arXiv:2601.00176v1 [math.PR] 1 Jan 2026

一阶内趋随机反应系统的指数遍历性

CHUANG XU

摘要。化学反应网络是广受认可的建模框架，可用于描述源自各个科学领域的多种现象，例如生物化学、生态学、流行病学以及社会与政治科学。本文证明，每个一阶 内趋性 随机质量作用反应系统（SMART）都是本质的（即，状态空间中的每个状态都属于底层连续时间马尔可夫链模型的某个闭通信类），并且具有指数遍历性。证明基于我们在一篇配套论文中关于一阶内趋反应网络的最新结果：[C.X., 一阶内趋反应网络。arXiv:2409.01598v2]。此外，我们还证明，被一阶端向 SMART 支配 的随机反应系统（其倾向函数可以是非线性的）具有指数遍历性。为展示这些结果的适用性，我们给出了多个高阶 SMART 的示例，包括：(1) 具有一阶内趋性渐近极限 的 SMART，以及 (2) 一阶内趋 SMART 的平移的合并。

1. 引言

背景。 反应网络是一个统一多种区室模型的框架[29]，适用于确定性情形和随机情形。它被广泛用于对多个科学领域中的现象建模，包括遗传学 [11], 系统生物学 [23, 14], 种群过程 [42], 计算机科学 [43], 博弈论 [45], 和社会科学 [19]。数十年来，对反应网络的研究逐渐发展成为一门理论，称为化学反应网络理论（CRNT） [23, 21]。

每个反应网络都可以表示为一个有向图，称为反应图。这样的图定义了一个动力系统，称为反应系统；它既可以是在宏观尺度上描述确定性情形中物种浓度的常微分方程（ODE），也可以是在微观尺度上描述随机情形中物种分子数的连续时间马尔可夫链（CTMC）。以连续时间马尔可夫链建模的反应网络称为随机反应系统 （SRS）。

化学反应网络理论中的一个核心数学问题，是根据相关反应图的性质，回答有关反应系统定性动力学性质的问题。一个颇具争议的开放问题是所谓的全局吸引子猜想（GAC），早在 20 世纪 70 年代就已提出 [26]：每个复平衡质量作用系统在每个正化学计量相容类内都有一个全局吸引的正平衡点。

内趋性是嵌入于欧几里得空间中的图所具有的一种性质，由 Craciun、Nazarov 和 Pantea 在 [16] 中引入，用于通过将该猜想置于更广泛的背景下研究全局吸引子猜想。在 [16], 中，他们猜想每个内趋性的（κ变量[1]质量作用系统都具有

日期：2026年1月5日。2020 数学主题分类。37N25, 60J27, 97C42。关键词与短语。连续时间马尔可夫链、弱可逆反应网络；正常返；渐近极限；网络平移。夏威夷大学马诺阿分校数学系，美国夏威夷州檀香山，96822。电子邮箱：chuangxu@hawaii.edu。本研究得到夏威夷大学马诺阿分校启动经费以及西蒙斯基金会数学家差旅资助（MP-TSM-00002379）的支持。[1]“κ-变量”表示反应速率常数是取值于正实数紧子集的时间函数。

常微分方程是持久的，这意味着存在一个紧吸引子，该吸引子紧嵌入于 $\mathbb{R}^d_+$中。

随机情形下的 GAC 类比 [16] 得以证明，这归功于一项精妙的观察：复平衡随机反应系统的平稳分布 [7] 的显式泊松乘积形式具有超多项式尾部：

定理 A。 *[6]* 每个复平衡随机质量作用反应系统（*SMART*）都是遍历的[2]

一个更一般的猜想，尽管自 Kurtz 在 20 世纪 70 年代的开创性研究以来 [35, 36, 37]已非正式地存在了大致相同的时间，但直到较近时期才由 Anderson 和 Kim [8] 于 2018 年正式提出；若该猜想成立，它将推广定理A：

猜想 B。每个弱可逆 *SMART* 都是遍历的。

下文概述部分关于这一猜想进展的已知结果。对于颇具启发性的反例，感兴趣的读者可参阅例如 [2, 1]。

SMART 类	结果	参考资料	主要方法
双分子 with 其他的——假设	指数遍历性（EE）[3]	[8, 5, 9]	层级序列
双分子、弱可逆	EE	[4]	层级序列和一个离散的嵌入链论证
具有强连通的反作用图，以及复合物包含一个多重对于每一种单一物种物种			
单物种、弱可逆	EE	[25]	线性李雅普诺夫函数
一维、内趋性	EE	[46]	A 判据确立于 [51]
双分子，弱可逆 三角形，	EE	[38]	尺度方法和一种经过调整的李雅普诺夫漂移判据
遍历	EE	[3]	A 修正后的路径和庞加莱不等式 方法
具有强一级循环的遍历循环	次指数遍历性	[34]	A 已修改 path 和层级序列 方法
双分子、具有内趋性的一个平稳分布	遍历性	[49]	线性李雅普诺夫函数

表 1. 关于 SMART 遍历性的已知结果（不完全列举）

尽管在一维情况下，SMART [46, 51] 的常返性和暂态性最多可由三个参数确定，但即使仅在线性转移率的二维生灭过程中，连续时间马尔可夫链的稳定性也可能相当复杂（参见 [33, 28] ，其中给出了尚不完整但可能是最完整的分类），这与线性常微分方程或线性区室系统的经典稳定性理论形成对比 [29]。值得注意的是，最近已根据系数矩阵的赫尔维茨稳定性（即相应线性确定性反应系统的雅可比矩阵）建立了单分子 SMART 满足暂态性和常返性（实际上是指数遍历性）的充分条件

[2]原结论涉及正常返，而对于不可约连续时间马尔可夫链以及因此对于本质 SMART，正常返等价于遍历性。

）中的 [13, 推论 9、推论 20]。值得注意的是，关于在 SRS 背景下以倾向函数不等式的形式表述指数遍历性存在线性李雅普诺夫函数的条件，已出现在化学反应网络理论文献中，例如 [24]。然而，要识别出满足此类条件的反应网络结构，而不对相关系数矩阵进行谱分析，并非易事。相较之下，本文不提供矩阵条件，而是给出指数遍历性的充分网络条件，从而可以避免谱分析：仅需考察相关反应图，即可确定 SRS 的指数遍历性。

