arXiv:2601.00153v1 [math.AG] 1 Jan 2026

射影曲面上的层稳定对与双有理几何

CAUCHER BIRKAR、JIA JIA、ARTAN SHESHMANI 和 CHENGXI WANG

摘要。我们研究光滑射影曲面上由秩为 r 的无挠相干层 $\mathcal{E}$ 和 r 个截面 $s_1,\dots,s_r$ 组成的高秩边缘稳定对 $\mathcal{E}, s := (s_1, \cdots, s_r)$ 的模空间。固定 $\mathcal{E}$ 的陈特征后，所得模空间同构于 Quot 概形的某个子概形，该 Quot 概形参数化具有适当陈特征的商层。我们建立了高秩稳定对的模空间与由层 $\mathcal{E}$ 和截面 s_i 诱导的稳定极小模型，以及底曲面的相对对数典范模型之间的联系，并利用极小模型的双有理几何，详细分析从该模空间到底曲面上有效卡蒂埃除子的希尔伯特概形的 Hilbert-Chow 态射的纤维分支。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 层稳定对再探 8 4. 几何处理 12 5. 皮卡数为 1 18 6. 负曲线 22 参考文献 32

1. 引言

几何对象的分类是代数几何的核心主题，模理论为处理此类分类问题提供了系统框架，并为几何分类问题提供解决方案。20世纪60年代初，Seshadri 引入了 S等价的概念，并构造了光滑曲线 [Ses67], 上半稳定向量丛的射影模空间，为 Mumford 的稳定向量丛模空间提供了紧化 [Mum62]。20世纪70年代前后，Gieseker 为曲面 [Gie77] 构造了高维簇上层的模空间，而 Maruyama [Mar77；Mar78] 则在一般情形下构造了这类模空间。装饰层的模空间，即附加了额外结构或数据的层的模空间，在现代代数几何中发挥着重要作用。作为 Thaddeus 意义下稳定对的一种实现[Tha94], ， Le Potier 引入了一类装饰，相干系统，并在适当的稳定性条件 [LeP93c]下建立了相应的模空间。相干系统是在射影簇上的相干层，并以该层整体截面空间中的一个子空间作为装饰。相干系统已在

日期：2026年1月5日。2020 数学学科分类号。14J10, 14E30, 14H60。关键词与短语。层稳定对、模空间、Quot 概形、稳定极小模型、射影曲面。

Brill-Noether 理论 [Bra08]。在高维情形中，相干系统既用于曲面情形，也用于计数几何，例如 Pandharipande 和 Thomas [PT09], 在 Calabi-Yau 三维簇上进行的曲线计数稳定对这一称谓。新的稳定对不变量与 Gromov-Witten、Donaldson-Thomas 不变量以及物理学家的 BPS 不变量密切相关。本文研究一类称为层稳定对定义 1.1的相干系统的模空间；这类系统由 [She16] 引入，作为 [PT09]中稳定对理论的高秩类比。

模空间中的点表示具有某些固定不变量的几何对象，或某类固定对象的同构类。分析模空间的几何结构，可以产生有效的工具和方法，从而阐明几何对象之间的差异与联系。在 [LeP93b], Le Potier 研究了射影平面和射影空间上具有固定陈类或固定希尔伯特多项式的半稳定层的模空间 $\mathbb{P}^3$ 。他对从半稳定层模空间到参数化四次曲线的射影空间的 Barth 态射进行了几何描述，并进一步研究了该模空间的不可约分支。研究模空间时，一个常用且富有成效的方法是将其与其他参数空间联系起来。

一般型簇、Calabi-Yau 簇和 Fano 簇是复代数簇中的三个基本构件。用微分几何的语言来说，它们大致分别对应负、零和正曲率空间。一般型簇和 Fano 簇的模理论已经建立，并且得到了相对充分的理解。

20世纪60年代初，为了得到 Deligne-Mumford 稳定曲线的粗模空间 M_g ，人们引入稳定结点曲线作为良好的极限 [，从而将固定属数 $g \geq 2$的光滑射影曲线的模空间紧化69] DM69] 。这一理论随后在 [KS88]中推广到一般型曲面。之后，Alexeev [Ale96b] 为曲面构造了 $M_{g、n}$ 和 $M_{g、n}(W)$ 的类似物，其中 $M_{g、n}$ 参数化稳定 n标记曲线，而 $M_{g、n}(W)$ 是稳定映射的模空间：这些映射从约化曲线映到簇 W ，由 Kontsevich 在曲线的计数几何中研究 [Kon95]。从满足 $K_X + B$ 为丰性的曲面 X 与除子 B组成的对 (X, B) 出发，再在三维中应用对数极小模型纲领和半稳定约化，可以得到半对数典范奇点。于是，定义所谓的一般型 KSBA 稳定对，以及对的稳定映射 [Ale96b, Definition 2.1.]。一般型 KSBA 稳定对由连通射影曲面X 和除子 B 组成，该除子约化但其分支不一定不可约，并且 (X, B) 具有半对数典范奇点，且 $K_X + B$ 为丰性。该模理论深深植根于双有理几何的进展，尤其是极小模型的存在性 [BCHM10]以及一般型簇的有界性 [HMX18], ；在许多人的努力下，这一模理论已完全推广到高维情形（参见 [Kol22; Ale96a]）。

在 [Bir22], 中，第一作者定义了任意非负 Kodaira 维数的稳定簇，这一概念同时推广了一般型的 KSBA 稳定簇和极化 Calabi-Yau 簇；在自然假设下证明了它们的有界性，并构造了相应的射影粗模空间。在 [Bir22]中定义的稳定对象称为稳定极小模型（见定义 2.1），它们包含多种几何对象，因为其涵盖任意非负 Kodaira 维数的稳定簇。

因此，自然会希望寻找参数化不同类型几何对象的模空间之间的关系。在 [BJS24], 中，建立了层稳定对与稳定极小模型之间的桥梁。本文将在光滑射影曲面上详细研究这一关系。构造这一桥梁的具体过程涉及双有理运算

例如运行极小模型纲领、取对数典范模型，以及实施 Maruyama 初等变换（第 4 节）。这使我们能够分析层稳定对模空间的全局几何，描述其分支，将其解释为纤维丛，并研究其纤维（第5节和第6节）。

由于支撑在曲面上的层稳定对已在枚举几何中得到广泛研究，本文的结果揭示了枚举几何与双有理几何之间的进一步联系。我们的工作提供了一个新的视角，并为后续一系列发展奠定了基础。

现在我们回顾基本概念并陈述主要结果。我们首先给出层稳定对的定义。这一概念是与层对相关的参数依赖稳定性条件的边缘稳定性的特例（参见 [BJS24，第 3]节）。

定义 1.1 ([BJS24，定义 1.1、3.5])。设 Z 为一个代数簇。一个层稳定对 $\mathcal{E}$，s 在 Z 上由一个秩为 $r>0$ 的无挠层 $\mathcal{E}$ 以及一个 $\mathcal{O}_Z$-模$\mathcal{O}_Z^r \xrightarrow{s} \mathcal{E}$ 态射组成，并满足dim 支撑 余核$(s)<\dim Z$。

若存在交换图，则称两个稳定对 $\mathcal{E}, s$ 和 $\mathcal{G}, t$ 等价

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} \\ \| & & \downarrow \cong \\ \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow[t]{} & \mathcal{G} \end{array}$$

$\mathcal{E}, s$ 的等价类记为 $[\mathcal{E}, s]$。

对于光滑射影簇 Z，我们用 $M_Z(\mathrm{ch})$ 表示具有陈特征 $[\mathcal{E}, s]$ 的稳定对等价类的模空间，其中陈特征为 $\mathrm{ch}(\mathcal{E})=\mathrm{ch}$ 在 Z上。已知 $M_Z(\mathrm{ch})$ 是一个射影概形（[LeP93a]和 [She16，引理 3。7]）。

固定一个光滑射影簇 Z。令 $\mathrm{CDiv}(Z)$ 为希尔伯特概形$\mathrm{Hilb}(Z)$ 中参数化 Z (参见 [Kol96，第一章，定义 1.12 和定理 1。13]) 的有效卡蒂埃除子的子概形。存在一个集合论映射

$$M_Z(\mathrm{ch}) \longrightarrow \mathrm{CDiv}(Z)$$

将一个层稳定对 $\mathcal{E}, s$ 映到有效卡蒂埃除子 $\mathcal{Z}_f$(余核 s) (见 定义 2.3和 推论 3.2）。当此映射是射影概形之间良定义的态射时，我们可以通过这个 Hilbert-Chow 态射的纤维来研究 $M_Z(\mathrm{ch})$ 的几何性质。

注记 1.2. 设 Z 是皮卡数为 1 的光滑射影曲面。设 H 是 Z的内龙–塞维群的丰生成元。对于 Z 上的任意卡蒂埃除子 D，我们定义其次数 为

$$\deg(D) := D \cdot H.$$

特别地，对于任意 $d \geq 1$，完全线性系 $|dH|$ 由所有次数为 dH^2的有效除子组成。因此，$\mathrm{CDiv}^d(Z)$ $=\mathbb{P}(H^0(Z,\ \mathcal{O}_Z(dH)))$ 是光滑的。

相比之下，设 Z' 是另一个光滑射影曲面，$C \subseteq Z'$ 是一条不可约曲线。固定一个非常 ample 除子 H'，并令

$$P(m) = \chi(\mathcal{O}_{nC}(mH'))$$

是关于 H' 的重数 nC 的结构层的希尔伯特多项式。这里，nC 是 Z' 的理想层为 $\mathcal{O}_{Z'}(-nC)$ 的子概形。如果 C 是一条 负曲线 （即 $C^2<0$），那么重数 nC 的法丛满足

$$H^0(Z', \mathcal{N}_{nC/Z'}) = 0,$$

因此，概形 $\mathrm{CDiv}^P(Z')$ 在 $[nC]$ 处的扎里斯基切空间是平凡的。因此，包含 $[nC]$ 的 $\mathrm{CDiv}^P(Z')$ 的不可约分支只由一个点构成。

本文主要研究光滑射影曲面上皮卡数为 1 的 第 5 节 中的层稳定对，以及光滑射影曲面上第一陈类为负有理曲线倍数的层稳定对，见 第 6 节。

我们首先通过分析 Hilbert–Chow 态射的纤维，描述皮卡数为一的情形下的模空间。

定理 1.3。 设 Z 是一个皮卡数为一的光滑射影曲面，且令 H 为$\mathrm{NS}(Z)$的一个丰生成元。考虑元素 $[\mathcal{E}, s] \in M_Z(r, dH, d^2H^2/2)$，即一个层稳定对 $\mathcal{E}, s$，其秩为$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = (r, dH, d^2H^2/2)$。则 $\mathcal{E}$是局部自由的。此外，存在一个 *Hilbert-Chow* 态射

$$h\colon M_Z(r, dH, d^2H^2/2) \longrightarrow \mathrm{CDiv}^d(Z)$$

其在任意点 $[n_iC_i]$ 上的纤维都同构于 $\mathbb{P}^{r-1}$。

下文中，设 Z 为光滑射影曲面， C 为 Z上的一条有理曲线，且对某个 $d > 0$有 $C^2 = -d$ 。于是我们将层稳定对的模空间描述如下。

定理1.4 (=定理 6.17)。 若 $d = 1$，模空间 $M_Z(2, 2C, -2)$ 同构于 $\mathbb{P}^2$-丛 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O})$。

定理*1.5*（=定理 *6.20*）。对于 $d \geq 2$，模空间 $M_Z(2, 2C, -2d)$有两个光滑不可约分支：一个同构于 $M_1 = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus d+1} \oplus \mathcal{O})$，另一个同构于 $M_2 = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$。此外， M_1与 M_2 相交于 $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$的一份拷贝，它是丛 $\mathbb{P}^{d+1}$上的无穷远截面 $M_1 \to \mathbb{P}^1$。

致谢。 第一作者获得清华大学和国家海外高层次人才计划的资助。第二作者获得水木清华学者计划和中国博士后科学基金（2023TQ0172）的资助。第三作者获得北京数学与交叉科学研究院（BIMSA）、北京市自然科学基金 BJNSF-IS24005 以及中国国家自然科学基金（NSFC）与俄罗斯基础研究基金合作项目 W2432008 的资助。他还感谢中国国家海外高层次人才计划给予的大力支持。最后，他感谢麻省理工学院（MIT）的美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所；该研究所由美国国家科学基金会根据合作协议 PHY-2019786 资助。

2. 预备知识

我们在特征零的代数闭域 $\mathbf{k}$ 上工作。除非另有说明，所有簇和概形都定义在$\mathbf{k}$ 上，并且假定簇均不可约。

2.1. **收缩**。 收缩是概形的射影态射 $f\colon X \to Y$，满足 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$。特别地， f 是满射且具有连通纤维。

2.2. **对与奇点**。 设 X 是定义在$\mathbf{k}$上的有限型纯维概形，且 B 是 X上的一个 $\mathbb{Q}$-除子。我们用 $\mu_D B$ 表示素除子 D 在 B 中的系数。

一个对(X, B)由一个正规拟射影簇 X 和一个 $\mathbb{Q}$-因子 $B \geq 0$ 组成，使得$K_X + B$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier。我们称 B 为边界除子。

设 $\phi\colon W \to X$ 是对(X, B)的一个对数解消。设 $K_W + B_W$为$K_X + B$的拉回。关于(X, B), W上的素除子 D 的对数不一致数定义为

$$a(D, X, B) := 1 - \mu_D B_W.$$

若对于每个 D， $a(D, X, B)$ 都是 ≥ 0（分别为 > 0），则称 (X, B) 为对数典范（分别为极小对数典范）；等价地， B_W 的每个系数都不大于 ≤ 1 （分别不大于 < 1）。

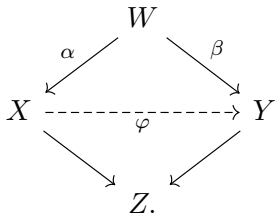
一个对数光滑对是指满足 X 光滑且 $\operatorname{Supp} B$ 具有简单正规交叉奇点的对 (X, B)。

2.3. **模型的类型**。设 (X, B) 是一个对数典范对。

设 $X \to Z$ 是到一个正规簇的收缩，并假设 $K_X + B$ 在 Z 上是大。若存在一个双有理收缩$\varphi\colon X \dashrightarrow Y$，使得.....则称 (X, B) 在 Z 上存在对数典范模型，

- Y 在 Z 上正规且射影；
- $K_Y + B_Y := \varphi_*(K_X + B)$ 在 Z 上是丰性的；并且

对于任意公共解消，• $\alpha^*(K_X + B) \geq \beta^*(K_Y + B_Y)$



我们称 (Y, B_Y) 为 (X, B) 在 Z 上的对数典范模型。

现在回顾一下 [BJS24]中使用的相对情形下稳定极小模型的定义。

定义 2.1 ([BJS24，定义 4.3])。 设 Z 是一个代数簇。一个对数典范稳定极小模型 在 Z 上的形式为

$$(X, B), A \xrightarrow{f} Z$$

其中

$$\begin{cases} (X, B) \text{ 是一个配有射影态射 } X \xrightarrow{f} Z, \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

$K_X + B$ Z 在， $A \geq 0$ 上半丰性， X， $K_X + B + uA$ Z 是 X 上的整除子， $0 < u \ll 1$，$(X, B + uA)$ 对 $0 < u \ll 1$. 是对数典范的

