arXiv:2601.00155v1 [econ.TH] 1 Jan 2026

# 动态市场设计[1]

Yeon-Koo Che[2]

2026年1月5日

**摘要**

经典市场设计理论植根于静态模型，在这类模型中，所有参与者同时进行交易。相比之下，现代平台中介的数字市场本质上是动态的，其特点是供给和需求异步随机到达。本章综述了近年来将市场设计拓展至这种动态环境的研究。我们着重介绍一种方法论框架：通过分析系统的长期平稳分布，将复杂的动态问题转化为易于处理的静态规划问题。本文综述探讨了在无法进行货币转移时，如何设计优先级规则和信息政策，以实现市场出清并筛选代理人；以及在可以进行货币转移时，如何管理参与者和商品的队列，以平衡需求与供给的跨期失衡，并将竞争压力分散到不同时间。

**JEL分类编号**：C78, C61, D47, D83, D61**关键词：**参与者的异步随机到达、稳态市场设计、不可转移效用模型、可转移效用模型。

[1]本文是为2025年计量经济学会世界大会特邀演讲准备的一篇综述。感谢Dirk Bergemann、Andy Choi和Sangjun Park提出的意见。[2]美国哥伦比亚大学经济学系。电子邮箱：yeonkooche@gmail.com。

# 1 引言

市场设计的基本主流模型源自两大传统。对于由货币价格调节的市场，即可转移效用（TU）市场，Myerson（1981年) 和 Milgrom 和 Weber(1982) 的拍卖奠基理论，以及 Shapley 和 Shubik(1971) 和 Becker（1973) 的匹配理论，构成了我们理解市场的核心。对于不通过直接转移进行协调的市场，即不可转移效用（NTU）市场，Gale 和 Shapley(1962年) 提出的经典匹配模型是其奠基范式。这些开创性模型虽然影响深远，却反映了一种经典的市场情境：所有买方和卖方都必须同时出现在同一地点才能进行交易。

信息技术和互联网的发展从根本上打破了这些物理和时间上的障碍。由此形成的现代市场，其显著特征是参与者——买方和卖方，或代理人与商品——会**以异步且随机的方式**随时间陆续到达。如今，典型的交易由数字平台促成，而平台必须管理难以预测且往往供需不匹配的流动。平台并非只是被动的会面场所；它们会通过将参与者相互匹配或向彼此推荐，积极构建市场。在许多情况下，平台还会决定谁需要等待匹配，以及要等多久。

这类动态市场的例子无处不在。在非转移效用设定中，异步随机到达在肾脏交换、公共住房、网约车[1] 和专业岗位匹配中发挥着重要作用。在可转移效用设定中，例子包括云计算容量的销售：对服务器时间的需求不断到达，而随着旧任务完成，供给得以释放；像 TaskRabbit 这样的零工平台，面临着服务提供者和客户请求均不可预测的可用性；以及区块链，它们必须将随机到达的交易分配到同样以随机方式生成的区块中，这些区块本身以随机的时间间

[1]网约车平台虽然常采用动态（高峰）定价，但具体将某位乘客分配或派遣给某位司机，通常取决于距离远近和到达顺序，而非针对每次匹配进行基于价格的拍卖。也存在少数例外，例如捷克平台 Liftago 使用显式拍卖来决定派单；然而，对绝大多数平台而言，分配决策仍更适合归为 NTU情形。

隔生成。

本文旨在综述近期研究。这些研究通过将经典的市场与机制设计议程置于更贴近现实的动态环境中，使其与时俱进。相关文献已经十分丰富，且仍在迅速增长；本文并不追求面面俱到。相反，我们聚焦于近期文献中的一个研究方向，该方向主要围绕以下学者的研究展开：Baccara、Lee 和 Yariv (2020)、Che 和 Tercieux (即将出版)、Madsen 和 Shmaya (2025)，以及Che 和 Choi (2025)。该方向凸显了一种特定的方法论框架，能够将这些市场的复杂动态归结为一个易于处理的静态线性规划问题。

我们所发展的常用分析框架大量借鉴了排队论。为便于说明，本文将以一个简单的 M/M/1环境为基础展开综述：买方以泊松到达率 $\lambda$ 到达，而物品（或服务完成）以泊松到达率 $\mu$到达。[2] 虽然许多分析可以推广到更一般的情形，但这一环境非常适合阐释核心思想。我们考虑一类一般的机制，称为正再生再生机制（PRRM）。这类机制会使系统状态形成一个正常返且再生的过程。对于大多数感兴趣的问题而言，这一机制类别足够一般，因而不失一般性；它还将更简单的马尔可夫机制类别作为特例纳入其中。马尔可夫机制依据与收益相关的状态（例如队列中代理人的数量和类型）来设定政策。采用如此一般的框架是有必要的，因为我们所识别出的最优机制往往是非马尔可夫的。尽管具有一般性，PRRM仍保留了关键的可处理性，因为它们存在唯一的平稳分布，从而可以在长期稳态下评估设计者的目标函数和代理人的激励。

因此，核心方法是将动态设计问题转化为静态优化问题：在队列状态空间上选择一个能使设计者的目标函数最大化的平稳分布，同时满足该分布必须能够由某个可行的 PRRM 实现这一约束。这带来了两个主要挑战。首先，如何刻画可行的

[2]在肯德尔记号中，M/M/1 表示一个具有马尔可夫（泊松）到达、马尔可夫（指数）服务时间和单个服务台的系统。

平稳分布集合并非显而易见。我们展示了如何借鉴 Border 对简化形式分配的刻画方法，并将其调整为适用于动态设定。其次，队列状态空间可能极其复杂——例如，包含队列中所有代理人报告的类型——使得平稳分布的维度变得难以处理。我们说明了如何降低这一维度，从而使分析变得可行。

本综述分为两部分：非转移效用市场和可转移效用市场。

首先，我们分析非转移效用设定，即在没有货币转移的情况下分配商品和服务。尽管还存在其他非货币机制，但我们重点关注最常见的一种：排队。[3] 尽管排队在市场出清和类型筛选方面可以发挥类似于定价的作用，但二者之间存在值得注意的区别。在竞争性市场中，支付货币价格的决定不会对他人产生直接的外部性。相比之下，加入队列的决定可能会对他人施加显著的外部性，而这种外部性的性质取决于三个关键因素：准入控制政策（如何监管进入和退出）、排队规则（如何分配优先级）以及信息环境（代理人了解队列状态的程度）。此外，这一决定本质上是动态的，因为代理人通常可以随时放弃排队。这表明，必须特别关注如何管理排队激励，以实现设计者的目标函数。

我们将综述若干在完全信息条件下研究这一问题的关键论文，总结Naor (1969年）、Hassin (1985年）和Leshno (2022）关于先到先服务（FCFS）、后到先服务（LCFS）和随机顺序服务（SIRO）的相对优劣的研究发现。随后，我们将讨论Che 和 Tercieux (forth.)如何运用稳态框架分析最优队列设计，并表明当设计者拥有完整的工具时，先到先服务（FCFS）会再次成为最优选择。最后，我们将讨论利用排队筛选异质类型代理人的影响。等待虽然可以发挥类似价格的作用，但会产生浪费性的社会成本；这与货币转移有着至关重要的区别——

[3]这里，我们泛指所有涉及代理人排队等候的方法，而不一定特指某种排队规则，例如先到先服务。

货币转移。这种权衡意味着，以福利为目标的设计者可能愿意牺牲配置效率，以避免这些成本，有时最优政策会因此采取完全汇集和随机分配。

其次，我们转向可转移效用模型，在该模型中，货币转移不受限制。由于可以进行转移，因此无需依赖不可转移效用环境中造成浪费的排队来进行筛选或实现市场出清。相反，核心问题是如何在时间维度上最优地平衡竞争力量。这为Myerson(1981年的静态设计问题增添了一个重要的新维度：设计者不仅必须在当前在场的代理人之间最优地分配商品/服务，还必须将买方或商品最优地存入队列，以供未来可能进行的分配。这需要根据买方的类型，动态管理其进入队列和离开队列的过程，同时管理商品库存。随后，我们将概述 Che 和 Choi (2025) 在这一设定下对最优动态拍卖所作研究的主要结果。

最后一节将讨论本综述未涵盖的一些主题和文献，并提出未来研究方向。

## 2 非转移效用模型

**基本设定**。我们考虑一个连续时间模型，其中平台/设计者将到达平台的商品或服务分配给也随时间到达平台的买方。在每个时点 $t \in [0, \infty)$，买方以 $\lambda > 0$ 的泊松到达率到达，同质商品——或提供这些商品的企业——则以 $\mu > 0$的泊松到达率到达。在服务中心的情境中，商品的到达可以解释为“服务完成”的到达：如果有买方正在接受服务，这些服务完成就会由其享用；如果没有买方正在接受服务，则会被浪费。

首先，我们假设买方也是同质的；他们从获得商品/服务中得到固定的剩余$v > 0$，并且每单位时间需承担 $c \in (0, v)$

在队列中等待的成本。不考虑贴现。[4] 这意味着，如果买方等待 $t \geq 0$ 并获得商品/服务，他得到的收益为 $v - ct$；如果他最终未能获得商品，他的收益为 $-ct$。他的外部选项为零。[5]

设计者的工作是将商品分配给买方。如果买方到达时没有可用物品，设计者可以让买方待在一个（比喻意义上的）等候室中，也就是**队列**，直到有物品到达。[6] 同样，如果物品到达时没有可用买方，设计者可以将其存入库存，直到有买方到达；不过，这样做会使设计者每单位时间承担成本$d > 0$。此外，还有一家提供服务或商品的企业；每向买方提供一件物品或一项服务，该企业便获得固定利润 $\pi > 0$。

可以看出，这一模型涵盖了现代市场中的两种典型场景。

- **服务场景：**服务中心提供易腐商品或服务。云计算、维修和维护服务以及客户服务都属于这一类。在服务中心的情境中，商品的到达被解释为正在接受服务的买方完成服务。具体而言，只要系统中至少有一位买方，服务就会持续提供；服务完成以泊松到达率 $\mu$ 发生。如果服务完成在没有买方（即系统为空）时“到达”，这一服务机会就会被浪费。这是一种特殊情形，其中 $d = \infty$，因此只有买方可以在队列中等待，物品无法储存。

- **Go平台与动态匹配场景：**零售平台、约会应用、公共 ic

[4]排队文献通常假设，像我们一样，唯一涉及的贴现是线性等待成本。这有两个原因。首先，指数贴现会导致风险偏好型时间偏好，这往往与作者认为顾客所具有的偏好相悖（例如，风险厌恶型时间偏好）。例如，众所周知，顾客强烈偏好先到先服务（FCFS）系统；在所有排队规则中，该系统的等待时间分布最集中。其次，非平凡的时间偏好会与其他政策变量的影响相互作用，使得难以单独识别其影响。线性等待时间意味着风险中性时间偏好，有助于剥离与非线性时间偏好所导致的影响正交的作用渠道。[5]请注意，买方离开队列后便不再承担等待成本。可以将这项成本理解为放弃外部选项所产生的机会成本，而该选项会带来 $c$的流量价值。外部选项可以是买方放弃的一项休闲活动，也可以是他能够立即获得的次优商品或服务。[6]我们广义地使用“队列”一词，不赋予其任何关于服务优先规则的含义，例如先到先服务。

住房管理局、人体器官移植组织、儿童收养机构和寄养机构，在双边市场中促成代理人与资源之间的匹配。[7]在这些环境中，如果无法或不宜立即匹配，双方的实体都可以进入队列等待。

**机制**。 一个典范概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ P)$ 描述了基本的到达过程。历史 $\omega \in \Omega$ 是两个相互独立的泊松过程的一种实现，它们分别追踪买方 $\{a_i(\omega)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和物品 $\{g_j(\omega)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 按到达顺序发生的到达时间。令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 为这些过程生成的自然滤过。一个**机制**，$\phi$，是一个从历史到结果的非前瞻性、[8] 可测映射。它规定哪些买方和物品进入队列、何时将其移出，以及如何进行匹配。[9]我们还施加一个效率条件，即**无分配延迟（NAD）**，这意味着机制不会同时留置买方和物品——对于我们考虑的目标函数而言，这一假设不失一般性。

机制 $\phi$ 在每个时刻 $t$产生结果 $y \in \mathcal{Y}$，指定当前匹配、准入队列的参与者集合，以及从队列中移除的参与者集合。随后，**结果过程**是由机制将历史映射为结果所诱导的随机过程 $\{y_t\}_{t\geq 0}$ 。从这个意义上说，结果过程是机制决策随时间推移的实现。进而，这会诱导出一个更粗略的**队列状态过程**，$\{\theta_t\}_{t\geq 0}$。状态 $\theta_t \in \Theta := \mathbb{Z}$ 表示等待参与者的数量： $\theta_t > 0$ 表示队列中的买方； $\theta_t < 0$ 表示库存中的物品； $\theta_t = 0$ 表示系统为空的空状态。若队列为空，即 $\theta_\tau = 0$，则时刻 $\tau$ 为**空时刻** 。

[7]尽管约会应用或零售平台等一些例子包含货币转移，但货币转移在促成具体匹配和分配决策方面的作用往往有限。例如，在 Tinder 这类约会应用中，定价主要用于区分用户，以决定其能否访问信息更充分的用户群体（例如，已经对该用户点过“喜欢”的用户）。相比之下，实际匹配遵循平台基于非转移效用的推荐算法。[8]也就是说，截至时间 $t$ 的映射必须适应滤过 $\mathcal{F}_t$。[9]虽然可以更详细地形式化指定结果空间及其诱导的随机过程，但为保持叙述流畅，我们在此省略这些形式化内容。此外，本综述所采用的方法依赖于一个松弛规划，因此不需要一般机制的全部数学工具。对于希望了解这些情境下动态机制和历史的完整形式化定义的读者，我们请其参阅 Che 和 Tercieux (即将出版。) 和Che 和 Choi (2025)。

在马尔可夫到达的情况下，每个空时刻之后系统都会以概率方式重新启动，因此设计者会反复面对同一个问题。因此，要求机制仅取决于上一个空时刻以来的历史，并不会造成损失。形式化地，令 $\omega|_t$ 表示时刻 $t$之后的历史，其中时间和参与者索引均重置。延续机制 $\phi|_t$ 是时刻 $t$之后的结果过程，此时同样重置时间和买方／物品索引。若对于每个空时刻 $\tau$，都有 $\phi|_\tau(\omega) = \phi(\omega|_\tau)$，则称机制为**再生的** 。将注意力限制在再生机制上并不失一般性。

如果某个机制是再生的，那么它所诱导的队列状态过程 $\{\theta_t\}$ 也具有再生性。这一类机制非常一般，将**马尔可夫机制**——即决策仅取决于当前状态 $\theta_t$——作为特例包含在内。不过，马尔可夫机制类往往不足以满足要求。例如，由于不考虑到达顺序，它无法实现先到先服务（FCFS）等标准规则。尽管在无记忆过程中，到达顺序与收益无关，但它们有助于维持动态激励，正如我们将看到的那样。

再生过程的一个显著特点是 $\{\theta_t\}$，如果它同时正常返——也就是说，返回空状态的期望时间有限——那么它存在唯一的平稳分布 $p \in \Delta(\mathbb{Z}$。该分布描述了系统的长期行为，因为队列状态的经验时间平均值几乎必然收敛于 $p$。[10] 因此，我们将重点关注能诱导出此类过程的**正常返再生机制（PRRM）**。这一限制不会损失一般性，因为非正常返机制会导致队列无界且期望成本无穷，而这绝非最优选择。[11]

**激励**。买方所涉及的激励问题取决于设计者采用的工具集合，包括可能的进入／退出控制、信息政策以及

[10]参见 Asmussen (2003)（第170页，定理 1.2）以及 Thorisson (1992年）；我们在A 节中汇集了一些相关结果。[11]非正常返的过程要么是 暂态 （队列长度发散），要么是 零常返（返回空状态的期望时间为无穷大）。这两种情况都会导致队列无限增长和成本无穷大，因此并非最优。第三种可能是，队列状态过程正常返，但永远不会到达空状态。此时，平稳分布仍然存在且唯一，我们的表述也依然成立。

服务优先级。对于双方（企业和买方），我们要求他们至少收支平衡，以便参与机制。对于买方而言，激励问题之所以出现，是因为平台无法强迫买方违背其意愿进入队列和／或留在队列中；因此，任何期望的相关行为都必须通过激励来促成。一个重要问题是，买方会如何形成关于其到达前历史的信息信念，尤其是当前队列状态。我们假设，买方关于 $\theta \in \Theta$ 的信念基于机制所诱导的平稳分布$\mathbf{p}$ 。对此的一种解释是，每位到达的买方都知道，该机制已经运行了足够长的时间，因此极限分布适用。[12] 请注意，这里买方除了知道自己“到达”之外，没有观察到任何其他信息。如果买方观察到队列状态或有关队列状态的其他信号，就会形成更精细的信念。

虽然我们会在讨论具体结果时更精确地处理这一问题，但在此我们只要求所选机制是**激励相容**的：也就是说，买方有激励遵循与 $\phi$相关的建议，使其构成贝叶斯纳什均衡。[13]我们用 $\Phi$ 表示所有激励相容 PRRM 的集合。

**问题陈述**。我们关注以下问题：

$$\max_{\mathbf{p}\in\Delta(\mathbb{Z})} \alpha\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k(\mu v - ck) + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}\lambda v\right] + (1-\alpha)\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \mu\pi + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}(\lambda\pi - \ell d)\right], \quad [\mathcal{P}_{\mathsf{NTU}}]$$