主要结果概述。 本文的一个主要结果如下。

定理 C。 每个一阶[4] 内趋性 *SMART* 都是本质的且指数遍历。

首先值得指出的是，并非每个一阶 SMART 都是如此。下面的例子表明，单分子 SMART 甚至可能发生分岔。

例 D。 考虑以下单分子 SMART：

$$\mathcal{R}\colon\quad \begin{array}{ccc} S_2 & \xrightarrow{\kappa_{12}} & S_1+S_2 \\ {\scriptstyle 1}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \kappa_{22}} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa_{21}} \\ 0 & \underset{\kappa_{11}}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & S_1 \end{array}$$

其中 $\kappa_{ij}>0$ 对于 $i,\ j=1,\ 2$。由 [33, 定理 4] 和 [28, 定理 2] (参见 [28,附录 I(B)]) 可知$\mathcal{R}$ 由定义在$\mathbb{N}_0^2$ 上的不可约连续时间马尔可夫链（实际上是一个生灭过程）建模，当且仅当.....时是常返的

$$\kappa_{11}\kappa_{22}\geq\kappa_{12}\kappa_{21}$$

此外，我们知道，当不等式严格成立时，$\mathcal{R}$ 是指数遍历的 [13, 推论 9]。因此，当 $\kappa_{12}\kappa_{21}-\kappa_{11}\kappa_{22}$ 穿过零时，这个 SRS 会发生分岔（关于常返性）。

定理 C是定理3.4 和定理 3.10的推论。证明基于构造一个线性李雅普诺夫函数，该函数以一篇相关研究中的一阶内趋反应网络特征刻画（命题3.2 和命题 3.3）为基础 [48]。由此可知，每个一阶弱可逆 *SMART* 都是本质的，且指数遍历，因为弱可逆反应图具有端向性 [16]。

值得注意的是，根据定理 A ，每个一阶弱可逆 SMART 都是遍历的，因为它是复平衡的 [7]。因此，本文的结果表明稍多一些，即对于这类反应系统，不仅具有遍历性。

尽管端向性足以保证一阶 SMART 具有指数遍历性，但一般而言，它（甚至强端向性）不足以保证遍历性，甚至不能保证常返性或非爆炸性，已有的多个示例便证明了这一点 [2, 5]; 即使复平衡（它能推出弱可逆性，进而推出端向性），也不能保证指数遍历性 [3, 34]，以下广为人知的示例便支持这一结论。

例E。 无论反应速率常数为多少正值，以下二阶可逆 SMART 均可证明在 [3] 中是次指数遍历的（另见 [34]）：

$$0\rightleftharpoons S_1+S_2\quad S_2\rightleftharpoons 2S_2 \tag{1.1}$$

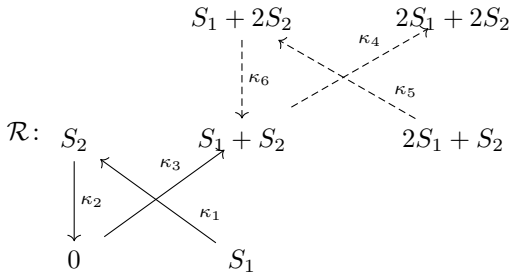
定理 C 向具有 非线性倾向函数 的 SRS 的扩展的宽泛表述如下。

[4]本文交替使用“一阶”和“单分子”来指代反应物所含物种分子数不超过一个的反应网络。在其他文献中，例如 [30], “单分子”可能有更狭义的含义，即生成物所含分子数也不超过一个。

定理 F。 一个被一阶端向 *SMART*“支配”的 *SRS*，在它们共同的闭互通类上呈指数遍历性。

其精确表述见定理 4.1；更适用条件下的推论见推论 4.2。下文将给出定理 F 在一个高阶示例中的应用。

示例 G。 考虑以下三阶 SMART



它可以表示为一阶端向 SMART $\mathcal{R}_1$ 与 $\mathcal{R}_1$ 的平移的组合，其中前者由实线箭头表示的反应组成，后者由虚线箭头表示的其余反应组成，且忽略反应速率常数。由定理 F 可知，无论反应速率常数取何值，$\mathcal{R}$ 都是指数遍历的（更多细节见示例 5.6 ）。

其他具有特定网络模式、并以一阶端向 SMART 为基础构建的高阶随机反应系统示例包括 具有一阶端向 *SMART* 渐近极限的 *SRS*（示例 5.8）。

提纲。 第 2 节介绍反应网络的符号记法和基本概念。定理 C 的证明见第 3 节。定理F 的证明见第 4 节；第 F 节给出若干示例以展示定理5的适用性。第 6 节提供简要讨论与展望。

2. 预备知识

记号。令 $\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$ 表示非负实数集，$\mathbb{R}_{++} \subseteq \mathbb{R}$ 表示正实数集。令 $\mathbb{N}_0$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示非负整数集和正整数集。对于 $d \in \mathbb{N}$，令 $[d]$ 表示从 1 到 d的连续整数集合 $\{i\colon\ i = 1, \ldots, d\}$。对于向量 $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ 和集合 $V \subseteq \mathbb{R}^d$，令 $\operatorname{supp} v := \{j\colon\ v_j \neq 0\}$，并令 $\operatorname{supp} V := \cup_{v \in V} \operatorname{supp} v$，分别表示它们的支撑。若向量 $v \in \mathbb{R}^d$ 满足对所有 $i \in [d]$都有 $v_i > 0$，则称其为正向量，记作 $v > 0$。若向量 $v \in \mathbb{R}$ 的 $-v$ 为正向量，则称其为负向量。令 $\{e_i\}_{i=1}^d$ 为 $\mathbb{R}^d$的标准基，并将 $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^d e_i$ 中对 d 的依赖省略；这将由上下文明确。相较之下，0稍作滥用，同时表示标量和向量。对于 $x, y \in \mathbb{N}_0^d$, $x \geq y$（逐分量），令 $x^y = \prod_{i=1}^d \prod_{\ell=0}^{y_i - 1} (x_i - \ell)$表示降阶乘。令 $\mathbf{M}_d(\mathbb{R})$表示所有实数项的 $d \times d$ 矩阵构成的集合。若矩阵的所有特征值实部均为负，则称其为赫尔维茨稳定矩阵。若矩阵的所有非对角元素均为非负，则称其为梅茨勒矩阵。