2.4. **陈特征**。 我们将研究具有固定陈特征的层稳定对的模空间。以下引理便于计算支撑在除子上的层的陈特征。

引理 2.2 ([Fri98,p.30, Lemma 1])。 设 X 是一个光滑拟射影簇，并设$j\colon D \hookrightarrow X$ 是一个有效 *Cartier* 除子。假设 $\mathcal{L}$ 是 D上的一个线丛。那么

$$\operatorname{ch}_1(j_*\mathcal{L}) = [D], \quad \operatorname{ch}_2(j_*\mathcal{L}) = -\frac{1}{2}[D]^2 + j_* \operatorname{ch}_1(\mathcal{L}).$$

2.5. **层的支集**。 设 X 是一个诺特概形，且 $\mathcal{F}$ 是 X上的一个相干层。 $\mathcal{F}$ 的支集是闭集 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$。其维数称为层 $\mathcal{F}$的维数。

定义 2.3 (参见 [HL10，第 1 节。1])。 层 的湮灭子支集 是 $\mathcal{F}$ 闭子概形$\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})$，它由湮灭理想层 $\mathrm{Ann}(\mathcal{F})$ 定义。层 $\mathcal{F}$的湮灭理想层是 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}nd(\mathcal{F})$的核。

$\mathcal{F}$ 的湮灭子支集是最小的闭子概形 $i\colon Z \hookrightarrow X$，使得典范映射 $\mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F}$ 是一个同构。

定义 2.4 ([HL10，定义 1.1。2])。 相干层 $\mathcal{F}$ 是纯 维 d 的，如果$\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{F}') = d$对所有非零相干子层 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$都成立。

接下来我们引入 Fitting 支撑，它是 Hilbert–Chow 态射所适用的概念。

定义 2.5 ([Stacks，标签 0C3C])。 层 的 *Fitting* 支撑 是 $\mathcal{F}$ 闭子概形$\mathcal{Z}_f(\mathcal{F})$，它由拟合理想 $\mathrm{Fit}_0(\mathcal{F})$ 定义。该拟合理想取自层 $\mathcal{F}$的局部表示构造而成。具体而言，若 $\mathcal{F}$是开集，且 $U \subseteq X$ 是开

$$\mathcal{O}_U^m \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

是 $\mathcal{F}$在 U 上的一个表示，且具有 $m \geq n$，则 $\mathrm{Fit}_0(\mathcal{F})|_U$ 由定义该表示的矩阵的 $n \times n$-子式生成。

注2.6 ([Stacks,Tag0CYX])。 使用上述记号，我们有：

- $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{Z}_a(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{Z}_f(\mathcal{F})$ 作为闭子概形；
- $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}_a(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}_f(\mathcal{F})$ 作为闭子集；
- 当 $\mathcal{F}$是局部主的时，有 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}_f(\mathcal{F})$。

这里，局部主是指该层在局部由单个元素生成。

备注 2.7。 设 X 是一个光滑簇，且 $\mathcal{F}$ 是 X 上的纯层，其余维为 1。按照 [Fan+06，备注 7.1。5]，对于每个 D 上的 X 素除子，都存在一个开子集$U \subseteq X$，满足 $U \cap D \neq \emptyset$，在其上有一个解消

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0.$$

设 m_D 为 $\det(\varphi)$ 在 D的某个开子集上的消失阶。那么， $\mathcal{F}$ 的 Fitting 支撑是有效 Cartier 除子

$$\mathrm{div}(\mathcal{F}) := \sum_D m_D D.$$

此外，$\mathrm{ch}_1(\mathcal{F}) = \mathrm{div}(\mathcal{F})$（参见 [MFK94，第 5 节。3]）。

例 2.8。 设 X 为正规代数簇， $\mathcal{E}$ 为秩为 r的局部自由层。考虑一个层稳定对

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

由整体截面 s_1、……、 $s_r \in H^0(X, \mathcal{E})$ 给出。的 Fitting 支撑由 $s_1 \wedge \cdots \wedge s_r \in H^0(X, \det \mathcal{E})$ 的消失定义。这是截面 s_1、……、 s_r的退化轨迹，作为循环它与 $\mathcal{E}$ 的第一陈类重合（见 [Ful98，例 14.4。2]）。

例 2.9。 设 $i\colon D \hookrightarrow X$ 是光滑射影簇上的有效 Cartier 除子。注意，理想层 $\mathcal{O}_X(-D)$ 是局部主的。若 $\mathcal{F}$ 是 D 上秩为 r 的局部自由层，则 $i_*\mathcal{F}$ 的 Fitting 支撑由理想层 $\mathcal{O}_X(-rD)$ 定义，即 $\mathcal{O}_X(-D)$ 的 r 次幂。在这种情况下，$\mathrm{ch}_1(i_*\mathcal{F}) = rD$。

2.6. **挠曲面的截面**。 本小节的结果将在第 4 节中使用。

设 Z 是一个光滑射影曲面， $X \to Z$ 是一个 $\mathbb{P}^1$丛。对于 Z的任意子簇L，令 $X_L \coloneqq \pi^{-1}(L)$；那么 $X_L \to L$ 仍是一个 $\mathbb{P}^1$丛。

命题 2.10. 设 $L \subseteq Z$ 是一条自交数为$b \in \mathbb{Z}$的光滑不可约曲线。令 ℓ 为诱导的 $\mathbb{P}^1$丛的一个截面

$$S \coloneqq X_L \to L.$$

令 $\sigma\colon X \to X$ 为沿 ℓ的吹起，例外因子为 E，并令 S 为 S的严格变换。设 $C \coloneqq E \cap \widetilde{S}$。若$(\ell^2)_S = a$，则$(C^2)_E = b - a$。

证明。 注意到 $E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\ell/X}) \to \ell$ 是一个 $\mathbb{P}^1$丛，且 C 是一个截面。由投影公式可得 $S \cdot \ell = L^2 = b$。法丛正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\ell/S} \simeq \mathcal{O}_\ell(a) \longrightarrow \mathcal{N}_{\ell/X} \longrightarrow \mathcal{N}_{S/X}|_\ell \simeq \mathcal{O}_X(S)|_\ell \simeq \mathcal{O}_\ell(b) \longrightarrow 0,$$

推出 $\deg \mathcal{N}_{\ell/X} = a + b$。由于 $S = \sigma^* S - E$，

$$\begin{aligned}
(C^2)_E &= (\widetilde{S}|_E)^2_E = \widetilde{S}^2 \cdot E \\
&= (\sigma^* S - E)^2 \cdot E \\
&= \sigma^* S^2 \cdot E - 2\sigma^* S \cdot E^2 + E^3 \\
&= -2S \cdot \sigma_*(E^2) + E^3 \\
&= 2S \cdot \ell - \deg \mathcal{N}_{\ell/X} \\
&= b - a.
\end{aligned}$$

这就证明了该断言。 □

接下来，我们在某些情形下确定 不变量 挠曲面 $E \to \ell$ 的 [Har77，第V章，命题 2。8]。

推论 2.11。 在 命题 *2.10* 的假设下，设存在另一个横截面 C'，它与 $E \to \ell$ 不相交 C，则 E 是一个以 ℓ 为底、其不变量为 $|a - b|$的挠曲面。

证明。 两个不相交横截面的存在迫使 E 的不变量非负。由法丛列可得

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell \longrightarrow \mathcal{N}_{\ell/X}(-a) \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(b - a) \longrightarrow 0.$$

若 $b - a \leq 0$，则 $\mathcal{N}_{\ell/X}(-a)$ 是规范化的，且 $E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\ell/X})$ 的不变量等于 $a - b$。

若 $b - a > 0$，则 $(C^2)_E = b - a > 0$且 $C \cdot C' = 0$。根据霍奇指标定理 [Har77，第V章，定理1。9]，$(C'^2)_E < 0$。因此 C' 是E上唯一的不可约负曲线，且 $E \to \ell$ 的不变量等于 $b - a$。 □

令 $\mathbb{F}_n$ 表示次数为 $n \geq 1$的 Hirzebruch 曲面，并令 C_0 为其负截面。记

$$D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1, C_0) = \{\text{cross-sections of } \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1 \text{ disjoint from } C_0\},$$

对于点 $p \notin C_0$，令

$D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1,\ C_0,\ p) = \{$与 C_0 不相交且经过 $p\}$.的 $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$的横截面

引理 2.12. 空间 $D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1, C_0)$ 由 $\mathbb{A}^{n+1}$ 参数化，而子空间$D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1, C_0, p)$ 由 $\mathbb{A}^n$ 参数化。

证明。令 F 为 $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ 的一般纤维。任意截面 $C \neq C_0$ $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ 都属于线性系 $|C_0 + mF|$，其中 $m \geq n$ ([Har77，第V章，定理 2.17])。由于

$$C \cdot C_0 = (C_0 + mF) \cdot C_0 = -n + m,$$

C 与 C_0 不相交这一条件迫使 $m = n$。因此，每个所需的截面都属于完全线性系 $|C_0 + nF|$。

$|C_0 + nF|$ 的可约成员恰好是满足 $D' \in |nF|$的曲线 $C_0 + D'$。由于 $h^0(\mathbb{F}_n, C_0 + nF) = n + 2$ 且 $h^0(\mathbb{F}_n, nF) = n + 1$，因此

$$D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1, C_0) \simeq |C_0 + nF| \setminus |nF| \simeq \mathbb{A}^{n+1}.$$

线性系 $|C_0 + nF|$ 和 $|nF|$ 都是无基点的 [Har77，第V章，定理 2。17]。取定一个点 $p \notin C_0$ 会用一个超平面截取每个线性系，因此

$$|C_0 + nF - p| \simeq \mathbb{P}^n, \quad |nF - p| \simeq \mathbb{P}^{n-1}.$$

它们的差是一个维数为 n的仿射空间，从而得到 $D(\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1, C_0, p) \simeq \mathbb{A}^n$。 □

3. Sheaf stable pairs revisit

设 Z 是一个代数簇，且 $\mathcal{E}$, s 是一个秩为 r 的层稳定对 Z （参见定义 1.1）。态射 $s\colon \mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{E}$ 由整体截面 r s_1, ..., $s_r \in H^0(Z, \mathcal{E})$确定。

令 $\mathcal{Q} :=$coker(s) 为该层稳定对的余核层。($\mathcal{E}$, s) 的余核子概形是 Fitting 支撑

$$Q := \mathcal{Z}_f(\mathcal{Q}).$$

如果 $\mathcal{E}$ 是局部自由的，那么整体截面

$$s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_r \in H^0(Z, \det \mathcal{E})$$

恰好在 r 截面变为线性相关的轨迹上消失。在这种情况下， Q 是行列式截面 $s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_r$ 的零点轨迹（参见例 2.8）。

引理 3.1。设 Z 是一个维数为 n的光滑射影簇。假设 $\mathcal{E}, s$ 是 Z 上的层稳定对，且余核层 $\mathcal{Q}$非零。那么 $\mathcal{Q}$ 是一个维数为$n-1$的纯层。

证明。令 ω_Z 为 Z的对偶化层。由短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z^r \xrightarrow{s} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

应用 $\mathcal{H}om(-, \omega_Z)$，可得

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^D \longrightarrow \mathcal{O}_Z^r \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{Q}, \omega_Z) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}, \omega_Z) \longrightarrow 0$$

其中 $\mathcal{E}^D := \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \omega_Z)$ ([HL10，定义 1.1。7])。令 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}xt^1(\mathcal{Q}, \omega_Z)$ 为$\mathcal{O}_Z^r$的像。则 支撑的维数（$\mathcal{F}$） $\leq n-1$，且上述正合列分裂为

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^D \longrightarrow \mathcal{O}_Z^r \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

再次应用 $\mathcal{H}om(-, \omega_Z)$，得到

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z^r \longrightarrow \mathcal{E}^{DD} \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \omega_Z) \longrightarrow 0.$$

从 θ_E 到 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{DD}$ 的自然映射是单射，因为 $\mathcal{E}$ 是无挠的（[HL10，命题 1.1。10]）。我们得到一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \theta_{\mathcal{E}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s^{DD}} & \mathcal{E}^{DD} & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \omega_Z) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由蛇引理可得一个单射

$$\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \omega_Z).$$

因此， $\mathcal{Q}$可视为扭层 $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \omega_Z)$ 的一个子层。由假设，dim 支撑$(\mathcal{Q}) = n-1$（另见 [BJS24，引理 3.7]），因此 $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \omega_Z)$是一个维数为 $n-1$ ([HL10，命题 1.1。10]）的反身层。

反身层的任意子层本身都是同维数的纯层 $n-1$ 。因此， $\mathcal{Q}$ 是维数为 $n-1$的纯层，证毕。□

以下推论是由引理 3.1 和注 2.7直接得出的。

推论 3.2。 设 Z 是一个光滑射影簇。假设 $\mathcal{E}, s$ 是一个余核层为 $\mathcal{Q}$的层稳定对。那么， $\mathcal{Q}$ 的 *Fitting* 支撑构成一个有效 *Cartier* 除子。此外， $\mathcal{Z}_f(\mathcal{Q}) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{E})$。

证明。 由 引理 3.1 层 $\mathcal{Q}$ 是余维 1 的纯层。余维为1 的纯层的 Fitting 支撑是一个有效 Cartier 除子；参见 注 2.7。

由短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z^r \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

可得 $\mathrm{ch}_1(\mathcal{E}) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{Q})$。由 注 2.7，这等于 $\mathcal{Z}_f(\mathcal{Q})$。 □

一个对偶引理。

推论 3.3。 设 $\mathcal{E}, s$ 是光滑射影簇 Z 上的一个层稳定对。则其反身包与诱导态射

$$\mathcal{O}_Z^r \xrightarrow{s^{\vee\vee}} \mathcal{E}^{\vee\vee}$$

仍构成一个层稳定对。此外，余核层 $\mathcal{Q}'$ =余核$(s^{\vee\vee})$ 与 $\mathcal{Q}$ =余核(s)具有相同的 *Fitting* 支撑。

引理 3.4. 设 Z 是一个维数为 n的光滑射影簇。假设 $\mathcal{E}$ 是 Z上的一个局部自由层，且 $\mathcal{T}$ 是 Z 上的一个具有零维支撑的挠层。那么存在一个自然同构：

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{E}xt^n(\mathcal{T}, \omega_Z)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{T})^*,$$

其中 ω_Z 是 Z的典范层。

证明。 由伴随性质和塞尔对偶可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\vee, \mathcal{E}xt^n(\mathcal{T}, \omega_Z)) &\cong H^0(\mathcal{E}xt^n(\mathcal{T}, \omega_Z) \otimes \mathcal{E}) \\ &\cong \mathrm{Ext}^n(\mathcal{T}, \mathcal{E} \otimes \omega_Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{T})^*.\end{aligned}$$

□

与 Quot 概形的关系。 现在我们来描述层稳定对的模空间与相应 Quot 概形之间的关系。

命题 3.5. 设 Z 是一个光滑射影曲面。那么 $M_Z(r, \mathrm{ch}_1, \mathrm{ch}_2)$ 同构于 *Quot* 概形 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r, 0, \mathrm{ch}_1, -\mathrm{ch}_2)$ 的一个子概形。

证明。从层稳定对到一个商。设 $\mathcal{E}, s$ 是 Z 上秩为 r 的层稳定对。我们有一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s^{\vee\vee}} & \mathcal{E}^{\vee\vee} & \longrightarrow & \mathcal{Q}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\mathcal{Q}' =$ 是$s^{\vee\vee}$的余核。由蛇引理可知， $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 是单射，且中间和右侧的垂直箭头有一个公共余核 $\mathcal{T}'$。将 $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_Z)$应用于顶行，得到

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_Z^r \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

其中 $\mathcal{F}$是 $\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_Z)$的像。由 引理 3.4 可知存在一个满射 $\mathcal{E}^\vee \to \mathcal{T} := \mathcal{E}xt^2(\mathcal{T}', \omega_Z)$。设 $\mathcal{K}$是其核。我们得到一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^\vee & \xrightarrow{s^\vee} & \mathcal{O}_Z^r & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是复合映射 $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_Z^r$的余核。于是 $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ 是满射，其核同构于 $\mathcal{T}$。因此，商 $\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{L}$ 定义了 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r, 0, \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{E}))$ 的一个点。

从一个商到一个层稳定对。反之，从一个商 $\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{L}$ 开始，并令 $\mathcal{K}$ 为其核。令 $\mathcal{T}$为 $\mathcal{L}$的极大挠子层，从而 $\mathcal{F} := \mathcal{L}/\mathcal{T}$是纯的（参见 [HL10，定义 1.1。4]我们有一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}' & \xrightarrow{t} & \mathcal{O}_Z^r & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

再次由蛇引理， $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ 的余核同构于 $\mathcal{T}$。由 引理 3.4，存在一个诱导满射 $\mathcal{K}'^\vee \to \mathcal{T}' := \mathcal{E}xt^2(\mathcal{T}, \omega_Z)$。如果复合 $\mathcal{O}_Z^r \xrightarrow{t^\vee} \mathcal{K}'^\vee \to \mathcal{T}'$为零，那么令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{K}'^\vee \to \mathcal{T}'$ 的核，即得到一个单射 $\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{E}$。因此我们得到一个具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \longrightarrow & \mathcal{K}'^\vee & \longrightarrow & \mathcal{Q}' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

于是 $\mathcal{E}$， s是一个层稳定对，且为 $[\mathcal{E}, s] \in M_Z(r, \ \mathrm{ch}_1(\mathcal{L}), \ \mathrm{ch}_2(\mathcal{L}))$.

