-4.7 节中需要用到的结果和过程。

4.3.1. 形如 $\lambda_a(k)u(k) - \lambda_b(k)u(k+1 \bmod q) = b(k)$ 的方程的不动点迭代 在以下各节中，我们将反复遇到形如

$$\lambda_a(k)u(k) - \lambda_b(k)u(k+1 \mod q) = b(k) \tag{16}$$

其中 $b(k)$ $\lambda_a(k)$，且对于所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$， $\lambda_b(k) \in \mathbb{C}$ 均为已知，而待求的是 $u(k) \in \mathbb{C}$。$\lambda_a(k)$ 和 $\lambda_b(k)$ 将等于 λ_1, λ_2, $\lambda_s(k)$, $\lambda_u(k)$ 或 1。虽然这里可以写出$u(k)$的显式公式（见第 4.3.2 节），但如果对于所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$， $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| > 1$ 或 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| < 1$ （通常如此），则使用不动点迭代会在数值上更加稳定。为此，将方程（16）改写为

$$u(k) = \left[\lambda_a(k-1 \mod q)u(k-1 \mod q) - b(k-1 \mod q)\right]/\lambda_b(k-1 \mod q) \stackrel{\text{def}}{=} [A(u)](k) \tag{17}$$

若 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| < 1$ 对所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$。若 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| > 1$，则重写方程（16） as

$$u(k) = \lambda_a^{-1}(k)\left[b(k) + \lambda_b(k)u(k+1 \mod q)\right] \stackrel{\text{def}}{=} [B(u)](k) \tag{18}$$

我们将上文定义的 A 和 B 视为映射，它们将任意有限序列 $\{u(k)\}_{k=0,\ldots,q-1}$ 映射为新的有限序列$A(u)$ 和 $B(u)$，其中 k^{th} 项由 $k = 0, \ldots, q-1$对应的方程（17）-（18）中间表达式给出。很容易证明（见附录 A），如果对所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$， $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| < 1$，那么 A 在 ℓ^∞ 范数下是压缩映射；若所有 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| > 1$ ，则 B 同样如此。因此，为了求出 u，令 $u_0(k) = 0$ 对所有 $k = 0, \ldots, q-1$成立，并从 $n = 0$开始反复迭代 $u_{n+1} = A(u_n)$（若所有 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| < 1$成立），或 $u_{n+1} = B(u_n)$（若所有$|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| > 1$成立）。根据压缩映射定理， [18], 迭代将收敛到所需的方程（17）或（18）的解序列 u ，因此也收敛到方程（16）的解。

4.3.2. 形式为 $\lambda_a(k)u(k) - \lambda_b(k)u(k+1 \text{ 模 } q) = b(k)$的方程的显式公式

上一小节给出的求解方程（16）的不动点迭代法，依赖于以下假设：对于 $k = 0, 1, \ldots, q-1$，所有 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| > 1$ 均为 1，或所有 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)| < 1$ 均为 1。然而，即使 $\lambda_a(k)$ 和 $\lambda_a(k)$ 并非都为 1（这种情况将在下一小节中处理），对于所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$，也可能有 $|\lambda_a(k)| = |\lambda_b(k)| = 1$。例如，如果所有 $\lambda_a(k) = \lambda_1$、 $\lambda_b(k) = \lambda_2$，且 λ_1 和 λ_2 是一对椭圆型复共轭特征值，就可能出现这种情况。由于所有这类情形中的 λ_a 和 λ_b 均为常数（与 k 无关），从现在起我们将简写 $\lambda_a(k)$ 和 $\lambda_b(k)$，分别记为 λ_a 和 λ_b 。

为处理这类情况，可以写出方程（16）解的显式公式。具体而言，只需将关系式 $u(k) = \lambda_a^{-1}\left[b(k) + \lambda_b u(k+1 \bmod q)\right]$, 代入 $k+1 \bmod q$ 进行求值，得到$u(k+1 \bmod q) = \lambda_a^{-1}\left[b(k+1 \bmod q) + \lambda_b u(k+2 \bmod q)\right]$, 将其代入 $u(k)$ 的表达式中，并对 $u(k+2 \bmod q)$ 等依次重复此过程，共进行 q 次，从而得到一个关系式

$$u(k) = \frac{\lambda_a^{-1}}{1-(\lambda_b/\lambda_a)^q}\sum_{i=0}^{q-1}(\lambda_b/\lambda_a)^i b(k+i \mod q) \tag{19}$$

实际计算时，采用上述公式计算 $u(0)$ 更为高效，然后利用关系式递归计算其余的 $u(k)$ $u(k+1 \text{ 模 } q) = \left[\lambda_a u(k) - b(k)\right]/\lambda_b$。注意，如果 $|\lambda_b/\lambda_a| > 1$，上述公式会数值不稳定，因此在这种情况下改用第 4.3.1 节的方法。另请注意，如果 $(\lambda_b/\lambda_a)^q = 1$，式（19）未定义；当 $\lambda_a = \lambda_b = 1$ 时就会出现这种情况。接下来我们将讨论这一问题。

4.3.3. “上同调方程”：情形 $u(k) - u(k+1 \text{ 模 } q) = b(k)$

方程的最终情形如方程（16）的情况是，当 $\lambda_a(k) = \lambda_b(k) = 1$ 对所有 k均成立。此时，我们得到如下形式的方程：

$$u(k) - u(k+1 \mod q) = b(k) \tag{20}$$

该方程类似于计算不变环面及其弗洛凯方向时涉及的上同调方程 $u(\theta) - u(\theta + \omega) = b(\theta)$，例如文献 [1]。请注意，与环面情形类似，其中 b 必须具有零平均值，对方程（20）两边关于 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 求和，可得此处同样成立的必要条件$\sum_{k=0}^{q-1} b(k) = 0$。注意，如果 $u(k)$ 是方程（20）的一个解，那么对于任意 $C \in \mathbb{C}$，$u(k) + C$ 也同样是解，因此解并不唯一。于是，要解出 $u(k)$，可以任意设定 $u(0) = 0$，然后利用方程（20）递归求得 $u(1) \ldots, u(q-1)$，其中 $k = 0, \ldots, q-2$。由于条件 $\sum_{k=0}^{q-1} b(k) = 0$，方程（20）也会自动对 $k = q-1$ 成立。

4.3.4. 使 Λ_ε 独立于 k的过程

假设存在满足公式（13）–（14）的解 X_ε、P_ε 和 Λ_ε，且每个 $\Lambda_\varepsilon(k)$ 都具有公式（15）给出的形式。因此，在这些 $\Lambda_\varepsilon(k)$ 矩阵中，除 $\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 外，所有元素都是常数（与 k 无关）。然而，通过对 $P_\varepsilon(k)$ 的第3列和第4列进行缩放，可以进一步找到一个新解 X_ε（不变）、P_ε（新）和 Λ_ε（新），使得 $\Lambda_\varepsilon(k)$ 对所有 k 都是常数。由于这类解有助于确保数值延拓过程中的数值稳定性，我们现在讨论如何“使 Λ_ε 为常数”。这一过程将在第4.4.1节和第4.7节中使用。

将 $P_\varepsilon(k)$ 的第3列和第4列分别记为$\mathbf{v}_s(k)$ 和$\mathbf{v}_u(k)$。现在，令 $\bar{\lambda}_s = \exp\left[\frac{1}{q}\sum_0^{q-1} \log(\lambda_s(k))\right]$，且 $\bar{\lambda}_u = \exp\left[\frac{1}{q}\sum_0^{q-1} \log(\lambda_u(k))\right]$，并令 $a_s(k)$ $a_u(k) \in \mathbb{R}$, $k = 0$，1，……，$q-1$ 为下列方程的解

$$\log(a_s(k)) - \log(a_s(k+1 \mod q)) = -[\log(\lambda_s(k)) - \log(\bar{\lambda}_s)] \tag{21}$$

$$\log(a_u(k)) - \log(a_u(k+1 \mod q)) = -[\log(\lambda_u(k)) - \log(\bar{\lambda}_u)] \tag{22}$$

上述 $\lambda_s, \lambda_u \in \mathbb{R}$ 的取值确保方程 (21)–(22) 的左端对所有 k 求和均为零。因此，令 $u(k) = \log(a_s(k))$，方程 (21) 就变成了方程（20）形式的方程，可用第4.3.3节的方法求解所有 $u(k)$。由此得到 $a_s(k) = e^{u(k)}$。我们可以用完全相同的方法求解方程 (22)，得到 $a_u(k)$。最后，应将每个 $P_\varepsilon(k)$ 的第3列和第4列分别替换为 $\tilde{\mathbf{v}}_s(k) = a_s(k)\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_u(k) = a_u(k)\mathbf{v}_u(k)$，以得到所需的 P_ε；并将每个 $\Lambda_\varepsilon(k)$ 中的 $\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 分别替换为 $\bar{\lambda}_s$ 和 $\bar{\lambda}_u$，从而得到 Λ_ε。我们在附录 B 中证明，所得的 P_ε 和 Λ_ε 确实满足方程 (14)。

4.4. 按 ε 进行延拓的初始化

为了计算所需的 F_ε 次谐周期轨道点 $X_\varepsilon(k)$ 和矩阵 $P_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon$，并求解某个指定扰动 $\varepsilon = \varepsilon_f > 0$ 下的方程 (13)-(14)，我们将从未扰动情形 $\varepsilon = 0$ 的相应解出发，进行数值延拓，逐步改变 ε，直到找到 $\varepsilon = \varepsilon_f$ 下所需的 F_ε-SPO 和矩阵。我们将在第 4.6–4.7 节介绍的拟牛顿法将使这一延拓过程成为可能：选取延拓步数 n，取 $\varepsilon = 0$ 系统的一个 SPO X_ε 和矩阵 $P_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon$，并用它们生成拟牛顿法的初始猜测，以求解 $\varepsilon = \varepsilon_f/n$ 系统中的 SPO 和矩阵。同样，对于 $i = 1$，……，$n-1$，使用 $\varepsilon_f i/n$ 系统的解来生成 $\varepsilon_f(i+1)/n$ 系统中解的初始猜测。一旦 $i = n-1$，我们就能得到 $\varepsilon = \varepsilon_f$ 对应的 SPO 和矩阵。不过，首先必须找到 $\varepsilon = 0$ 解，以便初始化延拓过程。

如第2.2节所述，我们假设，与一个在扰动映射 F_ε 中仍然存在的 F_0-SPO 相对应的点 $X_0(k)$、$k = 0$、1、……、$q-1$ 已知，例如可通过 Melnikov 型分析获得。然而，对于 $\varepsilon = 0$ 情形，我们仍需求解公式（14）以获得 $P_0(k)$ 和 $\Lambda_0(k)$，其中 Λ_0 的形式如公式（15）所示。此外，在该过程的后续步骤中，最好使 $\Lambda_0(k)$ 中的所有 $\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 均为正值。下面我们将说明如何为 $\varepsilon = 0$ 构造公式（13）–（14）的一个解 X_0, P_0, Λ_0。

4.4.1. P_0 的第*3*列和第*4*列以及乘子 λ_s, λ_u

回顾第4.2节， $\lambda_s(k)$和 $\lambda_u(k)$分别是稳定和不稳定的弗洛凯乘子，对应于 $X_0(k)$处 SPO 的稳定和不稳定弗洛凯方向。这些方向将构成 $P_0(k)$的第3列和第4列，必须是 SPO 单调矩阵 $DF_0^q(X_0(k))$的特征向量。由于 $X_0(k)$位于一个不稳定的共振 F_0不变环面上， $DF_0^q(X_0(k))$将具有实特征值 1、1、 λ和 λ^{-1}，其中$|\lambda| > 1$。然而，如果 q 较大，直接求出 λ 和 λ^{-1} 的特征向量在数值上可能很困难，因为矩阵 $DF_0^q(X_0(k))$的数值会非常大，其中 λ 非常大，而 λ^{-1} 非常小。

将 $X_0(k)$处对应于特征值 λ^{-1} 和 λ的稳定/不稳定单调矩阵特征向量分别记为$\mathbf{v}_s(k)$和$\mathbf{v}_u(k)$。要找到$\mathbf{v}_s(k)$和$\mathbf{v}_u(k)$，与其处理矩阵 $DF_0^q(X_0(k))$，不如采用迭代方法。首先，将$\mathbf{v}_{s,0}(0)$和$\mathbf{v}_{u,0}(0)$设为任意四维单位向量。然后，对 $k = 1, \ldots, q-1$，根据递归关系定义$\mathbf{v}_{s,0}(k)$和$\mathbf{v}_{u,0}(k)$

$$\mathbf{v}_{s,i}(k) = \frac{DF_0(X_0(k))^{-1}\mathbf{v}_{s,i}(k+1 \mod q)}{\|DF_0(X_0(k))^{-1}\mathbf{v}_{s,i}(k+1 \mod q)\|} \tag{23}$$

$$\mathbf{v}_{u,i}(k) = \frac{DF_0(X_0(k-1 \mod q))\mathbf{v}_{u,i}(k-1 \mod q)}{\|DF_0(X_0(k-1 \mod q))\mathbf{v}_{u,i}(k-1 \mod q)\|} \tag{24}$$

与 $i = 0$ 一起。这将得到初始序列 $\mathbf{v}_{s,0}(k)$ 和 $\mathbf{v}_{u,0}(k)$， $k = 0,1,\ldots,q-1$ 以开始迭代。现在，给定向量序列 $\mathbf{v}_{s,i}(k)$ 和 $\mathbf{v}_{u,i}(k)$，通过设定以下内容来定义下一次迭代 $\mathbf{v}_{s,i+1}(k)$ 和 $\mathbf{v}_{u,i+1}(k)$:

$$\mathbf{v}_{s,i+1}(0) = \frac{DF_0(X_0(0))^{-1}\mathbf{v}_{s,i}(1 \mod q)}{\|DF_0(X_0(0))^{-1}\mathbf{v}_{s,i}(1)\|} \tag{25}$$

$$\mathbf{v}_{u,i+1}(0) = \frac{DF_0(X_0(q-1))\mathbf{v}_{u,i}(q-1)}{\|DF_0(X_0(q-1))\mathbf{v}_{u,i}(q-1)\|} \tag{26}$$

然后利用上述 $\mathbf{v}_{s,i+1}(0)$、$\mathbf{v}_{u,i+1}(0)$ 以及公式 (23)–(24) 的递推（以 $i+1$ 替代 i），定义 $\mathbf{v}_{s,i+1}(k)$、$\mathbf{v}_{u,i+1}(k)$，其中 $k = 1, \ldots, q-1$。该过程将生成单位向量序列 $\mathbf{v}_{s,i}(k)$ 和 $\mathbf{v}_{u,i}(k)$，使得当 λ 和 λ^{-1} 为正时，极限 $\lim_{i\to\infty}\mathbf{v}_{s,i}(k)$ 和 $\lim_{i\to\infty}\mathbf{v}_{u,i}(k)$ 都存在，并且分别收敛到有效的 $\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\mathbf{v}_u(k)$，对于每个 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 均如此。此外，对公式 (23)–(26) 取 $i \to \infty$ 时的极限，在 $k+1$ 处计算公式 (24)，并重新整理可得

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_s(k) = \|DF_0(X_0(k))^{-1}\mathbf{v}_s(k+1 \mod q)\|^{-1}\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) \tag{27}$$

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_u(k) = \|DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_u(k)\|\mathbf{v}_u(k+1 \mod q) \tag{28}$$

对所有 k 均成立。回顾 $\mathbf{v}_s(k)$、$\mathbf{v}_u(k)$ 是 $P_0(k)$ 的第3列和第4列，并将方程 (27)–(28) 与方程 (14) 的第3列和第4列进行比较，可以得出结论：按此定义 $\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\mathbf{v}_u(k)$ 后， $\lambda_s(k) = \|DF_0(X_0(k))^{-1}\mathbf{v}_s(k+1 \bmod q)\|^{-1}$ 以及 $\lambda_u(k) = \|DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_u(k)\|$——对于所有 $k = 0$，1，.....，$q-1$ 均为正值，符合预期。