其中，$\mathbf{p} = (p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是由某个 $\phi \in \Phi$诱导的平稳分布。可以将该目标函数理解为买方福利与利润的加权和的长期时间平均，其中 $\alpha$ 是买方福利的权重。我通过 PRRM 的运用阐明了程序 $[\mathcal{P}_{\mathsf{NTU}}]$ 的相关性。除了 PRRM 之外，只要设计者采用的机制能够在队列状态 $\Theta$上诱导出一个过程，该程序就定义良好

[12]这一点已由Wolff （1982）正式证明。[13]我们模型中的代理人（即买方）身处动态环境，因此采用能够刻画序贯理性的精炼概念或许是合理的。此处我们在问题表述中使用贝叶斯纳什均衡，以扩大对最优机制的搜索范围。正如后文将会清楚说明的，在我们研究的每个具体情形中，要么所研究的均衡满足序贯理性（如第2.1节所示），要么信息政策使贝叶斯纳什均衡成为一个相关概念（如第2.2节所示）。

且该过程具有定义良好的平稳分布。

**基准：放松问题。** 在开始讨论具体结果之前，先从忽略激励约束（参与约束除外）的第一优基准入手是很有益的。具体而言，考虑

$$\max_{\mathbf{p}\in\Delta(\mathbb{Z})} \alpha\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k(\mu v - ck) + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}\lambda v\right] + (1-\alpha)\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k\mu\pi + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}(\lambda\pi - \ell d)\right], \quad [\mathcal{P}'_{\mathsf{NTU}}]$$

约束条件为

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k(\mu v - ck) + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}\lambda v \geq 0; \tag{$IR_B$}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k\mu\pi + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} p_{-\ell}(\lambda\pi - \ell d) \geq 0; \tag{$IR_S$}$$

$$\lambda p_k \geq \mu p_{k+1},\ \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}; \tag{$B_k$}$$

$$\mu p_{-\ell} \geq \lambda p_{-\ell-1},\ \forall \ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{$B_{-\ell}$}$$

前两个约束（$IR_B$）和（$IR_S$）是企业和买方的盈亏平衡约束，或称参与约束。约束（$B_k$）和（$B_{-\ell}$）是 $\mathbf{p}$ 平稳性所必需的条件。图1有助于解释（$B_k$）。固定任意一个 $k \geq 0$，考虑在一个短暂瞬间$dt > 0$，队列状态从 $\Theta_{\leq k} := \{j \in \mathbb{Z} : j \leq k\}$（图1中虚线左侧）转移到 $\Theta_{>k} := \Theta \setminus \Theta_{\leq k}$（虚线右侧）的概率。该概率至多为 $p_k\lambda dt + o(dt)$——即队列中有 $k$ 个买方且在 $dt > 0$期间又有一个买方到达的概率——之所以说“至多”，是因为新到达的买方可能加入队列，也可能不加入队列。同样，在一个短暂瞬间 $dt > 0$内，队列状态从 $\Theta_{>k}$ 转移到 $\Theta_{\leq k}$ 的概率至少为 $p_{k+1}\mu dt + o(dt)$——即队列中有 $k+1$ 个买方且在 $dt > 0$期间有一件商品到达，在这种情况下，一名买方带着一件商品离开。这是一个下界，因为我们假设了 NAD。在平稳分布下，后者不可能超过前者，这就解释了（$B_k$）。

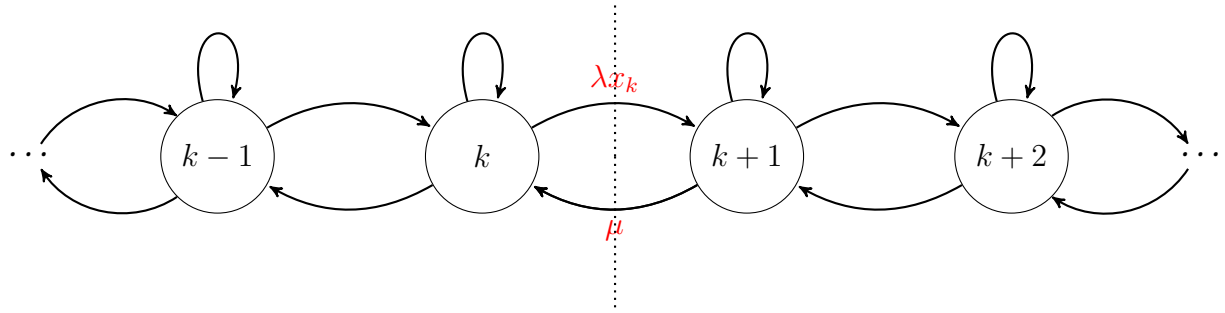



图1：平稳分布的平衡条件。

类似的条件解释了（$B_{-\ell}$）。任何$\mathbf{p}$满足（$B_k$）和（$B_{-\ell}$）的 $\mathbf{p}$，都可以通过以概率方式调节买方或商品进入队列的过程，实现为一个平稳分布。具体而言，给定（$B_k$）对于 $k \in \mathbb{N}$，可以选择一个经过适当校准的准入概率 $x_k \in (0,1]$,，使平衡条件以等式成立。[14]

注意，我们已将动态机制设计问题重新表述为一个静态线性规划（LP）问题，其中设计者直接选择平稳分布$\mathbf{p}$。这一方法有望使动态问题变得易于处理，也是本综述的主要方法论重点。我们可以将第一优刻画为具有截断结构：

**定理1.** 存在 $K^*, L^* \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，使得最优解 $\mathbf{p}$对于$[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$的支撑集为 $\{-L^*, ..., K^*\}$，并且对于所有满足$k < K - 1$ 的 $k \in \mathbb{N}$，($B_k$)均取等号；对于所有满足 $L^* - 1$的 $\ell \in \mathbb{N}$，($B_{-\ell}$)均取等号。对于 $d$ 足够大时，$L^* = 0$；对于 $c$ 足够大时，$K^* = 0$。

证明概要。 支撑集的区间结构$\mathbf{p}$ 显而易见。由于我们假设不存在分配延迟，因此支撑集包含 0，这使得 $\theta = 0$ 正常返。为说明$(B_k)$ 和$(B_{-\ell})$ 对 $k < K^* - 1$ 和 $\ell < L^* - 1$均为紧约束，将目标函数写作

$$\sum_k f(k)p_k + \sum_\ell g(\ell)p_{-\ell},$$

[14]严格来说，平稳分布必须满足任意 $\Theta' \subset \Theta$ 与 $\Theta \setminus \Theta'$ 之间的平衡条件。不过，这一点已由此处要求的条件所蕴含。

其中 $f(k) := (\alpha+\nu)(\mu v - ck) + (1-\alpha+\gamma)(\mu\pi)$，$g(\ell) := (\alpha+\nu)\lambda v + (1-\alpha+\gamma)(\lambda\pi - \ell d)$，而 $\nu$ 和 $\gamma$ 分别是约束 $(IR_B)$ 和 $(IR_S)$ 对应的（非负）拉格朗日乘子。注意到 $f(\cdot)$ 严格递减。因此，如果 $(B_k)$ 对某个 $k < K^* - 1$ 是松弛的，那么可以略微提高 $p_k$，并针对 $j \in \{k+1, ..., K^*\}$ 降低 $p_j$，而不违反任何约束。此项修改会严格提高目标函数。对 $j = -\ell$ 也可作类似论证，其中 $\ell < L^* - 1$。详情请参见 Che 和 Tercieux（即将出版）。

□

有约束力的 $(B_k)$ 意味着，当买方到达一个有 $k$ 名买方的队列时，必须以概率1进入队列。因此，定理1 中的最优解可以通过**临界值策略** 来实现：仅当买方（商品）数量不超过某个临界值 $K^* - 1$（分别为 $L^* - 1$）时，才允许其进入队列；一旦达到 $K^*$（分别为 $L^*$），便拒绝其进入。[15] 加入队列的买方会被要求留在队列中，直到收到物品/服务。当然，如何激励买方遵守这些指示，以及能否激励他们遵守，都是下文将要讨论的关键问题。

直观而言，临界值策略是最优的，因为虽然储存一名额外买方（分别为一件额外商品）可以带来应对未来商品（分别为买方）到达的期权价值，但随着储存的买方（分别为商品）越来越多，这一期权的价值会逐渐降低。因此，如果队列中有 $k$ 名买方时，接纳一名新买方是有利可图的，那么队列中有 $j < k$ 名买方时，接纳新买方也同样有利可图。

## 2.1 完全信息分析

Naor(1969年) 开创了理性排队理论，该理论研究排队环境中代理人（在我们的语境中是买方）所面临的激励；综述请参见 Hassin 和 Haviv(2003)。这方面的许多文献都考虑这样一种情形：买方拥有关于队列状态的完全信息；也就是说，他们到达队列时，会观察到队列中已有的买方人数。在许多现代场景中，这一假设并不那么令人信服，例如服务呼叫中心、肾脏交换，甚至数字

[15] 可能会对 $\theta = K - 1$ (resp $\ell = L^* - 1$) 实施部分配给，只要 $(IR_B)$ (resp. $(IR_S)$) 受到约束；否则，不实施配给。

平台，其中队列信息可能会被隐瞒，而且通常确实会对代理人隐瞒。不过，在一些特定的实体队列场景中，这仍然具有现实意义，例如杂货店结账处和急诊室候诊区。下文中，我们假设 $d = \infty$，这符合服务队列场景的实际情况，也为所有作者所考虑。同时，即使 $d < \infty$，下文的结果在定性上仍然成立。

### 2.1.1 先到先服务下的过度排队。

Naor（1969年）考虑了福利目标函数 $\alpha = 1$，并研究了观察队列状态的买方的排队激励。队列规则为先到先服务。

首先，假设一位买方第一个到达空队列。他可以立即开始接受服务，平均需要 $1/\mu$ 才能完成服务（因为服务完成以 $\mu$的泊松到达率发生）。当且仅当 $v > c/\mu$ 时，买方才会加入队列。

接下来，假设一位买方到达时，队列中已经有 $k-1$ 位买方。根据先到先服务规则，他只有在前面的 $k-1$ 位买方都接受服务后才能开始接受服务，每位买方的服务时间均服从均值为 $1/\mu$的指数分布。因此，他的总等待时间（包括服务时间）服从均值为 $k/\mu$的埃尔朗分布。[16] 因此，当且仅当 $v \geq ck/\mu$时，他才愿意加入队列。请注意，买方加入队列后，只会在优先级顺序中向前移动，因此他的剩余平均等待时间只会减少，这意味着他会愿意留在队列中直至获得服务。

由此可知，均衡将呈现定理1所规定的截断结构，其中最大队列长度由（几乎）无差异于加入队列的边际买家决定；或者

$$K_{\mathsf{FCFS}} := \left\lfloor \mu \frac{v}{c} \right\rfloor = \max \left\{ k : v - c\frac{k}{\mu} \geq 0 \right\}.$$

关键问题是：它如何与最优上限 $K_{FCFS}$ 进行比较 $K^*$？要回答这个问题，请回想一下，我们评估的是平稳分布下的福利。假设

[16]参数为（$k$，$\mu$）的埃尔朗分布，是 $k$ 个相互独立且均值为 $1/\mu$的指数分布随机变量之和：参见 https://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_分布。

代理人排队至某个最大值 $K$。要求平衡条件（$B_k$）对于$k = 1$，.....， $K$取等号时，我们观察到

$$p_k^K = \frac{\lambda}{\mu} p_{k-1}^K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_{k-2} = ... = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0^K = \rho^k p_0^K,$$

其中 $\rho := \lambda/\mu$ 是“负荷因子”。利用 $\sum_{k=0}^K p_k^K = 1$，我们得到

$$p_k^K = \frac{\rho^k}{1 + \rho + ... + \rho^K}, \forall k = 0, ..., K.$$

值得注意的是，对于每个 $k \leq K$， $p_k^K$会随 $K$ 增加而递减；也就是说，愿意排队的买方越多，系统处于较短队列状态的时间就越少。这体现了边际买家带来的负外部性：买方加入队列会增加后续买方所面临的队列长度及其等待时间。这种拥堵外部性的存在得出以下结论：

**定理 2.** 假设 $d = \infty$ 和 $\alpha = 1$。我们有 $K^* \leq K_{\text{FCFS}}$，该不等式通常是严格的；并且先到先服务下的队列长度在一阶随机占优意义上大于最优解下的队列长度。

证明。 第二部分由第一部分推出，因为给定 $K^* \leq K_{\text{FCFS}}$,

$$\sum_{j=0}^k p_j^{K_{\text{FCFS}}} \leq \sum_{j=0}^k p_j^{K^*}, \forall k.$$

为证明第一部分，回想一下，我们可以将目标函数写作 $\sum_{k=0}^K p_k^K f(k)$，其中$f(k)$ $= \mu v - kc$。（回想一下 $\alpha = 1$ 和 $L^* = 0$，因为 $d = \infty$。）现在注意，对所有 $k \leq K_{\text{FCFS}}$， $f(k) \geq 0$。考虑任意一个 $K > K_{\text{FCFS}}$。由于 $K_{\text{FCFS}} := \lfloor \mu \frac{v}{c} \rfloor$，对于每个 $j = K_{\text{FCFS}} + 1, ...,$ $K$， $f(j) < 0$，并且对于每个 $k \leq K_{\text{FCFS}}$， $p_k^K < p_k^{K_{\text{FCFS}}}$。因此，只要 $K > K_{\text{FCFS}}$，就有 $\sum_{k=1}^K p_k^K f(k) < \sum_{k=1}^{K_{\text{FCFS}}} p_k^{K_{\text{FCFS}}} f(k)$。由此我们得出$K^* \leq K_{\text{FCFS}}$。

□

该 在标准教科书分析中可以清楚地看到市场的直觉 t.

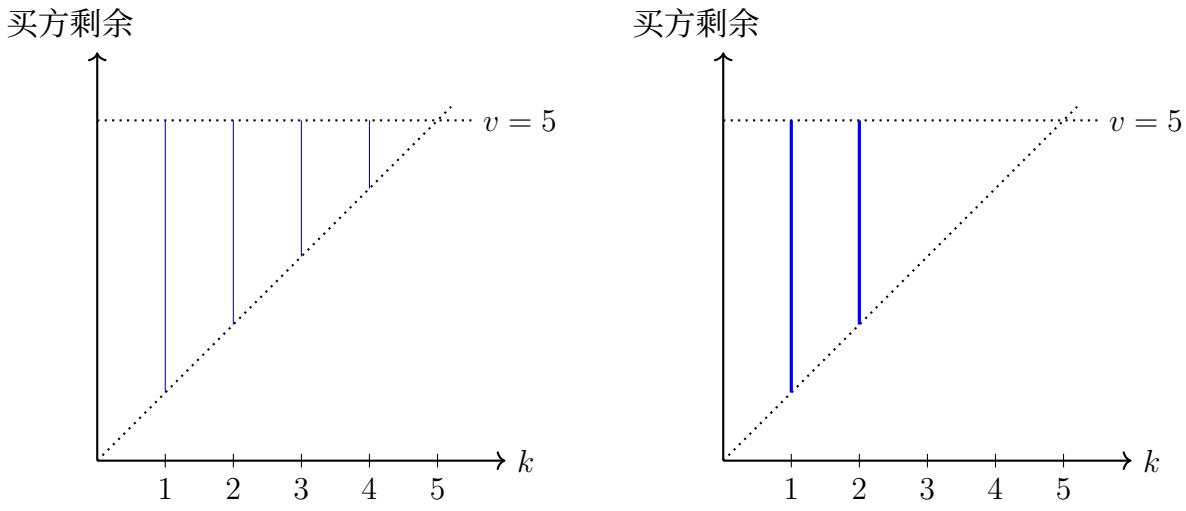
图2 比较了先到先服务与最优解（其中 $\alpha = 1$）下的剩余，该最优解由 定理1确定；当 $v = 5$， $c = 1$，且 $\rho = \lambda = \mu = 1$ 时。在每种情况下，水平虚线表示实现的价值 $\mu v = 5$，而45度虚线表示每种状态下与等待相关的社会成本 $k$。

图(a)展示了先到先服务，其中 $K_{\text{FCFS}} = v/c = 5$，且每个状态 $k$ 下的社会剩余 $\mu v - ck = 5 - k$ 只是价值与成本曲线之差。根据标准教科书推理，人们可能会得出先到先服务在社会层面是最优的结论，因为它通过选择 $K$ 为具有非负剩余的最高 $k$，耗尽了所有可能产生剩余的机会。然而，这种逻辑忽略了“集约边际”：如前所述，随着 $K$提高，每个较低的边际内状态$k < K$（其剩余更高）出现的可能性都会降低。通过降低队列上限 $K$，集约边际得到改善，从而福利可能增加。

在该例中，当 $K_{\text{FCFS}} = 5$、 $p_1^{K_{\text{FCFS}}} = \ldots = p_5^{K_{\text{FCFS}}} = 1/6$时，福利为：$\sum_k p_k^K$（$\mu v - ck$） $= (4 + 3 + 2 + 1)/6 = 5/3$。相比之下，在 $K^* = 2$下的最优结果中，边际内状态出现的可能性提高到 $p_1^{K^*} = p_2^{K^*} = 1/3$，福利也上升到 $(4 + 3)/3 = 7/3$。在 $K^*$ 下，状态 $k = 1$ 和 $k = 2$出现可能性的增加，在图(b)中表现为比图(a)更粗的线条。

### 2.1.2 后到先服务能否解围?

Hassin (1985年) 有一个有趣的发现：后到先服务（LCFS）能够恢复定理1所确定的福利最优结果。其思路如下。采用 LCFS 时，只要买方可以选择稍后离开队列（我们在此假设买方拥有这一选择），新到达的买方就始终有严格的动机加入队列。因此，每位新到达的买方都会加入队列。队列中最早到达的买方，我们称之为首位在队者，将最后接受服务，因此最愿意在队列过长时离开。换言之，LCFS 中的最大队列长度实际上由首位在队者是否决定离开队列来确定。关键在于 FCFS 与 LCFS 存在以下差异。




(a) 先到先服务下的剩余。 (b) $K^* = 2$下的剩余。

图2：买方剩余的比较。

Note: $v = 5, c = 1$, and $\rho = \lambda = \mu = 1$.