反应网络由三个有限且非空的集合组成： d符号集合，称为物种 $\mathsf{S} := \{S_i\}_{i=1}^d$；复合物集合 $\mathsf{C} \subseteq \{y = \sum_{i=1}^d \ell_i S_i\colon\ \ell_i \in \mathbb{N}_0\}$；以及反应集合 $\mathsf{R} \subseteq \{y \to y'\colon\ y, y' \in \mathsf{C}\ \ y \neq y'\}$。为方便起见，忽略物种的符号后，每个复合物$y = \sum_{i=1}^d \ell_i S_i$ 均可表示为向量 $(\ell_1, \ldots, \ell_d)$。任何反应 $y \to y'$实际上都是一对有序的复合物，其中复合物 y 称为反应物（或来源），y' 称为产物，而 $y' - y$ 称为反应向量。根据定义，所有反应向量都非零。反应网络由其反应图表示，即一个有向图 (C, R)，其顶点集合为 C，有向边集合为 R。此外，令 C_+ 表示反应物集合。由于反应网络的所有信息都编码在集合 R 中，我们简单地用其反应集合 R 表示该反应网络。若反应网络的反应图由互不相交的强连通分量构成，则该反应网络称为弱可逆

物种 S_i 若在任何反应中都不发生分子变化，则称为纯催化物种。为便于阐述且不失一般性，我们始终假设反应网络不含纯催化物种。否则，按照惯例，总可以将纯催化物种的动力学效应纳入反应图的边权重中。实数域中反应网络 R 的所有反应向量的线性张成空间称为化学计量子空间，记为 $\mathsf{S}_{\mathcal{R}}$。$\mathsf{S}_{\mathcal{R}}$ 的维数 $\dim \mathsf{S}_{\mathcal{R}}$ 通常称为反应网络 R 的维数，而 $\mathsf{S}_{\mathcal{R}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的正交补记为 $\mathsf{S}_{\mathcal{R}}^{\perp}$。若 $\mathsf{S}_{\mathcal{R}}^{\perp}$ 包含一个正向量，则该反应网络称为守恒的。令 $\ell_{\mathcal{R}}$ 为 (C, R) 的强连通分量数。R 的缺陷定义为整数 $\#\mathsf{C} - \dim \mathsf{S}_{\mathcal{R}} - \ell_{\mathcal{R}}$，该值总是非负的 [21]。对于弱可逆反应网络，其缺陷等于反应图的边权重需要满足的线性无关方程数量，以使该反应网络达到复平衡 [32, 21]。对于任意反应 $y \to y'$，反应物的 ℓ_1-范数 $\|y\|_1$ 称为该反应的分子数；而 $\max_{y\to y'\in \mathsf{R}} \|y\|_1$ 是反应网络 R 的分子数。分子数为一的反应和反应网络均称为单分子反应和单分子反应网络。若反应 $y \to y' \in \mathsf{R}$ 满足 $y \le y'$，则称其为递减反应。

反应倾向函数 $\lambda_{y\to y'}$ 是定义在 $\mathbb{N}_0^d$ 上的非负函数，用于量化反应 $y \to y' \in \mathcal{R}$ 发生的可能性。一组反应网络 $\mathcal{R}$ 的倾向函数$\Lambda := \{\lambda_{y\to y'}\colon\ y \to y' \in \mathcal{R}\}$ 称为随机动力学；此外，我们称 $(\mathcal{R}\ \Lambda)$ 为随机反应系统 (SRS)。只要上下文中的随机动力学明确，我们就简称 SRS 为$\mathcal{R}$ 。给定一个 SRS $(\mathcal{R}\ \Lambda)$。若 $(\mathcal{R}_*, \Lambda_*)$ 是 $(\mathcal{R}\ \Lambda)$ 的子反应系统，则$\mathcal{R}_*$ 由$\mathcal{R}$ 中的一部分反应组成，且 $\Lambda_* \subseteq \Lambda$ 由$\mathcal{R}_*$中反应的倾向函数组成。

定义 2.1. 若随机动力学 $\Lambda = \{\lambda_{y\to y'}\colon\ y \to y' \in \mathcal{R}\}$ 对每个$y \to y' \in\mathcal{R}$都满足下述条件，则称其为***G***通用的，

$(\mathbf{G})$ $\lambda_{y\to y'}(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ge y, \quad x \in \mathbb{N}_0^d$

通用动力学是指，要使反应网络中的某个反应以正概率发生，必须有足量分子能够构成该反应的反应物。

几乎所有常见的随机动力学都是一般的 [10]。**本文中，我们仅考虑一般 SRS**。

一种特定的一般随机动力学 Λ 称为随机质量作用动力学，如果每个反应 $y \to y'$ 的倾向函数都是下降阶乘的乘积:

$$\lambda_{y\to y'}(x) = \kappa_{y\to y'} x^{\underline{y}}$$

这样，每个 *SMART* 都与一个加权反应图相关联，并且可以由其定义（边的权重为反应速率常数）。对于每个 SMART，其分子数通常称为阶数。因此，单分子 SMART 属于一阶。

此外，我们定义两个 SRS 的联合。

定义 2.2。 设 $(\mathcal{R}_1, \Lambda_1)$ 和 $(\mathcal{R}_2, \Lambda_2)$ 是两个具有动力学 $\Lambda_i = \{\lambda^{(i)}_{y\to y'}\colon\ y \to y' \in\mathcal{R}_i\}$ 的 SRS，其中 $i = 1,2$。我们将两个 SRS 的联合定义如下:

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 := \{y \to y' \colon y \to y' \in \mathcal{R}_1 \text{ or } y \to y' \in \mathcal{R}_2\}$$

其关联的动力学由下式给出

$$\lambda^{(1,2)}_{y\to y'}(x) = \begin{cases} \lambda^{(1)}_{y\to y'}(x) + \lambda^{(2)}_{y\to y'}(x), & \text{if } y \to y' \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2, \\ \lambda^{(1)}_{y\to y'}(x), & \text{if } y \to y' \in \mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2, \\ \lambda^{(2)}_{y\to y'}(x), & \text{if } y \to y' \in \mathcal{R}_2 \setminus \mathcal{R}_1, \end{cases} \qquad \text{for } x \in \mathbb{N}_0^d$$

SRS 建模。 给定一个 SRS（$\mathcal{R}$ Λ），其中 $\Lambda = \{\lambda_{y\to y'}\colon\ y \to y' \in \mathcal{R}\}$，令 X_t 表示在时间 $t \geq 0$时 $\mathcal{R}$ 中各物种的计数。则 X_t 是在环境状态空间 $\mathbb{N}_0^d$上的连续时间马尔可夫链，其扩展生成元 $\mathcal{L}$ 由下式给出

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y\to y'\in\mathcal{R}} \lambda_{y\to y'}(x)(f(x+y'-y)-f(x)),$$

对于每个 $f \in$D($\mathcal{L}$), $\mathbb{N}_0^d$上的所有实值函数所构成的集合。

定义 2.3. 给定一个一般 SRS (R Λ)，对于两个（可能相同的）状态 z_1、$z_2 \in \mathbb{N}_0^d$，若 z_1 可通过 (R Λ) 到达 z_2，或者 z_2 可通过 (R Λ)从 z_1 到达，则记为 $z_1 \rightharpoonup z_2$；这表示作为底层连续时间马尔可夫链的状态，z_1 可到达 z_2 [40]。特别地，若 $z_1 \rightharpoonup z_2$ 和$z_2 \rightharpoonup z_1$均可通过 (R Λ) 到达，则 z_1和 z_2在 (R Λ) 下互通，记为 $z_1 \leftrightarrow z_2$。

根据动力学的泛型性，$z_1 \rightharpoonup z_2$ 当且仅当存在一个（可能重复的）反应序列 $\{y_j \to y_j'\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{R}$，使得 $z_2 = z_1 + \sum_{i=1}^m (y_i' - y_i)$ 且

$$x + \sum_{i=1}^{j-1}(y_i' - y_i) \geq y_j, \quad \text{for } j = 1,\dots,m,$$

其中按惯例，$\sum_{i=1}^0 (y_i' - y_i) = 0$。

状态空间 $\mathbb{N}_0^d$ 可分解为不同类型的互通类 [50]。若环境空间 $\mathbb{N}_0^d$ 仅由闭通信类构成，则 SRS 是本质的 。已知每个弱可逆泛型 *SRS* 都是本质的 [41, 引理 4.6]（另见 [50]）。

定义 2.4. 设 (R Λ) 和 (R′, Λ') 是两个共享同一组 d 物种的 SRS。若对于每个 x，在共同环境空间 $\mathbb{N}_0^d$中，(R Λ) 的 $x \rightharpoonup y$都蕴含 (R′, Λ') 的 $x \rightharpoonup y$，则称 (R Λ) 可结构嵌入到 (R′, Λ') 中，记作 (R Λ) $\to$(R′, Λ')。此外，若 (R Λ) $\to$(R′, Λ') 且 (R′, Λ') $\to$(R Λ)，则称 (R Λ) 与 (R′, Λ') 结构等价，记作 (R Λ) $\leftrightarrow$(R′, Λ')。

端向性反应网络。 下面我们回顾分别在 [16] 和 [22], 中引入的内趋性和强内趋性反应网络。这两个概念最初都是为研究确定性质量作用系统的持久性 和持久性 而提出的。

定义 2.5。 设$\mathcal{R}$ 为一个反应网络。对于每个 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \mathsf{S}_{\mathcal{R}}^{\perp}$， u 在 $\mathbb{R}^d$ 上定义一个偏序:

$$y \geq_u z \Leftrightarrow (y-z)\cdot u \geq 0; \quad y >_u z \Leftrightarrow (y-z)\cdot u > 0$$

令 $\mathcal{R}_u \coloneqq \{y \to y' \in \mathcal{R}\colon (y'-y)\cdot\ u \neq 0\}$ 为反应向量与 u 不正交的反应集合。令$\mathcal{C}_{u,+}$ 为子反应网络$\mathcal{R}_u$的反应物集合，并令 max$_u\mathcal{C}_{u,+}$ 为$\mathcal{C}_{u,+}$中关于 u 的极大元素集合。

那么，若对于任意给定的 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \mathsf{S}_{\mathcal{R}}^{\perp}$，以及每个反应 $y \to y' \in \mathcal{R}_u$，只要它有一个关于 u 的极大反应物 $y \in$ max$_u\mathcal{C}_{u,+}$，就有 $y >_u y'$，则$\mathcal{R}$ 是内趋性的。此外，若对于每个 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \mathsf{S}_{\mathcal{R}}^{\perp}$，都存在 $y \to y' \in \mathcal{R}_u$，使得$y \in$ max$_u\mathcal{C}$+ 且 $y >_u y'$，则内趋性反应网络是强内趋性的。

3. 一阶内趋反应网络

下面我们聚焦于一阶反应网络。给定任意一阶反应网络（$\mathcal{C}$，$\mathcal{R}$），令（$\mathcal{C}^0, \mathcal{R}^0$）表示（$\mathcal{C}$，$\mathcal{R}$）中包含零复合物的弱连通分支（可能为空），并令（$\mathcal{C}^\bullet$，$\mathcal{R}^\bullet$）表示（$\mathcal{C}^0, \mathcal{R}^0$）的补集。令 $0 \leq d_0 \leq d$表示$\mathcal{R}^0$中的物种数。根据排除任何反应中纯催化物种的假设，$\mathcal{R}^\bullet$ 可能只包含$\mathcal{R}$物种的一个真 子集。