容易验证，层稳定对和商各自的等价关系是相容的，这表明 $M_Z(r, \mathrm{ch}_1, \mathrm{ch}_2)$ 嵌入为 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z, 0, \mathrm{ch}_1, \mathrm{ch}_2)$ 的一个子概形。

□

注记 3.6。 在上述对应关系中， $\mathcal{E}$ 是局部自由的当且仅当 $\mathcal{K}$ 是局部自由的，当且仅当 $\mathcal{L}$ 是纯的。

关联（稳定极小）模型。

定义 3.7。 设 $[\mathcal{E}, s]$ 是簇 Z上的秩为 r 的稳定对，且 $\mathcal{E}$ 局部自由。令 s_1，……， s_r为由 s确定的 $\mathcal{E}$的截面。我们定义

$$\begin{aligned} &X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{f} Z, \\ &\mathcal{O}_X(1) = \text{the associated invertible sheaf}, \\ &D_i = \text{divisor of } s_i, \\ &A = \text{divisor of } s_1 + \cdots + s_r. \end{aligned}$$

这里我们将 s_i 视为 $\mathcal{O}_X(1)$ 的截面，因此 D_i 是该截面的除子（$s_1 + \cdots + s_r$同理）。我们称

$$X, D_1, \ldots, D_r, A \xrightarrow{f} Z$$

关联于 的模型。

可以对上述模型作双有理修改，从而在整个 Z 上得到一个稳定极小模型。

定理 3.8. 设 $\mathcal{E}, s$ 是光滑射影曲面 Z 上秩为 r 的层稳定对。那么关联稳定极小模型

$$(X', B'), A' \longrightarrow Z'$$

存在，且仅取决于 Z、 r和 支撑 Q。

证明。 令 Q =为 coker(s) 的支撑，且 $U = Z \setminus Q$。在 U上，受限的层稳定对$\mathcal{E}|_U$， $s|_U$具有一个关联模型

$$X^U, D_1^U, \ldots, D_r^U, A^U \longrightarrow U.$$

~ ~令 $\pi\colon (Z, Q) \to (Z, Q)$为极小对数解消（[Kaw24，命题 1.13。7]）。则~ ~ Z 是光滑的，且 Q 是简单正规交叉的。拉回 $\pi^*\mathcal{E}$， $\pi^* s$ 是~ ~Z上的层稳定对，支撑 coker($\pi^* s$) $= Q$。考虑恒等态射 $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}}^r \to \mathcal{O}_{\widetilde{Z}}^r$及其关联模型

$$\widetilde{X}', \widetilde{D}_1', \ldots, \widetilde{D}_r', \widetilde{A}' \xrightarrow{\widetilde{f}} \widetilde{Z}.$$

令 $\widetilde{B}' = \sum \widetilde{D}_i' + \widetilde{f}'^* \widetilde{Q}$。则 $\widetilde{X}'$是 Z上的 X^U的紧化，且对 ($\widetilde{X}'$， $\widetilde{B}' + \widetilde{A}'$) 是对数光滑的。由于

$$K_{\widetilde{X}'} + \widetilde{B}' = \widetilde{f}^*(K_{\widetilde{Z}} + \widetilde{Q}),$$

~ ~在 Z 上的任意 $K_{\widetilde{X}'} + B'$-极小模型纲领，都是由 Z 上关于 Z 的一个 $K_{\widetilde{Z}} + Q$-极小模型纲领诱导的，而后者~ ~也是在 Z 上的一个 $K_{\widetilde{Z}} + Q$-极小模型纲领。但是 $K_{\widetilde{Z}} + Q$ 在 Z 上已经是数值有效且半丰性的；因此~任何此类极小模型纲领都是平凡的。因此， $K_{\widetilde{X}'} + B'$ 在 Z 上是半丰性的，从而定义了一个收缩~$X' \to Z' \to Z$，其中 (Z', Q') 是 (Z, Q) 的相对对数典范模型（参见[Fuj12，定理 7.2]）。此外， $\widetilde{A}'$ 在 Z' 上是半丰性的，从而诱导一个双有理收缩 $\widetilde{X}' = \widetilde{Z} \times \mathbb{P}^1 \to Z' \times \mathbb{P}^1$。

现在考虑恒等态射 $\mathcal{O}_{Z'}^r \to \mathcal{O}_{Z'}^r$ 及其关联模型

$$X', D_1', \ldots, D_r', A' \xrightarrow{f'} Z'.$$

设 $B' = \sum D_i' + f'^* Q'$。则 (X', B') $A' \xrightarrow{f'} Z'$是$\mathcal{E}, s$的关联稳定极小模型，且根据构造，它仅取决于 Z、 r和 Q =支撑 coker(s)。□

最后，将每个 s_i 视为 $\mathcal{O}_X(1)$ 的一个截面，公共零点轨迹

$$T := V(s_1, \dots, s_r) = D_1 \cap \cdots \cap D_r$$

映 onto $\mathcal{Z}_f$（$\mathcal{Q}$）通过 f（见 [Ful98，§ 14。4]）。

命题 3.9。在 $r = 2$ 的情形下，假设 D_1 和 D_2 没有公共的（竖直）分支。则作为 Z 上的循环，有 f_*（$D_1 \cdot D_2$）$= \mathcal{Z}_f$（$\mathcal{Q}$）。

由于 D_1，D_2 没有公共分支，交 $T = D_1 \cap D_2$ 在 X 中的余维为 2。对于 T 的水平分支，这一点显然成立，因为它映到 Q。

的局部化陈类 $f^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X$（$-1$）是 $[V$（s）$]$,，其同样是水平的。根据 [Ful98，定理 14.4.(c)]，，我们得到循环的等式 f_*（$[T]$）$= [Q]$。事实上，我们可以在线性系 $\mathcal{O}_X$（1）中找到某个纯水平的除子（见下文的 引理 4.3 ）。这意味着 f_* 将 $[T]$ 同构地映到 $[Q]$。

4. 几何处理

设 Z 为正规代数簇。给定 Z 上的层稳定对 $\mathcal{E}$，s，其中 $\mathcal{E}$ 局部自由，则有以下刚性结论。

引理 4.1. 设 $\mathcal{E}, s$ 和 $\mathcal{G}, t$ 是正规簇 Z 上的层稳定对，其中 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}$ 局部自由。令

$$X, D_1, \dots, D_r, A \to Z \quad and \quad Y, E_1, \dots, E_r, C \to Z$$

分别为 $\mathcal{E}, s$ 和 $\mathcal{G}, t$ 的关联模型。若 $X, D_1, \dots, D_r, A$ 和 $Y, E_1, \dots, E_r, C$ 在大开子集 $U \subseteq Z$ 上同构，则 $[\mathcal{E}, s] = [\mathcal{G}, t]$。

证明。根据假设，受限的层稳定对 $\mathcal{E}|_U$，$s|_U$ 和 $\mathcal{G}|_U$，$t|_U$ 同构。由于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}$ 均局部自由，因而自反，且 Z 正规，该同构可唯一延拓至整个 Z。□

设 Z 为正规代数簇。设 Z 上有一个秩 2 的层稳定对 $\mathcal{E}$，s，其中 $\mathcal{E}$ 局部自由，并设

$$X, D_1, D_2, A \xrightarrow{f} Z \tag{4.1}$$

是关联模型。假设余核概形 Q 是连通的。特别地，Q_{red} 的奇异集在 Z 中的余维为二。

备注 4.2：假设 D_1 = 因子(s_1) 和 D_2 = 因子(s_2) 没有公共的（垂直）分支。则对于任意 $s \in$ 张成空间$\{s_1, s_2\}$，若 因子(s) 含有一个垂直分支 V，则 V 在 f 下的像包含于 Q 中。否则，V 将与 D_1的水平部分相交，这与命题 3.9矛盾。

引理 4.3。假设 $D_1 =$ 因子(s_1) 和 $D_2 =$ 因子(s_2) 没有公共的（垂直）分支。则可以找到一个截面 $s_h \in$ 张成空间$\{s_1, s_2\}$，使得 $A_h =$ 因子(s_h) 是纯水平的。

证明。如果 div(s_1) 或 div(s_2) 是纯水平的，则结论成立。假设 D_1 和 D_2 都含有垂直分支。先考虑截面 $t_1 = s_1 + s_2$。如果 $T_1 :=$ div(t_1) 没有垂直分支，则令 $s_h = t_1$。否则 T_1 含有垂直分支。由于 D_1 和 D_2 没有公共的垂直分支，因此对于 $i = 1$，2，T_1 与 D_i 也没有公共的垂直分支。

设 Q_{11}，……，Q_{1m_1}为 Q 上那些分支，在这些分支上，D_1 或 D_2 的垂直分支均不经由 f 映射。根据 注4.2，T_1 的每个垂直分支都映入 $\bigcup_{j=1}^{m_1} Q_{1j}$。接下来，设 Q_{21}，……，Q_{2m_2}为 Q 上那些分支，在这些分支上，D_1、D_2或 T_1 的垂直分支均不映入。注意，$\{Q_{21}, \dots, Q_{2m_2}\}$是 $\{Q_{11}, \dots, Q_{1m_1}\}$的真子集。因此$m_2 < m_1$。

现在取 $t_2 = s_1 + 2s_2$ 并令 $T_2 :=$ 因子(t_2)。若 T_2 没有垂直分支，则令$s_h = t_2$。否则，如上所述， T_2 与 D_1、 D_2或 T_1没有共同的垂直分支。根据 注4.2， T_2 的垂直分支映入 $\bigcup_{j=1}^{m_2} Q_{2j}$。

定义 Q_{31}、……、 Q_{3m_3}为 Q 上没有 D_1,D_2, T_1, T_2 的任何垂直分支映到的分支。则 $m_3 < m_2$。

将此过程与 $t_j = s_1 + js_2$ 迭代，我们得到一个严格递减的整数序列$m_1 > m_2 > \cdots \geq 0$。

要么在某个阶段 T_j 没有垂直分支，此时我们令 $s_h = t_j$；要么当 $m_k = 0$ 时该过程终止。在后一种情况下， Q 的每个分支都是以下某个对象的垂直分支的像： D_1、 D_2、 T_1、……、 T_{k-1}。根据 $t_k = s_1 + ks_2$，它没有垂直分支，见注4.2，因此我们令 $s_h = t_k$。 □

下文假设 Z 是一个正规射影曲面。取其最小对数~解消 $\pi\colon\ Z \to Z$由$(Z,\ Q)$ [Kaw24，命题 1.13。7]。记

$$\widetilde{Q} := \pi^* Q = Q^{\sim} + C$$

其中 $Q^{\sim}$ 是 Q 的严格变换，且 C 是 π-例外的。令

$$\widetilde{X}, \widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \widetilde{A} \xrightarrow{f} \widetilde{Z}$$

为4.1的基变换；这是层稳定对$(\pi^*\mathcal{E},\ \pi^* s)$~ ~ ~在 Z 上的关联模型。我们将诱导态射 $X \to X$ 记为 π_X，并写作 $\mathcal{E} := \pi^*\mathcal{E}$。

下文中，我们始终假设 D_1 与 D_2 没有公共（竖直）分支（例如，当 Q 是约化的时，这一条件成立）。根据引理 4.3，存在某个截面 $s_h \in$张成空间$\{s_1, s_2\}$，使得 $A_h = \mathrm{div}(s_h)$ 是纯水平的。于是 $f|_{A_h}\colon\ A_h \to Z$ 是同构，因此

$$T := D_1 \cap D_2 = A_h \cap D_i$$

~经同构映射到 Q，其中 $i = 1,\ 2$。此外， A_h 不包含任何 π-例外因子，~因此 A_h 也是纯水平的，并且

$$\widetilde{T} = \widetilde{D}_1 \cap \widetilde{D}_2 = \widetilde{A}_h \cap \widetilde{D}_i$$

~在 $i = 1,\ 2$ 中同构映射到 Q。

通过初等变换进行正向变换。现在我们执行一系列 Maruyama 初等变换 [Mar82，定理 1。4], 以构造中间模型

$$X_i, D_{1,i}, D_{2,i}, A_i \xrightarrow{f_i} \widetilde{Z},$$

最终得到稳定极小模型

$$X', D_1', D_2', A' \xrightarrow{f'} Z'.$$

~为清晰起见，我们先说明 Fitting 支撑为 $Q = H_1 + H_2$ 时的情形，其中 $\mathcal{Q}$。此时，要么 Q 有两个不同的不可约分支 H_1 和 H_2，要么 $Q = 2H_1$ 满足 $H_1 = H_2$。在

这种情况下，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}} & \xrightarrow{s_1} & \widetilde{\mathcal{E}}' & \xrightarrow{\delta_1} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{H_2}(-H_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{Q}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow & & \\
 & & & & \widetilde{\mathcal{Q}}_{H_1} & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{\mathcal{Q}}_{H_1} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}, \tag{4.2}$$

~ ~其中 $\mathcal{E}' = \ker(\delta)$，右侧一列由将 $\mathcal{Q}$ 与短正合列张量积得到

$$0 \to \mathcal{O}_{H_2}(-H_1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{H_1} \to 0$$

在光滑射影簇 Z 上的两个素除子 H_1 和 H_2。现在我们考虑中间一列，并沿着 ~ ~$Y_0 := \mathbb{P}(\mathcal{Q}_{H_1})$ 对 $X_0 := \mathbb{P}(\mathcal{E})$ 施行 Maruyama 初等变换，得到 $X_1 := \mathbb{P}(\mathcal{E}')$（[Mar82，定理 1.4]）。也就是说，我们沿着 Y_0 爆破 X_0，然后收缩 $(X_0)_{H_1}$ 的严格变换，它是将射影丛 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 限制到 H_1所得；见下图：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Bl}_{Y_0} X_0 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
X_0 = \mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{E}}) & & & & X_1 \simeq \mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{E}}') \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\
\widetilde{Z} & & & & \widetilde{Z}.
\end{array}$$