在先到先服务中，当买方在 $k = K_{\text{FCFS}} - 1$时加入队列，这一决策所产生的部分社会成本会转嫁给之后到达、因而需要等待更久的买方；[17]然而，当新增进入使队列长度从 $K^*$ 增加到 $K^* + 1$时，首位在队者若决定留下，除了他自己，没有其他人承担这一社会成本。由此可见，当且仅当新增进入导致队列长度达到 $K^* + 1$时，首位在队者才会离开队列。

尽管这一逻辑很有说服力，Hassin(1985年）并未提供正式的分析或证明。这里给出一个简单的分析，其证明以及大部分证明都见附录。

**定理 3**。 假设 $d = \infty$ 和 $\alpha = 1$。后到先服务实现了具有 $K_{\text{LCFS}} = K^*$的$[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$最优解。

尽管这种分析有助于洞悉并识别先到先服务下效率低下的根源，但后到先服务在实践中的可行性令人怀疑。首先，系统可能被钻空子：一旦代理人失去了最后到达者的身份，就可能离开队列后重新加入，从而重新获得这一

[17]即使在 $k = K_{\text{FCFS}}$时没有新买方加入队列，这种外部性仍然存在，因为队列长度最终会严格低于 $K_{\text{FCFS}}$，而新买方到达时必须等待更久，因为边际买家决定加入队列。

身份及其所带来的优先级。设计者或许可以通过禁止重新加入来解决这个问题，但这要求设计者核实代理人的身份，而这可能成本高昂，或并非设计者所愿。其次，分析和结果都隐含地假设了“抢占”，即服务台可以在新买方到达时，从正在服务的买方转而服务新买方，甚至可能在前一位买方的服务尚未完成时就这样做。鉴于指数服务过程具有无记忆性，这不会影响收益；但在实际中，服务中断可能造成生产率损失。先到先服务不会遭受此类损失，而后到先服务则会。最后，排队心理学明确指出，当到达顺序未得到尊重时，更不用说被颠倒时，人们会感到强烈的不满；参见Larson （1987年）。

### 2.1.3 先到先服务下的排队不足

Leshno (2022）考察了一种情形：分配商品的需求过于旺盛，以至于代理人的等待成本不构成社会成本（前提是商品一旦可用，便会立即分配给某人）。也就是说，在他的模型中，必须等待的人数总量不会因服务对象不同而改变。因此，目标是让他们继续等待，直到匹配价值较高的商品变得可用，无论这需要多长时间。

他着重研究优先级规则如何作为一种工具，最大限度地激励人们等待匹配到的物品。在我们的框架中，只需假设 $d = \infty$ 和 $\alpha = 0$，就能以同构方式刻画不同优先级规则之间的主要权衡。正如 Leshno (2022）中的规划者一样，我们的设计者在 $\alpha = 0$ 时，希望最大限度地激励买方等待，尽量降低“买方缺货”的风险，或在商品到达时最大限度地提高未来匹配的期权价值。

在这种情况下，以下条件之一成立： $K^* = \infty$（如果 $\mu > \lambda$），或者 $(IR_B)$ 在 $K^*$ 处起约束作用。也就是说，如果 $K^* < \infty$，那么

$$\sum_{k=1}^{K^*} p_k^{K^*}(\mu v - kc) \approx 0, \tag{1}$$

其中，我们用 $\approx$ 表示 $K^*$ 是使左侧非正的所有 $K$ 取值中最小的一个。[18] 条件(1) 意味着

$$K^* \geq \mu\frac{v}{c} \geq K_{\text{FCFS}},$$

其中，第一个不等式在 $K^* > 1$ 时严格成立，此时先到先服务并非最优。不同于 Naor (1969年，现在的问题是买方排队过少，而不是过多。其差异源于目标函数：$\alpha = 1$ 相较于 $\alpha = 0$。

Leshno (2022）的主要结果是，随机顺序服务（SIRO）优于先到先服务。随机顺序服务在排队的买方中等概率地分配商品。根据这一规则，加入较短队列的利润仍高于加入较长队列，因此进入决策仍具有截断结构：存在某个 $K_{\text{SIRO}}$ ，使得当且仅当 $k < K_{\text{SIRO}}$ 时，买方才进入队列；进入队列的买方会一直等待，直到收到商品。

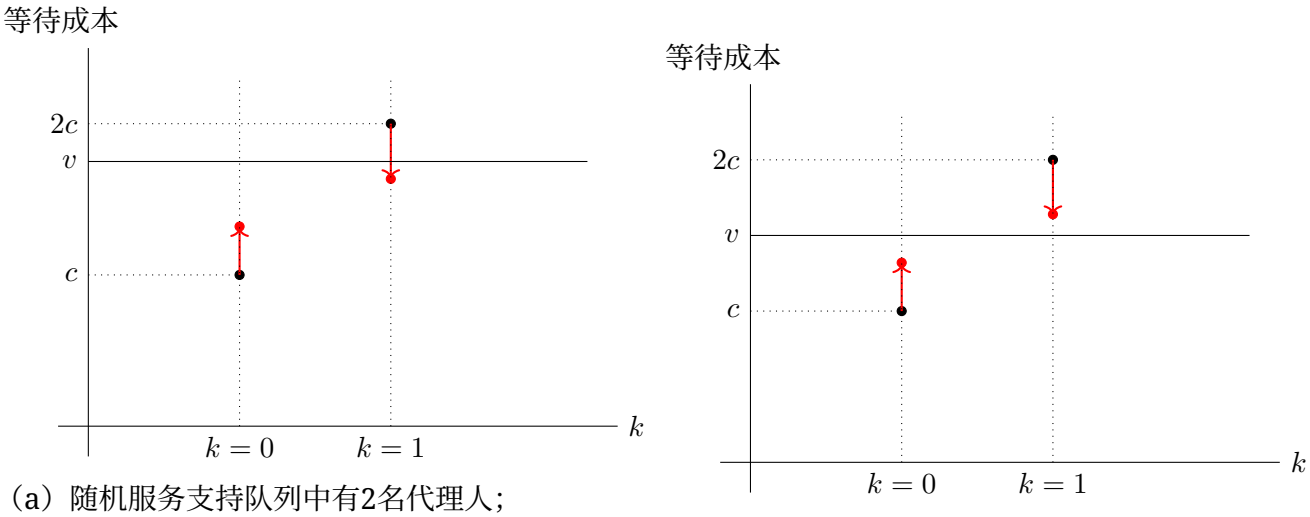
**定理4**。 假设 $d = \infty$ 且 $\alpha = 0$。则 $K_{\text{FCFS}} \leq K_{\text{SIRO}} \leq K^*$，与先到先服务相比，随机顺序服务为设计者实现的目标函数值弱更高（分别地，与最优解相比为弱更低）。

定理4背后的直觉可通过以下示例清楚说明（改编自Che 和 Tercieux(即将出版。））。假设 $\mu = \lambda = 1$ 且 $\frac{3}{2}c \leq v < 2c$。前一个不等式意味着 $K^* = 2$，即最优截断政策允许队列中最多有两名买方，[19] 而后一条件的含义将很快明了。

图3绘出了在先到先服务下，加入空队列的买方（$k = 0$）和加入已有一位买方的队列的买方（$k = 1$）的预期等待成本。在先到先服务下，若 $1/\mu = 1$ ，买方预计需要等待 $k = 0$ 单位时间才能获得商品；若 $2/\mu = 2$ ，则需要等待$k = 1$单位时间。相应的等待成本分别为 $c$ 和 $2c$。若 $v < 2c$，如图所示

[18]更准确地说，状态 $k = K^* - 1$ 下的进入配给经过校准，恰好满足该等式。采用配给时选定的 $K^*$ ，将恰好是使左侧非正的那些 $K$ 中的最小值。[19]根据利特尔法则，可以证明，给定队列中有一名买方且 $K = 2$ 时，事前预期等待时间等于：$\frac{p_1^2+2p_2^2}{\lambda(p_0^2+p_1^2)} = 3/2$，因为给定 $\mu = \lambda = 1$时 $p_0^2 = p_1^2 = p_2^2 = 1/3$。

那么第二位买方将拒绝加入队列，因此先到先服务最多只支撑队列中有一位买方。




（a）随机服务支持队列中有2名代理人；先到先服务做不到。

（b）随机服务无法支持2名代理人。

图3：完全信息下排队规则的比较注：黑点和红点分别表示先到先服务和随机服务下的预期等待成本。

请注意，处于状态 $k = 0$的买方到达时可获得严格为正的剩余。如果能将这种“松弛”激励转移给处于状态 $k = 1$的买方，后者或许就会受到激励而加入队列。这正是随机服务（SIRO）通过“拉平”等待成本曲线所实现的效果。与先到先服务（FCFS）相比，随机服务通过随机分配服务优先级，提高了处于状态 $k = 1$ 的买方的优先级，代价是降低处于状态 $k = 0$的买方的优先级。

请注意，即使在随机服务（SIRO）下，等待成本曲线也并非完全平坦。[20] 如果 $v$ 足够高（图(a)），随机服务（SIRO）就能恢复最优解。然而，如果 $v$ 较低（图(b)），尤其是当 $v < \frac{5}{3}c$时，随机服务（SIRO）无法支撑两位买方进入队列；参见图3中的图(b)。

通过进一步将优先级转移给第二位到达者，可以彻底拉平等待成本曲线——这种规则被Leshno（2019）称为负载无关的预期等待（LIEW）。该规则通过以下方式使排队激励最大化：

[20]平均等待时间为 $4/3$ 如果 $k = 0$ 且 $5/3$ 如果 $k = 1$；参见定理4的证明中的方程。

使在状态 $k=0$ 加入的买方与在状态 $k=1$加入的买方的等待时间相等。在该示例中，只要 $v$ 不小于$1.5c$，LIEW就能在队列中支持两名代理人，其中 $K=2$表示该队列的条件平均等待成本。也就是说，LIEW可以达到$[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$ 的最优解（其中 $\alpha=0$）。

总之，当队列完全可见时，先到先服务并非最优，且不如随机服务和 LIEW 等规则。然而，如果设计者能够控制信息，那么排队规则对于加入队列的激励便无关紧要。假设设计者只告知买方 $k\in\{0,1\}$ （“建议加入”）或不建议加入。那么，买方到达时无法区分 $k=0$ 和 $k=1$ ；于是，他对 $k=0$ 和 $k=1$形成相同的信念，因此面临的期望等待时间为 1.5，与 LIEW 一样。换言之，信息政策可以取代 LIEW。在这种（最优）信息政策下，平均等待时间——因而加入队列的激励——在所有排队规则下都相同，因此无法据此区分这些规则。

与此同时，LIEW 可能会在买方加入队列后，对其产生病态激励。与后到先服务一样，买方加入队列后会发现，随着时间推移，自己的剩余期望等待时间不断增加。这是因为，为了使在状态 $k=0$ 到达的买方与在状态 $k=1$到达的买方等待时间相等，LIEW 必须在第二位买方到达时降低前一位买方的优先级，使其处境类似于在先到先服务规则下于 $k=1$ 到达的买方。这意味着，第二位买方加入并夺走其优先级后，前一位买方会受到诱惑而退出队列。因此，在完全信息下，LIEW（以及任何其他规则）都无法实现最优结果。

## 2.2 信息设计与先到先服务的最优性

虽然完全信息假设在某些经典情境中是现实的，但现代企业，尤其是平台，确实能够大幅控制买方可以获取哪些信息。呼叫中心是排队系统的典型例子，它们往往

不会向客户提供准确的等待时长信息。公共住房系统是Leshno (2022) 中的一个启发性例子，它们往往不让符合资格的申请者知晓自己在候补名单中的位置。数字平台通过移动端或网页界面与客户互动，对信息的控制力更强。Uber 或 Lyft 等网约车平台会告知客户已匹配司机的位置，但不会透露其他潜在匹配对象，也不允许客户从中选择。

信息设计赋予设计者额外的权力来控制买方激励。回想一下，在完全信息下，从消费者剩余的角度看，先到先服务为排队提供了过强的激励（$\alpha = 1$）；但从生产者剩余的角度看，激励则不足（$\alpha = 0$）。正如我们在上一个例子中已经暗示的那样，信息设计有助于克服后一个问题。但若无额外工具，仅靠信息设计无法激励相容地实现最优解 $[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$。

Lingenbrink 和 Iyer(2019) 与 Anunrojwong、Iyer 和 Manshadi (2020) 研究了设计者在先到先服务（FCFS）机制下如何进行信息设计，以最大化消费者福利（即 $\alpha = 1$）。他们证明，最优信息只涉及两个信号：当前队列状态是“$k < K$”或“$k = K$”，其中 $K \in \mathbb{N}$；前一个信号旨在鼓励买方加入队列，后一个则旨在劝阻买方加入队列。这一结果揭示了经济学中著名的“民间”定理：机制设计者不应向代理人透露超出其所建议行动所需的信息，其简单逻辑是，任何会导致相同行动的不同信号都可以合并为一个信号，而不违反任何激励约束。[21] 然而，在没有准入控制的情况下，除非 $k = K$ $K \geq K_{\text{FCFS}}$，否则这一策略本身无法阻止买方在收到“$k = K$”信号时加入队列。Anunrojwong、Iyer 和 Manshadi (2020) 表明，如果存在另一类买方，他们无需承担等待成本（或外部选项极低），并且无论当前队列长度如何都愿意加入队列，那么就可以实施上限 ^^ $K < K_{\text{FCFS}}$ （其中 $K$ 可能等于 $K^*$）。此时，信号 ^“$k \geq K$”表示队列中已有远多于 $K_{\text{FCFS}}$ 名买方，

[21] 由于在每个信号下，期望采取的行动都是激励相容的，因此在多个信号下取平均后也必然如此，进而在合并后的信号下也成立。

从而使成本为 $c > 0$ 的买方在得知 ˆ“$k \geq K$”后不加入队列符合激励相容性。

当设计者能够控制进入队列时，这个问题便不会出现。形式上，设计者可以通过拒绝为其希望排除在外的买方提供服务来控制准入。在实践中，呼叫中心常通过播放重复的背景音来劝阻人们进入，这种做法往往很有效。Che 和 Tercieux(forth.) 考察了能够控制三类工具的设计者：(i)准入控制(可以拒绝买方进入队列，甚至将其移出队列)；(ii)服务优先级分配(或队列规则)；以及 (iii) 信息设计。他们考察买方不仅是否愿意加入队列，还考察在机制建议其留在队列时，买方是否愿意继续排队。文献在很大程度上忽视了后一种激励问题。[22] Che 和 Tercieux(forth.) 得出了以下结果：

**定理5**。 在最优信息下，$[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$ 的最优解可以由先到先服务机制实施。

定理5 指出，忽略激励问题的松弛规划 $[\mathcal{P}'_{\text{非转移效用}}]$ 的最优解，可以通过以下方式实施：采用准入控制，在达到 $K^*$ 时阻止买方进入队列（并可在 $k = K^* - 1$处进行配给）；采用信息政策，在 $k < K^*$时发布加入队列的建议（并可在 $k = K^* - 1$处进行配给）；以及采用先到先服务的优先级规则。

当 $\alpha \in [0, 1]$足够大时，问题在于出现了 Naor（Naor(1969年）所说的队列过长问题；只需阻止买方加入超过$K^*$的队列，即可解决这一问题。[23] 困难的情况是， $\alpha$ 过低，导致买方缺乏足够的排队激励，正如前文所见。我们已经看到，给定$(IR_B)$，最优信息政策会为买方提供足够的激励，使其加入队列，而不论优先级如何

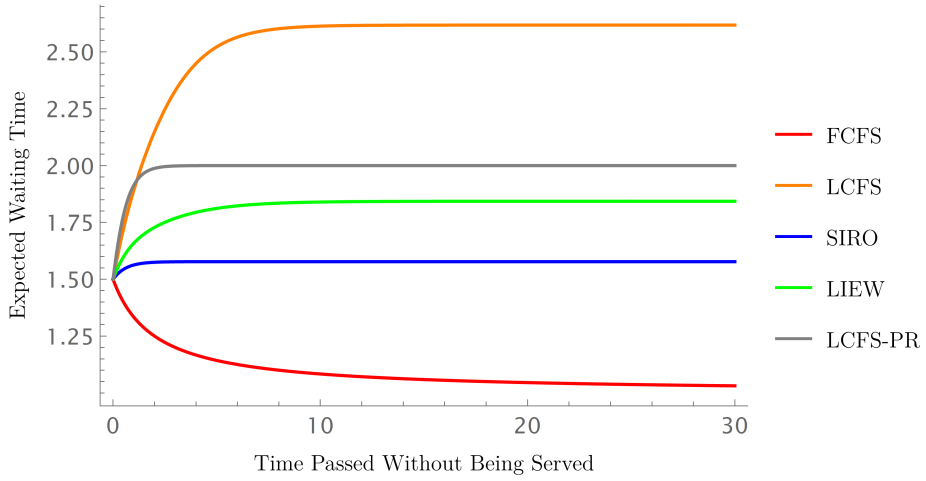
[22]例外是 Hassin （1985年），在这种情况下，首位在队者决定离开队列，对维持福利最大化起着关键作用。[23]等价地，正如下文所述，最优解 $K^*$ 也可以通过对真实商品（其价值为 $v$）和虚无商品进行抽签来实现，并经过校准以诱导 $K^*$。如果买方拒绝虚无商品，就会失去其优先级。

规则。然而，他们加入队列后，要为其提供留在队列中的激励并不容易，而这正是最优临界值策略所要求的。

举例来说，考虑前面提到的例子，其中 $d = \infty$，$v = 1.5c$，以及 $\mu = \lambda = 1$。我们注意到 $K^* = 2$，此时 $(IR_B)$ 处于约束绑定状态。在最优信息下，任何获邀加入队列的到达买方都预期要等待1.5个时间单位，假设他永远不会离开队列。鉴于 $(IR_B)$，只要 $k < K^* = 2$，无论采用哪种优先级规则，这段等待时间都会激励买方加入队列；精确论证见 D节 。

然而，买方加入队列后是否有动力留在队列中，取决于优先级规则，因此不一定成立。 图4绘出了在队列中等待了 时间后 $t \geq 0$ 的买方的平均剩余等待时间。我们考察五种标准规则：先到先服务、随机服务、LIEW、后到先服务和后到先服务-抢占，其中后到先服务-抢占是带有“抢占”的后到先服务规则；也就是说，在新代理人进入队列时，已有代理人会离开。

图4：不同排队规则下的期望等待时间。




首先请注意，对于所有优先级规则，如下文所示，在 $t = 0$ 时，平均等待时间为1.5。由于 $v = 1.5c$，买方因此对加入队列持无差异态度（假设他们会一直等待，直到获得服务）。然而，一旦加入队列，随着其在队列中的时间 $t$ 增加，不同规则下的平均剩余等待时间便会出现分化：在先到先服务规则下会减少，而在其他所有排队规则下则会增加。因此，在先到先服务规则下，代理人会有激励一直等待，直到获得服务；但在其他每条规则下，除非能立即获得服务，否则他们会放弃排队

。这一差异意味着，先到先服务优于其他排队规则。[24]

在先到先服务规则下，随着更早到达的顾客离开队列，买方的服务优先级会随时间提高。因此，在给定初始队列长度的条件下，预期等待时间会随时间缩短，平均剩余等待时间也会逐渐下降。不过，也存在一种相反的作用。由于代理人在加入队列时并不知道 $k = 0$ 还是 $k = 1$ ，随着时间推移，他对初始队列长度的信念也会更新。基于这一点，他会随着时间推移变得悲观，因为自己仍在队列中这一事实表明，他加入队列时很可能低估了队列的初始长度。事实证明，在 $M/M/1$模型中，好消息效应超过了坏消息效应，而且这一结论具有更广泛的适用性（参见Che 和 Tercieux(forth.)).