当稳定/不稳定特征值 λ^{-1} 和 λ 为正时，前一次迭代会得到 $DF_0^q(X_0(k))$ 的单位长度稳定和不稳定特征向量；若 $\lambda < 0$，则该迭代无法收敛；事实上，迭代失败意味着 $\lambda < 0$。在这种情况下，注意，若 $\lambda < 0$ 和 $\lambda^{-1} < 0$ 是 q 次迭代单值矩阵 $DF_0^q(X_0(k))$ 的特征值，那么 $2q$ 次迭代单值矩阵 $DF_0^{2q}(X_0(k)) = [DF_0^q(X_0(k))]^2$ 将具有正特征值 λ^2 和 λ^{-2}。因此，若将关注的 SPO 视为一个长度为 $2q$ 次迭代的 F_0-周期轨道，而非 q 次迭代轨道，则其单值矩阵将只有正特征值，且方程 (23)-(26) 中的步骤将收敛至有效的 $\mathbf{v}_s(k)$、$\mathbf{v}_u(k)$ 取值，使得 $\lambda_s(k)$ $\lambda_u(k) > 0$。因此，给定一个满足 $X_0(k)$、 $k = 0$、1，.....， $q-1$ 的 SPO，若前述 ˜ 次迭代无法收敛，则定义一个新的长度为 $2q$ 的序列 $X_0(k)$、 $k = 0$、1，.....， $2q-1$，其取值定义为 ˜ ˜$X_0(k) = X_0$ $(k \bmod q)$。随后，考虑 X_0 而非 X_0 （并令 $2q$ 扮演 q 的角色），即可使方程 (23)-(26) 中的步骤以及本文后续所有步骤按预期进行。

上述方法可得每个 $P_\varepsilon(k)$ 的有效第3列和第4列，分别为 $\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\mathbf{v}_u(k)$，以及相应的弗洛凯乘子 $\lambda_s(k)$ $\lambda_u(k) > 0$；对于所有 $k = 0$、1、.....、 $q-1$，它们都满足方程 (14) 的第3列和第4列。不过，由此得到的 $\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 将取决于 k。最后，为了提高后续计算的数值稳定性，应对 $\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\mathbf{v}_u(k)$ 重新缩放，以确保 λ_s 和λ_u保持恒定；为此可采用第 4.3.4 节的方法。稍微放宽一下记号的用法，在接下来的第 4.4.2 节中，我们也将把这些重新缩放后的向量和乘子称为 $\mathbf{v}_s(k)$、$\mathbf{v}_u(k)$、 λ_s 和 λ_u 。

4.4.2. P_0 和 Λ_0的第*1*列和第*2*列

按照上述方法已找到 $P_0(k)$ 和 $\Lambda_0(k)$ 的第3列和第4列后，我们现在将注意力转向第1列和第2列。先从第1列开始，回顾第 2.1 节可知，$\varepsilon = 0$ 的 SPO 位于一个旋转数为 $\omega = 2\pi p/q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ 的共振 F_0-不变环面上，该环面由某个函数 $K_0(\theta) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^4$ 参数化，并满足式 (1)。对关于 θ 的 $K = K_0$ 的式 (1) 求导可得，$DF_0(K_0(\theta))DK_0(\theta) = DK_0(\theta+\omega)$。现在，由于点 $X_0(k)$ 对应于某些 $\theta_0 \in \mathbb{T}$ 和 $k = 0$ 下的 $X_0(k) = K_0(\theta_0 + k\omega)$，其中 $1, \ldots, q-1$，因此对式 (1) 求导后可推出（以下记 $\theta_k = \theta_0 + k\omega$ 为）

$$DF_0(X_0(k))DK_0(\theta_k) = DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) \tag{29}$$

现在，如果我们将每个 $P_0(k)$ 的第 1 列设为 $DK_0(\theta_k)$，并对所有 $\Lambda_0(k)$ 在方程（15）中令 $\lambda_1 = 1$，那么公式（29）表明，方程 (14) 的第 1 列将自动满足。因此，我们以这种方式设定 $\lambda_1 = 1$ 和每个 $P_0(k)$ 的第 1 列。还要注意，如果 F_0 是 2自由度哈密顿流的频闪映射，那么每个 $DK_0(\theta_k)$ 都是 $X_0(k)$ 处流向量乘以一个常数缩放因子的结果；若是这种情况，也可以用这些流向量代替 $DK_0(\theta_k)$，因为前者可能更容易计算。

确定了 $P_0(k)$ 的第 1、3 和 4 列，以及 Λ_0 的 λ_1、λ_s 和 λ_u 后，最后一步是求出 λ_2、T 以及 $P_0(k)$ 的第 2 列。这需要一些额外的计算，同样要利用这样一个事实：F_0-SPO 位于一个由 K_0 参数化的共振 F_0-不变环面上，其中 $X_0(k) = K_0(\theta_k)$。计算它们的第一步是，对每个 $k = 0, 1, \ldots\ldots, q-1$，求出 $A(k)$ $B(k)$ $C(k)$，以及 $D(k) \in \mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned} DF_0(X_0(k))\frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} = A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + B(k)\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2} \\ + C(k)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) + D(k)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q) \end{aligned} \tag{30}$$

其中，$J = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & I_{2\times2} \\ -I_{2\times2} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^4$上的通常欧几里得度量下辛形式的矩阵，而 $\mathbf{v}_u(k)$、$\mathbf{v}_u(k)$ 是在第 4.4.1 节末尾求得的。方程 (30) 中除 $A(k)$、$B(k)$、$C(k)$ 和 $D(k)$ 之外的所有量均已知。因此，我们可以将方程 (30) 视为关于 A、B、C 和 D 的线性方程组，并针对每个 k 求解。可以发现 $B(k) = 1$；这是辛几何考量的结果（见公式（C.7））。之后，我们求解 $f_1(k)$ $f_2(k) \in \mathbb{R}$、$k = 0$、1、……、$q-1$，使得

$$-C(k) = \lambda_s f_1(k) - f_1(k+1 \mod q) \tag{31}$$

$$-D(k) = \lambda_u f_2(k) - f_2(k+1 \mod q) \tag{32}$$

可以通过 d　使用第 4.3.1 节的压缩映射迭代法。接下来，将向量 $\mathbf{v}_c(k)$ 设为

$$\mathbf{v}_c(k) = \frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} + f_1(k)\mathbf{v}_s(k) + f_2(k)\mathbf{v}_u(k) \tag{33}$$

这些向量　将满足一个与方程（14）第 2 列非常接近的关系。特别地，将有　t

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) = A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_c(k+1 \mod q) \tag{34}$$

这在附录 C中得到了证明。现在，令 $T = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A(k)$。将每个 $P_0(k)$所需的第**2** 列记为$_2(k)$，为求出这些 $\mathbf{v}_2,$，应先求出 $a(k) \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,\ldots,q-1$，使其满足

$$-[A(k) - T] = a(k) - a(k+1 \mod q) \tag{35}$$

由于所有 k 的左端之和按定义为零，T，因此可以使用第 35节的方法求解方程（4.3.3）。所得的 a（k）随后给出 $\mathbf{v}_2$，通过 $\mathbf{v}_2$（k）$= \mathbf{v}_c$（k）$+ a$（k）DK_0（θ_k），并满足

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_2(k) = TDK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_2(k+1 \mod q) \tag{36}$$

这也已在附录 C中得到证明。将每个 $P_0(k)$ 的第 2 列$\mathbf{v}_2(k)$ 设为由此得到的值，并将 $\lambda_2 = 1$和 $T = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A(k)$ 设为 Λ_0，便可看出方程（36）意味着方程（14）的第 2 列也满足条件。

总之，前文定义的 $DK_0(\theta_k)$、$\mathbf{v}_2(k)$、$\mathbf{v}_s(k)$ 和 $\mathbf{v}_u(k)$，分别构成每个 $P_0(k)$ 的第 1、2、3 和 4 列，其中 $k = 0$ =1, … , $q-1$；而 $\Lambda_0(k)$ 的非零项——即 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$、 T、 λ_s 和 λ_u——也可通过上述过程求得。因此，给定一个已知点 $X_0(k)$ 且满足公式（13）的 F_0-SPO，我们便可得到方程（13）—（14）关于 $\varepsilon = 0$ 的完整解 X_0、 P_0、 Λ_0 ，其中每个 $\Lambda_0(k)$ 均具有公式（15）的形式。若预计该 SPO 会随 $\varepsilon > 0$ 持续存在，则可将 $\varepsilon = 0$ 解用作起点，通过数值延拓过程计算相应的 F_ε-解 X_ε、 P_ε、 Λ_ε 。接下来的章节将介绍使这一延拓成为可能的拟牛顿法。

4.5. SPO 与 Floquet 方向/乘子拟牛顿法步骤总结

在完整描述了寻找 $\varepsilon = 0$ 解 X_0、 P_0、 Λ_0 以及方程（13）–（14）的初始化过程后，我们现在将进一步建立用于求解方程（13）–（14的拟牛顿法，以求得 $\varepsilon > 0$ 。如第 4.4 节开头所述，这将使我们能够把 $F_{\varepsilon=0}$ 中持续存在的 SPO 延拓至受扰映射 F_ε ，其中 $\varepsilon > 0$。在介绍该方法的细节之前，我们先简要概述一下。假设我们已有方程（(X_ε， P_ε， Λ_ε) （13）–（14）的近似解。那么，我们将

1. 计算 $E(k) = F_\varepsilon(X_\varepsilon(k)) - X_\varepsilon(k+1 \text{ 模 } q)$， $E_{red}(k) = P_\varepsilon^{-1}(k+1 \text{ 模 } q)DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))P_\varepsilon(k) - \Lambda_\varepsilon(k)$ 2. 使用公式（42）-（45）求解 $-P_\varepsilon^{-1}(k+1 \text{ 模 } q)E(k) = \Lambda_\varepsilon(k)\xi(k) - \xi(k+1 \text{ 模 } q)$，得到 $\xi(k) \in \mathbb{C}^4$，并将 $X_\varepsilon(k)$ 设为 $X_c(k) = X_\varepsilon(k) + P_\varepsilon(k)\xi(k)$ 或 Re $X_c(k)$（详情见第 4.6 节）。3. 使用新校正的点 $X_\varepsilon(k)$ 重新计算 $DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))$ 和 $E_{red}(k)$。4. 使用公式（52）-（66）求解 $-E_{red}(k) = \Lambda_\varepsilon(k)Q(k) - Q(k+1 \text{ 模 } q)\Lambda_\varepsilon(k) - \Delta\Lambda(k)$，得到 $Q(k)$ $\Delta\Lambda \in \mathbb{C}^{4\times4}$。设置 $P_c(k) = P_\varepsilon(k) + P_\varepsilon(k)Q(k)$ 和 $\Lambda_c(k) = \Lambda_\varepsilon(k) + \Delta\Lambda(k)$ （详情见第4.7节）。5. 使用舒尔分解，将上述 $\Lambda_c(k)$ 转换为符合公式（15）形式的 $\Lambda_\varepsilon(k)$，并相应地修改 $P_c(k)$，以获得相应的 $P_\varepsilon(k)$。6. 返回步骤 1 并重复校正，直到 E 和 E_{red} 满足容差要求。

ε 在每个拟牛顿步中都不会改变。因此，为了记号简便，在下文讨论中我们将省略 ε 在 F_ε、 X_ε、 P_ε和 Λ_ε 上的下标，分别记作 F、 X、 P和 Λ 。

4.6. 用于修正 X的拟牛顿步

我们试图求解方程（13）和（14），以求得 X、 P和 Λ。如公式（15）所示， Λ 的所有元素均为 0，除了 λ_1、 λ_2、 $\lambda_s(k)$、 $\lambda_u(k)$和 T。现在我们将推导一个迭代步：给定方程（13）和（14）的一组近似解（X、 P、 Λ），该迭代步可得到精确得多的解。定义误差

$$E(k) = F(X(k)) - X(k+1 \mod q) \tag{37}$$

$$E_{red}(k) = P^{-1}(k+1 \mod q)DF(X(k))P(k) - \Lambda(k) \tag{38}$$

然后我们需要 求出修正量 ΔX、 ΔP和 $\Delta\Lambda$ ，以消去 E 和 E_{red}。我们从 ΔX开始；写 e$\Delta X(k) = P(k)\xi(k)$，我们将求解满足以下条件的 $\xi(k) \in \mathbb{C}^4, k = 0, 1, \ldots, q-1$

$$\eta(k) \overset{\text{def}}{=} -P^{-1}(k+1 \mod q)E(k) = \Lambda(k)\xi(k) - \xi(k+1 \mod q) \tag{39}$$

断言。 对于 E 和 E_{red} 足够小时，如果 $\xi(k)$ 满足方程 (39)，那么将 $\Delta X(k) = P(k)\xi(k)$ 加到每个 $X(k)$ 都会使误差 E 按二次方降低。

证明。 将 $X(k) + \Delta X(k)$ 代入公式（37）的右端项。假设 ΔX 足够小（对于 E足够小的情形成立），我们可以将公式（37）展开为泰勒级数，得到

$$\begin{aligned} E_{new}(k) &= F(X(k) + \Delta X(k)) - [X(k+1 \mod q) + \Delta X(k+1 \mod q)] \\ &= F(X(k)) + DF(X(k))\Delta X(k) + \mathcal{O}(\Delta X(k)^2) - [X(k+1 \mod q) + \Delta X(k+1 \mod q)] \\ &= E(k) + DF(X(k))\Delta X(k) - \Delta X(k+1 \mod q) + \mathcal{O}(\Delta X(k)^2) \end{aligned} \tag{40}$$

$\Delta X(k) = P(k)\xi(k)$，且公式（38）意味着 $DF(X(k))P(k) = P(k+1 \text{模 } q)\,[\Lambda(k) + E_{red}(k)]$。因此，

$$\begin{aligned} E_{new}(k) &= E(k) + DF(X(k))P(k)\xi(k) - P(k+1 \mod q)\xi(k+1 \mod q) + \mathcal{O}(\xi(k)^2) \\ &= E(k) + P(k+1 \mod q)\,[\Lambda(k)\xi(k) + E_{red}(k)\xi(k) - \xi(k+1 \mod q)] + \mathcal{O}(\xi(k)^2) \\ &= P(k+1 \mod q)E_{red}(k)\xi(k) + \mathcal{O}(\xi(k)^2) \end{aligned} \tag{41}$$

其中，最后一行由方程（39）得出。满足方程（39）的 $\xi(k)$的量级将与 $E(k)$相近，因此 $E_{red}(k)\xi(k)$将是二次方小量，与 $E_{red}(k)E(k)$相当。因此，只要 $E(k)$（以及由此得到的 $\xi(k)$和 $\Delta X(k)$）足够小，使得方程（40）中的泰勒展开有效，且泰勒展开的 $\mathcal{O}(\xi^2)$项足够小，新的误差 E_{new} 就会比 E二次方更小。 □

为求解方程（39），令 $\xi(k) = \begin{bmatrix}\xi_1(k) & \xi_2(k) & \xi_3(k) & \xi_4(k)\end{bmatrix}^T$ 以及 $\eta(k) = \begin{bmatrix}\eta_1(k) & \eta_2(k) & \eta_3(k) & \eta_4(k)\end{bmatrix}^T$，其中所有 $k = 0$均取1，...，$q-1$。由于每个 $\Lambda(k)$都近似为对角矩阵，我们可以将方程（39）按分量写为

$$\eta_1(k) - T\xi_2(k) = \lambda_1\xi_1(k) - \xi_1(k+1 \mod q) \tag{42}$$
$$\eta_2(k) = \lambda_2\xi_2(k) - \xi_2(k+1 \mod q) \tag{43}$$
$$\eta_3(k) = \lambda_s(k)\xi_3(k) - \xi_3(k+1 \mod q) \tag{44}$$
$$\eta_4(k) = \lambda_u(k)\xi_4(k) - \xi_4(k+1 \mod q) \tag{45}$$