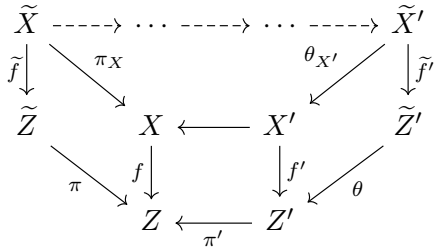
~ ~ ~令 $D_{1,\ 1}$ 和 $D_{2,\ 1}$ 分别为 D_1 和 D_2的严格变换。对 $\mathcal{E}'$，s_1 是一个层稳定~对，其余核为 $\mathcal{Q}_{H_2}(-H_1)$，记为 $\mathcal{Q}_1$。由 命题 3.9，我们知道f_1 将 $T_1 := D_{1,\ 1} \cap D_{2,\ 1}$ 同构映到 $Q_1 := H_2$，后者是$\mathcal{Q}_1$的 Fitting 支撑。现在 $Q_1 = H_2 \le Q = H_1 + H_2$，我们看到经过 Maruyama 初等变换后，$H_1$ 的重数减少了 1。

接下来我们考虑交换图（4.2）中的顶行，并沿着 X_1 对 Y_1 运行 Maruyama 初等变换：$= \mathbb{P}(\mathcal{Q}_1)$ 得到

$$X_2 := \mathbb{P}(\ker(\delta_1)) = \mathbb{P}(\mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}}) \simeq \widetilde{Z} \times \mathbb{P}^1.$$

令 D'_1 和 D'_2 为 $D_{1,\ 1}$ 和 $D_{2,\ 1}$的严格变换。现在考虑层稳定对 $\mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}}$，id，它对应于恒等态射 $\mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}} \to \mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}}$，其余核为零。因此$T_2 := D'_1 \cap D'_2 = \emptyset$。这就是下面正向构造中所称的步骤 3 情形。

现在我们描述一般的正向过程。



(4.3)

正向变换。设 $X_0, D_{1,0}, D_{2,0}, A_0$ 表示模型 X, D_1, D_2, A。记作

$$Q_0 = \widetilde{Q} = \sum_{j=1}^{l} n_{j,0} H_j,$$

其中 H_j 是 Q_0 的不同不可约分支。

下面的步骤0–2描述了图（ X 至 X' 经过Z 中的虚线箭头所表示的过程（4.3）。步骤 3 描述了图（ $\theta_{X'}$ 和 θ 中的收缩（4.3）。

步骤 *0*（初始数据）。假设我们已经构造了

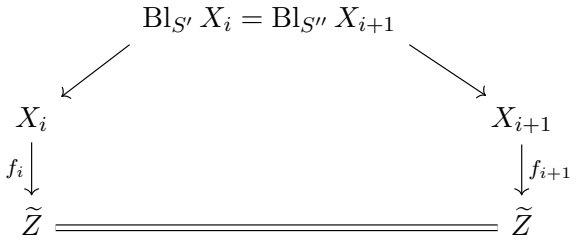
$$X_i, D_{1,i}, D_{2,i}, A_i \xrightarrow{f_i} \widetilde{Z}$$

并具有以下性质:

- f_i: $X_i \to \widetilde{Z}$ 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛；
- $T_i := D_{1,\,i} \cap D_{2,\,i}$ 同构映射到 f_i下的子概形 $Q_i \subseteq Q$；
- 写作 $Q_i = \sum_{j=1}^{l} n_{j,\,i} H_j$，总重数为 $N_i = \sum_{j=1}^{l} n_{j,\,i} \geq 0$。

Step 1（初等变换）。如果 $T_i = \emptyset$，则我们直接进入步骤 3。

如果 $T_i \neq \emptyset$，取一个分支 $S \subseteq Q_i$。考虑 $\mathbb{P}^1$-丛f_i 在 S上的限制 $(X_i)_S \to S$。根据构造和命题 3.9，$(X_i)_S$ 包含 T_i 的一个分支 S'，其重数为 $\mu_{Q_i} S$。我们进行 Maruyama 初等变换：沿着S'爆破 X_i，然后收缩 $(X_i)_S$的严格变换。所得收缩是沿一条曲线 S''对X_{i+1}进行的爆破。根据 [Mar82 定理 1.4]，，新的态射 f_{i+1}: $X_{i+1} \to Z$ 仍然是一个 $\mathbb{P}^1$-丛，并且嵌入到



步骤 *2*（后续变换）。令$D_{1,\,i+1}$、$D_{2,\,i+1}$ 和 A_{i+1} 分别为$D_{1,\,i}$、$D_{2,\,i}$ 和 A_i的严格变换。设 $T_{i+1} := D_{1,\,i+1} \cap D_{2,\,i+1}$。于是总重数减少了 1：$N_{i+1} = N_i - 1$。

如果 $S \subseteq Q_i$ 是一个约化分支，即 S 在 Q_i 中的重数为一，那么 T_{i+1} 没有任何分支包含在 $(X_{i+1})_S$ 中。在这种情况下，带着.....返回步骤 0

$$X_{i+1}, D_{1,i+1}, D_{2,i+1}, A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \widetilde{Z}.$$

如果 $S \subseteq Q_i$ 的重数为 > 1，那么 T_{i+1} 包含一个分支 $S'' \subseteq (X_{i+1})_S$。在这种情况下，带着相同的分支 S 再次返回步骤 1。

步骤 *3*（最终结果）。该过程经过有限步后终止，因为 N_i 严格递减。令

$$\begin{cases} (\widetilde{X}', \widetilde{D}'_1, \widetilde{D}'_2, \widetilde{A}') = (X_i, D_{1,i}, D_{2,i}, A_i), \\ \widetilde{f}' = f_i, \\ \widetilde{B}' = \widetilde{D}'_1 + \widetilde{D}'_2 + \widetilde{f}'^{*} \operatorname{Supp} \widetilde{Q}. \end{cases}$$

由于 $D'_1 \sim D'_2$ 且 $D'_1 \cap D'_2 = \emptyset$，线性系 $|D'_1| = |D'_2|$ 定义了一个同构 $\widetilde{X}' \simeq \widetilde{Z} \times \mathbb{P}^1$。

然后，我们应用定理 3.8的构造，得到一个稳定极小模型 (X', B') $A' \longrightarrow Z'$。这里 Z' 是 $(Z, \text{支撑 } Q)$ 在 Z 上的相对对数典范模型；而 $B' = D'_1 + D'_2 + f'^{*}$ 支撑 Q' 由与恒等态射 $\mathcal{O}^2_{Z'} \to \mathcal{O}^2_Z$ 相关联的模型 X'、D'_1、D'_2、$A' \xrightarrow{f'} Z'$ 构造得到。

为了从关联稳定极小模型 X'，B'，$A' \to Z'$ 中恢复 X、D_1、D_2、$A \to Z$，我们沿反向进行一系列 Maruyama 初等变换。

反向变换。取极小对数解消 $\theta\colon\ Z \to Z'$ (Z', Q')（[Kaw24，命题 1.13。7]）。诱导态射 $\pi\colon\ Z \to Z$ 也是 (Z, Q) 的极小对数解消。记

$$\widetilde{Q} := \theta^* Q' = Q'^{\sim} + C'$$

其中 $Q'^{\sim}$ 是 Q' 的严格变换，而 C' 是 θ-例外的。令

$$\widetilde{X}', \widetilde{D}'_1, \widetilde{D}'_2, \widetilde{A}' \xrightarrow{\widetilde{f}'} \widetilde{Z}$$

令 X'，D'_1，D'_2，$A' \to Z'$ 为基变换，它是 $\widetilde{Z}$ 上层稳定对 $(\mathcal{O}^2_{\widetilde{Z}}, \text{id})$ 的关联模型。将诱导映射 $\widetilde{X}' \to X'$ 记为 $\theta_{X'}$。

令 X^0，D^0_1，D^0_2，A^0 表示模型 $\widetilde{X}'$，$\widetilde{D}'_1$，$\widetilde{D}'_2$，$\widetilde{A}'$。取 $X^0 \to \mathbb{P}^1$ 上某个点 $p \in \mathbb{P}^1$ 对应的纤维 X^0_p；于是 $X^0_p \simeq \widetilde{Z}$。

下面的步骤0–2描述从 X' 到 X 上 Z 的过程，它与（4.3）中的虚线箭头序列互逆。步骤 3 涉及收缩 π_X 和 π。

步骤 *0*（初始数据）。假设我们已构造出

$$X^i, D^i_1, D^i_2, A^i \xrightarrow{f^i} \widetilde{Z}$$

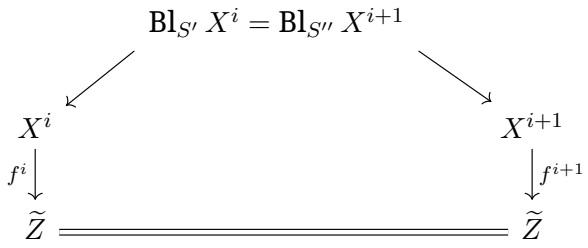
其中：

- $f^i\colon\ X^i \to \widetilde{Z}$ 是一个 $\mathbb{P}^1$-丛；
- $X^i_p \subseteq X^i$ 是 X^0_p 的严格变换；
- $T^i := D^i_1 \cap D^i_2$ 在 f_i 下与子概形 $Q^i \subseteq \widetilde{Q}$ 同构。

步骤 *1*（初等变换）。如果 $Q^i = \widetilde{Q}$，则直接进行步骤 3。

如果 $Q^i \subsetneq \widetilde{Q}$，（定义除子 Q^i 为 $\widetilde{Q}$ 减去 f^i 的所有水平分支）根据构造，X^i_S 与 X^i_p 在某条曲线 S' 处相交，其中 $X^i_S \to S$ 是 $\mathbb{P}^1$-丛 f_i 在 S 上的限制。进行 Maruyama 初等变换：沿着 S' 吹起 X^i，然后收缩 $Q - Q^i$ 的严格

变换。所得态射 $f^{i+1}\colon X^{i+1}\to \widetilde{Z}$ 再次是一个 $\mathbb{P}^1$-丛，且包含于



步骤 *2*（后续变换）。令 D_1^{i+1}、D_2^{i+1} 和 A^{i+1} 分别为 D_1^i、D_2^i 和 A^i 的严格变换，并设 $T^{i+1}:=D_1^{i+1}\cap D_2^{i+1}$。

假设 $S\subseteq Q^i$ 的重数为 ≥ 1。那么 T^{i+1} 有一个分支 $S''\subseteq X_S^{i+1}$，其重数为 $\leq \mu_{\widetilde{Q}}S-1$。这里，$S''$ 是经过步骤 1 后 S' 的严格变换。接下来，我们沿着 $X_S^{i+1}\to S$ 的一个截面进行 Maruyama 初等变换，该截面与 S'' 不相交，但经过以下各点

$$X_p^i\cap (f^{i+1})^{-1}((\widetilde{Q}_{\mathrm{red}}-(Q^i+S)_{\mathrm{red}})\cap S).$$

根据引理 2.12，这类截面构成一个族（通常由一个仿射空间参数化）。

注记 4.4. 假设 S 在 $\widetilde{Z}'$ 中的自交数为 b，且 S' 在 X_S^i中的自交数为 a。沿着 S'对 X_S^i 进行吹起后，设 E 为例外因子，C 为 E与 X_S^i的严格变换的交。由命题 2.10，得到 $(C)_E^2=b-a$。因此，根据推论 2.11，E 是一个不变量为 $|a-b|$的挠曲面。曲线 S'' 位于 E 上，且与 C不相交。

进一步假设 S 是光滑有理曲线。若 $b-a>0$，则 S'' 是 $E\to S$的唯一负截面；若 $b-a<0$，则 S'' 的可能选择由 $\mathbb{A}^{|a-b|}$(引理 2.12) 参数化。

经过有限次这样的步骤后，S 不再是 $\widetilde{Q}-Q^i$的一个分支，而 T^{i+1} 在 X_S^{i+1} 上获得一个重数为 $\mu_{\widetilde{Q}}S$的分支。然后我们回到步骤 0，此时

$$X^{i+1},D_1^{i+1},D_2^{i+1},A^{i+1}\xrightarrow{f^{i+1}}\widetilde{Z}$$

并继续。

步骤 *3*（最终结果）。该过程经过有限步后终止。设

$$\begin{cases}(\widetilde{X},\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_2,\widetilde{A})=(X^i,D_1^i,D_2^i,A^i),\\ \widetilde{f}=f^i.\end{cases}$$

那么，$\widetilde{X},\widetilde{D}_1,\widetilde{D}_2,\widetilde{A}\xrightarrow{f}\widetilde{Z}$ 是与 $\widetilde{Z}$上的某个层稳定对 $\widetilde{\mathcal{E}},\widetilde{s}$ 相关联的模型。根据引理 4.5，对于每条 π-例外曲线 C，我们知道 $\widetilde{X}_C\simeq C\times\mathbb{P}^1$。由于 $\pi\colon \widetilde{Z}\to Z$ 是通过一系列吹起得到的，因此可以按受控的方式收缩 X 和 Z，分别得到 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Z}$。设 D_1,D_2和 A分别是 D_1，D_2和 A的严格变换。

类 $[\mathcal{E},s]$由关联模型 X，D_1，D_2，A唯一确定，而关联模型又由固定模型 X'，D_1'，D_2'，$A'\to\widetilde{Z}$、$X'\to\mathbb{P}^1$ 的一个纤维以及反向变换步骤 2 中所述的横截面选择唯一确定。

引理 4.5。对于每条 π-例外曲线 $C\subseteq\widetilde{Q}$，都有 $\widetilde{X}_C\simeq C\times\mathbb{P}^1$。

~ ~ ~证明。令 $m_C = \mu_{\widetilde{Q}} C$。在 Z上的反向变换 $X' \rightsquigarrow X$ 中，该变换是（4.3）中虚线序列的逆变换，我们必须对 C恰好进行 m_C 次初等变换，使得 D_1^i 与 D_2^i 在 X_C^i 上的交数变为 m_C。从此以后，按照构造， X_C^i 的严格变换彼此同构，除非我们沿着支配某个与 C相交的分支的截面进行 Maruyama 初等变换。

因此，我们可以假设反向变换始于分支 C。设 $-b$ 为 C 在 $\widetilde{Z}$ 中的自交数，使得 $b > 0$。设 $S^0 \subseteq X_C^0$ 为 X_C^0 与 X_p^0 的交，并令 S^j 表示在涉及 C 的第 j 次初等变换之后， S^0 在 X_C^j 中的严格变换。记

$$a_j := (S^j)^2_{X_C^j}$$

的自交数在 中。起初， $a_0 = 0$。根据 注 4.4，每次这样的变换都会使这个数减少 b，因此 $a_j = -bj$。特别地，经过 m_C 次这样的变换后，曲面 $X_C^{m_C}$同构于 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_{bm_C}$。

现在我们考虑沿截面进行的 Maruyama 初等变换，这些截面支配与 C 相交的分支。我们有

$$\widetilde{Q} = \theta^* Q' = Q'^{\sim} + m_C C + \sum_{C' \neq C} m_{C'} C',$$

因此

$$bm_C = -C \cdot (m_C C) = C \cdot \left(Q'^{\sim} + \sum_{C' \neq C} m_{C'} C' \right).$$

对于每个与 C 相交的分支 C' ，它们都在一个点处横截相交。沿支配此类分支 C' 的截面进行每次初等变换，都会使 Hirzebruch 曲面 X_C^i 的不变量减一。沿所有与 C 相交的分支完成所需的变换后， X_C^i 的不变量从 bm_C 降至 0。因此，所得曲面 X_C^i 与 $C \times \mathbb{P}^1$ 同构。□