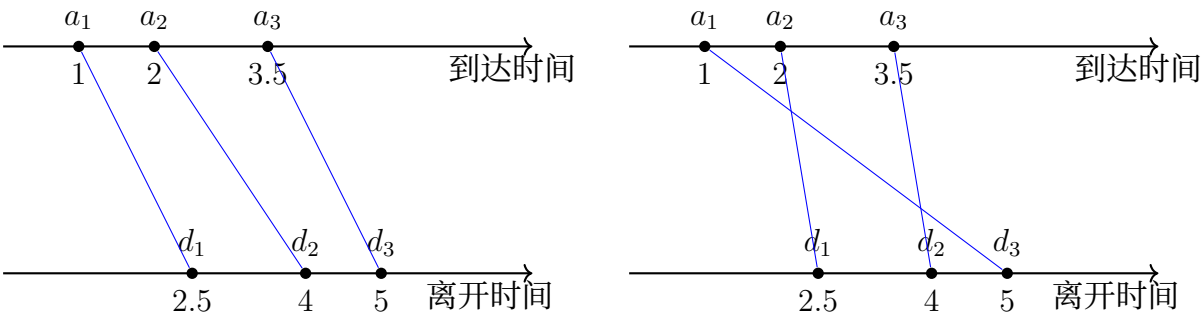
在其他规则下，平均剩余等待时间会增加，因为到达顺序中的“资历”不像在先到先服务规则下那样能带来优先权。后到先服务和 LIEW 下，这一点最为明显。随着时间推移，会有新到达顾客出现，夺走全部或部分优先权，从而使一个人的剩余等待时间不断增加。随机服务也存在同样的问题，只是程度较轻。在随机服务下，一个人的优先级不会随时间改善；起作用的只有队列长度及其对此的信念。随着时间推移，他会因此变得更加悲观，因为他认为队列中的买方比自己最初设想的更多，剩余等待时间也随之增加。

从更根本的层面看，上述排队规则之所以存在差异，可以归因于它们导致了不同的等待时间分布，尽管它们的均值相同。具体而言，在所有排队规则中，先到先服务的等待时间分布最为“公平”，也就是离散程度最低；参见Shanthikumar和 Sumita(1987年)，他们在M/M/1设定下证明了这一结果。这意味着，与其他规则相比，在先到先服务下，等待时间特别短或特别长的情况都很少见。

[24]图中表明，在其他每一种排队规则下，代理人都不可能以加入队列、最多排到第二位并一直等到获得服务的方式形成均衡。均衡中会发生什么尚不明确；他们可能会随机选择离开队列，和/或过度进入队列，并计划不久后离开。无论如何，Che 和 Tercieux(等。) 表明，对于某些 $\lambda$值，设计者的处境会比采用先到先服务时更差。

从任意一个已实现的周期内到达时间和离开时间的样本路径中，都很容易看出这一点。图5展示了一条任意样本路径。[25] 优先级规则对应于到达时间与离开时间之间的二分匹配。在该 $M/M/1$模型中，先到的买方在先到先服务规则下先离开；这意味着相应二分匹配中的边不会彼此“交叉”；见图(a)。相比之下，任何有别于先到先服务的规则（如后到先服务或随机服务）所对应的匹配都包含交叉边，如图(b)所示。这种差异意味着先到先服务下等待时间的离散程度较低；在这个例子中，图(a)中的等待时间为1。5，1。5和2，而图(b)中的等待时间为0。5，0。5和4，且两者的均值相同 $5/3$。[26]

等待时间分布如何影响买方对剩余等待时间的信念？为研究这一问题，我们可以分两步构造一个概率空间以及买方的信念：(i) 首先根据指数分布抽取一条到达时间和离开时间的样本路径（例如 图5），然后 (ii) 将买方的到达时间指定为若干到达时间中的一个（例如在 $a_1$、 $a_2$ 或 $a_3$中）。[27] 随后，可以将两种排队规则下的样本路径“耦合”起来，例如 (a) 和 (b)。




(a) 先到先服务规则。

（b）后到先服务或随机服务。

图5：样本路径中排队规则的比较。

请回想，我们考虑的是一种最优信息策略，因此买方加入队列时及之后都无法观察队列状态。假设买方形成了他的信念

[25]在一个周期内，任何样本路径的到达次数都必须与离开次数相同。[26]一般而言，由于每当交换一对交叉边以减少交叉时，等待时间分布都会发生均值保持收缩；而且，从任意匹配出发，总可以反复进行这种交换，最终得到先到先服务下的匹配，因此，先到先服务下的等待时间是任何排队规则下等待时间的均值保持收缩。[27]在稳态下，某人到达或离开的“日历”时间不包含任何信息。

对于他认为可能发生的每条任意样本路径 (i)，例如示例中描绘的那条路径，(ii) 上的[28] 在队列中等待了 $t < 0.5$ 之后，在给定所示样本路径的条件下，剩余的期望等待时间在 (a) 和 (b) 中均为 $(5/3) - t$。但在队列中等待了 $t \in [0.5, 1.5$之后，两种规则下的剩余等待时间便会不同：在 (a) 中为 $(5/3) - t$，而在 (b) 中为 $4 - t$，因为买方推断自己的到达时间为 $a_1$。[29]

直观地说，等待时间越分散，人们对自己的剩余等待时间就越悲观，从而削弱动态激励。随着时间推移，一个人仍然留在队列中这一事实表明，他“错过了早先的机会”，因此剩余等待时间会更长。先到先服务的公平性缓解了这一问题，使设计者能够实现最优结果。

## 2.3 大市场极限

假设随着 $\lambda$，$\mu \to \infty$ 市场变得稠密，同时保持平衡参数 $\rho = \lambda/\mu$不变。这类市场的极限可用一个“流体”模型来描述，其中物品的质量为单位质量，且买方以质量 $\rho = \lambda/\mu$ 在每个时刻到达。[30]

在这类大市场中，到达过程的随机性以及设计者面临的任何不确定性都会消失。因此，持有买方或物品队列的根本原因不复存在。然而，Naor (1969年)所指出的激励问题却表现得尤为突出。回想一下，在完全信息、没有准入控制且采用先到先服务的情况下，买方会排队，直到达到水平 $K_{\mathsf{FCFS}} = \left\lfloor \frac{v}{c}\mu \right\rfloor$.

–

让我们聚焦于有趣的情形：$\rho \geq 1$。[31] 在这种情况下，始终存在

[28]以下解释以每条样本路径为条件。在原问题中，买方无法观察实际实现的样本路径，因此也会根据已流逝的时间更新对样本路径的信念。从这个意义上说，此处的解释旨在帮助理解其中起作用的机制，而非提供精确证明；精确证明会明确研究基于队列位置的信念演变，详见D节。[29]对于 $t \in [1.5, 3]$，那么剩余等待时间在 (a) 中为 $3 - t$，而且为 $4 - t$。[30]“流体模型”（或“流体极限”）是排队论、运筹学和随机网络研究中的标准术语，用于描述系统的确定性近似：将离散的到达和离开平滑为连续流。[31]如果 $\rho < 1$，则最大队列长度始终不会构成约束，因为 $\lambda$，$\mu \to \infty$，超额供给以概率 1 吸收需求，且等待时间依概率收敛于零。

超额需求，所有买方都排队等候至 $K_{\text{FCFS}}$ 水平。在极限情况下，以 $\mu$归一化的平均队列长度，以及每位买方的等待时间，分别依概率收敛于 $\rho_c^v$ 和$^v_c$。简言之，所有买方都过度排队，程度之高使他们最终没有任何剩余。

定理5 在这种大市场设定下仍然成立。然而，排队规则/优先级规则变得无关紧要，因为等待时间的分布变成了退化分布。回想 $\rho \geq 1$，通过设定 $K^* = (1-\epsilon)\mu$，即使 $\epsilon > 0$任意小，也能确保在极限下几乎所有商品都分配给延迟趋于零的买方。其思路是，此处的小 $\epsilon$会形成超额供给状态，并消除获准进入队列者的等待延迟。特别地，在流体模型中，我们有如下结论。

**定理6.** 考虑一个连续统经济，其中每个时刻都有单位质量的商品和质量为$\rho \geq 1$ 的买方到达。

(i) 在 Naor (1969年) 的设定下，假设信息完全、采用先到先服务且不控制准入，则所有买方都要等待 $v/c$ 时间才能得到服务。每单位时间的总剩余为0。

（ii）最优机制将（几乎）所有商品分配给一支买方队列，并将队列长度限制在不会造成延迟的范围内。

除了设置具有约束力的队列上限之外，还可以通过抽签来实施最优政策（ii）：在完全信息下采用先到先服务，买方以概率（$1/\rho$） $-\epsilon$获得一单位商品。

## 2.4 对价值异质的买方进行筛选

上文介绍的大市场极限为研究如何利用候补名单/排队，将商品分配给具有异质价值的买方提供了一个便捷的切入点。Ashlagi、Monachou 和 Nikzad (2025）、Arnosti 和 Shi(2020）以及Castro、Ma、Nazerzadeh 和 Yan (2021）研究了一种流体模型（或大市场模型），在该模型中，设计者通过某种候补名单政策，将

具有异质质量的物品分配给具有不同价值的买方。[32]

这里，我介绍 Ashlagi、Monachou 和 Nikzad (2025) 的一个简化版本，以阐述这些论文的主要见解。考虑一个流体模型，其中每一时刻都有单位质量的物品和质量为 $\rho = \lambda/\mu > 1$ 的买方到达。为当前目的，另一种便于理解的解释是：每一时刻都有质量为 $\rho$ 、质量各异的物品到达，其中质量为 1 的物品质量高，等于 1；质量为 $\rho - 1$ 的物品质量低，等于 0。真正的新特征是，买方对物品的价值 $v$ 各不相同，这些价值根据累积分布函数 $F$ 从 $[0,1]$ 分布而来，并且在 (0，1) 上具有严格为正的密度函数 $f$。假设对于所有 $v \in$，逆风险率 $^{1-F}{}_{(v)\, f(v)}$ 都随 $v$ 递减，其中 $v \in \in$(0，1)。

---

Ashlagi、Monachou 和 Nikzad (2025) 研究的是离散时间（而非本文所讨论的连续时间），并允许存在有限个质量等级，而不是像当前模型这样只有 0 和 1 两个等级。尽管如此，当前模型仍然抓住了该论文的核心经济学见解。其优点在于，我们保留了本综述中介绍的常用分析框架。[33] 设计者的目标可以是社会福利，也可以是“配置效率”；后者计入总剩余，但不考虑买方的等待成本。

不失一般性，设计者规定了刚刚到达且报告价值为 $v$ 的买方在每个时刻的最终分配概率 $X(v)$和期望等待时间 $W(v)$,

[32]Mekonnen (2019) 构建了一个密切相关的模型，研究带有摩擦性搜索的双边匹配。本研究关注随机搜索与定向搜索之间的权衡，这与此处讨论的筛选与随机分配之间的权衡相呼应。 Su 和 Zenios (2004) 以及 Schummer (2021) 在非流体模型中研究了相关问题，但没有考虑此处所讨论的类型异质性。事实上，据我所知，在经典的排队（即非流体）框架中，还没有任何非转移效用分析允许价值存在异质性；这仍是一个有待研究的开放领域。尽管Leshno (2022) 和Baccara、Lee 和 Yariv (2020) 的模型中有两种类型的代理人和物品，但其分析实际上与单类型模型同构。 Che 和 Choi (2025) 研究了一个关于价值异质性的完全一般模型，但采用的是可转移效用框架。[33]多质量版本要求作者将可行分配——定义为从买方价值到预期质量的映射——表示为相对于正向排序程度最高的匹配分配的均值保持收缩。随后，他们运用 Kleiner、Moldovanu 和 Strack (2021) 对此类（受支配）分配的极点所作的刻画，论证最优解具有某种对正向排序程度最高的匹配进行熨平后的形式。当前的两级质量模型简化了熨平过程。

由于这些是均衡对象，该二元组必须满足：

$$U(v) := vX(v) - cW(v) \geq 0, \forall v; \tag{$IR_{\text{NTU}}$}$$

$$U(v) \geq vX(v') - cW(v'), \forall v, v'; \tag{$IC_{\text{NTU}}$}$$

这些关于 $(IR_{\text{NTU}})$ 和 $(IC_{\text{NTU}})$ 的设定，已经预示了“等待成本”可能发挥筛选工具的作用；在可转移效用模型中，这一作用通常由货币转移承担。这种类比并非偶然：等待成本将发挥与转移相同的作用，但有一个重要区别：等待成本会带来福利成本，而货币转移则不会。

和往常一样，可以利用标准的包络刻画，将 $(IC_{\text{NTU}})$ 和$(IR_{\text{NTU}})$ 替换为：

$$U(v) = \int_0^v X(s)ds \, \forall v; \tag{$E_{\text{NTU}}$}$$

$$X(\cdot) \text{ is nondecreasing.} \tag{$M_{\text{NTU}}$}$$

接下来，令 $p(v)$ 表示队列中价值高于 $v$ 的买方的稳态质量。（这对应于我们框架中的平稳分布，尽管 $p(0)$，即队列中买方的总质量，不一定等于 1。）那么，必须有

$$\rho \int_v^1 W(s)f(s)ds = p(v), \forall v; \tag{$L_{\text{NTU}}$}$$

$$\rho \int_0^1 X(s)f(s)ds \leq 1. \tag{$RF_{\text{NTU}}$}$$

条件 $(L_{\text{NTU}})$ 可由利特尔法则推出。该法则指出，对于每个 $v$，价值高于 $v$ 的到达买方的总等待时间与这些类型的平均队列长度相关联；在我们的连续统经济中，这一关系退化为 $p(v)$，即这些买方的总量

在队列中的类型。条件 $(RF_{\text{NTU}})$ 确保承诺分配量（可能需要等待后）等于每个时点可用的物品总量。（请注意，按照我们的标准化方式，物品的接收速率等于一。）这一条件构成了 Border 式约化形式拍卖刻画；更多细节请参见 Che 和 Choi(2025) 以及下一节。

Ashlagi、Monachou 和 Nikzad (2025) 将配置效率作为目标函数，此时问题为：

$$\max_{X,W,p} \rho \int_0^1 vX(v)f(v)dv \qquad [\mathcal{P}''_{\text{NTU}}]$$

$$\text{subject to} \quad (IR_{\text{NTU}}), (IC_{\text{NTU}}), (L_{\text{NTU}}), \text{ and } (RF_{\text{NTU}}),$$

**定理 7。** 假设 $\rho > 1$。在求解 $[\mathcal{P}''_{\text{非转移效用}}]$ 的最优机制中，所有价值为 $v \geq \tilde{v}$ 的买方都会等待 $W$：一段时间，其中 $\rho[1 - F(\tilde{v})] = 1$。更正式地说，$X(v) = \mathbf{1}_{\{v \geq \tilde{v}\}}$，$W(v) = \mathbf{1}_{\{v \geq \tilde{v}\}}\tilde{W}$，且 $p(v) := \rho^{\tilde{v}}_{c}[1 - F(\max\{v, \tilde{v}\})]$.