方程 (42)–(45) 都属于其解已在第 4.3 节中讨论过的形式。对于 ξ_3 和 ξ_4，方程 (44)–(45) 可使用第 4.3.1 节的方法直接求解。至于 ξ_1 和 ξ_2，首先对方程 (43) 求解 ξ_2，然后利用所得结果计算方程 (42) 的左端，并据此求解 ξ_1。除在增大 ε 之后的第一次拟牛顿步期间（此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，如第 4.4.2 节所述）外，通常 λ_1 和 λ_2 都不同于 1——从而可以使用第 4.3.1–4.3.2 节的方法求解方程 (42)–(43)。然而，在 $\varepsilon = 0$ 之后的这第一次拟牛顿步中，即使总和 $\sum_{k=0}^{q-1}\eta_2(k)$ 不为零，也应对方程 (42)–(43) 应用第 4.3.3 节的步骤；后续的拟牛顿步将能够进一步修正误差。在这种（罕见的）$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 情况下，在使用第4.3.3节的方法对方程 (43) 求解得到初步解 ξ_2 后，可以在求解 ξ_1 之前，通过将每个最终的 $\xi_2(k) = \bar{\xi}_2(k) + \frac{1}{qT}\sum_{k=0}^{q-1}[\eta_1(k) - T\bar{\xi}_2(k)]$，使方程 (42) 左端的总和变为零；请注意，根据第 4.3.3 节，如果 $\xi_2(k)$ 是方程 (43) 的一个解，那么对于任意 $C \in \mathbb{C}$，$\xi_2(k) + C$ 也同样是解。

最后，在求出 ξ 的全部四个分量后，我们计算 $X_c(k) = X(k) + P(k)\xi(k)$。请注意，$P(k) \in \mathbb{C}^{4\times4}$ 和 $\xi(k) \in \mathbb{C}^4$ 可能含有非实数项，因此 $X_c(k) \in \mathbb{C}^4$ 也可能成立。虽然可以允许 $X(k)$ 取值于 $\mathbb{C}^4$，并将每个校正后的 $X(k)$ 直接设为 $X_c(k)$，但实践中我们发现，将每个校正后的 $X(k)$ 设为 $\text{Re}\,X_c(k)$ 同样有效，因为 $\text{Im}\,X_c(k)$ 通常非常小；这样可使 $X(k)$ 保持在 $\mathbb{R}^4$ 中，从而可能简化 $F(X(k))$ 和 $DF(X(k))$ 的计算。无论采用哪种方法，至此拟牛顿步的 X 校正部分就完成了。

注 4. 有些数值求解 ΔX 而不使用 P 或 Λ 的方法，例如标准的多重射击方法 [19]。对于我们的四维相空间，这些方法需要对所有 40 式（舍去二次项，并令 $E_{new} = 0$）同时求解 $\Delta X(k)$。这需要在每个校正步求解一个 $4q \times 4q$ 线性系统。然而，通过使用 P 和近似对角的 Λ，我们将方程解耦，使其适用于非矩阵方法求解，并避免求解这个高维系统。

4.7. 用于修正 P 和 Λ 的拟牛顿步

使用新修正的 X（k），我们首先根据公式（38）重新计算 DF（X（k））ΔP（k）和 $\Delta\Lambda$（k）以消去 E_{red}，随后采用与 ΔX 类似的方法。令 ΔP（k）$= P$（k）Q（k）；现在我们将求解满足以下条件的 Q（k）$\Delta\Lambda$（k）$\in \mathbb{C}^{4\times4}$

$$-E_{red}(k) = \Lambda(k)Q(k) - Q(k+1 \mod q)\Lambda(k) - \Delta\Lambda(k) \tag{46}$$

断言。对于充分小的 E_{red}，如果 $Q(k)$和 $\Delta\Lambda(k)$对所有 $k = 0$（*1*，...，$q-1$）都满足方程（*46*），那么分别将 $\Delta P(k) = P(k)Q(k)$和 $\Delta\Lambda(k)$加到每个 $P(k)$和 $\Lambda(k)$上，可使 E_{red}二次收敛。

证明。 将 $P(k)+P(k)Q(k)$ 和 $\Lambda(k)+\Delta\Lambda(k)$ 代入方程（14）以定义

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(k) = DF(K(\theta))[P(k)+P(k)Q(k)] \\ - [P(k+1 \mod q)+P(k+1 \mod q)Q(k+1 \mod q)][\Lambda(k)+\Delta\Lambda(k)]\end{aligned} \tag{47}$$

使用 $E_{red}(k) = P^{-1}(k+1 \bmod q)DF(X(k))P(k) - \Lambda(k)$，我们进而得到

$$\begin{aligned}P(k+1 \mod q)^{-1}\mathcal{E}(k) &= E_{red}(k) + P(k+1 \mod q)^{-1}DF(X(k))P(k)Q(k) \\ &\quad - Q(k+1 \mod q)[\Lambda(k)+\Delta\Lambda(k)] - \Delta\Lambda(k) \\ &= E_{red}(k) + [\Lambda(k)+E_{red}(k)]Q(k) - Q(k+1 \mod q)[\Lambda(k)+\Delta\Lambda(k)] - \Delta\Lambda(k) \\ &= E_{red}(k)Q(k) - Q(k+1 \mod q)\Delta\Lambda(k)\end{aligned} \tag{48}$$

最后一行可由前一行根据方程（46）推出。将 $P(k)+P(k)Q(k)$ 和 $\Lambda(k)+\Delta\Lambda(k)$ 代替 $P(k)$ 和 $\Lambda(k)$，代入方程（38）进行计算，并将结果记为 $E_{red,new}$，可得

$$\begin{aligned}E_{red,new}(k) &= [P(k+1 \mod q)+P(k+1 \mod q)Q(k+1 \mod q)]^{-1}\mathcal{E}(k) \\ &= [I+Q(k+1 \mod q)]^{-1}P(k+1 \mod q)^{-1}\mathcal{E}(k) \\ &= [I+Q(k+1 \mod q)]^{-1}[E_{red}(k)Q(k) - Q(k+1 \mod q)\Delta\Lambda(k)]\end{aligned} \tag{49}$$

Q 和 $\Delta\Lambda$ 在此处的量级将与 E_{red} 相近。因此，如果 E_{red} 很小，那么 $E_{red,new}$ 将小一个二次量级，与 E_{red}^2 的量级相近。 □

由于每个 $\Lambda(k)$ 都近似为对角矩阵，由方程（46）得出的 $Q(k)$ 和 $\Delta\Lambda(k)$ 各个元素对应的方程几乎完全相互解耦。记

$$E_{red}(k) = \begin{bmatrix} E_{LL}(k) & E_{LC}(k) & E_{LS}(k) & E_{LU}(k) \\ E_{CL}(k) & E_{CC}(k) & E_{CS}(k) & E_{CU}(k) \\ E_{SL}(k) & E_{SC}(k) & E_{SS}(k) & E_{SU}(k) \\ E_{UL}(k) & E_{UC}(k) & E_{US}(k) & E_{UU}(k) \end{bmatrix}$$

$$Q(k) = \begin{bmatrix} Q_{LL}(k) & Q_{LC}(k) & Q_{LS}(k) & Q_{LU}(k) \\ Q_{CL}(k) & Q_{CC}(k) & Q_{CS}(k) & Q_{CU}(k) \\ Q_{SL}(k) & Q_{SC}(k) & Q_{SS}(k) & Q_{SU}(k) \\ Q_{UL}(k) & Q_{UC}(k) & Q_{US}(k) & Q_{UU}(k) \end{bmatrix} \quad \Delta\Lambda(k) = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 & \Delta T & 0 & 0 \\ \Delta S & \Delta\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\lambda_s(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\lambda_u(k) \end{bmatrix} \tag{50}$$

请注意，与环面的情况不同，Q的第一列以及 $\Delta\Lambda$ 的 (1,1)、(2,1) 和 (2,2) 项在此处均非零。因此，我们可以逐项写出公式（46），并稍微调整各项的位置，从而得到 16 个标量方程

$$\Delta\lambda_1 - E_{LL}(k) - TQ_{CL}(k) = \lambda_1 Q_{LL}(k) - \lambda_1 Q_{LL}(k+1 \mod q) \tag{51}$$

$$\Delta T - E_{LC}(k) - TQ_{CC}(k) + TQ_{LL}(k+1 \mod q) = \lambda_1 Q_{LC}(k) - \lambda_2 Q_{LC}(k+1 \mod q) \tag{52}$$

$$-E_{LS}(k) - TQ_{CS}(k) = \lambda_1 Q_{LS}(k) - \lambda_s(k) Q_{LS}(k+1 \mod q) \tag{53}$$

$$-E_{LU}(k) - TQ_{CU}(k) = \lambda_1 Q_{LU}(k) - \lambda_u(k) Q_{LU}(k+1 \mod q) \tag{54}$$

$$\Delta S - E_{CL}(k) = \lambda_2 Q_{CL}(k) - \lambda_1 Q_{CL}(k+1 \mod q) \tag{55}$$

$$\Delta\lambda_2 - E_{CC}(k) + TQ_{CL}(k+1 \mod q) = \lambda_2 Q_{CC}(k) - \lambda_2 Q_{CC}(k+1 \mod q) \tag{56}$$

$$-E_{CS}(k) = \lambda_2 Q_{CS}(k) - \lambda_s(k) Q_{CS}(k+1 \mod q) \tag{57}$$

$$-E_{CU}(k) = \lambda_2 Q_{CU}(k) - \lambda_u(k) Q_{CU}(k+1 \mod q) \tag{58}$$

$$-E_{SL}(k) = \lambda_s(k) Q_{SL}(k) - \lambda_1 Q_{SL}(k+1 \mod q) \tag{59}$$

$$-E_{SC}(k) + TQ_{SL}(k+1 \mod q) = \lambda_s(k) Q_{SC}(k) - \lambda_2 Q_{SC}(k+1 \mod q) \tag{60}$$

$$\Delta\lambda_s(k) - E_{SS}(k) = \lambda_s(k)Q_{SS}(k) - \lambda_s(k)Q_{SS}(k+1 \mod q) \tag{61}$$

$$-E_{SU}(k) = \lambda_s(k)Q_{SU}(k) - \lambda_u(k)Q_{SU}(k+1 \mod q) \tag{62}$$

$$-E_{UL}(k) = \lambda_u(k)Q_{UL}(k) - \lambda_1 Q_{UL}(k+1 \mod q) \tag{63}$$

$$-E_{UC}(k) + TQ_{UL}(k+1 \mod q) = \lambda_u(k)Q_{UC}(k) - \lambda_2 Q_{UC}(k+1 \mod q) \tag{64}$$

$$-E_{US}(k) = \lambda_u(k)Q_{US}(k) - \lambda_s(k)Q_{US}(k+1 \mod q) \tag{65}$$

$$\Delta\lambda_u(k) - E_{UU}(k) = \lambda_u(k)Q_{UU}(k) - \lambda_u(k)Q_{UU}(k+1 \mod q) \tag{66}$$

首先，我们使用第 4.3.1 节的方法求解公式（57）、（58）、（59）、（62）、（63）和（65）；由此得到的Q_{CS}、Q_{CU}、Q_{SL} 和 Q_{UL} 又使我们能够用同样的方法求解公式（53）、（54）、（60）和（64）。公式（61）和（66）的解并不唯一；我们只需选择 $Q_{SS}(k) = Q_{UU}(k) = 0$，其中 $\Delta\lambda_s(k) = E_{SS}(k)$ 且 $\Delta\lambda_u(k) = E_{UU}(k)$，对所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 均成立（关于另一种可能的解，参见本小节末尾的备注 5）。最后，剩下公式（51）、（52）、（55）和（56）待解。

我们从方程（55）开始。注意，如果 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$，那么方程（55）是欠定的；可以任意选择一个 ΔS 的值，然后也能找到一个有效的 $Q_{CL}(k)$解。不过，选择 ΔS 时，有一种选择在数值稳定性方面最佳。为此，将方程（55）两边对所有 k 求和并重新排列各项，可得

$$\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} Q_{CL}(k) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\Delta S - \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} E_{CL}(k)\right] \tag{67}$$

现在回想一下，在 $\varepsilon = 0$ 情况下，$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$。虽然对于 $\varepsilon > 0$ 而言几乎从不会出现这种情况（除了 ε 从 0 增大后的第一个拟牛顿步），但通常 λ_1 和 λ_2 确实会保持接近 1。因此，上面的 $\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}$ 项的绝对值会相当大，导致 Q_{CL} 的平均值也很大，除非右端项为零。因此，为避免 Q_{CL}（以及 ΔP）出现较大的数值，应设定 $\Delta S = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} E_{CL}(k)$，然后用第 4.3.1 节或第 4.3.2 节的方法求解 Q_{CL}。对 ΔS 作此选择，也能在 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$时求解方程（55）中的 Q_{CL}；此时则改用第4.3.3节的方法。

现在，可以将所得的 $Q_{CL}(k)$代回方程（51）和（56）。分别将两式除以 λ_1 和 λ_2后，两式的形式均与方程（20）相同。因此，必须使所有 k 对应的两式左端之和为零；为此，令$\Delta\lambda_1 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}[E_{LL}(k) + TQ_{CL}(k)]$，并令 $\Delta\lambda_2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}[E_{CC}(k) - TQ_{CL}(k+1 \mod q)]$。然后，应用第 4.3.3 节的方法求解方程（51）和（56），得到 Q_{LL} 和 Q_{CC}。再将它们代回方程（52）；出于与方程（55）的 ΔS 情形类似的原因，应在该方程中令$\Delta T = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}[E_{LC}(k) + TQ_{CC}(k) - TQ_{LL}(k+1 \mod q)]$。这样便可使用第 4.3.1 节或第 4.3.2 节的方法（若 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$），或第 4.3.3 节的方法（在罕见的 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 情形下）求解方程（52），得到 Q_{LC}。至此，所有 k对应的 $Q(k)$和 $\Lambda(k)$均已求得。

已知 Q和 $\Delta\Lambda$后，我们设定 $P_c(k) = P(k) + P(k)Q(k)$ 和 $\Lambda_c(k) = \Lambda(k) + \Delta\Lambda(k)$。将这些$P_c$ 和 Λ_c 代入公式（38）后，应能使误差 E_{red} 按预期呈二次下降，但请注意，$\Delta\Lambda$ 的（2,1）项 ΔS 不为零。因此，即使所有 $\Lambda(k)$ 都具有公式（15）所要求的形式，修正后的 $\Lambda_c(k)$ 通常也不会如此。为此，我们还需要额外执行一步，以得到一个符合所需形式的新 $\Lambda(k)$。

备注 5。如果 $\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 为常数（与 k无关），我们可以选择公式（61）和（66）的非唯一解，使其保持为常数。具体而言，可在所有 k 中选取 $\Delta\lambda_s(k) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} E_{SS}(i)$ 和$\Delta\lambda_u(k) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} E_{UU}(i)$，并使用第（4.3.3）节的方法求解 Q_{SS} 和 Q_{UU}（分别除以 λ_s 或 λ_u后）。不过，根据我们的经验，这种解法会对方法的数值稳定性产生不利影响；因此，在实现中，我们没有让 λ_s 和 λ_u 保持为常数。

4.7.1. 变换 $\Lambda_c(k)$ 以求得 $\Lambda(k)$

为了获得新的 $P(k)$，以及 $\Lambda(k)$，它们能以二次收敛的方式降低误差 E_{red}，使其达到与 P_c 和 Λ_c相近的水平，同时仍使 $\Lambda(k)$ 保持方程 (15) 的形式，可以利用（复）舒尔分解 [20]：给定任意方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$A$ 可表示为 $A = VUV^{-1}$ 某个上三角

矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和某个酉矩阵 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$。MATLAB、Julia 和许多其他编程语言都内置了计算这种矩阵分解的函数，或可通过知名库调用。

要将舒尔分解应用于我们的情形，首先注意到每个 $\Lambda_c(k)$ 都具有块对角形式

$$\Lambda_c(k) = \begin{bmatrix} \lambda_{1,c} & T_c & 0 & 0 \\ \Delta S & \lambda_{2,c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s,c}(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{u,c}(k) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{2\times 2} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2\times 2} & B_{2\times 2} \end{array}\right] \tag{68}$$