5. 皮卡数为 1 的光滑射影曲面

本节中，我们固定一个皮卡数为 1、带有丰生成元 H 的光滑射影曲面 Z ，其中 NS(Z)。我们考察 Hilbert-Chow 态射 σ: M_Z(ch) $\to$ CDiv(Z)，其定义为 $[\mathcal{E}, s] \mapsto \mathcal{Z}_f(\mathcal{Q})$，其中 $\mathcal{Q} :=$ coker(s) 是余核层。

注5.1。一般而言，如果 $\mathcal{Q}$ 在其支撑上秩为 1，那么 σ 会将 $[\mathcal{E}, s]$ 映到 $\mathcal{Q}$ 的（约化）支撑。如果 $\mathcal{Q}$ 在某个分支上的秩更高，那么 σ 会映到一条非约化曲线，且该分支上的重数等于其秩。

引理 5.2。 设 $C \subseteq Z$ 为次数为 dH^2 的曲线，即 $C \cdot H = dH^2$。 $\mathcal{O}_C$ 的陈特征为 $(0,\ dH,\ -d^2H^2/2)$。

引理 5.3。 设 $\mathcal{F}$ 为曲线 C 上的秩 1 无挠层，次数为零，并假设存在满射 $\mathcal{O}_C^r \to \mathcal{F} \to 0$ ，其中 $r \geq 1$，则 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_C$。

证明。 令 π: $C' \to C$ 为正规化。拉回后，我们得到一个满射 $\mathcal{O}_{C'}^r \to \pi^*\mathcal{F} \to 0$ ，其中 $\pi^*\mathcal{F}$ 是次数为零的无挠层。于是 $\pi^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{C'}$。根据假设，存在一个非平凡态射 $\mathcal{O}_C \to \mathcal{F}$ ，其余核是一个挠层 $\mathcal{G}$。因此，我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

将此正合列拉回到 C' 并比较次数，我们发现 $\pi^*\mathcal{G}=0$，这迫使 $\mathcal{G}=0$。我们得出结论 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_C$。□

引理 5.4. 设 $r_i\geq 1$ 是满足 $1\leq i\leq m$ 的整数。则

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} r_i\Big)^2 \geq \sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)r_i$$

当且仅当对所有 i，$r_i=1$ 时等号成立。

证明。设 $S=\sum_{i=1}^{m} r_i$。则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(2m+1-2i)r_i &= (2m+1)S-2\sum_{i=1}^{m} ir_i\\ &\leq (2m+1)S-2\sum_{i=1}^{m} i \qquad (5.1)\\ &= (2m+1)S-m(m+1).\end{aligned}$$

因此 $S^2\geq(2m+1)S-m(m+1)$，等号成立当且仅当 $S=m$ 或 $S=m+1$。结合（5.1），可知原不等式等号成立当且仅当$r_i=1$ 对所有 i。□

命题 5.5. 模空间 $M_Z(r,dH,d^2H^2/2)$ 与 *Quot* 概形$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r;0,dH,-d^2H^2/2)$同构。

证明。只需证明，$\mathcal{O}_Z^r$ 的每个陈特征为 $(0,dH,-d^2H^2/2)$ 的商都同构于某个次数为 dH^2 的曲线 $C\subseteq Z$ 的 $\mathcal{O}_C$。

设 $\mathcal{O}_Z^r\to\mathcal{L}\to 0$ 是 Quot 概形 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r;0,dH,-d^2H^2/2)$ 中的一个商。令 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{L}$ 为其极大零维（挠）子层，并设 $\mathcal{F}=\mathcal{L}/\mathcal{T}$。那么 $\mathcal{F}$ 是一个维数为 1 的纯层。

首先假设 $\mathcal{F}$ 的支撑是不可约的，记作 支撑$\mathcal{F}=nC$。根据 [Yua18，命题 5。10], 层 $\mathcal{F}$ 存在一个上滤过

$$0=\mathcal{F}^0\subsetneq\mathcal{F}^1\subsetneq\cdots\subsetneq\mathcal{F}^m=\mathcal{F}$$

其连续商 $\mathcal{R}_i:=\mathcal{F}^i/\mathcal{F}^{i-1}$ 是 C 上秩为 r_i 的层（不一定是无挠的）。这些秩满足 $\sum r_i=n$。对于每个 $i\geq 2$，$\mathcal{F}$ 的结构诱导出一个满射$\mathcal{R}_i(-C)\to\mathcal{R}_{i-1}\to 0$，并且对于每个 i，也存在一个满射 $\mathcal{O}_C^r(-(m-i)C)\to\mathcal{R}_i\to 0$。

令 deg 表示 C 上的次数。将斜率不等式应用于后面的满射，得到 $\deg\mathcal{R}_i\geq -(m-i)r_iC^2$。利用 C 上陈特征的可加性，我们计算得

$$\mathrm{ch}_2(\mathcal{F})=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{ch}_2(\mathcal{R}_i)\geq\sum_{i=1}^{m}-\frac{r_i}{2}C^2+\sum_{i=1}^{m}-(m-i)r_iC^2.$$

由于 $C^2>0$ 且 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F})\leq\mathrm{ch}_2(\mathcal{L})=-n^2C^2/2$，我们有

$$\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}(\sum r_i)^2\leq\sum\frac{r_i}{2}+(m-i)r_i.$$

根据 引理 5.4，各处都必须取等号，因此 $r_i=1$ 对所有 i都成立。特别地，$\mathcal{T}=0$，且每个 $\mathcal{R}_i$ 都是 C 上的秩一挠层。此外，次数界取等号：次数 $\mathcal{R}_i=-(m-i)C^2$。根据 引理 5.3，这意味着 $\mathcal{R}_i\simeq\mathcal{O}_C(-(m-i)C)$。

利用滤过和满射，可以归纳地构造出一个相容的扩张系统，将 $\mathcal{F}$ 实现为 $\mathcal{R}_i$的迭代扩张。特别是在最初的几个阶段

可以得到一个交换图，其行和列均为正合序列，且其中的映射由商 $\mathcal{O}_{nC}^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$诱导。

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_C(-(n-1)C) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^r(-(n-1)C) & \longrightarrow & \mathcal{F}^1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_{2C}(-(n-2)C) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{2C}^r(-(n-2)C) & \longrightarrow & \mathcal{F}^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_C(-(n-2)C) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^r(-(n-2)C) & \longrightarrow & \mathcal{R}_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

通过适当选择第一列，可以使第一行和第三行中的复合为恒等映射。由此可得 $\mathcal{F}^2 \simeq \mathcal{O}_{2C}(-(n-2)C)$。通过归纳法，我们可以证明 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{nC}$。

如果支撑 $\mathcal{F}$ 有多个不可约分支，则利用陈特征的可加性，对每个分支分别应用相同的论证。特别地， $\mathcal{L}$ 是纯的，而给定的陈特征迫使 $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C$ 对于某条次数为 dH^2的曲线 C 成立。

因此， $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r; 0, dH, -d^2H^2/2)$中的每个商都具有 $\mathcal{O}_C$的形式，因而特别是纯的。根据注 3.6以及命题 3.5中的构造，这个 Quot 概形与模空间 $M_Z(r, dH, d^2H^2/2)$重合。□

命题5.6。 存在一个定义良好的 *Hilbert-Chow* 态射

$$\sigma\colon M_Z(r, dH, d^2H^2/2) \longrightarrow \mathrm{CDiv}^d(Z)$$

将 $[\mathcal{E}, s]$ 映到 $\mathcal{Q}$的 *Fitting* 支撑。

证明。 只需为 Quot 概形 $\mathfrak{Q} := \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r; 0, dH, -d^2/2)$构造该态射，然后应用前一个命题。令

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathfrak{Q}} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathfrak{Q}}^r \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{Q}} \longrightarrow 0$$

为 $\mathfrak{Q} \times Z$上的泛商。已知 $\mathcal{K}_{\mathfrak{Q}}$ 是秩为 r的局部自由丛。因此，行列式 $\det\ \alpha$ 是线丛 $\det \mathcal{K}_{\mathfrak{Q}}^{-1}$ 的一个截面，其零除子定义了 $\mathfrak{Q} \times Z$ 上的次数为 dH^2的相对有效 Cartier 除子。这诱导出一个态射

$$\sigma\colon \mathfrak{Q} \longrightarrow \mathrm{CDiv}^d(Z)$$

它在闭点上与 Fitting 支撑构造一致。 □

定理 5.7。 *Hilbert-Chow* 态射

$$\sigma\colon M_Z(r, dH, d^2/2) \longrightarrow \mathrm{CDiv}^d(Z)$$

是一个 $\mathbb{P}^{r-1}$-丛。

证明。 根据前面的命题， $M_Z(r, dH, d^2/2)$ 中位于因子$C \in \mathrm{CDiv}^d(Z)$ 上的任意一点，都对应于一个商 $\mathcal{O}_Z^r \to \mathcal{O}_C$。与 $\mathcal{O}_C$ 作张量积后，我们得到

$$\mathcal{O}_C^r \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

反过来，任何这样的满射都以这种方式得到。因此， σ 在 $[C]$ 上的纤维自然地同构于射影空间 $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C^r, \mathcal{O}_C)) \simeq \mathbb{P}^{r-1}$。这些同构随 C 代数地变化，因此 σ 是一个 $\mathbb{P}^{r-1}$-丛。□

定理 *1.3* 的证明。由命题 5.5 和 5.6以及定理 5.7可得。 □

秩 2 的几何解释。当 $r = 2$ 时，我们可以运用第 4 节的几何处理来描述 Hilbert-Chow 态射的纤维

$$\sigma\colon M_Z(2, dH, d^2H^2/2) \longrightarrow \mathrm{CDiv}^d(Z).$$

事实上，同样的方法适用于任意秩 r。

引理 5.8。设 $C \subseteq Z$ 是正规射影曲面上的一条曲线。若 $\pi\colon Z' \to Z$ 是从另一个正规射影曲面出发的双有理态射，并且

$$\pi^*C = \widetilde{C} + \sum_j n_j E_j,$$

~，其中 C 是严格变换， E_j 是 π-例外曲线。那么

$$C^2 - \widetilde{C}^2 = \widetilde{C} \cdot \sum n_j E_j.$$

证明。 对于每个 j，我们有 $\pi^*C \cdot E_j = 0$，因此

$$\widetilde{C} \cdot E_j = -\sum n_i E_i \cdot E_j$$

and

$$\widetilde{C} \cdot \sum n_j E_j = -\sum_j n_j (\sum_i n_i E_i \cdot E_j) = -(\sum n_j E_j)^2.$$

Then

$$\begin{aligned} C^2 = (\pi^*C)^2 &= (\widetilde{C} + \sum n_j E_j)^2 \\ &= \widetilde{C}^2 + 2\widetilde{C} \cdot \sum n_j E_j + (\sum n_j E_j)^2 \\ &= \widetilde{C}^2 + \widetilde{C} \cdot \sum n_j E_j \end{aligned}$$

如所需。 □

令 $\pi\colon Z' \to Z$ 为极小对数解消，使得 $\pi^*Q + \mathrm{Exc}(\pi)$ 具有简单正规交叉。正如在 第 4 节中所解释的，在反向变换中，对于 π- 例外曲线上方的爆破中心的选择有一定自由度，但只有在 Q 的严格变换上方选择爆破中心才会影响最终得到的关联模型。因此，我们可以先沿例外分支进行丸山变换，然后再沿 Q进行。

根据前一个引理以及 第 4 节中的分析，对于每个分支 ~ C 严格变换的 Q 自交数 a 出现在命题 2.10 中，且至多为$-\widetilde{C} \cdot \sum_j n_j E_j$，而自交数 b 等于 $\widetilde{C}^2$。因此 $b - a \geq C^2 > 0$，并且在推论 2.11中，我们始终处于这样的情形：有唯一的负截面可选作爆破中心，而反向变换中所用的有效爆破中心选择构成一个射影直线。这为 Hilbert-Chow 态射的纤维提供了一种几何解释：在秩 2 情形下，它们是 $\mathbb{P}^1$。 这与定理 5.7相符。

6. 负曲线

本节中，我们固定一个光滑射影曲面 Z，它包含一条自交数为 $-d$ 的光滑有理曲线 C，其中 $d>0$。我们研究 Z 上秩 2 的层稳定对$[\mathcal{E},s]$ 的模空间，其余核的支撑位于 C。通过将这个模空间嵌入一个合适的格拉斯曼流形，我们描述其不可约分支。

我们关注 $M_Z(2,\ 2C,\ -2d)$，即层稳定对的模空间 $[\mathcal{E},s]$，其$\mathrm{ch}(\mathcal{E})=(2,\ 2C,\ -2d)$。或者 $\mathcal{E}$是局部自由的，或者存在一个嵌入 $\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}^{\vee\vee}$，其余核是一个塔层。在局部自由的情形下，可以使用代数方法（引理 6.11）或几何方法（注 6.12）来确定相应的分支；它同构于 $\mathbb{A}^{d+1}$-丛在 $\mathbb{P}^1$上的空间。在非局部自由的情形下，模问题归结为曲线 C上的 Quot 概形。

注 6.1. 如果余核子概形是约化的，那么模空间 $M_Z(r,C,-d/2)$ 同构于 $\mathbb{P}^1$。事实上，按照命题 5.5 的证明进行论证，可以证明任何这样的层稳定对都具有 $\mathcal{E}$局部自由。于是，$M_Z(r,C,-d/2)$ 可识别为 Quot 概形 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^r;\,0,C,d/2)$，后者根据与定理 5.7 相同的论证（或通过第 4 节的几何解释）是 $\mathbb{P}^{r-1}$。

设 $\mathcal{E},s$ 是 $M_Z(2,2C,-2d)$ 中的层稳定对。将对偶函子 $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O}_Z)$ 应用于短正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_Z^2\xrightarrow{s}\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{Q}=$是 $\mathrm{coker}(s)$，我们得到

$$0\longrightarrow\mathcal{E}^\vee\xrightarrow{s^\vee}\mathcal{O}_Z^2\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow 0,\tag{6.1}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是t he 自然态射 $\mathcal{O}_Z^2\to\mathcal{E}xt^1(\mathcal{Q},\mathcal{O}_Z)$ 的像，且 $\mathcal{Z}_f(\mathcal{F})=\mathcal{Z}_f(\mathcal{Q})=2C$。

引理 6.2. 层 $\mathcal{F}$ 同构于 $\mathcal{O}_{2C}$ 或 $\mathcal{O}_C^2$。

证明。由于存在一个满射 $\mathcal{O}_Z^2\to\mathcal{F}$，因此 $\mathrm{rk}\,\mathcal{F}\le 2$。所以，要么 $\mathrm{rk}\,\mathcal{F}=2$ 且$\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})=C$，要么 $\mathrm{rk}\,\mathcal{F}=1$ 且 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})=2C$。另请注意，$\mathcal{F}$是纯的，因为 $\mathcal{E}^\vee$是局部自由的。因此可得，$\mathcal{F}$ 是局部自由的 [Yan03，引理 2。5]。

考虑平凡射影丛 $\pi\colon X=\mathbb{P}(\mathcal{O}_Z^2)\to Z$。由公式 (6.1)，$Y:=\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 可视为 X 的子概形，同时也是 $X_D\simeq D\times\mathbb{P}^1$ 的射影子丛，其中$D=\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})$。因此，要么 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})=C$, $Y=X_C$和 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_C^2$，要么 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F})=2C$和 Y是 X_{2C}的截面。在后一种情况下，将正合列推前，