给定任意 SMART $\mathcal{R}$，令 $A = (a_{ij})_{d\times d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ 满足

$$a_{ij} = \sum_{e_i\to y'\in\mathcal{R}} \kappa_{e_i\to y'}(y_j' - y_j), \quad i,j = 1,\dots,d$$

为 $\mathcal{R}$ 的净流矩阵，且 $b=(b_1,\dots,b_d)$ 满足

$$b_i=\sum_{0\to y'\in\mathcal{R}}\kappa_{0\to y'}y'_i,\quad i=1,\dots,d$$

常数流入向量的 $\mathcal{R}$。显然，A 是一个梅茨勒矩阵，并且 $b\geq 0$。

3.1. **本质性**。在本小节中，对于一阶 SMART$\mathcal{R}$，我们探讨以下问题：

(Q1) 与 $\mathcal{R}^0$ 相关联的连续时间马尔可夫链在 $\mathbb{N}^{d_0}$ 上总是不可约的吗?
(Q2) $\mathcal{R}^\bullet$ 是弱可逆且零缺陷（WRDZ）的吗?
若 (Q1) 和 (Q2) 的答案均为肯定，则很容易证明 $\mathcal{R}$ 是本质的。

然而，一般而言，这两个问题的答案都可能是否定的，下面给出一个简单的反例

$$\mathcal{R}\colon S_1\xrightarrow{\kappa_1}0\quad S_2\xrightarrow{\kappa_2}S_3$$

下面，我们将确认每个一阶内趋性 SMART 对这两个问题的肯定回答，从而证明每个一阶内趋性 *SMART* 都是本质的（定理 3.4）。在直接进行定理3.4的证明之前，我们先从下面的例子中获得一些直观认识。

例 3.1。考虑下面的 SMART

$$\mathcal{R}\colon S_1\xrightarrow{\kappa_1}S_2\xrightarrow{\kappa_2}0\xrightarrow{\kappa_3}2S_1$$

为方便起见，我们按照反应速率常数的索引对反应进行排序。为了证明$\mathcal{R}$ 是本质的，首先注意到 (0，0)、(1，0)、(0，1) 是相互连通的。这可以通过观察路径 (1，0) $\rightharpoonup$ (0，1) $\rightharpoonup$ (0，0)（经由反应 1、2）以及路径 (0，0) $\rightharpoonup$ (2，0) $\rightharpoonup$ (1，1) $\rightharpoonup$ (1，0)（经由反应 3、1、2）来验证。随后，利用由三个状态 (0，0)、(1，0)、(0，1) 构成的这一循环的重复，可以证明由于动力学的泛型性，$\mathcal{R}$ 是本质的。

为证明定理 3.4，我们依赖于一阶内趋反应网络的一个刻画（命题 3.2）以及一个连通性性质（命题 3.3），这些结果见[48]。

设 $\mathcal{R}$ 为一阶反应网络。定义其单体化 ($\mathcal{C}^\spadesuit$,$\mathcal{R}^\spadesuit$)为

$$\mathcal{R}^\spadesuit=\mathcal{R}^*\cup\{0\to S_k\}_{k\in K}\quad\text{and}\quad\mathcal{C}^\spadesuit=\{y,y'\colon y\to y'\in\mathcal{R}^\spadesuit\},$$

其中$\mathcal{R}^*=\{y\to y'\in\mathcal{R}\colon\|y\|_1=1\}$ 由$\mathcal{R}$ 中的所有单分子反应组成，且$K=\operatorname{supp}\{y'\colon 0\rightharpoonup y'\text{ for }\mathcal{R}\}$。注意，$\mathcal{R}^\spadesuit$是一阶的，且为零缺陷。

命题 3.2。 *[48, 定理 5.10]* 设 R 为一阶反应网络。 n

$$\mathcal{R}\ \textit{is endotactic}\ \Leftrightarrow\mathcal{R}^\spadesuit\ \textit{is endotactic}\ \Leftrightarrow\mathcal{R}^\spadesuit\ \textit{is WRDZ}$$

命题 3.3。 *[48, 引理 5.5]* 设(C,R) 为具有 d个物种的一阶内趋反应网络。那么(C^0,R^0) 和$(C^\bullet,R^\bullet)$ 不共享任何物种。假设 $R^0\neq\emptyset$。令

$$J=\{j\in[d]\colon e_j\rightharpoonup 0\},\ K=\operatorname{supp}\{y'\in C^0\colon 0\rightharpoonup y'\},\ L=\{\ell\in J\setminus K\colon e_k\rightharpoonup e_\ell,\forall k\in K\}$$

Then

$$K\neq\emptyset;\quad K\cup L=J=\operatorname{supp}C^0\tag{3.1}$$

换言之，对于每个 $j\in[d]$，当且仅当以下条件之一成立时，存在一条从 e_j 到 0 的 R^0 中的路径：存在一条从 0 到复合物 $y'\in C^0$ 的路径，且 $y'_j>0$；或者存在一条从 0 到复合物 $y'\in C^0$ 的路径，且 $y'_k>0$，并且存在一条从 e_k 到 e_j 的路径。特别地，从 R^0 中每个非零反应物到 0 都存在一条路径。

定理 3.4. 设 R 是一个一阶内趋性 *SMART*。则 $R^\bullet$ 是弱可逆零缺陷的，且与 R^0 相关联的连续时间马尔可夫链在 $\mathbb{N}_0^{d_0}$ 上不可约。特别地，R 是本质的。