其中，A 和 B 分别定义为图中所示的 Λ_c 的左上和右下 2×2 块。现在，对 2×2 块 $A = V_1 U V_1^{-1}$ 求舒尔分解，使 $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 为上三角形式。然后，定义

$$V = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2\times 2} & I_{2\times 2} \end{array}\right] \tag{69}$$

最后，将每个新的 $P(k) = P_c(k)V$ 和 $\Lambda(k) = V^{-1}\Lambda_c(k)V$ 设为如此。由此得到的 $\Lambda(k)$ 的左上块都将为 $V_1^{-1}AV_1 = U$，它按公式（15）的要求为上三角形式，而矩阵的其余部分将与 Λ_c 保持一致，并继续满足公式（15）。此外，利用新的 P 和 Λ，新的 $E_{red}(k)$ 将为

$$P^{-1}(k+1 \mod q)DF(X(k))P(k) - \Lambda(k) = V^{-1}\left[P_c^{-1}(k+1 \mod q)DF(X(k))P_c(k) - \Lambda_c(k)\right]V \tag{70}$$

因此，如果公式（70）右端项中括号内的表达式比旧的 $E_{red}(k)$二次方更小——正如第 4.7 节中所实现的那样——新的 E_{red} 误差也将比旧误差二次方更小。因此，这就完成了针对 $P(k)$ 和 $\Lambda(k)$的拟牛顿校正步骤。

4.8. 拟牛顿步之后

按照第 4.7 节所述完成 P 和 Λ 的拟牛顿校正步骤后，应使用新的 $X(k)$、$P(k)$、$\Lambda(k)$ 以及公式（37）–（38）重新计算 $E(k)$ 和 $E_{red}(k)$。如果这些误差尚未达到所需容差，则应返回拟牛顿步，根据第 4.6 节校正环面参数化 $X(k)$，并重复整个方法，直到 $E(k)$ 和 $E_{red}(k)$ 达到容差要求。在实践中，我们使用上确界范数 $\|E\| = \max_{k=0,1,\ldots,q-1}\|E(k)\|_\infty$ 和 $\|E_{red}\| = \max_{k=0,1,\ldots,q-1}\|E_{red}(k)\|_\infty$ 来衡量这些误差的大小，并发现这种方法效果良好。

拟牛顿法收敛到解 X_ε，P_ε，Λ_ε 对应某个中间延拓参数 $\varepsilon = \varepsilon_i < \varepsilon_f$后，出于数值稳定性的考虑，我们发现，应用~~第 4.3.4 节的流程来构造一个新解 X_ε，P_ε，Λ_ε 其中包含在~~中的稳定乘子和不稳定乘子 Λ_ε 与 k无关。由此得到的 $\Lambda_\varepsilon(k)$也将与 k 无关，从而确保后续延拓步骤具有更好的数值表现。

最后，如果我们针对 $\varepsilon = \varepsilon_f$的最终目标值，找到了满足方程 (13)-(14) 的解 $X_{\varepsilon_f}, P_{\varepsilon_f}, \Lambda_{\varepsilon_f}$（其中 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$和 Λ_{ε_f}均独立于 k），现在便可以求得满足方程 (4) 的解 $X_{\varepsilon_f}, P_{\varepsilon_f}, \Lambda_{\varepsilon_f}$，且 Λ_{ε_f}也完全为对角形式。为此，首先求出将$\Lambda_{\varepsilon_f} = V_D D V_D^{-1}$ 对角化的矩阵 V_D，使 D 为对角矩阵。然后，只需将所有 $\bar{P}_{\varepsilon_f}(k) = P_{\varepsilon_f}(k)V_D$和 $\bar{\Lambda}_{\varepsilon_f} = V_D^{-1}\Lambda_{\varepsilon_f}V_D = D$设为相应值；如第4.2节末尾所述，~~由此得到的 X_{ε_f}、P_{ε_f}和 Λ_{ε_f}将满足方程 (14)，因而也满足方程 (4)。这个完全对角化的 Λ_{ε_f}及其对应的P_{ε_f}，对于计算 SPO X_{ε_f}的稳定/不稳定流形（及其不变子流形）很有用。第5节将通过某些 SPO 的分离曲线示例说明这一点。

4.9. 最后几点说明

在用于计算不变环面的类似拟牛顿方法中（例如 [1]），$\Delta\Lambda$ 的 (1,1)、(2,1) 和 (2,2) 项始终设为零，因此 Λ 的相应元素在整个修正过程中分别保持为 1、0 和 1。这是通过一个类似于式（29）的方程，并结合第 4.4.2 节针对 $\varepsilon = 0$ 情形的辛几何考量实现的。然而，对于本文的次谐周期轨道，它们所源自的共振 F_0-不变环面通常会对所有 $\varepsilon > 0$发生破缺。相反，SPO 会获得非单位弗洛凯乘子 λ_1 和 λ_2，其计算

需要非零的 $\Delta\lambda_1$ 和 $\Delta\lambda_2$；这些非单位乘子缓解了环面参数化方法在有理 ω情况下所面临的零分母问题。尽管如此，为了更好地处理λ_1 和 λ_2 接近 1 时的计算——这通常是如此；而且每当 SPO 的λ_1-λ_2 弗洛凯乘子对经历稳定性转变时，这种情况会更加明显——我们也将 $\Delta S \neq 0$ 和 $\Delta T \neq 0$ 设为相应值。事实上，如果一个 SPO 正从前一次延拓 ε 值处的实乘子对 λ_1，$\lambda_2 \in \mathbb{R}$ 转变为当前 ε处的复椭圆乘子对，则必须取 $\Delta S \neq 0$，以捕捉这一行为并实现收敛。

要理解其中原因，首先要注意，方程（16）和方程（20）都只存在实数解 $u(k)$，前提是 $\lambda_a(k)$ $\lambda_b(k)$ $b(k)$ $\in \mathbb{R}$对所有 k 都成立（人为给方程（20）的解添加非实常数的情况除外）。现在，假设在延拓过程的某个阶段，所有 $P(k)$ 的元素都为实数，且 λ_1、λ_2、T、$\lambda_s(k)$ 和 $\lambda_u(k)$ 的值都为非零实数；例如，在 $\varepsilon = 0$ 之后且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$时的第一个拟牛顿步中，情况总是如此。此时，若将第4.7节中的过程应用于方程（51）—（66）——但不取 $\Delta S = 0$——所得解都将为实数。于是，所有 $P_c(k) = P(k) + P(k)Q(k)$ 和 $\Lambda_c(k) = \Lambda(k) + \Delta\Lambda(k)$ 的元素也都将为实数；又由于 $\Delta S = 0$，新的 $\Lambda_c(k)$ 已经具有公式（15）的形式，因此无需执行第4.7.1节的 Schur 过程。这样一来，P_c 和 Λ_c 本身将构成下一步所用的新 P 和 Λ，且其所有元素均为实数——与上一步开始时的情况相同。然而，这意味着无论进行多少次拟牛顿迭代，乘子 λ_1 和 λ_2 都将是实数；如果所研究的 SPO 实际上具有椭圆型乘子，这将阻碍收敛。因此，必须取 $\Delta S \neq 0$，这会使 $\Lambda_c(k)$ 的左上块变为非三角形，并使 Schur过程成为必要；该过程可以从这样的实数 $\Lambda_c(k)$ 得到复数 $\Lambda(k)$。

刚才介绍的拟牛顿法在非一般情形下同样适用：包含 SPO 的共振 F_0不变环面不会因 $\varepsilon > 0$而破裂。例如，当映射 F_ε 全都是二自由度自治哈密顿系统的流映射，而非二点五自由度扰动时，就可能出现这种情况；此时，$\varepsilon = 0$ 对应的不稳定流周期轨道会持续存在，并且对于 $\varepsilon > 0$ 仍是流周期轨道。在这种情况下，即使 $\varepsilon > 0$，SPO 仍会位于一个 F_ε不变环面上；不过，研究发现，只需稍作修改，拟牛顿法在这类情形下也同样有效。注意，由于存在一个与式（29）完全类似的方程，这类 SPO 对所有 ε均有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$。因此，要计算这类系统中的 SPO，拟牛顿法的主要改动是在整个过程中直接取 $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = \Delta S = 0$，从而使 λ_1 和 λ_2 保持为 1。需要更频繁地使用第4.3.3节的方法，而且并非总能将式（20）右端项之和设为零。尽管如此，该方法在实践中仍能收敛，这可能是因为环面也具有与 [21, 1] 类似的消失引理。

最后需要指出，尽管这种新拟牛顿法的收敛性尚未得到严格证明，但它已在多种情况下成功用于次谐周期轨道的数值延拓，其中一些案例将在第 6节中结合圆形限制性四体问题的各种示例进行介绍。我们发现，在许多情况下，当 λ_1-λ_2 乘子对的稳定性随着 ε 的变化而由椭圆型转为双曲型，或由双曲型转为椭圆型时，该方法都能奏效。在其他一些情况下，该方法未能奏效，因为在通过 ε进行延拓时，这些乘子（或其 q^{th} 幂）趋近于 1；还需进一步研究，以确定这是因为该方法无法“跨越”稳定性转变，还是表明所研究的 SPO 发生了折叠分岔，导致超过某个 ε值后不再存在相应的 SPO。虽然本文介绍的方法尚未设计用于处理 ε 沿解族达到极值时出现的此类分岔，但可以考虑采用“混合”算法，在经过这些点时继续延拓轨道：使用标准多重打靶法求解 $X_\varepsilon(k)$，同时结合第 4.7节中的拟牛顿步，以计算 P_ε 和 Λ_ε。

5. 分离曲线的参数化方法

假设对于某个所需的 $\varepsilon = \varepsilon_f$ 值，如第2.2节所述（另见第4.8节末尾），我们有方程 (3)–(4) 关于 $k = 0$, 1, . . ., $q - 1$ 的解 $X(k)$，$P(k)$，Λ，其中 $\Lambda \in \mathbb{C}^{4\times4}$ 为对角矩阵且与 k 无关（本节中我们仍省略下标 ε）。设 Λ 的对角元素为 λ_1、λ_2、λ_s 和 λ_u；这些元素的 q^{th} 次幂将是相关 SPO 的单值矩阵 $DF^q(X(k))$ 的特征值，而 $P(k)$ 的列则是其对应的特征向量，正如第2.2节中所述。

现在，根据第 4.2 节所确立的惯例，令 λ_s 和 λ_u 表示从 $\varepsilon = 0$ SPO X_0继承并延续而来的稳定与不稳定 SPO Floquet 乘子。如同 $\varepsilon = 0$ 情形，$P(k)$ 中与 λ_s 和 λ_u 对应的列将横向于包含 Ξ_ε 的二维圆柱形 NHIM

SPO。不过， λ_1 和 λ_2 将成为对应于 F 在 Ξ_ε上的线性化动力学的乘子。因此，要理解 SPO $X(k)$ 对这些内部 NHIM 动力学的影响，应研究这些弗洛凯乘子的作用。具体而言，如果 λ_1 和 λ_2 为实数且呈双曲型（不失一般性，假设 $0<\lambda_1<1$ 和 $\lambda_2=\lambda_1^{-1}$），那么它们对应的弗洛凯方向将产生位于内、 Ξ_ε 针对限制在该 NHIM 上的动力学的 SPO 一维稳定/不稳定流形。我们将这些位于 Ξ_ε 内的分离曲线称为分离曲线。不同 SPO 的分离曲线相交会破坏 NHIM 内的不变环面 [3]；因此，我们希望对其进行计算和研究。

令$\mathbf{v}_1(k)\in\mathbb{R}^4$ 为对应于 λ_1的 $X(k)$ 处的弗洛凯方向，类似地，令$\mathbf{v}_2(k)\in\mathbb{R}^4$和 λ_2分别为对应方向；它们将分别构成每个 $P(k)$ 的第一列和第二列。那么，$\mathbf{v}_1(k)$ 和 $\mathbf{v}_2(k)$ 将构成每个 SPO 点 $X(k)$ 处稳定／不稳定分离曲线的线性近似。然而，计算全局稳定／不稳定流形的传统方法——即取每个 $X(k)$ 附近流形线性近似的一小段上的点，并对这些点反复应用 F——在这里行不通。请记住，这些分离曲线包含在一个正则双曲不变流形中；因此，对沿分离曲线线性近似选取的点反复应用 F，会使这些点迅速偏离正则双曲不变流形，并沿着对应于 λ_u 的强横向膨胀方向发散。因此，需要能够在不反复应用 F 的情况下，尽可能远离基点 $X(k)$ 计算这些分离曲线。

为解决这一问题，我们计算高阶泰勒多项式，从而在比线性近似更大的有效域内准确逼近分离曲线。这里使用的算法是一种参数化方法 [5]，主要改编自用于不变环面的稳定/不稳定流形的 [1]，以及用于周期轨道的周期映射的 [22]；它也与[23] 的近期方法具有很强的相似性，该方法同样是在上述工作的基础上扩展而来。由于我们有 q 个 SPO 点 $X(k)$，每个点都附有一个“弱稳定” $\mathbf{v}_1(k)$ 方向和一个“弱不稳定” $\mathbf{v}_2(k)$ 方向，因此，对于稳定分界曲线和不稳定分界曲线，各自都需要计算 q 1D 条曲线。在第4.1节的框架下，我们有$\mathcal{M}=\{0,1,\dots,q-1\}\times\mathbb{R}$ 以及 $f(k,s)=(k+1\ \text{模}\ q,\lambda s)$，其中 λ 是 Λ的弱稳定 λ_1 或不稳定 λ_2分量，具体取决于我们试图计算的是哪一条分界曲线。基于此，需要为稳定或不稳定分界曲线求解的参数化 W： $\{0,1,\dots,q-1\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ 为

$$F(W(k,s))-W(k+1 \mod q,\lambda s)=0,\qquad (k,s)\in\{0,1,\dots,q-1\}\times\mathbb{R} \tag{71}$$

5.1. 逐阶方法求解 W

我们将 W表示为依赖于 $k=0$、1、.....、$q-1$ 的泰勒级数，其形式为

$$W(k,s)=X(k)+\sum_{d\geq 1}W_d(k)s^k \tag{72}$$

这里， $s=0$ 对应于我们试图计算其分界曲线的 SPO 上的点 $X(k)$。每个 W 的 s^0 项为 $X(k)$，而每个线性项 $W_1(k)$ 都是稳定的 $\mathbf{v}_1(k)$ 或不稳定的 $\mathbf{v}_2(k)$ 弗洛凯方向，可从 $P(k)$ 的第一列或第二列得知。因此，我们需要求解 $d\geq 2$ 对应的高阶系数$W_d(k)\in\mathbb{R}^4$, $k=0$、1、.....、$q-1$。

记 $W_{<d}(k、s)=X(k)+\sum_{j=1}^{d-1}W_j(k)s^j$。假设我们已求得所有 $j<d$ 对应的 $W_j(k)$，因此，对于所有 $k=0$、1、.....、$q-1$， $F(W_{<d}(k、s))-W_{<d}(k+1 \mod q、\lambda s)$ 的泰勒展开仅包含 s^d 阶及更高阶项。然后，从 $d=2$ 开始，求解 $W_d(k)$ 的递归方法如下：

1. 求 $E_d(k)=[F(W_{<d}(k,s))-W_{<d}(k+1 \mod q,\lambda s)]_d$，其中 $[\cdot]_d$表示方括号内项的 s^d阶泰勒系数。我们在第 5.1.1 节中介绍了这方面的方法。2. 求 $W_d(k)$， $k=0$，1，...，$q-1$，使得 $W_{<d}(k,s)+W_d(k)s^d$抵消方程中的误差 $E_d(k)s^d$，从而使方程 (71) 满足到 s^d阶。要求解 $W_d(k)$ 的方程为 (71)，

$$DF(X(k))W_d(k)-\lambda^d W_d(k+1 \mod q)=-E_d(k) \tag{73}$$

代入 $W_d(k)=P(k)V_d(k)$，定义 $\eta_d(k)=-P(k+1 \mod q)^{-1}E_d(k)$，并回顾 X, P,Λ 满足方程（4），可知方程（73）等价于 $\Lambda V_d(k)-\lambda^d V_d(k+1 \mod q)=\eta(k)$。等价地，

$$\lambda_1 V_{d,1}(k)-\lambda^d V_{d,1}(k+1 \mod q)=\eta_{d,1}(k) \tag{74}$$

$$\lambda_2 V_{d,2}(k) - \lambda^d V_{d,2}(k+1 \mod q) = \eta_{d,2}(k) \tag{75}$$
$$\lambda_s V_{d,3}(k) - \lambda^d V_{d,3}(k+1 \mod q) = \eta_{d,3}(k) \tag{76}$$
$$\lambda_u V_{d,4}(k) - \lambda^d V_{d,4}(k+1 \mod q) = \eta_{d,4}(k) \tag{77}$$