证明。考虑一个进一步放松的问题，其中 $(M_{\text{NTU}})$ 和 $(L_{\text{NTU}})$ 均不存在。考虑拉格朗日函数（忽略约束 $X(\cdot) \in [0,1]$）：

$$L = \int_0^1 (v - \zeta)X(v)f(v)dv,$$

其中 $\zeta \geq 0$ 是 $(RF_{\text{NTU}})$ 的乘子。令 $\tilde{v} := \inf\{v : v \geq \zeta\}$，则必须有 $X(v) = \mathbf{1}_{\{v \geq \tilde{v}\}}$，这满足 $(M_{\text{NTU}})$。若 $\zeta = 0$，则对所有 $v$，$X(v) = 1$，这违反了 $(RF_{\text{NTU}})$，因为 $\rho > 1$，因此 $(RF_{\text{NTU}})$ 为紧约束，且 $\tilde{v}$ 由 $\rho[1 - F(\tilde{v})] = 1$ 确定。令 $W(v) = \mathbf{1}_{\{v \geq \tilde{v}\}}\tilde{v}/c$，即可满足 $(E_{\text{NTU}})$ 和 $(L_{\text{NTU}})$。迄今选取的解集合是可行的，并满足互补松弛条件。因此，根据弱对偶性，它是 $[\mathcal{P}''$ 非转移效用$]$ 的最优解。

□

配置效率要求将商品分配给价值高于市场出清“价格” $\tilde{v}$ 的买方。在 NTU 情境中，价格只能通过等待成本支付，˜这要求等待时间为 $W := \tilde{v}/c$，而这由稳态队列长度支撑

为 $\rho[1-F(\tilde{v})]\tilde{v}/c$。面对这样的队列长度和相应的等待时间，买方当且仅当 $v \geq \tilde{v}$ 时才会进入。请注意，无论采用何种排队规则，期望等待时间都由利特尔法则确定。一种简单的规则可以是先到先服务；[34] 这种分配可视为异质价值版本的 Naor （1969 年），或 定理6-(i)。

图(a) 图 6 展示了当 $\rho = 1.5$ 和 $F$ 服从均匀分布时的配置效率结果。在高质量商品和零质量商品的数量分别为 1 和 $\rho - 1$ 的另一种解释下，通过带有延期权的先到先服务机制可以实现配置效率结果：也就是说，获得零质量商品的买方可以拒绝分配，而不会失去自己的位置。

需要注意的是，配置效率并不等同于社会福利最大化——这与后文将介绍的可转移效用框架有一项重要区别。 Ash- lagi、Monachou 和 Nikzad (2025) 也考虑了社会福利最大化。在此，我们考虑一个与前文所讨论目标相似的目标函数：

$$\max_{X,W,p} \alpha\rho \int_0^1 U(v)f(v)dv + (1-\alpha)\rho \int_0^1 \pi X(v)f(v)dv \qquad [\mathcal{P}'''_{\mathsf{NTU}}]$$

$$\text{subject to} \quad (IR_{\mathsf{NTU}}), (IC_{\mathsf{NTU}}), (L_{\mathsf{NTU}}), \text{ and } (RF_{\mathsf{NTU}}),$$

其中， $\alpha \in [0,1]$ 和 $1-\alpha$ 分别是设计者赋予买方福利和企业利润的权重（每当买方获得分配/得到服务时，便会产生 $\pi$ ）。

将 $(E_{\mathsf{NTU}})$ 代入目标函数并进行化简后，可将问题改写为：

$$\max_{X,W,p} \rho \int_0^1 K(v)X(v)f(v)dv$$

$$\text{subject to} \quad (RF_{\mathsf{NTU}}), \text{ and } (M_{\mathsf{NTU}}),$$

其中 $K(v) := \alpha\frac{1-F(v)}{f(v)} + (1-\alpha)\pi$. 根据我们关于逆危险率递减的假设 d

[34]其他优先级规则在流体模型中也同样适用，因为无论采用何种排队规则，剩余平均等待时间都会退化为 $\tilde{v}/c$。

速率， $K(\cdot)$ 对所有 $\alpha$ 均为非递增。

**定理8**。 假设 $\rho > 1$。在求解 $[\mathcal{P}'''_{\text{非转移效用}}]$，的最优机制中，所有买方都通过抽签 $X(\cdot) \equiv 1/\rho$ 获得服务，且不存在任何延迟（即， $W(v) = p(v) \equiv 0$）。

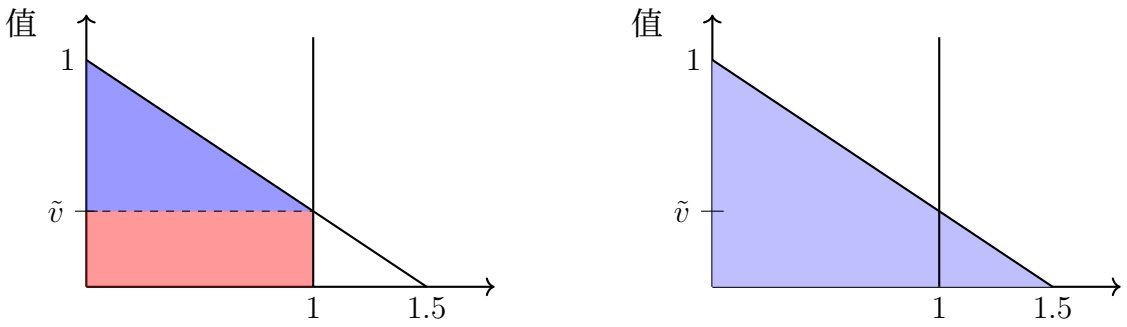
证明。 固定任意一个非递减的 $X(\cdot)$ 满足 $(RF_{\text{NTU}})$ 。令 $\bar{x} := \int_0^1 X(v) f(v) dv \leq 1/\rho$。由于 $K(\cdot)$ 是非递增且非负的，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\int_0^1 K(v)X(v)f(v)dv \leq \left(\int_0^1 K(v)f(v)dv\right)\bar{x} \leq \left(\int_0^1 K(v)f(v)dv\right)\frac{1}{\rho},$$

其中，最后一个不等式由 $(RF_{\text{NTU}})$ 得到。 □

在可转移效用设定中，配置效率对应于社会福利最大化；然而，在不可转移效用设定中并非如此，因为买方为获得物品而支付的价格不是一种转移，而是一种浪费性的社会成本。因此，图(a)中的深蓝色区域构成唯一的净社会剩余；红色区域则通过等待成本被耗散。

当买方同质时，如定理6-(ii)所示，可以通过准入控制或抽签消除这种浪费。然而，在这里这样做是有代价的，因为设计者必须牺牲配置效率。原则上，设计者如何权衡这两个目标并不明确。不过，鉴于逆风险率条件递减，社会最优解（$\alpha = 1$）会完全牺牲配置效率，以尽可能降低等待成本。换言之，方案规定采用完全汇集并随机分配，从而不产生延迟。在这个例子中，完全筛选下的福利为 $2/9$（图（a）中的深蓝色区域），而汇集下的福利为 $1/2$ （图（b）中的浅蓝色区域乘以 $1/1.5$）。按照另一种解释，若零质量商品的质量为 $\rho - 1$，高质量商品的质量为1，则这种完全汇集可以通过不带延期权的先到先服务机制实现；也就是说，获得零质量商品的买方不能拒绝分配。关于具有类似特征的排队机制，参见ArnostiandShi(2020)和Castro, Ma, Nazerzadeh, andYan(2021）的研究。




(a) 配置效率（$\alpha = 0$）。 (b) 福利最优（$\alpha = 1$）。

图 6：福利衡量方法的比较。

从思想渊源上看，定理8的核心洞见可追溯至McAfeeandMcMillan (1992年)。他们指出，在无法采取淘汰行动（因而不能使用转移支付）的情况下，若投标联盟旨在最大化成员福利，且满足相同的逆风险率条件，那么联盟会倾向于随机选出一名赢家，[35] 以及Condorelli(2012)和Hartlineand Roughgarden (2008)的研究。他们运用相同的逻辑指出，当设计者必须依靠有成本信号传递来筛选代理人时，完全汇集在社会层面上是最优的。这里的区别在于，有成本信号传递必须采取在队列中等待的形式；在稳态下，必须内生地调整队列长度，以满足激励相容。当前的综述还揭示了队列带来的福利成本，这是Naor (1969年）所研究问题的体现，而汇集则是解决之道。

# 3 可转移效用模型

现在我们转向可转移效用（TU）模型。上一节聚焦于价格在分配中作用有限的市场，而许多动态环境则利用货币转移来平衡竞争并管理供给与需求。遵循Che 和 Choi (2025)所建立的框架，我们将Myerson (1981年的经典机制设计范式推广到物品和买方异步且

[35]另请参阅 Che、Condorelli 和 Kim （2018年），了解基于相同原因在拍卖环境中汇集的最优性。

随机到达的动态环境中。

## 3.1 设定

该模型的基本原语与之前相同：在连续时间 $t \geq 0$中，设计者（平台）以$\mu > 0$的泊松到达率接收同质商品。具有单位需求的买方以 $\lambda > 0$的泊松到达率到达。然而，与Myerson（1981）的情形类似，不同之处在于，买方对商品的价值存在异质性。具体而言，每位买方在到达时，其价值为 $v \in [0,1]$，并按照累积分布函数 $F$ 独立抽取，该分布具有严格为正且绝对连续的密度函数 $f$。我们假设，虚拟价值 $J(v) = v - (1-2\alpha)^{1-F}(v)\, f(v)$ 关于 $v$ 单调不减，对所有 $\alpha$ 均成立。[36] 每位买方都私下知晓自己的价值 $v$。

---

与之前一样，如果没有可用物品，设计者可以将买方存入队列，每位买方每单位时间的成本为 $c > 0$；如果没有买方，她也可以将商品存入库存，每件物品每单位时间的成本为 $d > 0$。

与非转移效用模型不同，买方具有关于货币的线性可转移效用。因此，如果一位价值为 $v$ 的买方在队列中花费时间 $t$，支付 $y$的货币，并获得商品，那么他的收益为 $v - y - ct$。如果他在队列中花费时间 $t$ 并支付$y$，但没有获得商品，那么他的收益为 $-y - ct$。

**机制。** 我们再次关注非转移效用模型中定义的再生机制。可转移效用设定引入了两个关键差异。首先，买方具有异质的私人价值 $v \in [0,1]$。根据（贝叶斯—纳什）启示原理，我们可以将注意力限制在直接机制上 $\phi$，这类机制以买方报告的价值为条件。其次，机制的结果集合得以扩展，纳入了货币支付。因此，机制 $\phi$ 是一个从历史（包括

[36]当 $F$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$都服从均匀分布时，这一条件成立。更一般地，对于逆风险率不递增的分布，当 $\alpha \in [0,1/2]$时，这一条件总是成立。对于 $\alpha > 1/2$，该条件要求逆风险率不会下降得过快；具体而言，我们要求$1 - (1-2\alpha)\frac{d}{dv}\left[\frac{1-F(v)}{f(v)}\right] \geq 0$。如果违反了这一强形式的正则性，我推测将适用Myerson (1981年) 提出的某种熨平方法。

原始到达和所有报告价值）到结果（排队决策、匹配和支付）的非前瞻性可测映射。

这种更丰富的设定需要更复杂的状态空间。队列状态 $\theta$ 现在不仅必须记录队列长度 $k \in \mathbb{Z}$ （其中 $k < 0$ 表示商品库存），还必须记录当前正在等待的买方所报告的价值。我们用一个有序向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots\ldots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ 来表示这些报告价值。令 $\mathcal{V} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ 表示所有此类有序向量构成的集合。我们继续施加无分配延迟（NAD）条件。因此，完整的队列状态空间为 $\Theta := (\cup_{l \in \mathbb{N}} \{-l\}) \cup \{0\} \cup \mathcal{V}$。

与之前一样，我们将注意力限于**正常返再生机制（PRRM）**。任何此类机制 $\phi$都会在状态空间 $\Theta$上诱导一个正常返过程，该过程具有唯一的平稳分布 $p \in \Delta(\Theta)$。我们要求机制具备激励相容性。令 $\Phi$表示所有 PRRM 构成的集合，在这些机制中，作为贝叶斯—纳什均衡，买方有激励遵循所有建议，包括如实报告自己的价值。评估这一均衡时，假设新到达买方对队列状态的先验分布为该机制所诱导的平稳分布 $p$ 。

设计者面临的问题是：

$$\sup_{\phi \in \Phi} \int_{\theta} \int_{0}^{1} \left[ \alpha \lambda U^M(v;\theta) + (1-\alpha)\lambda T^M(v;\theta) - \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{\theta = -\ell\}} \ell d \right] f(v) \mathrm{d}v \mathbf{p}(\mathrm{d}\theta), \qquad [\mathcal{P}_{\mathrm{TU}}]$$

其中， $\alpha$是买方福利的权重， $U^M(v;\theta)$和 $T^M(v;\theta)$分别是在机制$\phi$下，状态为 $\theta$ 时、价值为 $v$ 的买方的期望效用和支付。当 $\alpha = 0$ 时，该问题特化为收益最大化；当 $\alpha = 1/2$时，则特化为福利最大化，或等价地说，配置效率最大化。

**与相关文献的联系。** 该模型将静态机制设计框Myerson (1981年)所提出的框架推广到动态环境中，这更能描述由平台中介的现代市场。在这种环境下，设计者的关键职责不仅是在买方同时到场时将物品分配给他们

，还要通过审慎地储存买方或商品来管理并转移不同时期的竞争。

然而，重要的是，这个模型并未涵盖前文综述的非转移效用模型。可转移性使设计者能够轻松控制买方激励。例如，只需根据买方在队列中花费的时间，补偿其所承担的等待成本，就能管理动态激励。回想一下，上一节的大部分分析难点都源于在非转移效用模型中难以管理买方排队的激励；在可转移效用框架下，这个问题就更容易处理。

## 3.2 最优机制

问题 $[\mathcal{P}_{TU}]$ 难以求解。因此，我们按如下方式构建一个放松问题。

任取一个机制 $M \in \mathcal{M}^{**}$。它会为刚刚到达且报告价值 $X(v)$ 的买方确定中期分配概率 $T(v)$ 和支付 $v$；支付在等待成本得到补偿后支付（或扣除等待成本补偿后支付），我们在下文中均作此假设。[37] 由于 $M$ 满足激励相容条件，因此它们必须满足：。[38]

$$U(v) := vX(v) - T(v) \geq 0, \forall v, \tag{IR}$$

$$U(v) \geq vX(v') - T(v'), \forall v, v'. \tag{IC}$$

显然，并非所有 $X(v) \in [0,1]$ 都可行。承诺给买方的分配必须既符合商品的随机供给，也要兼顾设计者对先前到达的买方以及未来将到达的买方所作出的承诺。为了解决可行性问题，我们首先令 $p_k(v)$ 表示在稳态下，价值严格高于 $v$ 的买方恰好有 $k$ 名的概率。因此，$p_k(0)$ 表示稳态队列中恰好有 $k$ 名买方的概率。此外，和之前一样，令 $p_{-\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$

[37]回想一下，我们已经看到，设计者可以在不失一般性的前提下补偿等待成本。[38]注意，$(IR)$ 忽略了可能出现的双重偏离，因此买方如实报告是必要条件，但不是充分条件。这并无妨，因为我们正在考虑一个松弛规划。

表示库存中有 $\ell$ 件物品的平稳概率。

因此， $X(\cdot)$的可行性要求：

$$\lambda \int_v^1 X(s) f(s) ds \leq \mu \sum_{k=1}^{\infty} y_k(v) p_k(v) + \sum_{\ell=1}^{\infty} p_{-\ell} \int_v^1 z_\ell(v) f(v) dv, \quad \forall v \in V, \qquad (RF)$$

其中 $y_k(v)$ 表示到达的商品分配给价值高于 $k$ 的某一位 $v$ 买方的概率； $z_\ell(v)$ 表示当储存中有 $v$ 件物品时，价值为 $\ell$ 的到达买方获得该商品的概率。左侧表示单位时间内向类型高于 $v$ 的买方作出的分配承诺总量；右侧表示单位时间内分配给价值高于 $v$ 的买方的商品总量。需要注意的是，当商品到达且队列中有买方等待，或买方到达且有商品储存时，就会发生分配。这个条件在精神上类似于 Border (1991) 和Che、Kim 和 Mierendorff (2013)，但增加了时间维度。

接下来，我们讨论分布 $\mathbf{p} = (p_k)$ 的可行性。由于这些是平稳对象，因此必须满足平衡条件。对于子集 $\mathbb{Z}_{\leq -\ell} \subset \Theta$，对于 $\theta = -\ell$，对于某个 $\ell \in \mathbb{N}$，我们必须在 $\mathbb{Z}_{\leq -\ell}$ 和$\Theta \setminus \mathbb{Z}_{\leq -\ell}$之间的转移之间满足平衡条件：

$$\mu p_{-\ell} \geq \lambda p_{-(\ell+1)}, \qquad (B_\ell)$$

与我们在不可转移效用设定中讨论的条件有些类似。新颖且可能较难处理的是每个可测集 $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \subset \Theta$ 都必须满足平衡条件；具体而言，该集合由队列中买方所报告的价值剖面构成。为此，我们只关注 $\mathcal{V}$ 的（可测）子集，且其形式如下：

$$\mathcal{V}_k(v) := \{\mathbf{v} : v_{k+1} \leq v\},$$

其中包括一组队列状态，在这些状态下，第 $k+1$ 高价值低于 $v$，或者等价地，至多有 $k$ 个买方的价值高于 $v$。图7描绘了 $\mathcal{V}_0(v)$ 和 $\mathcal{V}_1(v)$