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{O}_X(1)\longrightarrow\mathcal{O}_X(1)\longrightarrow\mathcal{O}_X(1)\otimes\mathcal{O}_Y\longrightarrow 0$$

得到

$$0\longrightarrow\pi_*(\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{O}_X)\longrightarrow\mathcal{O}_Z^2\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow 0$$

([Mar82，命题 1 的证明。6])，即 (6.1)。由于 $\mathcal{O}_X(1)$ 是自由的，$\mathcal{O}_X(1)\otimes\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_Y$因此 $\mathcal{F}=\pi_*\mathcal{O}_Y\simeq\mathcal{O}_{2C}$。□

由**从层稳定对到商的对应**在命题 3.5中给出的记号，并使用其中的记号，我们得到一个短正合列

$$0\to\mathcal{T}\to\mathcal{L}\to\mathcal{F}\to 0,\tag{6.2}$$

其中 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{L}$ 的极大挠子层，且 $\mathrm{ch}(\mathcal{L})=(0,\ 2C,\ 2d)$。

引理 6.3。层 $\mathcal{E}$ 是局部自由的，当且仅当 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_{2C}$。在这种情况下，$\mathcal{L}=\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_{2C}$。

证明。根据注 3.6， $\mathcal{E}$ 是局部自由的，当且仅当层 $\mathcal{L}$ 是纯的，即当$\mathcal{T}=0$时。等式(6.2)给出 $\mathrm{ch}(\mathcal{L})=\mathrm{ch}(\mathcal{F})+\mathrm{ch}(\mathcal{T})$。由于 $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{2C})=(0,2C,2d)$ 且 $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_C^2)=(0,2C,d)$，要使 $\mathcal{T}=0$成立，唯一的可能是 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_{2C}$。反之，若 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_{2C}$，则$\mathcal{T}=0$ 且 $\mathcal{L}=\mathcal{F}$。□

引理 6.4. 若 $\mathcal{E}$ 不是局部自由的，则 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_C^2$ 和 $h^0(Z,\mathcal{T})=d$。

证明。由引理 6.2 和 6.3，唯一剩下的可能性是 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_C^2$。现在 $\mathrm{ch}(\mathcal{F})=(0,2C,d)$，所以 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{T})=d$。由于 $\mathcal{T}$是塔层，我们有 $h^0(Z,\mathcal{T})=\mathrm{ch}_2(\mathcal{T})=d$。□

接下来我们描述模空间 $M(2,2C,-2d)$ 与 Quot 概形 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^2;0,2C,2d)$ 之间的关系，该 Quot 概形出现在 命题 3.5中。

定义 6.5. 我们将模空间中的一些轨迹记号如下。

- $M_f\subseteq M(2,2C,-2d)$，参数化层稳定对 $\mathcal{E},s$ 且 $\mathcal{E}$为局部自由的子概形。
- $M_f'=M_Z(2,\ 2C,\ -2d)\setminus M_f$，即 M_f的补集，它参数化了 $\mathcal{E},\ s$中 $\mathcal{E}$ 非局部自由的层稳定对。
- $\Theta\subseteq\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^2,\ 0,\ 2C,\ 2d)$，这是参数化商的子概形 $\mathcal{O}_Z^2\to\mathcal{L}$，其中 $\mathrm{Supp}(\mathcal{T})\subseteq C$，这里 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{L}$的极大挠子层。
- $\Theta_d\subseteq\Theta$，这是支撑在 C上的 $\mathcal{T}\neq0$ 商的轨迹。
- $\Theta_p\subseteq\Theta$，这是 $\mathcal{L}$ 纯的商的轨迹，也就是 Θ中 Θ_d 的补集。

定理 6.6. 子概形 M_f 同构于 Θ_p。子概形 M_f' 同构于Θ_d，它也同构于$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2,d)$。因此，模空间 $M(2,\ 2C,\ -2d)$同构于 Θ。

为证明定理 6.6，我们需要以下结果。

命题 6.7。 子概形 M_f' 与 *Quot-scheme* $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2,d)$ 同构。

证明。 设 $\mathcal{E},s$ 是 $M(2,2C,-2d)$ 中的一个层稳定对，且 $\mathcal{E}$ 不是局部自由的。那么我们有如下交换图，其中各行正合

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^r & \xrightarrow{s^{\vee\vee}} & \mathcal{E}^{\vee\vee} & \longrightarrow & \mathcal{Q}' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中 $\mathcal{Q}'=$的余核$(s^{\vee\vee})$。由 引理 6.4，我们有 $\mathcal{F}\simeq\mathcal{O}_C^2$。由正合列 (6.1) 可得 $\mathcal{E}^\vee\simeq\mathcal{O}_Z^2(-C)$；因此 $\mathcal{E}^{\vee\vee}\simeq\mathcal{O}_Z^2(C)$且 $\mathcal{Q}'\simeq\mathcal{O}_C^2(C)$。蛇引理表明，中间箭头和右侧箭头具有相同的余核，记为 $\mathcal{T}'$。因此我们得到一个满射 $\mathcal{O}_C(C)\to\mathcal{T}'\to0$。

反过来，给定这样的商 $\mathcal{O}_C(C)\twoheadrightarrow\mathcal{T}'$，定义

$$\mathcal{E}:=\ker(\mathcal{O}_Z^2(C)\twoheadrightarrow\mathcal{O}_C^2(C)\twoheadrightarrow\mathcal{T}').$$

由于复合

$$\mathcal{O}_Z^2\longrightarrow\mathcal{O}_Z^2(C)\longrightarrow\mathcal{O}_C^2(C)\longrightarrow\mathcal{T}'$$

为零，我们得到单射 $\mathcal{O}_Z\to\mathcal{E}$，其余核是 $\mathcal{O}_C^2(C)$ 的子层。这给出了 $M(2,\ 2c,\ -2d)$ 中的一个层稳定对。

根据命题 3.5，有 $\mathcal{T}'=\mathcal{E}\mathrm{xt}^2(\mathcal{T},\omega_Z)$。特别地，将其视为 C上的层时，$\mathcal{T}'$的长度为 $h^0(Z,\mathcal{T}')=d$。此外，商 $\mathcal{O}_C^2(C)\to\mathcal{T}'\to0$与 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2,d)$ 中的商 $\mathcal{O}_C^2\to\mathcal{T}'\to0$构成双射。因此， $M_f'\simeq\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2,d)$。□

引理 6.8。 设 $\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{L}$ 是 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^2, 0, 2C, 2d)$中的一个点。记 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ 为极大挠子层，并令 $\mathcal{F} := \mathcal{L}/\mathcal{T}$。若 $\mathcal{T} \neq 0$，则 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_C^2$。因此， $\mathcal{T}$的支撑长度为 d。

证明。注意到 $\mathcal{F}$ 是一个纯层 [HL10，定义 1.1.4]。由于 $\mathcal{T} \neq 0$ 是一个塔层，我们有 $\mathrm{ch}_1(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{L}) = 2C$。此外， $h^0(\mathcal{T}) + \mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_2(\mathcal{L}) = 2d$。由于$\mathcal{T} \neq 0$，我们得到 $h^0(\mathcal{T}) > 0$。因此 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) < 2d$。若 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F}) = 2C$，由于存在一个满射$\mathcal{O}_{2C}^2 \to \mathcal{F}$，$\deg(\mathcal{F}) \geq 0$，于是 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = -\frac{1}{2}(2C)^2 + \deg(\mathcal{F}) \geq 2d$，这就导致矛盾。因此 $\mathcal{Z}_a(\mathcal{F}) = C$，且 $\mathcal{F}$ 在 C上是秩 2 的局部自由层。由于满射映射 $\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{F} \to 0$，我们得到 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C^2$。在此情形下，$\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = d$，这意味着 $\mathcal{T}$ 的长度为 d。□

命题 6.9。 子概形 Θ_d 同构于 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$。

证明。 设 $q\colon \mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{L}$ 是 Θ_d中的一个点。根据定义，极大挠子层 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$是一个支撑在 C 上、长度为 d的塔层。令 $\mathcal{K} := \ker q$，并令 $\mathcal{F} := \mathcal{L}/\mathcal{T}$。我们有如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^2 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{=} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z^2 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由蛇引理可知， $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{K}'$ 是单射，其余核同构于 $\mathcal{T}$。根据 引理 6.8，$\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_C^2$ 和 $\mathcal{T}$的长度为 d。因此 $\mathcal{K}' \simeq \mathcal{O}_Z^2(-C)$。于是我们得到一个满射 $\mathcal{O}_Z^2(-C) \to \mathcal{T}$。

反过来，设 $p\colon \mathcal{O}_Z^2(-C) \to \mathcal{T}$是一个商，满足 $\mathrm{Supp}(\mathcal{T}) \subseteq C$且 $\ell(\mathcal{T}) = d$。令$\mathcal{K} := \ker p$。单射 $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{O}_Z^2$与自然映射 $\mathcal{O}_Z^2(-C) \to \mathcal{O}_Z^2$复合，得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_Z^2 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

$\mathcal{L}$ 的极大挠子层同构于 $\mathcal{T}$。因此， $q\colon \mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{L}$ 是 Θ_d的一个点。于是， Θ_d 可自然地识别为商空间 $O_Z^2(-C)$，其中 $\mathrm{Supp}(\mathcal{T}) \subseteq C$ 且 $\ell(\mathcal{T}) = d$。最后，由于 $\mathcal{T}$支撑在 C上，限制映射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Z^2(-C), \mathcal{T}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C^2, \mathcal{T})$$

是一个同构。因此， Θ_d同构于 Quot 概形 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$。 □

证明定理 6.6。第一个同构直接由命题 3.5与注 3.6得到。对于第二个同构， 命题 3.5 给出 $M_f' \subseteq \Theta_d$。将其与命题6.7 和6.9 结合，即得所需的同构。□

6.1. **研究** M_f。由于 $M_f \simeq \Theta_p$ 根据定理 6.6，为了参数化所有的层稳定对 $\mathcal{E}$， s 中 $M_Z(2, 2C, -2d)$ 且 $\mathcal{E}$局部自由，我们只需参数化所有满足$\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{L} \to 0$ 使得 $\mathcal{L}$ 为纯的商。由引理 6.3可知，这等价于参数化所有商 $\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{O}_{2C} \to 0$。

引理6.10。 设 $C \subseteq Z$ 是一条满足 $C^2 = -d$ 的光滑有理曲线。那么，双曲线 $2C$ 的结构层 $\mathcal{O}_{2C}$ 的全局截面环是 k-代数

$$R := k[x_0, \ldots, x_d]/(x_0, \ldots, x_d)^2.$$

证明。 由于 $C \simeq \mathbb{P}^1$ 且 $C^2 = -d$，存在一个短正合列 [BHPV04，第62页，(4)]

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{2C} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

我们可以将 $2C$ 视为 C 的无穷小扩张，这一点是平凡的，因为

$$H^1(C, \mathcal{H}om(\Omega_C, \mathcal{O}_C(d))) = 0.$$

H作为 $\mathcal{O}_C$-代数的层 $\mathcal{O}_{2C} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(d)$，其乘法由下式给出 y

$$(a_1 \oplus s_1) \cdot (a_2 \oplus s_2) = (a_1 a_2 \oplus (a_1 s_2 + a_2 s_1))$$

[Har77，III，习题 4。10]取整体截面得到

$$H^0(Z, \mathcal{O}_{2C}) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C) \oplus H^0(C, \mathcal{O}_C(d)) \simeq k[x_0, \ldots, x_d]/(x_0, \ldots, x_d)^2.$$

这就确定了所需的代数 R。 □

引理 6.11。 所有满射态射

$$\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{O}_{2C} \to 0$$

由向量丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^{\oplus(d+1)}$ 的全空间参数化。等价地，这个$\mathbb{A}^{d+1}$-丛在 $\mathbb{P}^1$ 上是 $V(xz + y^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+3}$ 的光滑轨迹。

证明。由于 $\mathcal{O}_{2C}$ 的支撑是 $2C$，任意满射 $\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{O}_{2C} \to 0$ 都经由

$$\mathcal{O}_{2C}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{2C} \longrightarrow 0.$$

因此，我们可以处理来自 $\mathcal{O}_{2C}^2$ 的满射。

一个商 $\mathcal{O}_{2C}^2 \to \mathcal{O}_{2C}$ 由一对 $(e,\ h) \in \mathcal{O}_{2C}^2$ 给出，其分支生成 $\mathcal{O}_{2C}$ 作为一个 $\mathcal{O}_{2C}$-模；等价地，$e,\ h$ 至少有一个可逆。核是由 $(-h,\ e)$ 生成的子模。

如果 e 可逆，那么

$$\langle(-h, e)\rangle = \langle(-e^{-1}h, 1)\rangle$$

因此，满射的数据由以下元素编码

$$e^{-1}h = a_1 + \sum_{i=0}^{d} b_i x_i \in R, \tag{6.3}$$

它由坐标 $(a_1,\ b_0,\ \ldots\ldots,\ b_d) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{d+1}$唯一确定。类似地，若 h可逆，则可通过以下方式得到坐标 $(a_2,\ c_0,\ \ldots\ldots,\ c_d)$

$$-h^{-1}e = a_2 + \sum_{i=0}^{d} c_i x_i \in R.$$

当 e 和 h均可逆时，这两种描述之间的关系为

$$(a_1, b_0, \ldots, b_d) \longmapsto \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{b_0}{a_1^2}, \ldots, -\frac{b_d}{a_1^2}\right),$$

这恰好是 $\mathbb{P}^1$的标准覆盖上 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^{\oplus(d+1)}$ 的转移函数。因此，满射的模空间是这个向量丛的全空间。

为了将此空间与 $V(xz + y^2) \subseteq \mathbb{P}^{d+3}$的光滑轨迹等同起来，令 $(x :\ y :\ z :\ u_0 :\ \cdots :\ u_d)$ 是 $\mathbb{P}^{d+3}$ 上的齐次坐标。在图表 $x \neq 0$ 上，我们设 $x = 1$，得到坐标 $(y,\ u_0,\ \ldots\ldots,\ u_d) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{d+1}$。在图表 $z \neq 0$ 上，我们设 $z = 1$，得到

坐标 $(-y,\ u_0,\ \ldots\ldots,\ u_d) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{d+1}$。这些图表的交由 $x \neq 0$、$z \neq 0$、 $y \neq 0$ 给出，两个坐标系之间的变换为

$$(y, u_0, \ldots, u_d) \longmapsto \Big(\frac{1}{y}, -\frac{u_0}{y^2}, \ldots, -\frac{u_d}{y^2}\Big),$$

再次得到 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^{\oplus(d+1)}$ 的转移函数。 $V(xz+y^2)$ 的奇异轨迹是线性子空间 $\{x=y=z=0\} \cong \mathbb{P}^d$。因此， $V(xz+y^2)$ 的光滑轨迹恰好是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^{\oplus(d+1)}$ 的全空间。□

注6.12（几何解释）。对于局部自由的层稳定对，我们可以使用 式 (4.3) 中的几何处理，具体描述 Hilbert-Chow 态射的纤维

$$\sigma\colon M_Z(2, 2C, -2d) \longrightarrow \mathrm{CDiv}(Z), \quad [\mathcal{E}, s] \longmapsto Q$$

其中 Q 是余核层的 Fitting 支撑 $\mathcal{Q}:=$余核(s)。在当前情形下$Q = 2C$；因此 Q 由一条曲线 C 构成，其重数为二，并且 $(Z,\ Q_{\mathrm{red}})$ 是对数光滑的。根据 定理 3.8，所有这些层稳定对共享同一个关联稳定极小模型

$$(X', B'), A' \xrightarrow{f'} Z, \tag{6.4}$$

与 $X' \simeq Z \times \mathbb{P}^1$。由此可知，图示（ π 和 θ 中的映射（4.3）都是恒等映射。我们可以对模型（6.4）进行两次 Maruyama 初等变换。