其中 $V_d(k) = [V_{d,1}(k)\, V_d,2(k)\, V_d,3(k)\, V_d,4(k)]^T, \eta_d(k) = [\eta_{d,1}(k)\, \eta_d,2(k)\, \eta_d,3(k)\, \eta_d,4(k)]^T \in \mathbb{R}^4$。方程（74）—（77）可用第 4.3.1 节的方法求解，因为对所有 $d \geq 2$， $|\lambda_1 \lambda^{-d}| \neq 1$, $|\lambda_2 \lambda^{-d}| \neq 1$,$|\lambda_s \lambda^{-d}| \neq 1$ 和 $|\lambda_u \lambda^{-d}| \neq 1$。由此得到 $V_d(k)$，进而 $W_d(k) = P(k)V_d(k)$。3. 令 $W_{<d+1}(k,s) = W_{<d}(k,s) + W_d(k)s^d$，并返回步骤 1。

当我们对阶数 d 的精度感到满意时，便停止递推。 W注意，弗洛凯矩阵 Λ使我们能够在步骤 2 中将方程解耦，从而简化了方程（73）的求解。现在我们证明，方程（73）确实给出了 W_d（k），消除了 s^d 阶误差。

断言。若 W_d 满足方程 （73），则对 $j \leq d$ （使用 $[\cdot]_d$ 前文定义的记号），

$$\left[F(W_{<d}(k,s) + W_d(k)s^d) - \left(W_{<d}(k+1 \mod q, \lambda s) + W_d(k+1 \mod q)(\lambda s)^d\right)\right]_j = 0 \tag{78}$$

证明。回顾一下， F（$W_{<d}$（k， s））$- W_{<d}$（$k+1$模 q， λs）$= E_d$（k）$s^d + \mathcal{O}$（s^{d+1}）根据假设成立。将方程（78）展开为泰勒级数，并仅保留 s^d 阶及以下项，得到

$$\begin{aligned}
&\Big[F(W_{<d}(k,s)) + DF(W_{<d}(k,s))W_d(k)s^d - \\
&\qquad \left(W_{<d}(k+1 \mod q, \lambda s) + W_d(k+1 \mod q)(\lambda s)^d\right)\Big]_j \\
=&[E_d(k)s^d + DF(W_{<d}(k,s))W_d(k)s^d - \lambda^d W_d(k+1 \mod q)s^d]_j \\
=&\begin{cases} 0 & \text{if } j < d, \\ E_d(k) + DF(X(k))W_d(k) - \lambda^d W_d(k+1 \mod q) = 0 & \text{if } j = d \end{cases}
\end{aligned} \tag{79}$$

其中，最后一行的 $j = d$ 情形由前一行推出：将 s^d 从 $[.]_j$ 内部的量中约去，然后取 $s \to 0$。

□

5.1.1. 计算 E_d（k）：自动微分与喷流传输

在逐阶参数化方法的步骤 1 中，为求得 W，我们计算了 s^d 系数

$$E_d(k) = [F(W_{<d}(k,s)) - W_{<d}(k+1 \mod q, \lambda s)]_d \tag{80}$$

每个 $W_{<d}(k,s)$ 都是 $d-1$ 次多项式，而 λ 是常数，因此 $W_{<d}(k+1$ 模 $q, \lambda s)$ 的 s^d 项就是 0。然而，如果 F 是高度非线性的映射，计算 $F(W_{<d}(k,s))$ 的泰勒展开可能会更加复杂；如果 F 是通过某个哈密顿流对点积分固定时间 T_p 后定义的频闪映射 Eqs. (7)-(8)，则情况会更加复杂。对于这类情形，我们使用自动微分 [5] 和/或喷流传输 [24]，，这些方法在文献中有时也被称为微分代数 [25, 26]。为确保内容自洽，下面对这两种方法的讨论基本原样 reproduces 自作者之前的论文 [1, 23]。

自动微分是一种用于计算泰勒级数上运算的高效递归技术。例如，设 $f(s)$ 和 $g(s)$（$s \in \mathbb{R}$）是两个级数；我们可以利用它们已知的系数，将 $d(s) = f(s)/g(s)$ 也计算为泰勒级数。令下标 j 表示级数的 s^j 系数；由于 $f(s) = d(s)g(s)$，我们得到 $f_i = \sum_{j=0}^{i} d_j g_{i-j} = \left(\sum_{j=0}^{i-1} d_j g_{i-j}(s)\right) + d_i g_0$，这意味着

$$d_i = \frac{1}{g_0}\left(f_i - \sum_{j=0}^{i-1} d_j g_{i-j}\right) \tag{81}$$

从 $d_0 = f_0/g_0$开始，公式（81）可以递归计算 d_i、 $i \geq 1$。对于泰勒级数上的许多其他函数和运算，也存在类似的递归求值公式，包括 f（s）$^\alpha$、 $\alpha \in \mathbb{R}$；

参见 [5] 以了解更多示例。最重要的是，在所有自动微分公式中，输出级数的 s^i系数仅取决于输入级数的 s^i 以及更低阶系数。因此，为了进行计算机实现而截断泰勒级数，并不会影响所计算系数的准确性。

如果 F 是通过可能较复杂但明确的数学公式定义的映射，则可以应用自动微分直接计算 $F(W_{<d}(k,s))$，并求得所需的 d 阶泰勒系数。但如果 F 是流的频闪映射，这种直接计算方法就不再适用；还需要更多步骤。尽管如此，自动微分对于流映射仍然很有用。在这种情况下，它的用途在于，我们可以在运动方程 (7) 中用诸如 $W_{<d}(k,s)$ 这样的泰勒级数替代 (x,y,p_x,p_y)，从而得到关于 s 的 $(\dot{x},\dot{y},\dot{p}_x,\dot{p}_y)$ 的级数。因此，在重载所需的运算符（例如算术运算和乘方运算），使其能够接受泰勒级数参数后，我们也可以使用数值积分程序处理这些级数。[1] 更确切地说，考虑一个关于时间的泰勒级数值函数 $V(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}V_j(t)s^j:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$，其中 $V_j(t)$ 是随时间变化的泰勒系数。将 $V_x(s,t)$、$V_y(s,t)$、$V_{p_x}(s,t)$ 和 $V_{p_y}(s,t)$ 分别记作 $V(s,t)$ 的 x、y、p_x 和 p_y 分量；类似地，将 V_j、$_x(t)$、V_j、$_y(t)$、V_j、$_{p_x}(t)$ 和 V_j、$_{p_y}(t)$ 记作 $V_j(t)$ 的分量。将 V 代入方程 (7)，得到一个微分方程组

$$\frac{d}{dt}V_x(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\dot{V}_{j,x}(t)s^j=\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_x}\Big(V_x(s,t),V_y(s,t),V_{p_x}(s,t),V_{p_y}(s,t),\theta_p\Big) \tag{82}$$

$$\frac{d}{dt}V_y(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\dot{V}_{j,y}(t)s^j=\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial p_y}\Big(V_x(s,t),V_y(s,t),V_{p_x}(s,t),V_{p_y}(s,t),\theta_p\Big) \tag{83}$$

$$\frac{d}{dt}V_{p_x}(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\dot{V}_{j,p_x}(t)s^j=-\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial x}\Big(V_x(s,t),V_y(s,t),V_{p_x}(s,t),V_{p_y}(s,t),\theta_p\Big) \tag{84}$$

$$\frac{d}{dt}V_{p_y}(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\dot{V}_{j,p_y}(t)s^j=-\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial y}\Big(V_x(s,t),V_y(s,t),V_{p_x}(s,t),V_{p_y}(s,t),\theta_p\Big) \tag{85}$$

$$\dot{\theta}_p=\Omega_p \tag{86}$$

假设 H_ε 及其偏导数是适用于自动微分技术的代数函数；例如，参见 CCR4BP 哈密顿量方程 (9)。因此，如果已知 V_j,$_x(t)$、V_j,$_y(t)$、V_j,$_{p_x}(t)$、V_j,$_{p_y}(t)$ 和 θ_p 在 $j\in\mathbb{N}$ 及某个 $t\in\mathbb{R}$下的值，自动微分便可将方程 (82)-(85) 中每个方程右端项简化为关于 s的级数。然后，对于方程 (82)-(85) 中的每个方程以及 $j\in\mathbb{N}$，左端中的 s^j 系数$\dot{V}_j$,$_x(t)$、$\dot{V}_j$,$_y(t)$、$\dot{V}_j$,$_{p_x}(t)$ 或 $\dot{V}_j$,$_{p_y}(t)$ 必须等于右端项的 s^j 系数。换句话说，V_j,$_x(t)$、V_j,$_y(t)$、V_j,$_{p_x}(t)$ 和 V_j,$_{p_y}(t)$，$j\in\mathbb{N}$，都是 θ_p, V_j,$_x(t)$、V_j,$_y(t)$、V_j,$_{p_x}(t)$ 以及 V_j,$_{p_y}(t)$,$j\in\mathbb{N}$的函数。这实际上是一个关于 $V(s,t)$ 随时间变化的泰勒系数的微分方程组。对各种初始条件 $V(s,0)=W_{<d}(k,s)$、$k=0,1,\ldots,q-1$，以及取为第 3.3 节中固定值的初始 θ_p，求解方程 (82)-(86)，即可计算所有所需 k对应的 $F(W_{<d}(k,s))=V(s,T_p)$；这些正是我们需要的泰勒级数。

总之，如果 F 是由显式公式给出的映射，则可利用自动微分直接求出 $F(W_{<d}(k,\ s))$ 的 s^d 泰勒系数 E_d，对所有 $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ q-1$ 均如此。另一方面，如果 F定义为某个流的频闪映射，我们则将 $W_{<d}(k,\ s)$ 的泰勒系数视为初始状态变量，并逐个系数进行数值积分；经过时间 T_p 的传播后，我们得到 $F(W_{<d}(k,\ s))$ 的泰勒系数，其中的 s^d 系数即为 $E_d(k)$。这种对泰勒级数进行数值积分的方法称为喷流传输；更多详情请参见 [24] 。喷流传输可以使用截断泰勒级数，因为用于计算时间导数的自动微分技术能够处理截断级数而不会损失精度；事实上，在计算 $E_d(k)$ 时，应 将所有级数截断至

[1]事实上，任何一种对基本运算进行重载、使其能够接受多项式参数的方法，都可以在此与数值积分结合使用，其中也包括自动微分以外的方法。由于本文的实现采用了自动微分，因此下文将重点讨论自动微分。

s^d 阶，以用于自动微分和喷流传输步骤，从而优化计算时间和存储。请注意，对于 d 阶截断级数以及我们的四维相空间，系数共有 $4(d+1)$ 个，这就是数值积分所需的维数。

注 6. 如果 $W(k,s)$，$k=0,1,\ldots,q-1$ 是方程（71）的一个解，那么对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，$W(k,\alpha s)$ 也是一个解。有时，喷流传输积分可能难以收敛，这是因为 $W(k,s)$ 的系数 $W_j(k)$ 增长过快；反之，若 $W_j(k)$ 收缩过快，则在计算 $W(k,s)$ 时可能产生数值误差。在这两种情况下，将 $W(k,s)$ 缩放到某个 $W(k,\alpha s)$ 都会有所帮助。为此，只需将 $W_1(k)$ 乘以 α，然后重新启动第 5.1 节的逐阶算法；应选择 α，使 $W_j(k)$ 既不会增长过快，也不会收缩至零。可以通过对 $W(k,s)$ 进行初步计算，并对所得系数拟合指数增长率，来确定这样的 α；或者，简单地反复试验通常也行之有效。

5.2. 分离曲线参数化的有效性基本域 $W(k,s)$

在映射 F 下，$X(k)$的稳定／不稳定分离曲线的 d 阶泰勒参数化 $W_{\le d}(k,s)$，将比其线性近似 $\mathrm{v}_1(k)$ 或 $\mathrm{v}_2(k)$ 精确得多。不过，由于级数截断误差，这些参数化仍不精确；此外，即使是满足方程（71）的精确无限级数 $W(k,s)$，也只在 s 的某个收敛半径范围内有效。因此，必须确定 $s\in\mathbb{R}$ 的取值范围，使得 $W_{\le d}(k,s)$ 能够准确表示稳定／不稳定分离曲线上的曲线。

固定一个误差容限，例如 $E_{tol}=10^{-5}$ 或 10^{-6}。现在，我们来求出 [5] 所称的$W_{\le d}(k,s)$ 的有效性基本域：最大的集合 $\mathcal{D}=\{0,1,\ldots,m-1\}\times(-D,D)$，使得对于所有 (k,s)，不变性方程（71）中的误差都小于 E_{tol}。换言之，我们要寻找最大的 $D\in\mathbb{R}^+$，使得对于所有满足 s 且满足 $|s|<D$，

$$\max_{k=0,1,\ldots,q-1}\|F(W_{\le d}(k,s))-W_{\le d}(k+1 \mod q,\lambda s)\|<E_{tol} \tag{87}$$

找到 D 最简单的方法是将 k 固定为某个值，然后使用二分法找到最大的 D_k，使得对于所有 $s\in(-D_k,D_k)$，$\|F(W_{\le d}(k,s))-W_{\le d}(k+1 \bmod q,\lambda s)\|<E_{tol}$；以 $s=0$ 和 $s=10$ 作为二分法的端点通常效果良好。对 $k=0,1,\ldots,q-1$的每个取值执行此操作后，前述的 D 将是所有 D_k中的最小值。

最后，由于此处不应反复对分界点应用 F 以进行全局化，因此只需通过对密集网格上的每个 $W_{\le d}(k,s)$ 取值来表示给定的分界曲线，网格取值范围为$s\in[-D,D]$；事实上，由于不进行全局化，也可以改为对密集网格上的每个 $W_{\le d}(k,s)$ 取值，网格取值范围为 $s\in[-D_k,D_k]$，这样得到的曲线会比使用 $D=\min_{k=0,1,\ldots,q-1}D_k$得到的曲线更长。对 $\lambda=\lambda_1$ 和 λ_2均执行这一完整流程（从第 5.1 节的步骤开始），由此得到的参数化及取值点便完成了所需分离曲线的计算。

6. CCR4BP中的数值实现与结果

第4 节和第5节中所发展的方法具有普适性，可以应用于满足第 $F_\varepsilon:\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 2.1节假设的任意一族辛映射。本文的拟牛顿法和分离曲线参数化方法已成功实现，并用于研究木星-木卫二-木卫三 [3] 和天王星-天卫三-天卫四[27]平面CCR4BP模型中的次谐周期轨道及其诱导的动力学，其中研究了频闪映射（回顾第3.3节）。在简要讨论天体力学特有术语以及这些方法计算实现的若干细节之后，本节将展示这些研究中的对称周期轨道和分离曲线示例，从而说明本文方法对于应用数值研究和动力学研究的有效性。

6.1. 天体力学术语：平均运动共振与次级共振

回顾第 3.2.1 节所述的平面CCR4BP，它是2自由度PCR3BP（第 3.1.1节）的2.5自由度周期性哈密顿量摄动。在这一天体力学背景下，来自未摄动PCR3BP的不稳定周期轨道的原始正则双曲不变流形通常位于称为 F_ε 的相空间区域内，这些区域对应于 F_0-轨道的任何持续存在的不变环面也因此通常被称为“共振环面”，即使其在CCR4BP频闪映射 ω 下的旋转数