（仅在前两个坐标中）。

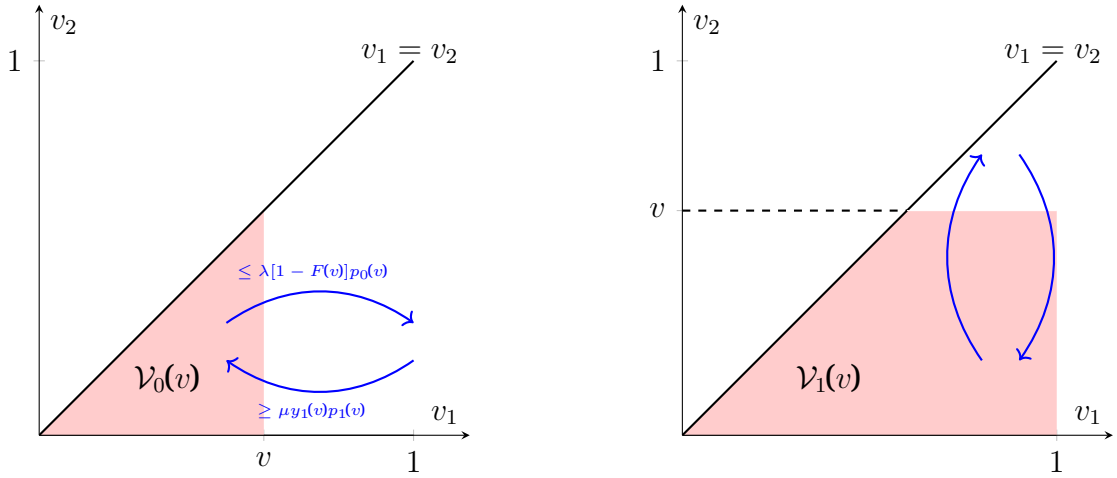



图7： $\mathcal{V}_0(v)$和 $\mathcal{V}_1(v)$

$\mathcal{V}_k(v)$的平衡条件可归结为：

$$\lambda[1 - F(v)]p_k(v) \geq \mu y_{k+1}(v)p_{k+1}(v). \qquad (B_k)$$

左侧是集合 $\mathcal{V}_k(v)$ 流出的上界，如图中 $k = 0$ 所示的流出箭头。忽略高阶项，流出发生在恰有$k$ 个买方的价值严格高于 $v$时——该事件发生的概率为 $p_k(v)$——且一位价值高于 $v$ 的买方到达时——其到达速率为 $\lambda[1 - F(v)]$。在这种情况下，只有当该买方获准进入队列时，才会发生从 $\mathcal{V}_k(v)$ 流出的转移。由于他未必会获准进入，左侧给出了流出的上界。类似地，右侧给出了流入集合 $\mathcal{V}_k(v)$ 的流入量。

这里的这些条件仅适用于刻画平稳分布$\mathbf{p} \in \Delta(\Theta)$的可测集合中的低维子集。更准确地说， $\mathcal{V}_k(v)$由每个（$k$， $v$）索引，因此我们有基数为 $\mathbb{N} \times [0, 1]$ 的条件。但要考虑所有可测集合，我们需要对每个$\mathbf{v} \in \mathcal{V}$对应的形如 $[\mathbf{0},\mathbf{v}]$, 的集合设定一个条件，因此条件的基数会达到 $\mathbb{N}^{[0,1]}$的量级，远大于$\mathbb{N} \times [0, 1]$。显然，所选条件是必要的。尽管这些条件不足以刻画平稳分布，但事实证明，它们足以识别

可转移效用$[\mathcal{P}'_{\text{TU}}]$的最优解（下文将对此进行说明）；因为我们将看到，只有这些条件会在最优解处取等号。归约最终使这个问题变得可处理。

现在我们已经可以构造松弛规划了。考虑以下问题：

$$\max_{p,y,z,X,T} \lambda \int_0^1 [\alpha U^M(v) + (1-\alpha)T(v)]f(v)dv - c\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(0) - d\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell p_{-\ell}$$

$$\text{subject to } (IR),\ (IC),\ (RF),(B_\ell),\ \text{and } (B_k),\ \forall \ell, k.$$

同样，可以将目标函数解释为消费者剩余与设计者/生产者剩余加权之和的长期时间平均值（其中，$\alpha$ 为前者的权重），减去设计者补偿给买方的等待成本和库存成本；或者将其解释为稳态流量剩余的对应形式。请注意，$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(0)$计入了稳态平均队列长度：$p_k(0)$表示队列中有 $k$ 个买方的平稳概率（根据我们的约定，用价值为0的买方在场来表示买方缺席）。

显然，所有约束对于机制属于 $\mathcal{M}^{**}$都是必要的。利用标准的包络条件，该问题进一步松弛为：

$$\max_{p,y,z,X} \lambda \int_0^1 J(v)X(v)f(v)dv - c\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(0) - d\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell p_{-\ell} \qquad [\mathcal{P}'_{\text{TU}}]$$

$$\text{subject to } (RF),(B_\ell),\ \text{and } (B_k),\ \forall \ell, k,$$

其中，$J(v) := v - (1-2\alpha)\frac{1-F(v)}{f(v)}$，我们假设其关于 $v$递增。

经过适当的变量替换，$[\mathcal{P}'_{\text{TU}}]$可以表示为一个线性规划。请注意，我们已将一个动态机制设计问题转化为一个线性优化问题。使这一转化成为可能的，是将传统机制设计工具（如$(IR)$ 和$(IC)$）与简化形式刻画$(RF)$ 以及平稳性所要求的平衡条件结合起来。尽管这里的方法在思路上与其非转移效用对应形式相似，$[\mathcal{P}'_{\text{NTU}}]$，但私人信息的存在，更重要的是队列状态空间的丰富性，$\Theta$ 使其与后者有所区别。如前所述，

简化平稳性所需的平衡条件，是实现线性规划形式易于处理的关键一步。接下来将刻画$[\mathcal{P}'_{TU}]$的最优解。

**定理 9**。 松弛规划的最优解 $[\mathcal{P}'_{TU}]$具有如下特征：存在 $\hat{v}_K > \cdots > \hat{v}_1 > \hat{v}_{-1} > \cdots > \hat{v}_{-L} > J^{-1}(0)$，对于某个 $K$，$L \in \mathbb{N}$，使得：(i) 物品仅储存至多 $L$ 个单位；(ii) 当且仅当所有 $k$ 位买方的价值均高于 $\hat{v}_k$ 时，买方才会排队，且队列中至多有 $k \leq K$ 位买方；(iii) 若买方到达时储存中有 $\ell \geq 1$ 件物品，则当且仅当其价值高于 $\hat{v}_{-\ell}$ 时，才会分配给他商品；(iv) 若物品到达时队列中有 $k \geq 1$ 位买方等待，则将其分配给价值最高的买方。

证明。 证明的关键在于确定满足所有互补松弛条件的原始变量和对偶变量集合。有兴趣的读者可参阅 Che 和 Choi(2025）了解详情。

□

与静态机制设计类似，最优动态机制会在（内生选择的）参与者之间最优地分配物品。不同于静态机制，最优动态机制的关键在于队列的设计。这不仅对于平衡需求与供给之间的跨期错配至关重要，也有助于将竞争压力分配到不同时间，从而有效约束掌握私人信息的买家。由于将买方和物品存放在队列中都需要付出成本，随着队列长度增加、库存商品数量减少，机制要求买方达到逐步提高的门槛。

请注意，收益最大化（$\alpha = 0$）与福利最大化（$\alpha = 1/2$）的最优分配在定性特征上相似。两者唯一的区别在于，依赖队列长度的临界值 $\hat{v}_k$ 在这两种情形下有所不同。在收益最大化情形下，这些临界值的选择旨在最大化虚拟价值 $J(v;\, \alpha = 0) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)}$，这与 Myerson 情形相同；而在福利最大化情形下，这些临界值的选择旨在最大化实现价值 $J(v;\, \alpha = 1/2) = v$。由于福利最大化设计者没有垄断排斥动机，通常会预期后者的临界值较低。

通常如此。队列较短时，确实如此。例如，给定 $d = \infty$，一个买家队列的福利最大化截断值为 $\hat{v}_1 = c$，而相应的收益最大化截断值为 $\hat{v}_1 = J^{-1}(c)$，与成本为 $c$ 时标准的 Myerson 保留价相同。然而，更令人惊讶的是，当队列较长时，顺序会颠倒：收益最大化截断值低于福利最大化截断值。这一单交叉特征可以解释如下。同样，由于没有垄断排斥动机，福利最大化设计者更愿意在队列相对较短时让买方进入队列，从而降低买方缺货的风险（即商品到达时没有买方可供选择的情况）。与此同时，收益最大化设计者更愿意让买方进入较长的队列，因为她更倾向于向信息租金较低的高价值买方出售商品；而且，较短队列中更强的排斥本身就意味着更有必要防范买方缺货风险。因此，与福利最优临界值相比，收益最大化临界值在队列较短时更高，在队列较长时更低。

定理 9刻画了以下问题的最优解：$[\mathcal{P}'_{\text{可转移效用}}]$。接下来要证明的是，可以通过一个满足原问题约束的机制 $M$，使这个放松问题的最优解实现激励相容 $[\mathcal{P}_{\text{TU}}]$。Che 和 Choi(2025证明，由一系列拍卖组成的机制可以在占优策略中实现最优机制。

为说明最优机制如何运作，假设一位买方最初在空状态后到达。随后，设计者设定保留价$\hat{v}_1$，即买方可能获得商品时须支付的最低价格，这使得只有当买方的估值高于$\hat{v}_1$时，加入队列才是其占优策略。假设在物品到达之前，另一位买方也到达。此时，保留价（或升价拍卖时钟）会从$\hat{v}_1$ 开始持续上升，直到价格达到其中一人的估值、该买方退出，或价格达到$\hat{v}_2$，以先发生者为准。若前一种情况发生，价格便停在退出价格，留下的买方继续待在队列中；若后一种情况发生，则两位买方都留在队列中。更一般地，若一位买方到达时队列长度为 $k$，那么

时钟价格也会从当前停住的价格开始上升，直到有买方退出或达到价格$\hat{}v_{k+1}$，以先发生者为准。

假设接下来有一件商品到达，而买方正在等待。此时会举行一场密封投标拍卖，要求买方的出价不低于他们此前经受过的最高保留价格。最高出价者赢得该商品（若出价相同，则随机决定胜者），并须支付**临界价格**——其定义为在给定未来样本路径的情况下，买方能够报出的、并最终赢得该商品的最低出价，同时假设未来的分配也由同一出价决定。临界价格取决于实际实现的样本路径（可能是在拍卖结束很久之后实现的），反映了设计者此后面对的实际竞争状况。在这种动态环境中，价格并非匹配时刻已知的单一数值，而是实际实现的随机过程的函数。[39] 在这种情况下，胜者在获得商品后才会被"收费"。

直观而言，临界价格反映未来的竞争水平，以此约束当前的买方。如果分配之后供给状况有所改善（有更多物品到达），胜者将被收取较低的价格。相反，如果出现超额需求，胜者将被收取较高的价格。

接下来，设计者将库存上限设为某个有限的 $L$单位；达到 $L$ 后收到的额外物品将被丢弃。假设库存中有 $\ell \geq 0$ 件物品，且一位买方到达。此时，买方需支付$\hat{}v_{-\ell}$的固定价格；如前所述，库存越多，价格越低。

此处描述的拍卖/定价机制能够以占优策略实现最优结果。虽然我们考虑了所有PRRM，但最优的占优策略激励相容机制是伪马尔可夫的：其分配和队列/库存决策是马尔可夫的，仅取决于队列状态 $\theta \in \Theta$，而临界价格则可能取决于整个周期内历史。由此可知，分配仅取决于队列中买方报告的

[39]为说明这一点，考虑一位赢家 $A$：他到达时，另一位买方 $B$已经在队列中。在一种情形下，之后又有一件物品到达，从而满足 $B$；在这种情况下， $A$的支付较低，因为最终的供给足以满足两人的需求。在第二种情形下，没有第二件物品到达，反而又来了两位新的高价值买方。在这种情况下， $A$必须支付更高的价格，因为根据实际发生的样本路径， $A$ 为争夺一件稀缺物品所面临的竞争激烈得多。

价值，与其到达顺序无关；换言之，分配优先级并不遵循标准的队列规则。

总而言之，最优动态机制保留了Myerson(1981年的核心要素——即通过带保留价的拍卖，将商品分配给已经到场的买方。此外，它还包含一项额外特征：设计者将买方或商品存入队列，以平衡需求与供给之间潜在的跨期错配；同样重要的是，也能平衡不同时期的竞争压力。

## 3.3 大市场性质

假设市场在 $\lambda$，$\mu \to \infty$ 且平衡参数 $\rho = \lambda/\mu$保持不变时变得稠密，或者在 $c$ 或 $d$ 趋于零时变得稠密。与非转移效用模型一样，此类市场的极限对应于一个静态模型：供给侧有单位质量的物品，需求侧有质量为$\rho = \lambda/\mu$ 的买方（见Che 和 Choi (2025)；或者对应于一个动态模型，其中每个时刻都有单位质量的物品和质量为 $\rho = \lambda/\mu$ 的买方到达。

在这一极限连续统模型中，最优机制非常简单。着眼于收益最大化（即，$\alpha = 0$），最优机制就是采用最优保留价的统一价格多单位拍卖：即以等于边际买家价值 $\tilde{v} := \inf\{v : \rho[1 - F(v)] \leq 1\}$，或标准垄断价格 $\hat{v}_0 := J^{-1}(0)$ 的价格出售全部物品，取两者中较高者。（前者是连续统市场中统一价格拍卖最高落标价的对应形式。）另请注意，当 $\alpha \to 1/2$时，$\hat{v}_0 \to 0$。

图8 展示了前者价格较高的情形。

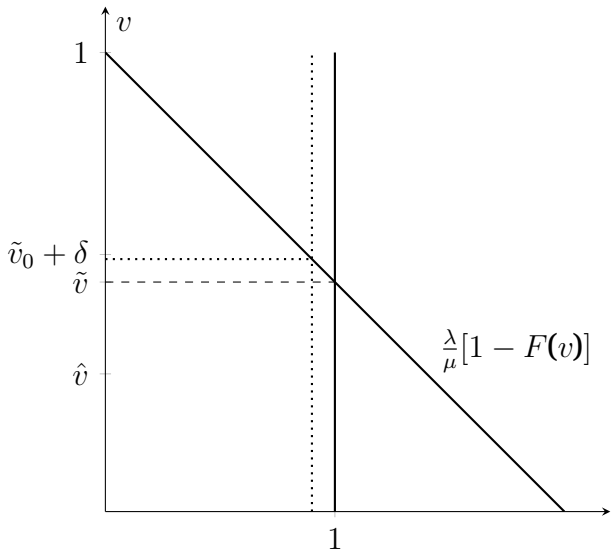



图8：最优机制的大市场极限

Che 和 Choi(2025)得出了以下结果。

**定理10**。 若满足以下条件之一，归一化目标函数将收敛于连续统模型的最优解：（a） $\lambda$， $\mu \to \infty$ 且 $\rho = \lambda/\mu$ 保持不变；（b） $c \to 0$；或（c） $d \to 0$。

证明概要： 将四个参数 $\lambda$， $\mu$， $c$和 $d$同时乘以常数 $k > 0$，等同于单纯地重新缩放时间。因此，（b）等同于 $\lambda$， $\mu$， $d \to \infty$，其中 $\lambda/\mu$ 和$\lambda/d$保持不变；（c）等同于 $\lambda$， $\mu$， $c \to \infty$，其中 $\lambda/\mu$和 $\lambda/c$保持不变。因此，（b）或（c）均可推出（a）。

为证明 (b)，考虑一种简单的可行机制：若买家队列非空，则将到达的商品分配给一名等待中的买家；否则丢弃该商品。只有当买家的估值高于 $\tilde{v}_0 + \delta$ 时，才将其加入队列，其中 $\delta > 0$ 任意小（见图8）。这确保商品到达率 $\mu$高于“有效”买家到达率 $\lambda[1 - F(\tilde{v}_0 + \delta)]$。于是，每位估值高于 $\tilde{v}_0 + \delta$ 的买家最终都会在等待一段时间后获配一个商品；然而，可以证明，当 $c \to 0$时，等待时间趋于零。因此，单位收入收敛至连续统模型中最优多单位拍卖机制所达到的水平。这表明，最优机制也必然收敛至后者；并且可以证明，后者在大市场极限下给出上界。

类似地，为证明 (c)，我们考虑这样一种机制：以价格 $\tilde{v}_0 + \delta$ 将储存的物品售给到达的买家；库存为空时拒绝买家；最多储存$\bar{L} := \sqrt{\mu/d}$ 件物品。当 $d \to 0$ 时，可以证明，设计者承担的平均存储成本和（以买家到达为条件的）缺货概率都会趋于零。

□

相较于 NTU 情形，可以看出一个鲜明但显而易见的差异。回顾定理8可知，在 NTU 设定中，社会最优解涉及完全汇集或随机分配；而在此处，社会最优解（$\alpha = 1/2$）实现了配置效率。

# 4 更广泛的综述与未来方向

本综述聚焦于稳态机制设计框架。这一方法为分析具有随机到达和异步到达特征的设定中的核心权衡提供了统一方法。然而，动态市场设计的更广泛研究议程内容丰富且多样，许多重要研究从不同角度或基于不同假设来处理这一问题。为将所综述的研究置于更广泛的背景下，我们将在转向未来研究的有前景方向之前，简要讨论六个相关的文献分支。