证明。 首先注意，根据命题 3.2 $\mathcal{R}^0$ 和$\mathcal{R}^\bullet$ 没有共同物种，因此 $\mathcal{R}$ 的每个互通类都是下列两者的笛卡尔积： $\mathcal{R}^0$在 $\mathbb{N}_0^{d_0}$中的一个互通类，以及$\mathcal{R}^\bullet$ 在 $\mathbb{N}_0^{d-d_0}$中的一个互通类。由于 弱可逆泛型 *SRS* 是本质的 [41, 引理 4.6] （另见 [50]），由以下两点可得 $\mathcal{R}$ 是本质的：(1) $\mathcal{R}^\bullet$ 是弱可逆零缺陷的；(2) 与 $\mathcal{R}^0$ 相关联的连续时间马尔可夫链在 $\mathbb{N}_0^{d_0}$上不可约。

令 R$^\spadesuit$ 为 R 的单体化。根据命题 3.2，R 和 R$^\spadesuit$ 都是内趋性的。由于 R$^\spadesuit$ 是弱可逆的，根据定义，(R$^\spadesuit$)$^\bullet$ = R$^\bullet$ 和 (R$^\spadesuit$)^0 也都是弱可逆的。因此，(1) 可由每个一阶弱可逆反应网络都是零缺陷的这一事实得出 [7] （另见 [48]）。由于 R^0 和 R$^\bullet$ 没有共同的物种，只需在假设 R = R^{0}的情况下证明 (2)。要在该假设下证明 (2)，进一步只需证明（利用命题 3.3 中的连通性）对所有 $j \in [d]$，R 都满足 $0 \leftrightarrow e_j$。

根据命题 3.3， $J = \operatorname{supp} \mathsf{C}^0 = [d]$。接下来只需证明对所有$j \in [d]$，R 都满足 $0 \rightharpoonup e_j$ 。根据命题 3.3，进一步只需证明对所有 $j \in K$，R 都满足 $0 \rightharpoonup e_j$ 。根据 K的定义，存在 $0 \to y' \in \mathsf{R}$，使得 $y'_j > 0$，或者 $y'_k > 0$ 且 $e_k \rightharpoonup e_j$。因此，只需分别证明前一种情况下的 $y' \rightharpoonup e_j$ 和后一种情况下的 $y' \rightharpoonup e_k$ 。我们只证明 $y' \rightharpoonup e_j$ ，因为同样的论证也适用于另一种情况。要看出这一点，由于 R 是通用的，只需通过 y'_ℓ 次重复从 e_ℓ到 0 的路径来构造一条从 y' 到 e_j 的路径，其中 $\ell \in \operatorname{supp} y' \setminus \{j\}$，并重复从 e_j 到 0 的路径 $y'_j - 1$ 次，且这些路径可按任意（选定的）顺序排列。

□

注记 3.5。 为了使定理 3.4 成立，从证明中很容易看出，随机质量作用动力学并非必要的；相反，$\mathcal{R}$（以及 $\mathcal{R}^0$）的动力学具有泛型性即可。

出于独立的研究兴趣，可以很容易地证明 $\mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R}^\spadesuit$。此外，$\mathcal{R} \to \mathcal{R}^\spadesuit$ 成立，无论 $\mathcal{R}$ 是否具有端向性（命题A.1）；然而，如果 $\mathcal{R}^\spadesuit$ ，$\to \mathcal{R}$ （因此 $\mathcal{R}^\spadesuit \leftrightarrow \mathcal{R}$）的逆向嵌入可能不成立，若 $\mathcal{R}$ 不具有 内趋性（因此根据命题 *3.2*$^\spadesuit$ ，R也不具有内趋性）。

例 3.6。 考虑以下通用的一阶 SRS

$$\mathcal{R}\colon 0 \xrightarrow{\kappa_1} S_1 + S_2$$

注意，

$$\mathcal{R}^\spadesuit\colon S_2 \xleftarrow{\kappa_1} 0 \xrightarrow{\kappa_1} S_1$$

因此，对于 $\mathcal{R}^\spadesuit$ ，但对于 $\mathcal{R}$ $0 \not\to e_1$ 。

E内趋性 SMART 的本质性是一阶内趋性 SMART 所特有的性质 .

例 3.7. 考虑以下二阶 SMART

$$\mathcal{R}\colon 0 \xrightarrow{\kappa_1} S_2 \quad 2S_2 \xrightarrow{\kappa_2} S_1 + S_2 \quad 2S_1 \xrightarrow{\kappa_3} S_1$$

很容易验证，$\mathcal{R}$ 具有内趋性，但并非本质的。事实上，(0,1) 是一个吸收态， $\mathbb{N}^2$ 是另一个闭通信类，而所有其他状态都是开放单元素类。值得注意的是，$\mathcal{R}$ 确实存在一个二阶 WRDZ 实现（而非一阶反应网络的单体化实现）

$$\mathcal{R}^\spadesuit\colon 0 \underset{\kappa_3/2}{\overset{\kappa_1/2}{\rightleftarrows}} 2S_2 \xrightarrow{\kappa_2/2} 2S_1$$

它作为一般 SRS 是本质的。

显然，对于一阶 SRS 的本质性而言，端向性是不必要的 。

例 3.8. 考虑一阶 SMART

$$0 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} S_1 \xrightarrow{1} 2S_1$$

不是内趋性的，而结构等价于内趋性 SMART $0 \underset{1}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} S_1$，因此也是本质的。

3.2. **指数遍历性**。 给定任意 SRS， Q对该 SRS 建模的底层连续时间马尔可夫链的矩阵会将环境状态空间唯一地分解 $\mathbb{N}_0^d$ 为互通类[40]（另见 [50]）。我们通过底层连续时间马尔可夫链的动力学性质来描述 SRS 的动力学性质。

定义3.9。 若某个 SRS 在一个闭通信类上对应的底层连续时间马尔可夫链具有常返/（指数）遍历性质，则称该 SRS 在该类上具有常返/（指数）遍历性质。若环境空间中的所有状态对于底层连续时间马尔可夫链都是暂留状态，则称该 SRS 为暂留。特别地，若一个本质的 SRS 在每个闭通信类上都具有常返/（指数）遍历性质，则称其为常返/（指数）遍历。