事实上并非 2π的有理倍数。因此，为了将CCR4BP平均运动共振中的更一般“共振环面”与第2.1 节所定义的“共振环面”（具有有理$\frac{\omega}{2\pi}$ 的环面）区分开来，今后在这一天体力学背景下，我们将后者称为次级共振环面。正如预期的那样，来自PCR3BP的次级共振环面通常不会在任何 $\varepsilon > 0$情况下持续存在于CCR4BP中，但其构成的一些次谐波周期轨道会持续存在；在 [3] 和 [27], 中，这些SPO被称为次级共振周期轨道。在第6.3节中，我们将交替使用该术语和SPO。

完整细节请参见 [1] 。为更直观地从物理角度理解上述讨论，PCR3BP 的运动平均共振轨道与该模型中大质量天体m_2 的公转处于共振状态。该平均运动共振中的次级共振轨道也同样与 CCR4BP 中扰动质量体 m_3的公转处于共振状态。因此，次级共振轨道在与 m_2保持共振的同时，也与 m_3处于共振状态，可以将其视为处于“共振中的共振”之内——其边界由平均运动共振的二维NHIM内的分离曲线构成。

6.2. 关于计算实现的说明

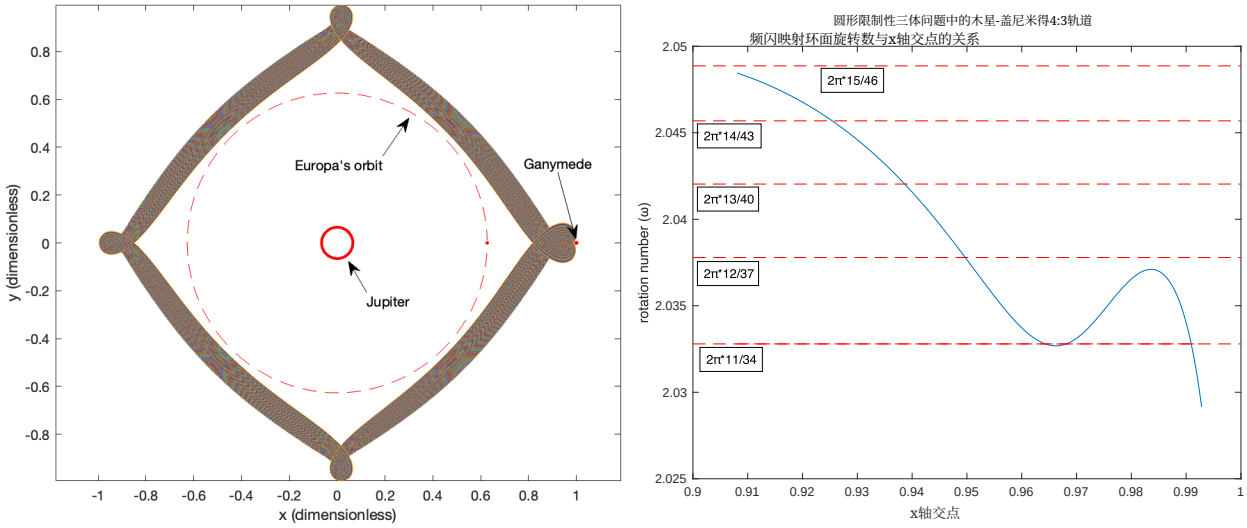
第 6.3 节将讨论的研究是在一台搭载 Apple M1 Pro处理器的 2021年前后的Mac笔记本电脑上完成的。所有算法均使用 Julia 编程语言实现。从 PCR3BP 出发，利用第 4 节的准牛顿法，通过数值延拓计算 CCR4BP 的 SPO，通常每个 SPO 用时不到 2 秒。算法实现除了用于 [28] 常微分方程传播的 OrdinaryDiffEq.jl 外，无需使用任何特殊软件包。利用 OrdinaryDiffEq.jl 内置的 DP8（8/5/3 阶 Dormand-Prince Runge-Kutta）自适应步长积分算法，对频闪映射进行数值积分求值。

分离曲线的计算也在 Julia 中进行；在级数计算中，我们将截断阶数提高到了 $d = 20$。第 5 节所述的参数化方法、自动微分和喷流传输，借助 TaylorSeries.jl [29], TaylorIntegration.jl [30], 和 OrdinaryDiffEq.jl [28] 软件包实现，用于自动微分和喷流传输。TaylorSeries.jl 软件包已定义了一种截断的 Taylor1 变量类型，并内置了可对其进行操作的自动微分例程。尽管 OrdinaryDiffEq.jl 库最初并非为喷流传输而开发，但与 TaylorIntegration.jl 软件包一同加载时，它能够将 Taylor1 变量作为初始条件，并按照第 5.1.1 节关于喷流传输的描述精确地传播这些变量。请注意，这里同样使用了 DP8 积分器，而非 TaylorIntegration.jl 中的泰勒积分器。

6.3. 真实系统的 *CCR4BP*模型中的次级共振轨道与分离曲线

在本文中 [3], ，我们成功地将第4-5节的方法应用于计算次级共振周期轨道、其弗洛凯乘子及方向，最后还计算了木星-木卫二-木卫三 CCR4BP 随动映射的分离曲线。木卫二和木卫三都是木星的卫星，沿近圆轨道绕木星运行；在 [3], 中，我们重点研究了木星的卫星木卫二对木星-木卫三 PCR3BP（$\mu = 7.8037 \times 10^{-5}$）中一族位于木卫三 4:3 平均运动共振内的不稳定周期轨道所产生的摄动效应。这些 PCR3BP 轨道显示在图1的左侧，图中还显示了木卫二的轨道以供参考（但尚未考虑其引力）。所有计算均在第3.1.1 节和3.2.1节所述的木星-木卫三共转参考系中进行；后续许多图也采用该参考系进行可视化。木卫二的质量比 ε（如第3.2.1节所定义）被视为摄动参数（在部分图中也记作 μ_3 ）。

在未扰动的木星-盖尼米得 PCR3BP 中， $\varepsilon = 0$这一 4:3 平均运动共振不稳定流周期轨道族的周期范围为 T ，根据第 $\omega = 2\pi T_p/T$ 节中的关系式，可将其转换为频闪映射的环面旋转数3.3；以归一化单位计，$T_p \approx 6.1966$ 对应木卫二摄动周期（也即频闪映射时间）。图1右侧展示了 ω 随 PCR3BP 轨道最右侧 x截距的变化图。我们能够将许多具有 $\omega > 2.04047$ 的环面，从木星-木卫三 PCR3BP 数值延拓至实际质量的（平面）木星-木卫二-木卫三 CCR4BP——即针对木卫二，从 $\varepsilon = 0$ 延拓至 $\varepsilon = 2.5265 \times 10^{-5}$ ；但对于较低的 ω则无法做到。因此，为了研究这一部分 4:3 木卫三平均运动共振不稳定轨道族中的动力学，我们转而尝试在实际质量 CCR4BP 中计算次级共振周期轨道（SPO）及其分离曲线。



Figu图1：（左）木星-盖尼米得圆形限制性三体问题中的4:3平均运动共振不稳定周期轨道，（右）轨道 ω 与 x的截距图 [3]

利用 CCR4BP 的对称性，找出可能在 CCR4BP 中延续存在的未扰动 PCR3BP SPO 的初始相位，在 [3] 中我们采用第 4 节的拟牛顿法，对 $\frac{\omega}{2\pi}$ 比值为 11/34、34/105、23/71、35/108、12/37 和 25/77 的次级共振 SPO 及其弗洛凯方向进行数值延拓。撰写 [3]，后，我们还计算了比值为 37/114 和 45/139 的 SPO，以下部分图中也包含了这些轨道。所有这些比值均对应于 $\omega < 2.04047$。在方程（13）—（14）中，我们采用了 10^{-7}的容差，并在计算这些 SPO 时使用了从 5×10^{-7} 到 10^{-6}、步长为 $\Delta\varepsilon$ 的延拓步长；所有 SPO 都成功地在 CCR4BP 频闪映射下延拓至所需的 ε 值。与这一 $\omega < 2.04047$范围内的环面不同，这些 SPO 无一未能延拓至 $\varepsilon = 2.5265 \times 10^{-5}$。随着 ε 变化，其中一些 SPO 的 λ_1-λ_2 弗洛凯乘子对发生了稳定性变化；例如，23/71 SPO 在 $\varepsilon = 3 \times 10^{-6}$ 时具有双曲型 λ_1-λ_2，到 $\varepsilon = 4 \times 10^{-6}$时变为椭圆型 λ_1-λ_2，反之亦然。拟牛顿法处理此类 λ_1-λ_2 转变时，精度未受影响。

图2 展示了针对 $\omega < 2.04047$找到的所有轨道（包括环面和对称周期轨道），其中 $\varepsilon = 0$ 显示在顶部，$\varepsilon = 8.0 \times 10^{-6}$ (≈ 31.7 为木卫二实际质量比的百分比）显示在中间，木卫二的实际质量比$\varepsilon = 2.5265 \times 10^{-5}$显示在底部。这些图均采用不稳定4:3平均运动共振轨道正则双曲不变流形的“类作用量-角度”坐标（详情见 [3]），以突出次级共振的出现。事实上，在中间的中等扰动图中，环面与孤立的对称周期轨道并存；可以看到，次级共振周期轨道位于由持续存在的环面围成的钟摆形区域的“颈部”和“中心”，这与摄动理论的预期一致。在中间和底部的图中，λ_1的 λ_2 双曲型（椭圆型）对称周期轨道分别用 ×表示（○表示）。虽然在圆形限制性四体问题的频闪映射中，这类轨道仅表现为孤立点，但它们在圆共振限制四体问题流中也对应连续的一维流周期轨道；图 $\frac{\omega}{2\pi} = 11/34$ 和图 12/37分别绘出了这两条流周期轨道，见图3 和4 。

最后，我们利用这些弗洛凯方向，计算了从这些 SPO 发出的分离曲线 $\frac{\omega}{2\pi} = p/q$。此前，我们已在圆形限制性四体问题中计算了所有上述比值对应的次级共振 SPO 周期轨道 λ_1，λ_2 并得到了这些 SPO 的弗洛凯方向和乘子。该方法具有双曲型。按照第5节所述的参数化方法，并将所得分离曲线上的点绘制在图2所用的相同“类作用量-角度”坐标中，得到的曲线如图5所示；图中也标出了 SPO 点。参数化方法能够准确捕捉远离其基准 SPO 的分离曲线的非线性形状，这有助于确认在该范围内的 4:3 平均运动共振 NHIM 中，相邻 SPO 的分离曲线彼此相交，从而摧毁了这一范围内的所有环面 ω，并揭示了此前环面延拓失败的动力学原因。感兴趣的读者可参阅完整论文 [3]，了解这一结果及其实际意义的更多细节和分析。

在 [3] 中，我们研究了木星-木卫二-木卫三系统中的木卫三 4:3 平均运动共振轨道；在 [27] 中，我们则将关注重点转向天王星系统，并在天卫四 6:5 平均运动共振中发现了与木星情形相似的现象，

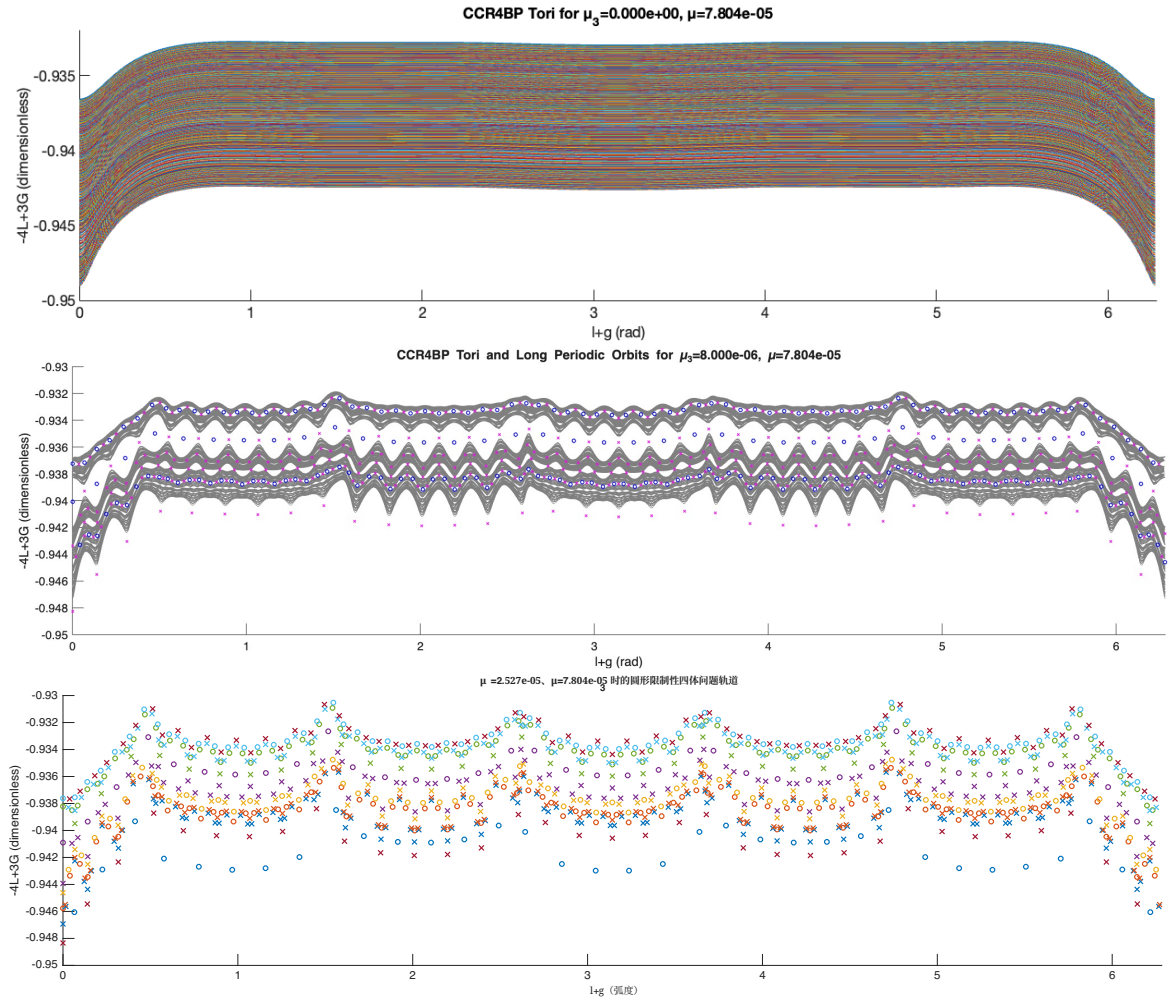


图 2: Gany木卫二 4:3 平均运动共振圆限制四体问题映射的不稳定轨道， $\varepsilon = 0.0$， 8.0×10^{-6}， 2.5265×10^{-5} （从上到下） [3]