取一点 $p \in \mathbb{P}^1$ ，并取投影 $X' \to \mathbb{P}^1$ 在 p上的纤维 X'_p 。记 $X'_C = C \times \mathbb{P}^1$ 与 X'_p的交点为 C'。于是 C' 在 X'_C中的自交数为 0。沿 C' 爆破 X'，并记例外因子 E 与 X'_C的严格变换的交点为 C_1 。然后将 X'_C 的严格变换压缩到曲线 C_1；我们仍用 E表示 E 的严格变换。由于 C 在 Z中的自交数为 $-d$ ，根据命题 2.10， C_1 在 E 中的自交数等于 $(C_1)^2_E - d - 0 = -d < 0$，因此根据推论 2.11， E 是次数为 d 的 Hirzebruch 曲面。对于第二次 Maruyama 初等变换，我们选择一条与 C_1不相交的曲线$C'' \subseteq E$ 。根据引理 2.12，所有这些选择均由 $\mathbb{A}^{d+1}$ 参数化。因此， σ 在 $Q = 2C$ 上的纤维是一个在 $\mathbb{P}^1$上的 $\mathbb{A}^{d+1}$-纤维化，这与引理 6.11 中通过代数方法得到的描述一致。

6.2.**研究** M'_f。 由于 $M'_f \simeq \Theta_d$(定理 6.6)，任意层稳定对 $[\mathcal{E}, s] \in M_Z(2,\ 2C,\ -2d)$若 $\mathcal{E}$ 不是局部自由的，则由一个商确定

$$[\mathcal{O}_Z^2 \longrightarrow \mathcal{L}] \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_Z^2, 0, 2C, 2d)$$

其中极大挠子层 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ 的长度为 d ，且支撑在曲线C上。由于 $\mathcal{L}$ 支撑在 $2C$上，该商可经由 $\mathcal{O}_{2C}^2$ 分解:

$$\mathcal{O}_Z^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{2C}^2 \longrightarrow \mathcal{L}.$$

令 $R = H^0(Z,\ \mathcal{O}_{2C}) \simeq k[x_0, \ldots, x_d]$ (参见 引理6.10) 以及 $L = H^0(Z,\ \mathcal{L})$。那么，一个商 $\mathcal{O}_{2C} \to \mathcal{L}$ 由一个 R-模的满射唯一确定

$$R^2 \longrightarrow L.$$

然而，并非每个这样的满射都来自 Θ_d中的一个点；还必须施加额外条件，以确保极大挠子层 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ 的长度为 d，并且商 $\mathcal{F} := \mathcal{L}/\mathcal{T}$同构于 $\mathcal{O}_C^2$。

曲面奇点视角阐明了 R的结构。曲线 $C \subseteq Z$ 是光滑射影曲面 Z上的一条自交数为 $C^2 = -d$ 的有理曲线。局部而言，它总可以实现为对 $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^d$ 次数为 d 的 $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^d$ 之射影锥的顶点进行爆破所得的例外因子（参见 [Har77，第V章，例2.11。4]）。令 $\phi\colon\ Z \to Y$

将 C 收缩到点 $P \in Y$；当 $d \geq 2$时，该点是奇异的。极大理想$\mathfrak{m}_P \subseteq \mathcal{O}_{Y,\ P}$的逆像满足 $\phi^{-1}\mathfrak{m}_P \cdot \mathcal{O}_Z = \mathcal{I}_C$。因此

$$\mathcal{O}_{2C} = \mathcal{O}_Z/\mathcal{I}_C^2 = \phi^*\mathcal{O}_Y/(\phi^{-1}\mathfrak{m}_P \cdot \mathcal{O}_Z)^2 = \phi^*(\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_P^2).$$

取整体截面，并利用

$$\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_P^2 = k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2,$$

我们得到

$$H^0(Z,\mathcal{O}_{2C}) \simeq H^0(Y,\mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}_P^2) \simeq k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2.$$

此外，对于 Θ 中的任意商 $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{L}$，都有$^2\mathcal{L} = \phi^*\phi_*\mathcal{L}$。

引理 6.13. 假设

$$L = k \oplus k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2 + (a_0x_0 + \cdots + a_dx_d)$$

对于某个 $[a_0 : \cdots : a_d] \in \mathbb{P}^d$。那么，$R$-模的任意商 $R^2 \to L$ 都对应于 Θ_d 中的一个点。

证明。我们将 L 视为支撑于 $P \in Y$的塔层。于是 $\mathcal{L} = \phi^*L = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_{C,\ p_1,\ \dots,\ p_d}$，其中 $O_{C,\ p_1,\ \dots,\ p_d}$ 表示赋予（不一定互异的）非约化点 p_1，…，p_d的曲线 C 的结构层。

显然，$\mathcal{L}$ 的极大挠子层 $\mathcal{T}$同构于这些 d 点的结构层以及 $\mathcal{L}/\mathcal{T} \simeq \mathcal{O}_C^2$。由于 $\phi^*R = \mathcal{O}_C$和 ϕ^* 是右正合的，任意商 $R^2 \to L$都会诱导出一个商

$$\mathcal{O}_Z^2 \longrightarrow \mathcal{O}_C^2 \longrightarrow \mathcal{L},$$

它确定了 Θ_d中的一个点。 □

根据 引理 6.13，在 Θ_d 中自然可以特别指出如下轨迹。

定义 6.14。我们将 $\Gamma \subseteq \Theta_d$ 定义为参数化所有商 $\mathcal{O}_{2C}^2 \to \mathcal{L}$的轨迹，使得 $\mathcal{L}$的整体截面空间具有如下形式

$$k \oplus k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2 + (a_0x_0 + \cdots + a_dx_d).$$

换言之，Γ参数化了所有满射

$$\left(k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2\right)^{\oplus 2} \longrightarrow k \oplus k[x_0,\dots,x_d]/(x_0,\dots,x_d)^2 + (a_0x_0 + \cdots + a_dx_d)$$

对于某个 $(a_0 : a_1 : \cdots : a_d) \in \mathbb{P}^d$。

Γ 的结构很容易描述。

引理 6.15。对于任意固定的点 $(a_0 : \cdots : a_d) \in \mathbb{P}^d$，这些满射

π： $\left(k[x_0,\dots,x_d]/\left(x_0,\dots,x_d\right)^2\right)^{\oplus 2} \longrightarrow k \oplus k[x_0,\dots,x_d]/\left(x_0,\dots,x_d\right)^2 + \left(a_0x_0 + \cdots + a_dx_d\right)$.

由 $\mathbb{P}^1$参数化。此外，Γ 与 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^d$同构。

证明。设

$$\pi((1,0)) = \left(u', u + \sum_{i=0}^{d} u_ix_i\right), \quad \pi((0,1)) = \left(v', v + \sum_{i=0}^{d} v_ix_i\right)$$

并令

$$(f,g) = \left(\alpha + \sum_{i=0}^{d} \alpha_ix_i, \beta + \sum_{i=0}^{d} \beta_ix_i\right) \in \ker\pi.$$

由于同态 π 是满射，矩阵

$$\begin{pmatrix} u' & u \\ v' & v \end{pmatrix}$$

秩为 2。根据假设，

$$\begin{aligned}\pi(f,g) &= f\pi((1,0)) + g\pi((0,1)) \\ &= \Big(u'\alpha, \alpha u + \alpha\sum_{i=0}^{d} u_i x_i + \sum_{i=0}^{d} u\alpha_i x_i\Big) + \Big(v'\beta, \beta v + \beta\sum_{i=0}^{d} v_i x_i + \sum_{i=0}^{d} v\beta_i x_i\Big) = 0.\end{aligned}$$

由此可得 $\alpha = \beta = 0$。π 的核具有 k 维数 $d+2$，并且作为 k 向量空间由 $(\sum_{i=0}^{d} a_i x_i,$ $0)$、$(0,\ \sum_{i=0}^{d} a_i x_i)$ 和 $(vx_i,\ -ux_i)$ 生成，其中 $i = 0,\ \cdots,\ d$。对于固定的 $(a_0 \colon \cdots \colon a_d) \in \mathbb{P}^d$，唯一剩下的选择是对 $(u \colon v) \in \mathbb{P}^1$。因此，所有具有指定 $(a_0 \colon \cdots \colon a_d)$ 的商 π 均由 $\mathbb{P}^1$ 参数化；令 $(a_0 \colon \cdots \colon a_d)$ 变化，我们得到一个同构 $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^d$。□

事实上，Γ 恰好是 M_f 的“边界”。

引理 6.16. 令 $\overline{M_f}$表示 M_f在 $M_Z(2,\ 2C,\ -2d)$ 中的闭包。则 $M_f \setminus \overline{M_f} = \Gamma$.

证明。 的点 对应于 引理 6.11中描述的商 $\mathcal{O}_Z^2 \to \mathcal{O}_{2C} \to 0$ 。这种商由整体截面的选择决定 $e,\ h \in H^0(Z,\ \mathcal{O}_{2C})$。由 6.3，若$e$ 可逆，则核作为一个 R-模由以下元素生成：

$$\Big(a_1 + \sum_{i=0}^{d} b_i x_i, 1\Big)$$

对于某个 $(a_1,\ b_0,\ \cdots,\ b_d) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{d+1}$。特别地，对于$i = 0,\ \cdots,\ d$，核包含 $(a_1 x_i,\ x_i)$。

如果 e 和 h 均可逆，则 $a_1 \neq 0$ ，并且核也可以由以下元素生成：

$$\Big(1, \frac{1}{a_1} - \sum_{i=0}^{d} \frac{b_i}{a_1^2} x_i\Big).$$

固定 $(u_0 \colon u_1 \colon \cdots \colon u_d) \in \mathbb{P}^d$，并令 $b_i = \frac{u_i}{t}$对某个 $t \neq 0$成立。于是核的 $d+3$生成元具有如下形式：

$$\Big(a_1 t + \sum_{i=0}^{d} u_i x_i, t\Big), (a_1 x_0, x_0), \cdots, (a_1 x_d, x_d), \Big(a_1^2 t, a_1 t + \sum_{i=0}^{d} u_i x_i\Big).$$

令 $t \to 0$，这些收敛到

$$\Big(\sum_{i=0}^{d} u_i x_i, 0\Big), (a_1 x_0, x_0), \cdots, (a_1 x_d, x_d), \Big(0, \sum_{i=0}^{d} u_i x_i\Big)$$

它们生成了 引理 6.15 中描述的核，其中 $(u \colon v) = (a_1 : 1) \in \mathbb{P}^1$。这意味着 M_f中的点沿方向 $(u_0 \colon u_1 \colon \cdots \colon u_d)$ 的极限是 Γ中的一个点。

接下来，假设 e 可逆，但 h 不可逆。则 $a_1 = 0$ 与核包含 s

$$\Big(\sum_{i=0}^{d} b_i x_i, 1\Big), (0, x_0), \cdots, (0, x_d).$$

再次固定 $(u_0 : \cdots : u_d) \in \mathbb{P}^d$，并令 $t \neq 0$时为 $b_i = \frac{u_i}{t}$。将第一个元素乘以 t，得到 $(\sum_{i=0}^d u_i x_i,\ t)$。令 $t \to 0$，这些 $d+2$ 元素收敛到

$$\Big(\sum_{i=0}^{d} u_i x_i, 0\Big), (0, x_0), \cdots, (0, x_d),$$

它们生成了引理 6.15 中出现的$(u : v) = (0: 1) \in \mathbb{P}^1$。

当 h 可逆而 e 不可逆时，情形是对称的，并得到核形如引理 6.15 中与$(u : v) = (1{:}0) \in \mathbb{P}^1$对应的极限。这些恰好是 M_f中点的所有可能极限，并构成轨迹 Γ 因此 $M_f \setminus M_f = \Gamma$。□

6.3. $d = 1$。我们首先讨论 $d = 1$ 的情形，并证明层稳定对的模空间 $M_Z(2, 2C, -2)$是秩为 $d + 2 = 3$的向量丛的射影化。

定理 6.17。设 C 是光滑射影曲面 Z上的一条(-1)-曲线。那么，具有固定陈特征的层稳定对的模空间 $M_Z(2, 2C, -2)$ 同构于$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O})$。

为了证明 定理 6.17，我们首先分析 Γ 来自 定义 6.14的轨迹。在情形$d = 1$下，这等价于参数化所有商

$$R^2 \to k \oplus k[x, y]/(x, y)^2 + (ux + vy),$$

对所有 $(u : v) \in \mathbb{P}^1$，其中 R 是阿廷环 $k[x, y]/(x, y)^2$。利用 命题 6.9，我们还得到 $\Theta_1 \simeq \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, 1) = C \times \mathbb{P}^1$，因此 $\Gamma = \Theta_1$ (引理 6.15)。

The 自由的 R-模 R^2 可视为一个维数为 6 的 k-向量空间，其基 s

$$(1, 0), (0, 1), (x, 0), (0, x), (y, 0), (0, y).$$

我们将把 $M_Z(2,\ 2C,\ -2)$ 实现为格拉斯曼流形 Gr(3，6) 的一个子簇，并研究它在此类点的邻域中的情况。

引理 6.18。 模空间 $M_Z(2,\ 2C,\ -2)$ 在 Γ 的每一点处都是光滑的 .