**关于排队与优先级的其他观点**最优队列设计问题由来已久。本文介绍的框架能够联合优化进入、优先级和信息，所得结论往往不同于那些限制一项或多项设计手段的研究。例如，一些研究发现，在队列长度的随机性较弱的模型中，先到先服务是最优的；这些模型要么假设代理人构成连续统，要么假设特定的到达—离开过程，使队列规模具有确定性（例如，Bloch 和 Cantala(2017）；Margaria(2020））。其他研究则关注不同的不确定性来源；例如，Cripps 和 Thomas (2019) 分析了服务率未知的情形，这会引发代理人的策略性试验问题；这与基于系统已知状态来管理激励，是不同的挑战。

**利用状态无关机制进行筛选**大量文献率先将机制设计应用于排队系统，尤其用于筛选具有异质偏好的代理人。重要贡献包括Mendelson 和 Whang (1990)、Afeche(2013)、Afeche 和 Pavlin (2016)，以及Kittsteiner 和 Moldovanu(2005）。这些论文研究服务提供者如何设计一份选项菜单——通常是价格—优先级组合或价格—延迟组合——以促使代理人自我选择。本文综述的可转移效用（TU）框架与这类研究的根本区别，在于机制本身是否具有动态性。上述文献中的机制通常是状态无关的：向到达的代理人提供的合同菜单是固定的，不会随已在等待的顾客人数或系统当前状态而变化。

**动态匹配**。 本综述所讨论的问题属于动态匹配这一广泛领域。近年来，该领域的研究迅速增加（例如，Akbarpour、Li 和 Gharan（2020）、Akbarpour、Combe、Hiller、Shimer 和 Tercieux（2020）、Ashlagi、Nikzad 和 Strack（2023）等，此处仅举数例）。该领域的文献通常关注市场整体绩效问题，例如“市场厚度”的价值，或批量匹配与连续匹配的最优时机。本综述重点介绍的研究则通过采取更细致的微观层面机制设计方法，对这些工作进行了补充。其关注点不再主要是匹配的总体时机，而是精确设计管理个体策略性代理人参与和等待激励所需的政策——进入控制、优先级分配和信息披露。此外，还有一支独立的文献采用合作博弈方法，在动态环境中定义稳定性；例如参见Damiano 和 Lam（2005）以及Doval （2022）。这些研究致力于应对将静态稳定性拓展至动态情境所面临的概念挑战，例如定义可信的多期阻挡计划，以及形式化代理人对未来的预期。

**摩擦性匹配的平台管理**。大量文献研究了管理去中心化摩擦性匹配固有低效率的平台

市场。在这些模型中，代理人会主动进行搜索，并承担筛选潜在匹配对象的成本；当他们联系最终无法匹配或不感兴趣的其他人时，可能会导致拥堵和精力浪费（Arnosti、Johari 和 Kanoria（2021）；Fradkin（2017）；Horton（2019））。在这里，平台的作用并不是运营一个集中式队列，而是通过设计搜索环境本身，间接管理这些搜索摩擦。平台的一个关键杠杆，是通过限制代理人可能会遇到的潜在匹配对象集合，引导搜索过程。干预措施包括通过限制谁可以发起联系来设计搜索协议（Kanoria 和 Saban（2021），或直接设定不同类型代理人之间的会面率（Immorlica、Lucier、Manshadi 和 Wei（2021））。这种方法与本综述的框架形成鲜明对比；本综述假设存在一位强大的设计者，通过队列直接集中控制分配过程，而摩擦主要表现为受管理系统中的等待成本。

**动态定价与收益管理** 本文综述的研究与动态定价和收益管理领域的经典文献相关（例如 Gallego 和 Van Ryzin（1994年）；Board 和 Skrzypacz（2016）；Gershkov、Moldovanu 和 Strack（2018年）；Pai 和 Vohra（2013），以及 Dilme 和 Li（2019））。这些文献通常研究这样一个问题：在有限时间范围内，将固定且易腐的库存（例如航空座位）销售给随机到达的买方。在这一情形下，动态性由不断减少的库存所具有的非平稳性以及临近的截止期限共同驱动。本综述所采用的框架分析的是一种不同的经济环境：一个无限期系统，其中市场两侧都存在随机性（即供给与需求均以随机流的形式出现）。因此，核心问题是管理长期的平稳过程，而不是针对有限期限确定最优定价路径。

**私人信息不断演化的动态机制**。动态机制设计文献中的一个重要分支，包括Courty 和 Li (2000 年）、 Es¨o 和 Szentes (2007 年）、 Bergemann 和 V¨alim¨aki (2010 ）、Athey 和 Segal (2013）、Pavan、Segal 和 Toikka (2014）、Bergemann 和 Strack (2015），以及Bergemann 和 Strack

(2022年）讨论的是另一种动态来源。在这一范式中，代理人的集合是固定的，但其私人信息——即其“类型”——会随时间随机演化，并且通常取决于其过去的分配（例如通过干中学或消费体验品）。因此，核心机制设计问题不再是管理市场流动，而是刻画能够在信息演化过程中为如实报告提供跨期激励的最优长期合同。这一关注点引出了另一套分析工具，其核心是动态版本的一阶方法；这与本综述所重点采用的稳态方法和排队论方法形成对比。关于这一主题的优秀综述，参见B¨orgers (2015年）以及Bergemann 和 V¨alim¨aki (2019年）。

**未来方向** 放宽上述模型的核心假设，可以为研究带来若干有前景的方向。

首先，在非转移效用设定中，一个关键挑战是将分析扩展到非流体模型，以纳入异质的参与者类型。针对这一问题，当前最先进的研究，例如 Ashlagi、Monachou 和 Nikzad (2025)，大多采用流体模型或连续体参与者模型。尽管这种方法便于处理，却实际上回避了随机摩擦和整数层面的队列动态，而这些因素恰恰使等待问题从一开始就复杂而有趣。在非流体模型中取得进展颇具挑战，因为很难刻画随机到达的代理人和物品之间等待时间的可行分配。

其次，在Che 和 Choi(2025) 的可转移效用设定中，尽管模型允许价值存在异质性，但仍有很大空间纳入更丰富的异质性形式，例如代理人等待成本、外部选项或具体服务需求方面的私人信息。举例来说，在许多零工平台上，任务的差异不仅体现在其创造的价值上，也体现在完成任务所需的时间上。设计能够有效地从多个维度筛选代理人的机制，需要新的方法工具来分析排队、多维筛选与

动态状态依存政策之间的相互作用。

这两个领域都代表着市场设计令人振奋的前沿。如何构建动态市场——通过等待、定价，或两者结合——仍是经济理论的一项核心任务，也是现代数字经济的一项实际要务。

# 参考文献


Afeche, P.(2013)：“排队系统中的激励相容收益管理：最优策略性延迟”，制造与服务运营管理，15(3)，423–443。

Afeche, P., and J. M. Pavlin (2016)：“顾客选择下队列的最优价格／提前期菜单：细分、汇集与策略性延迟”，管理科学，62(8)，2412–2436。

Akbarpour, M., J. Combe, V. Hiller, R. Shimer, and O. Tercieux(2020)：“非配对肾脏交换：无需货币克服需求的双重巧合”，美国国家经济研究局工作论文第 *27765* 号。

Akbarpour, M., S. Li, and S. O. Gharan (2020)：“动态匹配市场中的厚度与信息”，政治经济学杂志，128(3)，783–815。

Anunrojwong, J., K. Iyer, and V. Manshadi(2020)：“拥堵的社会服务的信息设计：最优基于需求的说服”，*EC '20*：第*21*届美国计算机协会经济学与计算会议论文集，第349–350页。

Arnosti, N., R. Johari, and Y. Kanoria (2021)：“管理匹配市场中的拥堵”，制造与服务运营管理，23(3)，620–636。

Arnosti, N., and P. Shi (2020)：《保障性住房分配中的抽签与候补名单设计》，管理科学，66(6)，2291–2307。

Ashlagi, I., F. Monachou, and A. Nikzad (2025)：《通过候补名单实现最优分配：借助信息设计简化》，《经济学研究评论》，92(1)，40–68。Ashlagi, I., A. Nikzad, and P. Strack (2023)：《动态非均衡市场中的匹配》，《经济研究评论》，90(3)，1084–1124。Asmussen, S.(2003)：《应用概率与排队论》。施普林格出版社。Athey, S., and I. Segal(2013)：《高效动态机制》，《计量经济学》，81，2463–2485。Baccara, M., S. Lee, and L. Yariv (2020)：《最优动态匹配》，《理论经济学》，15，1221–1278。Becker, G. S. (1973)：《婚姻理论：第一部分》，《政治经济学杂志》，81(4)，813–846。Bergemann, D., and P. Strack(2015)：《动态收益最大化：连续时间方法》，《经济理论杂志》，159，819–853。(2022)：《渐进式参与》，《理论经济学》，17(3)，1007–1039。Bergemann, D., and J. Välimäki (2010)：《动态枢轴机制》，《计量经济学》，78(2)，771–789。(2019)：《动态机制设计：导论》，《经济学文献杂志》，57(2)，235–274。Bloch, F., and D. Cantala(2017)：《向排队代理人动态分配物品》，《美国经济学杂志：微观经济学》，9，88–122。Board, S., and A. Skrzypacz (2016)：《面向前瞻性买家的收益管理》，《政治经济学杂志》，124(4)，1046–1087。Border, K. C. (1991)：《简化形式拍卖的实施：一种几何方法》，《计量经济学：计量经济学会期刊》，第1175–1187页。

Börgers, T.(2015)：《机制设计理论导论》。牛津大学出版社。

Castro, F., H. Ma, H. Nazerzadeh, and C. Yan(2021)：“随机化先进先出机制”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.10706*。

Che, Y.-K., and A. B. Choi (2025)：“动态随机环境下的最优拍卖设计：Myerson 遇见 Naor”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2505.22862*。

Che, Y.-K., D. Condorelli, and J. Kim (2018)：“弱卡特尔与防合谋拍卖”，《经济理论杂志》，178，398–435。

Che, Y.-K., J. Kim, and K. Mierendorff (2013)：“广义约化形式拍卖：网络流方法”，《计量经济学》，81(6)，2487–2520。

Che, Y.-K., and O. Tercieux(forth.):“最优队列设计”，政治经济学杂志。

Condorelli, D.(2012)：“金钱买不到的东西：基于有成本信号的有效机制设计”，《博弈与经济行为》，75(2)，613–624。

Courty, P., and H. Li (2000)：“序贯筛选”，《经济研究评论》，67(4)，697–717。

Cripps, M. W., and C. D. Thomas (2019)：“队列中的策略性实验”，《理论经济学》，14，647–708。

Damiano, E., and R. Lam (2005)：“动态匹配市场中的稳定性”，《博弈与经济行为》，52(1)，34–53。

Dilme, F., and F. Li (2019)：“无承诺收益管理：动态定价与周期性限时促销”，《经济研究评论》，86(5)，1999–2034。

Doval, L.(2022)：〈动态稳定匹配〉，《理论经济学》，17(2)，687–724。

Esö, P., and B. Szentes (2007年)：〈拍卖中的最优信息披露与障碍拍卖〉，《经济研究评论》，74(3)，705–731。

Fradkin, A. (2017)：《搜索、匹配与数字市场设计在促成交易中的作用：来自 Airbnb 的证据》.

Gale, D., and L. S. Shapley (1962年)：《大学招生与婚姻稳定性》，《美国数学月刊》，69(1)，9–15。

Gallego, G., and G. Van Ryzin (1994年)：《有限时间范围内随机需求下库存的最优动态定价》，管理科学，40(8)，999–1020。

Gershkov, A., B. Moldovanu, and P. Strack(2018年)：《面对策略性客户和未知马尔可夫需求时实现收益最大化的机制》，管理科学，64(5)，2031–2046。

Hartline, J. D., and T. Roughgarden(2008年)：《最优机制设计与烧钱》，载于第四十届年度*ACM*计算理论研讨会论文集，第75–84页。

Hassin, R.(1985年)：《先到后服务队列的最优性》，《计量经济学》，53，201–202。

Hassin, R., and M. Haviv(2003)：《排队还是不排队：排队系统中的均衡行为》。Kluwer Academic Publishers。

Horton, J. J. (2019)：《关于卖方容量的买方不确定性：成因、后果与一种部分解决方案》，管理科学，65(8)，3518–3540。

Immorlica, N., B. Lucier, V. Manshadi, and A. Wei(2021)：《匹配平台上近似最优搜索的设计》，载于第*22*届美国计算机协会经济学与计算会议论文集，第632–633页。

Kanoria, Y., and D. Saban (2021)：《在匹配平台上促进伙伴搜索》，《管理科学》，67(10)，5990–6029。

Kittsteiner, T., and B. Moldovanu(2005): 《优先级拍卖与依赖处理时间的队列规则》, 《管理科学》, 51(2), 236–248。Kleiner, A., B. Moldovanu, and P. Strack(2021): 《极点与主序关系: 经济学应用》, 《计量经济学》, 89(4), 1557–1593。Larson, R. C. (1987年): 《队列视角: 社会正义与排队心理学》, 《运筹学》, 35, 895–905。

Leshno, J.（2019）: 《超负荷等待名单中的动态匹配》, 讨论论文, SSRN 工作论文 2967011。

———（2022）: 《超负荷等待名单中的动态匹配》, 美国经济评论, 112(12), 3876–3910。

Lingenbrink, D., and K. Iyer（2019）: 《不可观测队列中的最优信号机制》, 运筹学, 67, 1397–1416。

Madsen, E., and E. Shmaya （2025）: 《集体维护》, *arXiv* 预印本 *arXiv:2407.05196*。

Margaria, C.（2020）: 《排队学习》, 讨论论文, 波士顿大学。

McAfee, R. P., and J. McMillan（1992年）: 《串通投标团伙》, 美国经济评论, 第579–599页。

Mekonnen, T. (2019): 《稀缺资源的随机搜索与定向搜索》, 工作论文。
Mendelson, H., and S. Whang (1990): 《M/M/1 队列的最优激励相容优先级定价》, 运筹学, 38(5), 870–883。Milgrom, P. R., and R. J. Weber(1982): 《拍卖与竞争性投标理论》, 计量经济学: 计量经济学会期刊, 第1089–1122页。

Myerson, R. B. (1981)：《最优拍卖设计》，运筹学数学，6(1)，58–73。

Naor, P. (1969年)："通过征收通行费调节队列规模"，《计量经济学》，37，15–24。

Pai, M. M., and R. Vohra (2013)："最优动态拍卖与简单指数规则"，运筹数学，38(4)，682–697。

Pavan, A., I. Segal, and J. Toikka(2014)："动态机制设计：一种 Myerson 式方法"，《计量经济学》，82(2)，601–653。

Schummer, J.(2021)："影响候补名单"，经济理论杂志，195，105263。

Shanthikumar, J. G., and U. Sumita(1987年)："单服务台队列中逗留时间的凸序：先进先出与后进先出服务规则的极值性质"，应用概率杂志，24，737–748。

Shapley, L. S., and M. Shubik (1971)：《分配博弈 I：核心》，国际博弈论杂志，1(1)，111–130。

Su, X., and S. Zenios (2004)：《肾脏分配中的患者选择：排队规则的作用》，制造与服务运营管理，6，280–301。

Thorisson, H.(1992年)：《平稳再生过程的构造》，随机过程及其应用，42(2)，237–253。

Wolff， R. W.（1982）："泊松到达看到时间平均"，运筹学，30，223–231。

# 在线附录

## 再生过程

给定一个随机过程，我们记作 $\theta = \{\theta(t) : t \geq 0\}$，可以设想存在一个特定的随机时刻 $\tau_1$，过程在该时刻以概率意义上“重新开始”。如果从该时刻起过程的演化，即 $\{\theta(\tau_1 + t) : t \geq 0\}$，与原过程具有相同的分布，且独立于此前的历史，那么我们称过程 $\theta$ 在时刻 $\tau_1$发生了再生。过程在区间 $[0, \tau_1)$ 内的演化部分，以及再生时刻 $\tau_1$ 本身，称为第一个周期，记作 $C_1 = \{\{\theta(t) : 0 \leq t < \tau_1\}, \tau_1\}$。该周期的持续时间称为第一个周期长度，即 $T_1 = \tau_1$。

如果存在这样的再生时刻 $\tau_1$，则该过程的性质意味着，这种重启行为将会持续下去。必然会出现第二个再生时刻 $\tau_2 > \tau_1$，它标志着第二个周期 $C_2$ 的结束，而该周期与第一个周期同分布。沿着这一逻辑继续下去，我们会得到一列再生时刻 $\{\tau_k : k \geq 1\}$（其中有$\tau_0 = 0$），构成一个更新过程。对于 $k \geq 1$ 而言，周期长度 $T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ 是独立同分布的（i.i.d.）；因此，周期 $C_k$ =$\{\{\theta(\tau_{k-1} + t) : 0 \leq t < T_k\}, T_k\}$ 也都是独立同分布的对象。

如果再生时刻所对应的底层更新过程也是正常返的，则称再生过程为**正常返**；当期望周期长度有限且为正时，即 $0 < \mathbb{E}[T_1] < \infty$，便属于这种情况。如果期望周期长度为无穷大（$\mathbb{E}[T_1] = \infty$），则称该过程为**零常返**。

由于再生时刻 $\{\tau_k\}$ 构成一个更新过程，且各周期 $\{C_k\}$ 独立同分布，因此可以计算长期时间平均；我们将看到，它等于一个周期内的期望值除以该周期的期望长度。若 $\theta$ 是再生过程，则对于任意可测函数 $f(x)$，变换后的过程 $f(\theta(t))$ 也是再生过程，并且具有完全相同的再生时刻。这一性质使我们能够

为这类函数的时间平均建立一个一般定理。

主要结果由以下定理精确表述。

**定理 A.11**。 如果 $\theta$ 是一个正常返再生过程，且 $f = f(x)$ 是满足 $\mathbb{E}[\int_0^{T_1} |f(\theta(s))|ds] < \infty$ 的函数，那么以下结论成立：

- 该过程的长期时间平均以概率为*1*收敛：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\theta(s))ds = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$$