根据定理3.4，我们知道环境状态空间 $\mathbb{N}_0^d$ 任意一阶内趋性 SRS 均可分解为闭不可约分量。

定理 3.10。 若一阶 *SMART* 满足以下任一条件，则它是指数遍历的：
(i) 内趋性；*(ii)* 强内趋性；或 *(iii)* 弱可逆。

证明。 下文仅证明情形 (i)。情形 (ii) 和 (iii) 可由 (i) 推得，因为强内趋性反应网络和弱可逆反应网络均具有内趋性[16]（另见 [48]）。

若 $\mathrm{R}^0 = \emptyset$，则 R 是守恒的，因为 $\mathbf{1} \in \mathrm{S}_{\mathrm{R}}^{\perp}$，因此指数遍历性可由有限状态不可约底层连续时间马尔可夫链的 [31, 定理 5.3]得出。因此，不失一般性，我们假设 $\mathrm{R}^0 \neq \emptyset$。由 [48, 命题 6.1], 可知，与 R^0 相关联的净流矩阵 A_0 是赫尔维茨稳定的。由于 A_0 是梅茨勒矩阵， A_0 非奇异且 A_0^{-1}非负，并且存在一个正列向量 $v_0 \in \mathbb{R}^{d_0}$，使得 $A_0 v_0 < 0$ [12, 第 6 章，定理 2.3]（另见 [27, 定理 2.5.3]）。容易验证，根据命题 B.1，$(v_0, 1) \cdot x$ 是 R 指数遍历性的李雅普诺夫函数，其中 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{d-d_0}$。□

备注 3.11。 • 定理3.10对于高阶 SMART 通常不成立，例如参见例 E。由 [46] 可知，每个一维端战术 SMART 都是指数遍历的。特别地，每个一维弱可逆 SMART 都是指数遍历的。因此，根据推论 4.2(iii)，弱可逆 SMART 能够实现指数遍历的最大 阶数 和最大 维数 （从普遍 意义上说，即每个此类 SMART 都满足这一性质）均为一。

• 由 [48, 命题 6.1] 的证明可知 $A_0\mathbf{1} \leq 0$。然而， $V(x) = \mathbf{1} \cdot x = \sum_{i=1}^{d} x_i$ 可能 并非 总能成为一阶端战术 SMART 指数遍历性的李雅普诺夫函数。例如，考虑

$$\mathcal{R}\colon S_1 \xrightarrow{\kappa_1} S_2 \xrightarrow{\kappa_2} 0 \xrightarrow{\kappa_0} S_1 + S_2,$$

其中 $\mathrm{R} = \mathrm{R}^0$ 且 $A_0\mathbf{1} = (0, -\kappa_2)^T \not< 0$。下面，我们通过构造给出定理3.10证明中 v_0的一种选择。令 I 为 $d_0 \times d_0$ 的方阵，其所有元素均为 1。由于 A_0 是梅茨勒矩阵且为赫尔维茨矩阵，因此对于某个足够小的 $\epsilon > 0$ [12, ， 1 2 I $-\epsilon(A_0^{-1})$ 非负（参见 [27, 定理 2.5.3], 以及第 6 章，定理 2.3] ）。令$v_0 = (\mathrm{I} - \epsilon A_0^{-1})\mathbf{1}$。则 $v_0 \geq \frac{1}{2}\mathrm{I}\mathbf{1} = \frac{1}{2}d_0\mathbf{1} > 0$；此外，

$$A_0 v_0 = A_0(\mathbf{I} - \epsilon A_0^{-1})\mathbf{1} = d_0 A_0\mathbf{1} - \epsilon A_0 A_0^{-1}\mathbf{1} \leq -\epsilon\mathbf{1} < 0$$

- 尽管如此，一阶 SRS 的指数遍历性并不需要端向性，例如例3.8。

4. 倾向函数非线性的 SRS 的指数遍历性

本节首先证明，任何被一阶内趋性 SMART "支配"（即满足下文 (4.1)-(4.4) 中某个条件）的 SRS 都是指数遍历的。

以下**次线上界假设**从技术上确保了线性李雅普诺夫函数的存在，从而保证指数遍历性。

(SUB) $(\mathcal{R}\ \Lambda)$ 与 $\Lambda = \{\lambda_{y\to y'}\colon\ y \to y' \in \mathcal{R}\}$ 是一个一般 SRS，其子反应系统为 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }(\mathcal{R}\ \Lambda) \subseteq (\mathcal{R}\ \Lambda)$，该子系统是一阶内趋性 SMART；并且存在一个正列向量 $v_0 \in \mathbb{R}^{d_0}$ 满足 $A_0 v_0 < 0$，以及一个严格次线性[5] 函数 $f\colon\ \mathbb{N}_0^d \to \mathbb{R}$，使得对除有限多个 $x \in \mathbb{N}_0^d$ 以外的所有情形，

$$\sum_{y\to y'\in\mathcal{R}\setminus(\widehat{\mathcal{R}})^0} \lambda_{y\to y'}(x)((v_0,\mathbf{1})\cdot(y'-y)) \le f(x), \tag{4.1}$$

其中 A_0 是 $(\widehat{\mathcal{R}})$ 的净流矩阵[0]（$\widehat{\mathcal{R}}$ 的包含零复合物的弱连通分支），$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{d-d_0}$，且若 4.1 的左端在 $\mathcal{R} = (\widehat{\mathcal{R}})^0$ 时变为零。

定理 4.1. 设 R 是满足（***SUB***）的一阶内趋性 *SMART SRS*。假设 Γ 是 R 和 R 的一个公共闭通信类。那么 R 在 Γ上是指数遍历的。