证明。 由于 $M_Z(2, 2C, -2) \simeq \Theta$ 和 Θ 参数化了某些商

$$R^2 \longrightarrow L,$$

其 L 是一个维数为 3 的 R-模，因此空间 $M_Z(2, 2C, -2)$ 可视为格拉斯曼簇 Gr(3,6) 的一个子概形。

现在我们在格拉斯曼流形 Gr(3, 6) 中写出 $M_Z(2, 2C, -2)$ 的局部方程。固定 $(u : v) = (0 : 1)$，并考虑商 $R^2 \to k \oplus k[x]/(x^2)$。一般 $(u : v) \in \mathbb{P}^1$ 的情形论证相同。

设 $M_0 \subseteq R^2$ 为由向量 $(x, 0), (y, 0), (0, y)$ 生成的子模。那么$R^2/M_0 \simeq k \oplus k[x]/(x^2)$ 作为 R-模，而作为 k-向量空间，它由向量 $(1, 0), (0, 1), (0, x)$ 张成。记 w 为 $M_Z(2, 2C, -2)$ 中对应的点，即核为 M_0 的商 $R^2 \to k \oplus k[x]/(x^2)$。

那么，Gr(3，6) 中 w附近的点表示商 $R^2 \to R^2/M$，其中 M由矩阵的三行 R_1、R_2 和 R_3 生成

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & b & c & 0 \\ d & 0 & 1 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h & i & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

其中 a，b，……，i作为 w附近格拉斯曼簇 Gr(3，6) 上的局部坐标。

要使这样的商定义 $M_Z(2,\ 2C,\ -2)$ 中的一个点，一个必要条件是 R^2/M 为 R-模，即子空间 M 是 $(x,\ y)$-不变的。由于 $x(a+x,\ b+cx) = (ax,\ bx)$，我们有 $xR_1 = aR_1$。类似地，$yR_1 = aR_2 + bR_3$、$xR_2 = dR_1$、$yR_2 = dR_2 + eR_3$、$xR_3 = gR_1$ 和 $yR_3 = gR_2 + hR_3$。这些条件可转化为以下方程：

$$\begin{cases} a = b = 0, \\ e = cd, \\ d^2 + eg = 0, \\ de + eh = 0, \\ df + ei = 0, \\ h = cg, \\ dg + gh = 0, \\ eg + h^2 = 0, \\ fg + hi = 0. \end{cases}$$

化简方程后，我们得到

$$\begin{cases} (d + cg)d = 0, \\ (f + ci)d = 0, \\ (d + cg)g = 0, \\ (f + ci)g = 0. \end{cases}$$

因此，该轨迹是两个光滑分支 $V(d,\ g)$ 和 $V(d + cg,\ f + ci)$ 的并。族 M_f 位于分支 $V(d + cg,\ f + ci)$ 中，因此在点 w 附近，$M_Z(2,\ 2C,\ -2)$ 的方程为 $d + cg = f + ci = 0$。这两个方程定义了一个光滑子簇，因此 $M_Z(2,\ 2C,\ -2)$ 在 w 处是光滑的。□

定理 6.17 的证明。由命题 6.7，$M_Z(2, 2C, -2) = M_f \sqcup \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, 1)$。如上所述，$\Gamma$ 与 $\Theta_1 = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, 1)$ 重合，并且由引理 6.16 可知，它恰好参数化了 M_f 的极限点。因此，$M_Z(2, 2C, -2)$ 是通过向 M_f 添加边界 Γ 得到的。由引理 6.11 可知，轨迹 M_f 是光滑的。由引理 6.18，$M_Z(2, 2C, -2)$ 在 Γ 附近是光滑的。因此，$M_Z(2, 2C, -2)$ 是 M_f 的光滑紧化。

此外，引理 6.11 将 M_f 识别为 $\mathcal{O}(-2)^{\oplus 2}$ 的全空间，即 $\mathbb{A}^2$ 上的一个丛。射影化 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O})$ 也是 M_f 的一个光滑紧化，它通过添加无穷远处的除子 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 得到。由于根据 Gro61 命题 (8.4.2)]，，光滑紧化是唯一的，因此我们得到 $M_Z(2, 2C, -2) = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O})$。□

6.4. $d \geq 2$。假设光滑曲面 C 上的曲线 Z 满足 $C^2 = -d$，其中 $d \geq 2$。回顾 定理 6.6，Θ_d 同构于 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$。由于 $\dim \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d) = 2d$，$\Gamma \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^d \subseteq \Theta_d$ 是一个真子集。通过嵌入 $\mathrm{Gr}(d+2, 2(d+2))$，我们得到如下的局部描述。

引理 6.19. 在 Γ 的每个点附近，模空间 $M_Z(2, 2C, -2d)$ 有两个光滑分支。一个维数为 $d+2$ 的分支位于 M_f 中，另一个维数为 $2d$ 的分支位于 $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$ 中。

证明。我们只对 $d = 2$ 进行计算，一般情形类似，但更复杂。在我们的设定中，Γ 参数化了所有商

$$R^2 \longrightarrow k \oplus k[x, y, z]/(x, y, z)^2 + (a_1x + a_2y + a_3z)$$

对于所有 $(a_1:a_2:a_3)\in\mathbb{P}^2$，其中 R 是阿廷环 $k[x,y,z]/(x,y,z)^2$。设 $M_0\subseteq\mathbb{R}^2$ 为由以下向量生成的子模

$$(x,0),(y,0),(z,0)(0,z).$$

那么，作为 R-模，它是 $R/M_0\simeq k\oplus k[x,y]/(x,y)^2$；作为 k-向量空间，它由向量 $(1,0)$，$(0,1)$，$(0,x)$，$(0,y)$张成。记 w 为 $M_Z(2,2C,-4)$ 中对应的点，即商 $R^2\to k\oplus k[x,y]/(x,y)^2$，其核为 M_0。

那么，w 周围 $\mathrm{Gr}(4,8)$ 中的点表示商 $R^2\to R^2/M$，其中 M 由矩阵的四行 R_1、R_2、R_3 和 R_4 生成

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & b & c & d & 0\\ e & 0 & 1 & 0 & f & g & h & 0\\ i & 0 & 0 & 1 & j & k & l & 0\\ m & 0 & 0 & 0 & n & p & q & 1 \end{pmatrix}$$

其中，a、……、l 是局部参数。

和之前一样，对于对应于 $M_Z(2,2C,-4)$ 中某个点的商，子空间 M 是 (x,y,z)-不变量。那么

$$xR_1=(0,a,0,0,0,b,0,0)=aR_1=(a^2,a,0,0,ab,ac,ad,0),$$

并且我们有 $a=0$，$b=ac=0$。由此

$$yR_2=(0,0,e,0,0,f,0,0)=eR_2=(e^2,e,0,0,ef,eg,eh,0),$$

我们得到 $e=0$，$f=eg=0$。

为简洁起见，我们将矩阵改写如下。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & d & 0\\ e & 0 & 0 & 1 & f & g & h & 0\\ i & 0 & 0 & 0 & j & k & l & 1 \end{pmatrix}$$

Then

$$x,y,zR_1=0=x,y,zR_2.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned} xR_3&=(0,e,0,0,0,f,0,0)=eR_1=(0,e,0,0,0,ae,be,0),\\ xR_4&=(0,i,0,0,0,j,0,0)=iR_1=(0,0,i,0,0,ai,bi,0),\\ yR_3&=(0,0,e,0,0,0,f,0)=eR_2=(0,0,e,0,0,ce,de,0),\\ yR_4&=(0,0,i,0,0,0,j,0)=iR_2=(0,0,i,0,0,ci,di,0). \end{aligned}$$

这意味着

$$f=ae=de,j=ai=di,0=be=bi=ce=ci,$$

类似地，对于 z，我们得到

$$\begin{cases} e^2+fi=0,\\ ef+fj=0,\\ eg+fk=0,\\ eh+fl=0, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} ei + ij = 0, \\ fi + j^2 = 0, \\ gi + jk = 0, \\ hi + jl = 0. \end{cases}$$

在 $b \neq 0$ 的情形下，有 $e = i = 0$，因此 $f = j = 0$。这不是 M_f 的轨迹，因为 e、f、i、$\overline{j}$ 中至少有一个不恒为零。

因此，我们可以假设 $b = 0$，类似地也有 $c = 0$。若 $a \neq d$，则 $e = i = 0$，从而$f = j = 0$，这也不成立。因此 $a = d$。接着，若 $e = 0$，则有 $f = j = 0$。若$i \neq 0$，则 $a = d = 0$，且 k，l 是自由的。$i = 0$的情况类似。

现在我们也可以假设 $e \neq 0$ 和 $i \neq 0$。于是 $a = d$，并且

$$\begin{cases} f = ae, \\ j = ai, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} e + ai = 0, \\ g + ak = 0, \\ h + al = 0. \end{cases}$$

这是一个 4 维分支，其自由变量为 a，i，k，l。

因此，局部上，分支 M_f由 $V(b,\ c,\ a-d,\ e-ai,\ f+a^2i,\ g-ak,\ h-al,\ j-ai)$ 定义，它是一个光滑的 4 维空间。□

现在我们可以证明本节的主要定理。

定理 6.20. 设 C 是 Z 上自交数为 $-d$ 的光滑有理曲线，其中 $d \geq 2$。那么，具有固定 *Chen* 特征的层稳定对的模空间 $M_Z(2, 2C, -2d)$ 有两个光滑不可约分支，一个同构于 $M_1 = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus d+1} \oplus \mathcal{O})$，另一个同构于 $M_2 = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$；它们交于 $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$，后者是 $M_1 \to \mathbb{P}^1$ 的 $\mathbb{P}^{d+1}$- 丛的无穷远截面。

证明. 由命题 6.7，我们有 $M_Z(2, 2C, -2d) = M_f \sqcup \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$。我们将 M_f 在 $M_Z(2, 2C, -2d)$ 中的闭包记为 $\overline{M_f}$，它给出了 M_f 的紧化。由引理 6.16，我们有 $\overline{M_f} = M_f \sqcup \Gamma$。由引理 6.11，$M_f$ 是一个光滑簇。此外，由引理 6.19，对于 Γ 中的任意点，它在 $\overline{M_f}$ 中都有一个光滑邻域。因此，$\overline{M_f} = M_f \sqcup \Gamma$ 是 M_f 的光滑紧化。

根据引理 6.11，M_f 是 $\mathcal{O}(-2)^{\oplus d+1}$的全空间，即 $\mathbb{A}^{d+1}$在 $\mathbb{P}^1$上的丛。射影化 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus d+1} \oplus \mathcal{O})$ 也是 M_f的一个光滑紧化，通过在无穷远处粘合 $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$得到。由于根据 [Gro61, Proposition 8.4.2], , 光滑紧化是唯一的，因此我们得到$M_f = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(2)^{\oplus d+1} \oplus \mathcal{O})$和 $\Gamma = \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$。现在，$M_Z(2, 2C, -2d) = M_f \cup \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d)$由两个分支组成，这两个分支的交 $M_f \cap \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_C^2, d) = \Gamma$。□

参考文献

[Ale96a] V. Alexeev。《对数典范奇点与稳定对的完备模空间》。1996年。arXiv: alg-geom/9608013。预印本（见第2页）。[Ale96b] V. Alexeev。曲面的模空间 $M_{g,n}(W)$，《高维复代数簇》。（特伦托，1994）：de Gruyter，柏林，1996年（见第2页）。[BCHM10] C. Birkar、P. Cascini、C. Hacon 和 J. M^{c}Kernan。“对数一般型代数簇的极小模型的存在性”。载于：《美国数学会杂志》23(2)（2010），第405–468页（见第2页）。[BHPV04] Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters 和 Antonius Ven。《紧复曲面》。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，2004年（见第25页）。

[Bir22] CAUCHER BIRKAR。 代数簇模空间。2022年。arXiv：2211。11237 [math.AG]. 预印本（引于第2页）。[BJS24] Caucher Birkar、Jia Jia 和 Artan Sheshmani。《层稳定对、Quot 概形与双有理几何》。2024年。arXiv：2406.00230 [math.AG]。预印本（引于第2、3、5、9页）。[Bra08] L. Brambila-Paz。“相干系统模空间的非空性”。载于：《国际数学杂志》19（2008），第779–799页（引于第2页）。[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford。“给定属曲线空间的不可约性”。载于：高等科学研究所数学出版物（第36期）（1969），第75–109页（引于第2页）。[Fan+06] Barbara Fantechi 等。《代数几何基础》。第123卷，《数学调查与专著》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，2006年（引于第6页）。[Fri98] Robert Friedman。《代数曲面与全纯向量丛》。《Universitext》。纽约州纽约市：施普林格纽约，1998年（引于第5页）。[Fuj12] Osamu Fujino。“对数曲面的极小模型理论”。载于：数理科学研究所出版物（2012），第339–371页（引于第11页）。[Ful98] William Fulton。《交叉理论》。第2版。纽约：施普林格，1998年（引于第6、12页）。[Gie77] D. Gieseke。“代数曲面上向量丛的模空间”。载于：《数学年刊》106（1977），第45–60页（引于第1页）。[Gro61] Alexander Grothendieck。“代数几何基础：II. 若干态射类的初等整体研究”。载于：高等科学研究所数学出版物 8（1961），第5–222页（引于第30、32页）。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》。第52卷，《数学研究生教材》。纽约：施普林格出版社，1977年（引于第7、8、25、26页）。[HL10] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。《层模空间的几何》。第2版。剑桥大学出版社，2010年（引于第6、8–10、24页）。[HMX18] C. D. Hacon、J. M^{c}Kernan 和 C. Xu。“一般型簇模空间的有界性”。载于：《欧洲数学会杂志》20（2018），第865–901页（引于第2页）。[Kaw24] Yujiro Kawamata。《代数簇：极小模型与有限生成》。Chen Jiang 译。第1版。剑桥大学出版社，2024年（引于第11、13、16页）。[Kol22] János Kollár。《一般型簇族》。剑桥大学出版社，2022年（引于第2页）。[Kol96] János Kollár。《代数簇上的有理曲线》。柏林、海德堡：施普林格，1996年（引于第3页）。[Kon95] M. Kontsevich。“通过环面作用枚举有理曲线”，载于《曲线模空间》。Birkhauser：R. Dijkgraaf、C. Faber 和 G. van der Geer，1995年（引于第2页）。[KS88] J. Kollár 和 N. I. Shepherd-Barron。“三维簇与曲面奇点的变形”。载于：《数学发明》91（2）（1988），第299–338页（引于第2页）。[LeP93a] Joseph Le Potier。“射影平面上的一维半稳定层”。载于：《罗马尼亚纯粹与应用数学杂志》38（7-8）（1993），第635–678页（引于第3页）。[LeP93b] Joseph Le Potier。《半稳定层与相干系统》。卷。《伦敦数学会讲义系列》，第288卷。Press，剑桥，1993年（引于第2页）。[LeP93c] Joseph Le Potier。《相干系统与层级结构》。《Astérisque》214。法国数学会，1993年（引于第1页）。

[Mar77] 丸山正樹。“稳定层模空间 I”。载于：京都大学数学杂志 17（1977），第91–126页（引于第1页）。[Mar78] 丸山正樹。“稳定层模空间 II”。载于：京都大学数学杂志 18（1978），第557–614页（引于第1页）。[Mar82] 丸山正樹。“代数向量丛理论中的初等变换”。载于《代数几何》。José Manuel Aroca、拉格纳·布赫维茨、马克·朱斯蒂和米歇尔·梅尔编。第961卷。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，1982年，第241–266页（引于第13–15、22页）。[MFK94] 戴维·芒福德、约翰·福格蒂和弗朗西丝·柯万。《几何不变理论》。第三版，增订版。《数学及其边界领域成果》34。柏林、海德堡：施普林格，1994年。294页（引于第6页）。[Mum62] D. Mumford。“射影结构的射影不变量及其应用”。载于：国际数学家大会论文集，斯德哥尔摩（1962），第526–630页（引于第1页）。[PT09] R. Pandharipande 和 R. P. Thomas。“通过导出范畴中的稳定对进行曲线计数”。载于：《数学新进展》178（2）（2009），第407–447页（引于第2页）。[Ses67] C. Seshadri。“紧黎曼曲面上的酉向量丛空间”。载于：《数学年刊》85（1967），第303–336页（引于第1页）。[She16] Artan Sheshmani。“高秩稳定对与虚定位”。载于：《分析与几何通讯》24（1）（2016），第139–193页（引于第2、3页）。[Stacks] Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu。2024年（引于第6页）。[Tha94] M. Thaddeus。“稳定对、线性系与 Verlinde 公式”。载于：《数学发明》117（1994），第317–353页（引于第1页）。[Yan03] 杨金根。“胖曲线上的相干层”。载于：《日本数学杂志》新系列 29（2）（2003），第315–333页（引于第22页）。[Yua18] Yao Yuan。“有理曲面上一维层模空间的动机测度”。载于：《当代数学通讯》20（3）（2018），第1750019页（引于第19页）。丘成桐数学科学中心，静斋，清华大学，中国北京市海淀区，100084。电子邮箱：birkar@tsinghua.edu.cn 丘成桐数学科学中心，静斋，清华大学，中国北京市海淀区，100084。电子邮箱：jia_jia@u.nus.edu,mathjiajia@tsinghua.edu.cn 北京数学与交叉科学研究院，中国北京市怀柔区怀北镇河防口村544号，101408。电子邮箱：artan@bimsa.cn 麻省理工学院（MIT），IAiFi 研究所，美国马萨诸塞州剑桥市纪念大道182号，邮编 MA 02139。电子邮箱：artan@mit.edu 丘成桐数学科学中心，静斋，清华大学，中国北京市海淀区，100084。电子邮箱：chxwang@tsinghua.edu.cn