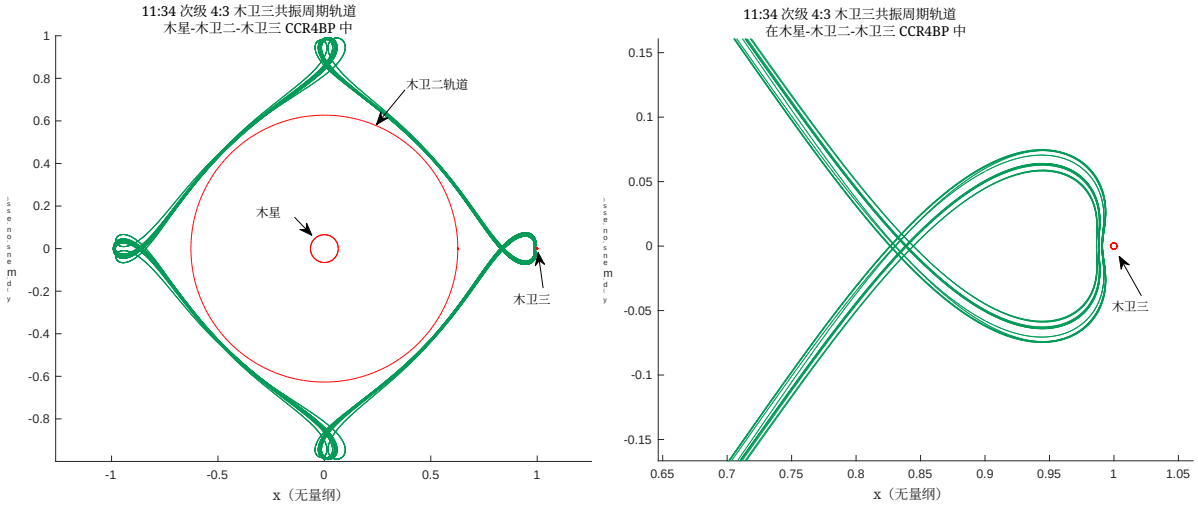


图 3: 4 : 3 木卫三平均运动共振 11/34 流周期轨道，右侧为放大视图，木星-木卫二-木卫三圆形限制性四体问 P

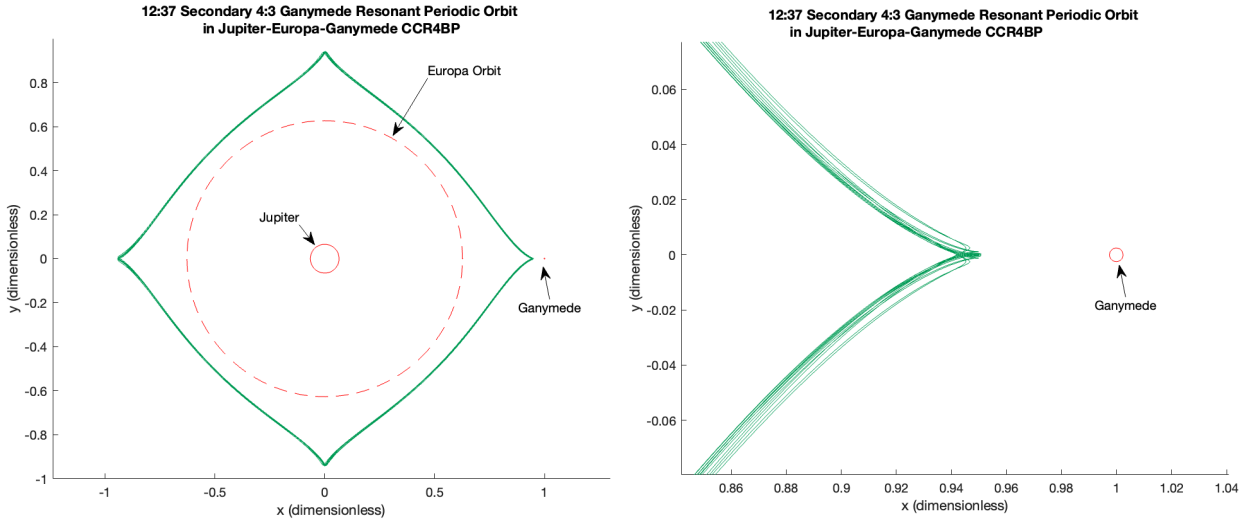


图 4：4： 3 木卫三平均运动共振 12/37 流周期轨道，右侧为放大图，木星-木卫二-木卫三 CCR4BP [3]

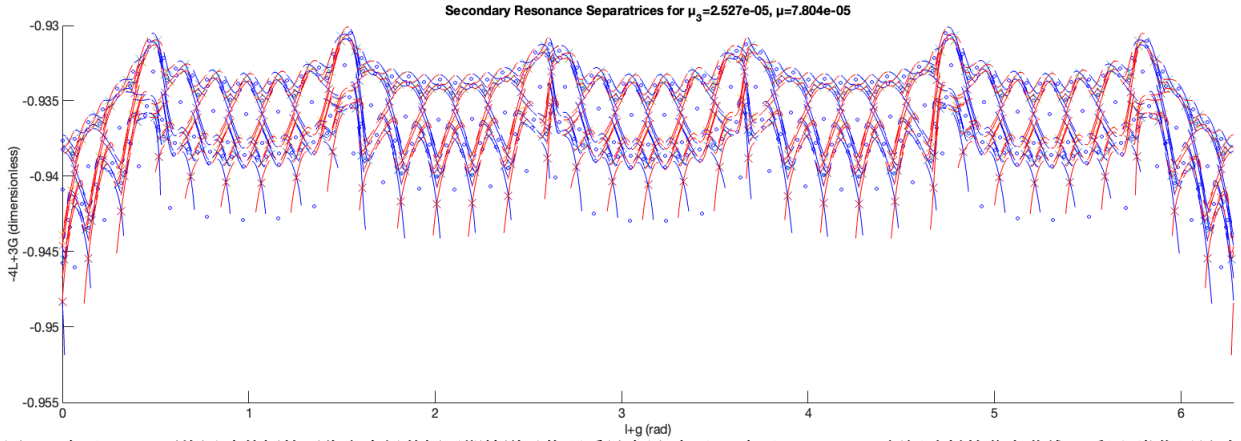


图 5：木卫三 4:3 平均运动共振的不稳定次级共振周期轨道及物理质量木星-木卫二-木卫三 CCR4BP 频闪映射的分离曲线。采用“类作用量-角度”坐标绘图。蓝色为稳定分界曲线，红色为不稳定分界曲线。

具体而言，虽然详情请参阅完整论文 [27]，简而言之，我们再次从（天王星-天卫四）PCR3BP 的一族（此处为 6:5 天卫四）平均运动共振不稳定周期轨道出发，并研究额外摄动卫星（此处为天卫三）对这些轨道的影响。我们用一个 CCR4BP 对后一情形建模，其中 $\mu = 3.5433 \times 10^{-5}$，并采用 [1] 和第4 节中的拟牛顿方法，分别延续环面和对称周期轨道（及其弗洛凯方向），使其跨越一系列频闪映射 ω 取值，从$\varepsilon = 0$ 到天卫三的实际质量比 $\varepsilon = 3.9168 \times 10^{-5}$。计算实际质量 CCR4BP 对称周期轨道时采用的次级共振比 $\frac{\omega}{2\pi}$ 为 25/69、21/58、17/47、30/83、13/36、22/61 和 9/25。图6左侧显示 6:5 天卫四平均运动共振 PCR3BP 不稳定周期轨道族，右侧显示成功延续得到的天王星-天卫三-天卫四 CCR4BP 流的 9/25 次级共振周期轨道。

最后，再次使用拟牛顿法给出的弗洛凯方向，初始化并执行第 λ_1节 λ_2 的参数化方法，从而计算了5中双曲型6:5 平均运动共振正则双曲不变流形上次级共振圆形限制性四体问题 SPO 的分离曲线，方法与 4:3 平均运动共振的图5类似。图 7 展示了计算得到的 SPO 和分离曲线，以及一些仍然存在的不变环面；这些环面只出现在远离天卫三轨道的相空间区域。同样，能够计算远离其基准 SPO 的分离曲线，是发现相邻次级共振周期轨道的分离曲线相交的关键，这也再次揭示了该区域中环面破坏的机制。有兴趣的

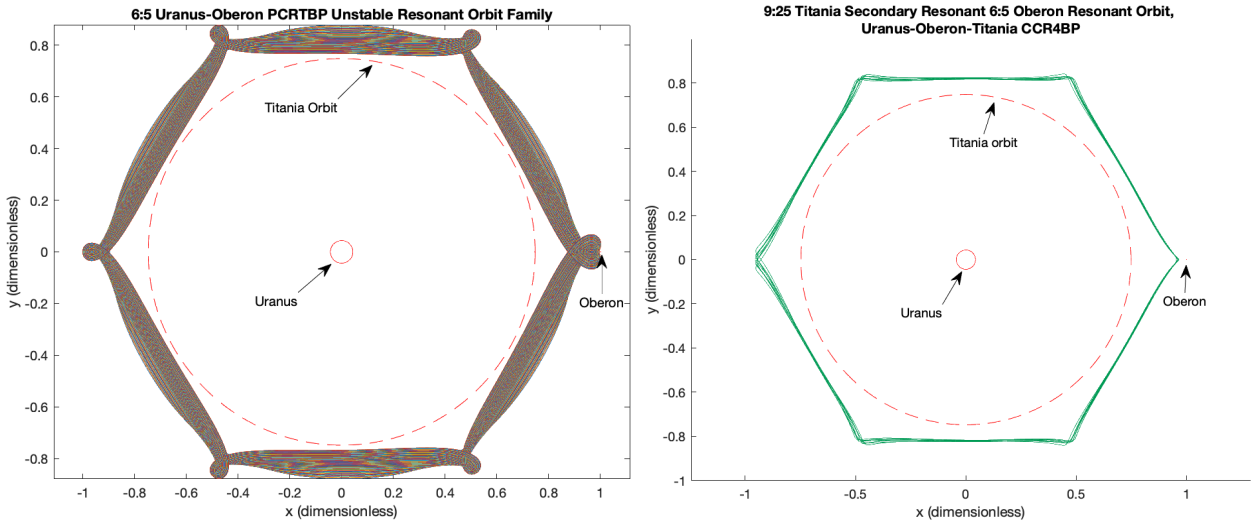


图 6: （左）天王星-天卫四圆形限制性三体问题中的 6:5 平均运动共振不稳定周期轨道；（右）天王星-天卫三-天卫四圆形限制性四体问题中的 6:5 天卫四平均运动共振 9/25 流周期轨道 [27]

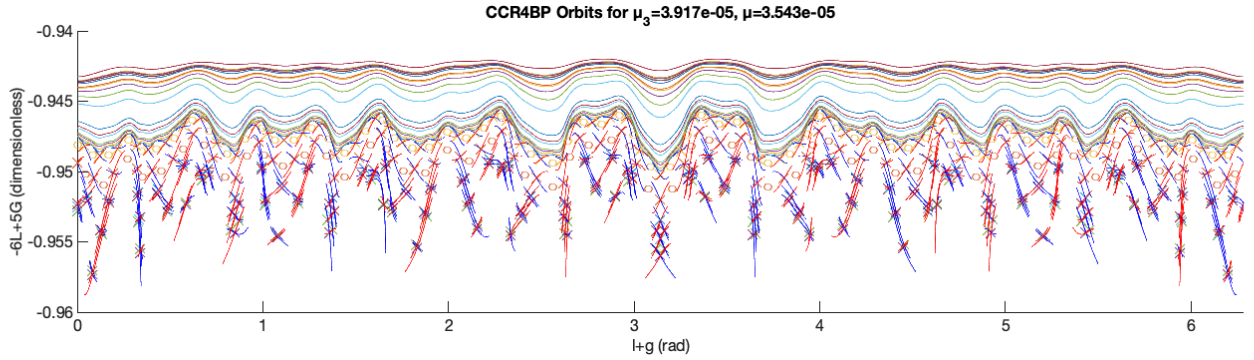


图 7: 天王星-天卫三-天卫四物理圆形限制性四体问题的频闪映射中，天卫四 6:5 平均运动共振的不稳定环面、次级共振周期轨道和分离曲线。图中采用“类似作用-角度”的坐标。稳定分界曲线以蓝色表示，不稳定分界曲线以红色表示 [27]。

读者可参阅 [27]，了解这项天王星研究的更多详情。

7. 结论

本文提出了一种快速拟牛顿法，可同时计算某些常见扰动族的四维辛映射的亚谐波周期轨道及其 Floquet 向量和乘子。该方法无需像现有文献中绝大多数传统多重打靶法那样求解大型线性方程组并计算其特征向量，从而提高了亚谐波周期轨道计算的效率。此外，本文方法还能提供传统方法无法获得的弗洛凯方向和乘子；这些信息可用于初始化逐阶方法，以计算亚谐波周期轨道的弱稳定和不稳定分界曲线的泰勒级数参数化。我们的拟牛顿法首次将不变环面参数化方法（例如 [7, 5, 1], ）扩展到亚谐波周期轨道上各点的直接计算。所提出的拟牛顿法可用于按扰动参数延拓对称周期轨道及其 Floquet 向量；为进行初始化，我们还介绍了构造未扰动映射解的方法。

值得注意的是，本文的方法适用于由自治 2 自由度哈密顿量的周期扰动所产生的 2.5 自由度哈密顿系统的频闪映射。因此，可以利用本文的拟牛顿法对 2 自由度系统的周期轨道进行数值延拓，这些轨道在流下的周期与扰动周期共振。在实际应用中，研究常见的平面圆型限制性三体问题中的周期轨道受第三个大天体影响所产生的摄动效应时，就会遇到这种情况。本文用于计算由此产生的对称周期轨道、弗洛凯方向和分离曲线的方法，已成功应用于木星系统和天王星系统的相关研究，切实展示了这些算法在现实中的实用性。

尽管本文提出的方法假设映射的相空间为 4 维，但一个有趣的未来拓展方向是研究更高维空间中的次谐周期轨道。例如，可以考虑一个 n 自由度哈密顿流的非退化流周期轨道，其定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上，且单值矩阵的特征值 1 的代数重数为 2，并研究 $(n+0.5)$ 自由度周期扰动对该轨道的影响。如果 n 自由度流下的轨道周期与扰动周期共振，那么对于某些初始相位，该（次谐）周期轨道也可能在 $(n+0.5)$ 自由度系统中继续存在。一个重要的例子是 9:2近直线晕轨道 [31]，美国国家航空航天局计划将其用于月球门户空间站。该轨道源自地月圆型限制性三体问题中的一个 3 自由度（空间）周期晕轨道，其周期为会合太阳扰动周期的 2/9。拟牛顿法的关键步骤，若加入处理额外 Floquet乘子对及方向的方程，似乎可以推广到这类情形。另一个有益的拓展方向，是使本文的方法能够在数值延拓过程中处理折叠分岔。事实上，我们希望本文将参数化方法从环面推广到周期轨道，能够开辟新的未来研究方向。

致谢

这项研究的部分工作是在加州理工学院喷气推进实验室开展的，依据与美国国家航空航天局签订的合同（80NM0018D0004）完成。本研究还部分获得了美国国家科学基金会（NSF）数学科学博士后研究奖学金（编号：DMS-2202994）的资助。

附录 A. 证明 A，B 是 ℓ^∞ 范数下的压缩映射

我们证明，若对于所有 $k=0,\ 1,\ \ldots q-1$，A 是压缩映射；对于 B，若 $|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)|>1$，也可用非常类似的方法证明。以下证明中，记 $C=\max_{k=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1}|\lambda_a(k)/\lambda_b(k)|$。

引理1. 若 $0<C<1$，A 是压缩映射。因此，在这种情况下，迭代 $u_{n+1}=A(u_n)$ 将一致且指数快速收敛，$n\to\infty$ 趋于长度为q 的解序列 u，该序列满足方程 (17)（因此也满足 (16)）。

证明。设 u_1，u_2 是由 $k=0$、1、……、$q-1$索引的有限序列。那么，

$$\begin{aligned}&\max_k\|[A(u_1)](k)-[A(u_2)](k)\|\\&\quad=\max_k\left\|\frac{\lambda_a(k-1\mod q)u_1(k-1\mod q)-\lambda_a(k-1\mod q)u_2(k-1\mod q)}{\lambda_b(k-1\mod q)}\right\|\\&\quad\le C\max_k\|u_1(k-1\mod q)-u_2(k-1\mod q)\|=C\max_k\|u_1(k)-u_2(k)\|\end{aligned}\tag{A.1}$$

由于 $0<C<1$，A 在 ℓ^∞ 范数下是压缩映射。压缩映射定理 [18] 告诉我们，每个这样的映射都有唯一的不动点；此外，只需从映射定义域中任取一个值，不断向前迭代直至收敛，即可求得该不动点。方程（17）的解按定义就是压缩映射 A的不动点。因此，迭代收敛于 u。□