- 时间平均期望的极限也收敛到相同的值：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}[f(\theta(s))]ds = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$$

这里， $T = T_1$ 是第一个周期长度，而 $Y = Y_1 = \int_0^{T_1} f(\theta(s))ds$ 是 $f(\theta)$ 在第一个周期内累积的值。

证明。 令 $N(t) = \max\{j : \tau_j \le t\}$ 表示截至时间 $t$发生的再生次数，并令$Y_j = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(\theta(s))ds$ 表示第 $j^{th}$ 个周期获得的奖励。定理第一部分的证明分两步进行。

首先假设函数 $f$ 为非负函数（$f \ge 0$）。由于时间 $t$ 必定位于第 $N(t)$ 个再生周期与第 $(N(t) + 1)$ 个再生周期之间，因此我们可以对 $f(\theta(s))$ 的积分进行界定。总奖励至少等于所有已完成周期的奖励之和，至多等于所有已完成周期的奖励之和加上下一个完整周期的奖励。这给出了夹逼不等式：

$$\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \le \frac{1}{t}\int_0^t f(\theta(s))ds \le \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N(t)+1} Y_j$$

我们首先将下界改写为一个乘积来考察：

$$\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j = \frac{N(t)}{t}\cdot\frac{1}{N(t)}\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

由于 $t \to \infty$，根据初等更新定理，项 $\frac{N(t)}{t}$ 收敛于 $\frac{1}{\mathbb{E}[T]}$。第二项是具有有限均值的独立同分布随机变量 $Y_j$ 的平均值（符合该定理的假设），根据大数强律收敛于 $\mathbb{E}[Y]$。因此，该下界收敛于 $\frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$。

类似地，上界可以改写为 $\frac{N(t)+1}{t} \cdot \frac{1}{N(t)+1} \sum_{j=1}^{N(t)+1} Y_j$。由于 $\frac{N(t)+1}{t} \to \frac{1}{\mathbb{E}[T]}$，上界也收敛到相同的极限 $\frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$。根据夹逼定理，积分项也必定收敛到 $\frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$，由此证明了非负情形下的结论。直接推论是，上界与下界之差（恰好为 $\frac{Y_{N(t)+1}}{t}$）以概率为1收敛到 0。

接下来，假设函数 $f$ 不一定是非负的。我们可以将第一种情形的结论应用于非负函数 $|f|$。令 $Y_j^* = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |f(\theta(s))| ds$。根据前一步，我们知道 $\frac{Y^*_{N(t)+1}}{t} \to 0$ 以概率为1。

现在，我们将 $f$ 的积分分解为对完整周期求和，再加上最后一个不完整周期中的余项：

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta(s))ds = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j + \frac{1}{t}\int_{\tau_{N(t)}}^t f(\theta(s))ds$$

如前所示，右侧第一项收敛于 $\frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}$。第二项是误差项，我们需要证明它收敛于 0。我们可以对其绝对值作如下界定：

$$\left|\frac{1}{t}\int_{\tau_{N(t)}}^t f(\theta(s))ds\right| \le \frac{1}{t}\int_{\tau_{N(t)}}^t |f(\theta(s))|ds \le \frac{1}{t}\int_{\tau_{N(t)}}^{\tau_{N(t)+1}} |f(\theta(s))|ds = \frac{Y^*_{N(t)+1}}{t}$$

由于我们已经证明 $\frac{Y^*_{N(t)+1}}{t} \to 0$，误差项收敛于 0。至此，定理第一部分的证明完成。

□

直接应用 定理 A.11 即可刻画平稳分布。

**推论 A.1.** 假设 $P$ 是 $\theta = \{\theta(t) : t \ge 0\}$ 的平稳分布，其中 $t \ge 0\}$ 是一个正常返

再生过程。那么，对于每个可测集 $\Theta' \subset \Theta$,

$$\Pr\{\theta \in \Theta'\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{\theta(s)\in\Theta'\}} ds = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]}, \quad \text{with probability 1}$$

此外,

$$\Pr\{\theta \in \Theta'\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Pr\{\theta \in \Theta'\} ds = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[T]},$$

其中 $T = T_1$ 和 $Y = \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{\theta(s)\in\Theta'\}} ds$。因此， $P$ 也是 $\theta(t)$ 的唯一极限分布。

证明。我们首先注意到，平稳分布与长期时间平均相一致。我们通过设定 $f(x) = \mathbf{1}_{\{x\in\Theta'\}}$来应用 定理 A.11 ，它满足该定理的条件。

□

我们不介绍再生过程的极限定理，因为这需要额外的背景知识（例如，关键更新定理）。感兴趣的读者可参阅Asmussen (2003）。

# B 定理3的证明

证明。假设首位在队者当且仅当队列长度达到 $K$ 时才决定离开队列。（最优决策采取这种形式显而易见。）我们可以通过动态规划来刻画队列长度（包括她本人）为 $k = 1, \ldots\ldots K$ 时首位在队者的价值 $w_k$ 。首先，注意到

$$w_1 = (\mu dt)v + (\lambda dt)w_2 + (1 - \mu dt - \lambda dt)(w_1 - cdt) + o(dt),$$

因为在接下来的短时间间隔 $dt$ 内，他要么以概率 $\mu dt$ 获得服务并收取 $v$，要么以概率 $\lambda dt$ 有一位新到达顾客到来，且他的价值转变为 $w_2$；或者两者都不发生，其余概率对应这种情况，此时他仍处于

s相同状态，只是他承担了等待成本 $cdt$。同样地，我们可以写出：

$$w_k = (\mu dt)w_{k-1} + (\lambda dt)w_{k+1} + (1 - \mu dt - \lambda dt)(w_k - cdt) + o(dt), \forall k = 2, ..., K-1;$$
$$w_K = (\mu dt)w_{K-1} + (1 - \mu dt - \lambda dt)(w_K - cdt) + o(dt),$$

这里我们利用了这样一个事实：当在 $k = K$ 发生新的进入时，首位在队者会立即离开队列。

将所有方程除以 $dt$ 并令 $dt \to 0$，我们得到一个方程组：

$$(\lambda + \mu)w_1 = \mu v + \lambda w_2 - c;$$
$$(\lambda + \mu)w_{k-1} = \mu w_{k-2} + \lambda w_k - c, \forall k = 2, ..., K-1;$$
$$(\lambda + \mu)w_K = \mu w_{K-1} - c.$$

该方程组有唯一解。特别地，我们关注其最后一个坐标：

$$w_K = p_0^K \left( v - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{(K-j)c}{\mu} \rho^j \right),$$

因为首位在队者留在队列中直至队列长度为 $K$，当且仅当 $w_K \geq 0$。也就是说，后到先服务下的最大队列长度 $K_{\mathsf{LCFS}}$ 满足 $w_{K_{\mathsf{LCFS}}} \geq 0 \geq w_{K_{\mathsf{LCFS}}+1}$。

定义 最大队列长度为 a 的截断结构下的社会福利 s

$$W(K) = \sum_{k=1}^{K} p_k^K (\mu v - ck).$$

经过简单计算可知

$$\begin{aligned} \Delta W(K) &:= W(K) - W(K-1) \\ &\propto v - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{(K-j+1)c}{\mu} \rho^j \\ &\propto w_K. \end{aligned}$$

因此，当且仅当 $\Delta W(K) \geq 0$ 时， $w_K \geq 0$ 。结合 $W(K)$ 关于 $K$ 准凹这一事实，即可得出结论。

□

# C 定理4 的证明

证明。 当一个人发现自己处于 $k$队列中，或加入 $k$队列时，我们可以写出其期望等待时间：[C.40]

$$\tau_k = (\mu dt)\left[\frac{k-1}{k}\tau_{k-1}\right] + (\lambda dt)\tau_{k+1} + (1-\mu dt-\lambda dt)[\tau_k + dt] + o(dt), \forall k < K;$$
$$\tau_K = (\mu dt)\left[\frac{K-1}{K}\tau_{K-1}\right] + (1-\mu dt)[\tau_K + dt] + o(dt),$$

其中 $\tau_0 \equiv 0$. 两边除以 $dt$ ，并令 $dt \to 0$，得到

$$(\mu+\lambda)\tau_k = \mu\left[\frac{k-1}{k}\tau_{k-1}\right] + \lambda\tau_{k+1} + 1, \forall k < K; \tag{C.2}$$
$$\mu\tau_K = \mu\left[\frac{K-1}{K}\tau_{K-1}\right] + 1. \tag{C.3}$$

Che 和 Tercieux 的在线附录 Che 和 Tercieux(即将出版。)（其中考虑了更一般的原始过程）表明，该系统存在一个满足以下条件的唯一解

$$\frac{1}{\mu} \leq \tau_1 \leq .... \leq \tau_K \leq \frac{K}{\mu}.$$

事实上，我们可以证明 $K < \frac{K}{\mu}$÷ 否则，(C.3) 意味着 $\tau_K = \tau_{K-1} = K/\mu$，将其代入倒数第二个方程可得 $\tau_{K-2} = (K-1)_{K\mu}{}^2 > \frac{K}{\mu} = \tau_K$，这与单调性矛盾。（类似地，可以证明 $\tau_1 > 1/\mu$。）由于 $K_{SIR0}$ 是满足 $v - c\tau_K \geq 0$ 和 $K < \frac{K}{\mu}$ 的最大 $K$，即 FCFS 下第 $K$ 个新到达顾客的等待时间，因此我们得出 $K_{\text{SIRO}} \geq K_{\text{FCFS}}$。为证明 $K_{\text{SIRO}} \leq K^*$，不失一般性，我们可以假设 $K^* < \infty$ 。在这种情况下，($IR_B$) 在 $K^*$ 处取等号。显然，($IR_B$) 在 SIRO 下成立。为说明这一点

C.[40]这些是应用动态规划逻辑得到的递归方程。这里我们利用这样一个事实：除非状态发生变化（有新的买方带着 $k < K$ 到来，或有商品到来），否则即使等待时间经过一个很短的时段 $dt$，状态仍保持不变；该时段长度为 $dt$。

写作：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_k^{K_{\mathsf{SIRO}}}(\mu v - ck) \\
=&\mu v \sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_k^{K_{\mathsf{SIRO}}} - c \sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_k^{K_{\mathsf{SIRO}}} k \\
=&\lambda v \sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_{k-1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} - c\lambda \sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_{k_1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} \tau_k \\
=&\lambda \sum_{k=1}^{K_{\mathsf{SIRO}}} p_{k-1}^{K_{\mathsf{SIRO}}}(v - c\tau_k) \\
\geq&0,
\end{aligned}
$$

其中，第三个等式由与（第一项）的平稳性相关的平衡条件以及利特尔法则（第二项）得出；最后一个不等式则源于这样一个事实：对于买方而言，要加入一个 $k-1$、$v - c\tau_k \geq 0$的队列。由于$(IR_B)$ 在 $K^*$处取等号，因此 $K^* \geq K_{\mathsf{SIRO}}$。

□

# D 定理5的证明定理5

证明。回想一下，最优解对应于一种临界值策略：当且仅当队列状态为 $k < K^*$ 时，设计者才邀请买方加入队列（也可能在 $k = K^* - 1$ 处进行配给），并要求受邀者留在队列中，直到他们领取商品$v$。为便于说明，假设在 $k = K^* - 1$ 处没有配给。[D.41] 如前所述，最优信息策略会告知买方“进入”或“不得进入”。（“不得进入”通过一项承诺来执行：若有人进入，则不分配商品。）买方则根据设计者的机制、推荐行动，以及他们在队列中已等候的时间 $t \geq 0$，对相关历史 $h \in H_0$进行推断。

D.41该证 明在对更新公式稍作调整后可更一般地成立；详情参见Che a nd Tercieux (forth.)。

假设一位买方刚刚到达，并收到加入队列的邀请。如果他加入队列，他会如何看待队列长度？给定最优信息策略和最优临界值 $K^*$，在稳态下，他的合理信念是：加入队列后，队列长度将以如下概率为 $k$ ： [D.42]

$$\gamma_k^0 = \begin{cases} \frac{p_{k-1}^{K^*}}{\sum_{i=1}^{K^*} p_{i-1}^{K^*}} = \frac{\rho^{k-1}}{\sum_{i=1}^{K^*} \rho^{i-1}} & \text{if } k = 1, ..., K^* \\ 0 & \text{if } k > K^*. \end{cases} \tag{D.4}$$

根据利特尔法则，最优信息策略下买方的期望等待时间为：

$$\frac{\sum_{k=1}^{K^*} k p_k^{K^*}}{\lambda \sum_{j=1}^{K^*} p_{j-1}^{K^*}},$$

如果买方一直留在队列中直到领取$v$，则该结论与服务优先规则无关。因此，在后一假设下，买方加入队列的期望收益为：

$$\begin{aligned} v - c\frac{\sum_{k=1}^{K^*} k p_k^{K^*}}{\lambda \sum_{j=1}^{K^*} p_{j-1}^{K^*}} &= \frac{1}{\lambda \sum_{j=1}^{K^*} p_{j-1}^{K^*}} \left[ \lambda \sum_{j=1}^{K^*} p_{j-1}^{K^*} v - c \sum_{k=1}^{K^*} k p_k^{K^*} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda \sum_{j=1}^{K^*} p_{j-1}^{K^*}} \left[ \mu \sum_{k=1}^{K^*} p_k^{K^*} v - c \sum_{k=1}^{K^*} k p_k^{K^*} \right] \\ &\propto \sum_{k=1}^{K^*} p_k^{K^*} (\mu v - ck) \geq 0, \end{aligned}$$

其中，我们利用平衡条件得到第二个等式，并利用 $(IR_B)$ 得到不等式。由此可知，在假设买方加入队列后会继续留在队列中的情况下，当最优机制在最优信息策略下建议买方加入队列时，买方有加入队列的激励（无论采用何种服务优先规则，包括先到先服务）。

接下来，我们将证明，买方加入先到先服务队列后，有动力继续留在队列中

D.42 这只是根据加入建议对队列状态的平稳分布进行贝叶斯更新（该建议表明 $k \in \{0, ..., K^* - 1\}$）。使用平稳性意味着，买方的长期信念是该系统已经运行了很长时间。这一点通过 PASTA（“泊松到达观察时间平均值”）得到了形式化验证；参见 Wolff (1982)。

。为此，我们将证明，买方在队列中花费的时间 $t$ 越长，其剩余预期等待时间不会增加。在先到先服务下，买方的队列位置是其队列位置的充分统计量，即其在队列中的到达顺序： $\ell$。在 $t=0$时，其对队列位置 $\ell=1,...,K^*$ 的信念可简单表示为 $\gamma_\ell^0$。随着 $t$ 增加，买方对其队列位置的信念将按以下递推方程演变：对于任意 $dt>0$, [D.43]

$$\gamma_\ell^{t+dt}=\frac{\gamma_\ell^t(1-\mu dt)+\gamma_{\ell+1}^t\mu dt}{\sum_{i=1}^{K^*}\gamma_i^t(1-\mu dt)}+o(dt),$$

对于 $\ell=1,\ldots\ldots,\ K^*$，其中 $\gamma_{K^*+1}^t\equiv 0$。我们希望证明，对于所有 $t>0$，$(\gamma_\ell^0)$ 在似然比意义上支配 $(\gamma_\ell^t)$，这将意味着期望剩余等待时间随 $t$ 增大而减少。

利用上述方程（其中 $dt\to 0$），可以推导出关于似然比的一组常微分方程（ODE）：

$$\dot{r}_\ell^t=\mu r_\ell^t\left(r_{\ell+1}^t-r_\ell^t\right),\tag{D.5}$$

对于 $\ell=2,\ldots\ldots,\ K^*$，其中 $r_{K^*+1}^t\equiv 0$。根据巴拿赫不动点定理，该系统有唯一解。(D.4) 给出边界条件： $r_\ell^0=\rho$ 对于 $\ell=2,\ldots\ldots,\ K^*$。存在两种情况。首先假设 $K^*=\infty$。在这种情况下， $r_\ell^t$ 关于 $t$是常数，因此显然有 $r_\ell^t\le r_\ell^0$ 对于所有 $t$。

接下来， $K^*<\infty$。在这种情况下，对于所有 $\ell=2,\ldots\ldots,\ K^*-1$，都有 $\dot{r}_\ell^0=0$，并且 $\dot{r}_{K^*}^0<0$。再次对该常微分方程求导，得到

$$\ddot{r}_\ell^t=\mu\dot{r}_\ell^t\left(r_{\ell+1}^t-r_\ell^t\right)+\mu r_\ell^t\left(\dot{r}_{\ell+1}^t-\dot{r}_\ell^t\right).\tag{D.6}$$

如果 $\dot{r}_\ell^t>0$ 在某个 $t$ 处，存在最小的 $t$，在该处 $\dot{r}_\ell^t$ 在 $\ddot{r}_\ell^t>0$ 的条件下穿过零点，fo r

D.[43]分子表示在队列中停留了时长为 $t+dt$ 的时间后，他的队列位置为 $\ell$ 的概率。如果出现以下任一情况，该事件就会发生：(i) 买方在 $t$ 时已经处于队列位置 $\ell$，且在 $dt$ 期间，他前面的代理人和他本人均未得到服务；或者 (ii) 他在 $t$ 时处于队列位置 $\ell+1$，且他前面的一位买方在 $t+dt$ 时得到服务。

某个 $\ell$。[D.44] 由 (D.6)，我们有 $\ddot{r}_\ell^t = 0$，矛盾。 □

[D.44] 我们选择最大的 $\ell$ 如果这种情况发生在多个 个 $\ell$ 中。