附录 B. 关于以 λ_s、λ_u 为常数的解的证明，其中 $\mathbf{v}_s$、$\mathbf{v}_u$ 按 a_s、a_u 重新缩放

沿用第4.3.4节中的记号，注意，由于 X_ε、P_ε、Λ_ε 是方程（14）的一个解，因此

$$DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\mathbf{v}_s(k) = \lambda_s(k)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) \tag{B.1}$$

$$DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\mathbf{v}_u(k) = \lambda_s(k)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q) \tag{B.2}$$

这可由方程 (14) 的第3列和第4列推得。由于第 4.3.4 节的过程不会改变 P_ε 和 Λ_ε 中的第~~1列和第2列，使其与 P_ε 和 Λ_ε 中的对应列保持不变（因此仍满足方程 (14) ），我们只需验证~~与方程 (B.1)–(B.2) 类似的方程对 P_ε 和 Λ_ε 中的第3列和第4列也成立。下面将证明~第3列（~~$\mathbf{v}_s$ 和 λ_s）的情形；~~$\mathbf{v}_u$ 和 λ_u 的情形可用完全相同的方法证明。

~引理 *2.* 若 $v_s(k)$、$\lambda_s(k)$ 对所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 均满足方程 *(B.1)*，且 $a_s(k)$、λ_s 满足方程 *(21)*，则~$\tilde{v}_s(k) = a_s(k)v_s(k)$ 满足

$$DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\tilde{\mathbf{v}}_s(k) = \bar{\lambda}_s\tilde{\mathbf{v}}_s(k+1 \mod q) \tag{B.3}$$

证明。由于 $DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\mathbf{v}_s(k) = \lambda_s(k)\mathbf{v}_s(k+1 \text{ 模 } q)$，因此

$$\begin{aligned} DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))\tilde{\mathbf{v}}_s(k) &= DF_\varepsilon(X_\varepsilon(k))a_s(k)\mathbf{v}_s(k) = a_s(k)\lambda_s(k)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) \\ &= a_s(k+1 \mod q)\bar{\lambda}_s\mathbf{v}_s(k+1 \mod q)) = \bar{\lambda}_s\tilde{\mathbf{v}}_s(k+1 \mod q) \end{aligned} \tag{B.4}$$

~其中 $a_s(k)\lambda_s(k) = a_s(k+1 \text{ 模 } q)\lambda_s$ 可由对公式（21）进行指数运算得到。 □

附录 C. $\mathbf{v}_c(k)$ 和 $\mathbf{v}_2(k)$ 的性质证明

这里，我们证明通过第 $\mathbf{v}_c(k)$ 节 $\mathbf{v}_2(k)$ 4.4.2 中所述步骤得到的向量 分别满足公式（34）和（36）。这一结论可由以下两个引理证明，它们均改编自不变环面 [1]的类似结果。

引理 3。公式 $\mathbf{v}_c(k)$ 中定义的向量 (33) 对所有 $k = 0、1、\ldots\ldots、q-1$ 均满足公式

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) = T(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_c(k+1 \mod q) \tag{C.1}$$

引理 *4.* 若 $v_c(k)$ 和 $a(k)$ 对所有 $k = 0, 1, \ldots, q-1$ 均分别满足公式（*34*）和（*35*），且公式（*35*）中的 $T = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A(k)$，则 $v_2(k) = v_c(k) + a(k)DK_0(\theta_k)$ 将满足公式（*36*）：

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_2(k) = TDK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_2(k+1 \mod q) \tag{C.2}$$

引理 3 的证明。应用公式（33），然后应用方程 (30)，并回顾第 4.4.1 节的 $\mathbf{v}_s$、$\mathbf{v}_u$、λ_s、λ_u 满足 $DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_s(k) = \lambda_s\mathbf{v}_s(k+1 \bmod q)$ 和 $DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_u(k) = \lambda_u\mathbf{v}_u(k+1 \bmod q)$，我们有

$$\begin{aligned} DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) = DF_0(X_0(k)) &\left(\frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} + f_1(k)\mathbf{v}_s(k) + f_2(k)\mathbf{v}_u(k)\right) \\ =&A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + B(k)\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2} \\ &+ \left(C(k) + \lambda_s(k)f_1(k)\right)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) + \left(D(k) + \lambda_u(k)f_2(k)\right)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q) \end{aligned} \tag{C.3}$$

回顾公式（31）和（32，我们因此有

$$\begin{aligned} DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) =&A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + B(k)\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2} \\ &+ f_1(k+1 \mod q)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) + f_2(k+1 \mod q)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q) \end{aligned} \tag{C.4}$$

由于 F_0 是辛的，它满足 $\Omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \Omega(DF_0(X_0(k))\mathbf{v}1, DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_2)$，对所有 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^4$均成立，其中 Ω 是定义在欧几里得 $\mathbb{R}^4$ 上的双线性辛形式，其形式为 $\Omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T J\mathbf{v}_2$。不难看出，对于任意 $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^4$，$\Omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) = 0$。此外，由于 $0 < \lambda_s < 1$，并回顾公式（29），我们有

$$\begin{aligned}\max_{k=0,\ldots,q-1} |\Omega(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_s(k))| &= \max_{k=0,\ldots,q-1} |\Omega\left(DF_0(X_0(k))DK_0(\theta_k), DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_s(k)\right)| \\ &= \max_{k=0,\ldots,q-1} |\Omega\left(DK_0(\theta_{k+1 \mod q}), \lambda_s\mathbf{v}_s(k+1 \mod q)\right)| \\ &= \max_{k=0,\ldots,q-1} \lambda_s\, |\Omega\left(DK_0(\theta_{k+1 \mod q}), \mathbf{v}_s(k+1 \mod q)\right)| \\ &= \lambda_s \max_{k=0,\ldots,q-1} |\Omega\left(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_s(k)\right)|\end{aligned} \tag{C.5}$$

这意味着 $\max_{k=0,\ldots,q-1} |\Omega\left(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_s(k)\right)| = 0$。因此，对于所有 k，$\Omega\left(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_s(k)\right) = 0$。我们也可以用非常类似的方式证明，$\Omega\left(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_u(k)\right) = 0$。因此，利用关于 $\mathbf{v}_c$ 的公式（33），可得

$$\begin{aligned}\Omega(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_c(k)) &= \Omega\left(DK_0(\theta_k), \frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} + f_1(k)\mathbf{v}_s(k) + f_2(k)\mathbf{v}_u(k)\right) \\ &= \Omega\left(DK_0(\theta_k), \frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2}\right) \\ &= DK_0(\theta_k)^T J\frac{J^{-1}DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} = \frac{DK_0(\theta_k)^T DK_0(\theta_k)}{\|DK_0(\theta_k)\|^2} = 1\end{aligned} \tag{C.6}$$

由于 F_0 是一个辛映射，利用公式（29）和（C.4），我们有

$$\begin{aligned}1 &= \Omega(DK_0(\theta_k), \mathbf{v}_c(k)) \\ &= \Omega\left(DF_0(X_0(k))DK_0(\theta_k), DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k)\right) \\ &= \Omega\left(DK_0(\theta_{k+1 \mod q}), A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + B(k)\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2}\right. \\ &\qquad \left. + f_1(k+1 \mod q)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) + f_2(k+1 \mod q)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q)\right) \\ &= \Omega\left(DK_0(\theta_{k+1 \mod q}), B(k)\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2}\right) \\ &= B(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q})^T J\frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2} = B(k)\end{aligned} \tag{C.7}$$

从而证明了 $B(k) = 1$。因此，将其代入公式（C.4）得到

$$\begin{aligned}DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) =& A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \frac{J^{-1}DK_0(\theta_{k+1 \mod q})}{\|DK_0(\theta_{k+1 \mod q})\|^2} \\ &+ f_1(k+1 \mod q)\mathbf{v}_s(k+1 \mod q) + f_2(k+1 \mod q)\mathbf{v}_u(k+1 \mod q)\end{aligned} \tag{C.8}$$

最后，由公式（33）可知，公式（C.8）右端项中的最后 3 项正是 $\mathbf{v}_c(k+1 \text{ 模 } q)$。因此，

$$DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_c(k) = A(k)DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_c(k+1 \mod q) \tag{C.9}$$

这正是我们要证明的结论。 □

引理 4 的证明。由于 $\mathbf{v}_c(k)$ 满足公式（34）且 $DF_0(X_0(k))DK_0(\theta_k) = DK_0(\theta_{k+1 \text{ 模 } q})$，我们有

$$\begin{aligned}DF_0(X_0(k))\mathbf{v}_2(k) &= DF_0(X_0(k))\left[\mathbf{v}_c(k) + a(k)DK_0(\theta_k)\right] \\ &= \left[A(k) + a(k)\right]DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_c(k+1 \mod q) \\ &= \left[T + a(k+1 \mod q)\right]DK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_c(k+1 \mod q) \\ &= TDK_0(\theta_{k+1 \mod q}) + \mathbf{v}_2(k+1 \mod q)\end{aligned} \tag{C.10}$$

其中关系式 $A(k) + a(k) = T + a(k+1 \text{ 模 } q)$ 由方程（35）得出。 □

参考文献

[1] B. Kumar、R. L. Anderson、R. de la Llave，《周期扰动的平面圆型限制性三体问题中带须环面及其流形的快速精确计算方法》，《天体力学与动力天文学》134 (1) (2022) 3。doi:10.1007/s10569-021-10057-1。[2] R. De la Llave，《KAM理论教程》，载于：《光滑遍历理论及其应用》，华盛顿州西雅图，1999年，第69卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年，第175–292页。doi:10.1090/ pspum/069/1858536。[3] B. Kumar、R. L. Anderson、R. de la Llave，《第四天体诱发的次级共振在不稳定共振轨道族中的重叠：木星–木卫三 4:3 + 木卫二案例研究》，载于：AAS/AIAA天体动力学专家会议，第AAS 23-397号，2023年。[4] B. V. Chirikov，《磁约束阱中的共振过程》，《苏联原子能杂志》6 (6) (1960) 464–470。doi:10.1007/BF01483352。URL https://doi.org/10.1007/BF01483352[5] À. Haro、M. Canadell、J. Figueras、A. Luque、J. Mondelo，《不变流形参数化方法：从严格结果到有效计算》，应用数学科学丛书第195卷，施普林格国际出版，2016年。[6] R. de la Llave、A. González、À. Jorba、J. Villanueva，《不使用作用–角度变量的KAM理论》，《非线性》18 (2) (2005) 855–895。doi:10.1088/0951-7715/18/2/020。URL https://doi.org/10.1088/0951-7715/18/2/020[7] À. Haro、R. de la Llave，《拟周期映射中不变环面及其带须的参数化计算方法：数值算法》，《离散与连续动力系统—B》6 (6) (2006) 1261–1300。[8] G. Huguet、R. de la Llave、Y. Sire，《带须不变环面及其相关流形的计算：快速新算法》，《离散与连续动力系统—A》32 (4) (2012) 1309–1353。doi:10.3934/dcds.2012.32.1309。URL http://aimsciences.org//article/id/f497a57f-e25e-4dcb-abb5-15b091455833[9] A. Haro、J. Mondelo，《哈密顿系统中不变环面的流映射参数化方法》，《非线性科学与数值模拟通讯》101 (2021) 105859。doi:https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105859。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421001714[10] R. Calleja、D. del Castillo-Negrete、D. M. del Río、A. Olvera，《一种计算一般辛映射周期轨道的新方法》，《非线性科学与数值模拟通讯》99 (2021) 105838。doi:https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105838。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421001507[11] X. Cabré、E. Fontich、R. de la Llave，《不变流形参数化方法 III：综述与应用》，《微分方程杂志》218 (2) (2005) 444–515。doi:https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.12.003。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039604005170[12] N. Fenichel，《流的不变流形的持久性与光滑性》，《印第安纳大学数学杂志》21 (3) (1971) 193–226。[13] M. W. Hirsch、C. C. Pugh、M. Shub，《不变流形》，数学讲义丛书，施普林格，柏林，1977年。doi:10.1007/BFb0092042。URL https://cds.cern.ch/record/1690874

[14] J. Guckenheimer、P. Holmes，《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》，应用数学科学第42卷，施普林格，纽约州纽约，1983年。[15] D. V. Treschev、O. E. Zubelevich，共振邻域内具有两个自由度的哈密顿系统中的不变环面，《规则与混沌动力学》3（3）（1998）73–81。doi:https: //doi.org/10.1070/RD1998v003n03ABEH000081。URL https://rcd.ics.org.ru/RD1998v003n03ABEH000081/[16] A. Celletti，《天体力学中的稳定性与混沌》，天文学与行星科学，施普林格出版社，柏林、海德堡，2010年。doi:10.1007/978-3-540-85146-2。[17] D. Blazevski、C. Ocampo，同心圆型限制性四体问题中的周期轨道及其不变流形，《Physica D：非线性现象》241（13）（2012）1158–1167。doi:https: //doi.org/10.1016/j.physd.2012.03.008。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278912000929[18] C. Chicone，《应用常微分方程》，第34卷，Springer Science & Business Media，2006年。[19] J. Guckenheimer、M. D. LaMar，多时间尺度系统中的周期轨道延拓，Springer Netherlands，多德雷赫特，2007年，第253–267页。doi:10.1007/978-1-4020-6356-5_8。URL https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6356-5_8[20] R. A. Horn、C. R. Johnson，《矩阵分析》，剑桥大学出版社，1985年。[21] E. Fontich、R. de la Llave、Y. Sire，通过参数化方法构造带须不变环面。第一部分：有限维中的映射与流，《微分方程杂志》246（8）（2009）3136–3213。doi:https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.01.037。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039609000655[22] B. Kumar、R. L. Anderson、R. de la Llave，平面圆型限制性三体问题中用于任务设计的高阶共振轨道流形展开，《非线性科学与数值模拟通讯》97（2021）105691。doi:https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105691。[23] B. Kumar，用于二维自由度哈密顿庞加莱映射的不变流形与异宿轨道的多重打靶参数化方法及其在天体共振动力学中的应用（2025）。arXiv: 2509.03655。URL https://arxiv.org/abs/2509.03655[24] D. Pérez-Palau、J. J. Masdemont、G. Gómez，利用喷流传输检测动力系统结构的工具，《天体力学与动力天文学》123（3）（2015）239–262。doi:10.1007/ s10569-015-9634-3。URL https://doi.org/10.1007/s10569-015-9634-3[25] M. Rasotto、A. Morselli、A. Wittig、M. Massari、P. D. Lizia、R. Armellin、C. Valles、G. Ortega，用于空间动力学非线性不确定性传播的微分代数空间工具箱，载于：第六届天体动力学工具与技术国际会议（ICATT），2016年。URL http://epubs.surrey.ac.uk/813477/[26] M. Berz、K. Makino，利用基于高阶泰勒模型的微分代数方法对常微分方程和流进行验证积分，《可靠计算》4（4）（1998）361–369。doi:10.1023/A:1024467732637。URL https://doi.org/10.1023/A:1024467732637[27] B. Kumar、R. L. Anderson，天卫四平均运动共振不稳定轨道性质及其与天王星探测任务的联系综述，载于：AAS/AIAA天体动力学专家会议，第AAS 24-288号，2024年。

[28] C. Rackauckas、Q. Nie，Differentialequations.jl——一个高性能、功能丰富的 Julia 微分方程求解生态系统，《The Journal of Open Research Software》5（1），由 https://app.dimensions.ai 于2019/05/05 导出（2017）。doi:10.5334/jors.151。URL
h
t
t
p
s://
a
p
p.
d
i
mensions.ai/details/publication/pub.1085583166andhttp://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.151/galley/245/download/
[29] L. Benet、D. P. Sanders，Taylorseries.jl：Julia 中单变量和多变量的泰勒展开，《Journal of Open Source Software》4（36）（2019）1043。doi:10.21105/joss.01043。URL https://doi.org/10.21105/joss.01043[30] J. A. Pérez-Hernández、L. Benet，Perezhz/taylorintegration.jl：Taylorintegration v0.4.1 （2019年2月）。doi:10.5281/zenodo.2562353。URL https://doi.org/10.5281/zenodo.2562353[31] E. Spreen、K. Howell、D. Davis，近直线晕轨道及其在地月空间中的应用，载于：第三届IAA空间系统动力学与控制会议，2017年。