证明。证明基于以下事实：$(v_0,\ \mathbf{1})\cdot x$ 是用于指数遍历性的线性李雅普诺夫函数，正如定理3.10的证明中所用。

由于 Γ 是$\mathcal{R}$的一个闭通信类，令 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$，其中 $\Gamma_2 \in \mathbb{N}_0^{d-d_0}$为（可能为空，因此也）有限集，且 $d_0 \le d$。令 $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ 和 $\mathcal{L}_{(\widehat{\mathcal{R}})^0}$ 分别为$\mathcal{R}$ 和（$\widehat{\mathcal{R}}$）^{0}, 的扩展生成元。由（**SUB**）可知，存在常数$c > 0$，使得对除有限多个 $x =$ 以外的所有$x^{(1)},\ x^{(2)} \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(v\cdot x) =& \mathcal{L}_{(\widehat{\mathcal{R}})^0}(v_0\cdot x^{(1)} + \|x^{(2)}\|_1) + \sum_{y\to y'\in\mathcal{R}\setminus(\widehat{\mathcal{R}})^0} \lambda_{y\to y'}(x)((v_0,\mathbf{1})\cdot(y'-y)) \\
=& \mathcal{L}_{(\widehat{\mathcal{R}})^0} v_0\cdot x^{(1)} + \sum_{y\to y'\in\mathcal{R}\setminus(\widehat{\mathcal{R}})^0} \lambda_{y\to y'}(x)((v_0,\mathbf{1})\cdot(y'-y)) \\
\le& (A_0 v_0)\cdot x^{(1)} + b_0\cdot v_0 + f(x) \le -c(v_0\cdot x),
\end{aligned}$$

由于 f 是严格次线性的，且 $A_0 v_0 < 0$，其中 A_0 和 b_0 分别是（$\widehat{\mathcal{R}}$）的净流矩阵和常数流入向量。根据命题 B.1，$\mathcal{R}$ 是指数遍历的。□

推论 4.2。设（$R\ \Lambda$），其中 $\Lambda = \{\lambda_{y\to y'}\colon\ \ y \to y' \in R\}$ 是一个包含一阶端向 *SMART* 子反应系统 （$R\ \Lambda$） $\subseteq$（$R\ \Lambda$） 的一般 *SRS*。设 A_0 为（$\widehat{R}$）^{0} 的净流矩阵，其中 $v =$（v_0, $\mathbf{1}$）为满足 $A_0 v_0 < 0$ 的正向量。设 Γ 为 R 和 R 的公共闭$\widehat{\ }$互通类。若以下条件之一成立，则（$R\ \Lambda$）在 Γ 上是指数遍历的：

(i) 对于 $R \setminus (\widehat{R})^0$, 中的每个反应 $y \to y'$，存在常数 $C > 0$，使得对于除有限多个 $x \in \Gamma$ 之外的所有情况，都有

$$\lambda_{y\to y'}(x)(v\cdot(y'-y)) \le C \tag{4.2}$$

[5]函数 $f\colon\ \mathbb{N}_0^d \to \mathbb{R}$ 是严格次线性的，如果 $\lim_{\|x\|_1\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|_1} = 0$。

(ii) $R\setminus(\widehat{R})^0$ 中的每个反应都沿着 v递减：对于每个 $y\to y'\in R\setminus(\widehat{R})^0$,

$$v\cdot(y'-y)\le 0 \tag{4.3}$$

(iii) $R\setminus(\widehat{R})^0$ 中的每个反应都是递减的：对于每个 $y\to y'\in R\setminus(\widehat{R})^0$,

$$y'\le y \tag{4.4}$$

证明。 容易验证，(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i)，且 (i) 蕴含（**SUB**），因此结论由定理 4.1 得出。□

注 4.3。 由于任意一阶内趋性/强内趋性/弱可逆 SMART$\widehat{\ }\mathcal{R}$ 都平凡地满足（**SUB**），其中 $\mathcal{R}=\mathcal{R}$，因此定理 4.1 推广了定理 3.10。

5. 示例

下面通过各种示例说明定理 4.1 和推论 4.2 的广泛适用性。

例 5.1。 设 $\mathcal{R}_1$ 是一个一阶端向 SMART，由物种 $S_1,\ S_2$ 组成，且满足 $\mathcal{R}_1=(\mathcal{R}_1)^0$。设 $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$，其中

$$\mathcal{R}_2=\{S_1+2S_2\xrightarrow{1}4S_2,\ S_1+2S_2\xrightarrow{1}3S_1+S_2,\ S_1+2S_2\xrightarrow{1}S_2\}$$

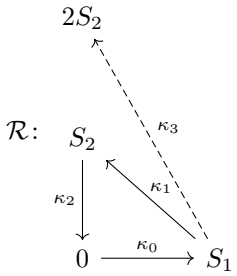
容易验证，$\mathcal{R}$ 和$\mathcal{R}_2$ 都不是内趋性的。设 $\widehat{\mathcal{R}}=\mathcal{R}_1$ 和 $v_0\in\mathbb{R}^2_{++}$ 满足 $A_0v_0<0$，其中 A_0 是$\mathcal{R}_1$的净流矩阵。注意，$\Gamma=\mathbb{N}_0^2$ 是$\mathcal{R}$和$\mathcal{R}$唯一的闭的$\widehat{\ }$互通类；此外，

$$\begin{aligned}\sum_{y\to y'\in\mathcal{R}\setminus(\widehat{\mathcal{R}})^0}\lambda_{y\to y'}(x)(v_0\cdot(y'-y))&=\sum_{y\to y'\in\mathcal{R}_2}\lambda_{y\to y'}(x)(v_0\cdot(y'-y))\\&=x_1x_2(x_2-1)v_0\cdot((-1,2)+(2,-1)+(-1,-1))=0\end{aligned}$$

应用定理 4.1，取 $f\equiv 0$，$\mathcal{R}$ 在 Γ上是指数遍历的。

注 5.2。 顺便一提， S_1+2S_2 例 5.1 中的对象通常称为虚拟源[15, 定义 4。1] 或 幽灵顶点 [18]，其流出反应的平均值为零（即从该顶点出发的反应向量之和为零）。虚拟源常用于研究混淆性确定性反应系统 [17]的问题。

例 5.3. 考虑以下一阶 SMART:



由命题 3.2 可知，R 不是内趋性的。尽管如此，移除虚线箭头中的反应$\widehat{\ }$后，我们得到一个一阶端向 SMART R $\subseteq$ R。根据定理 3.4，$\mathbb{N}_0^2$ 是 $\widehat{\mathrm{R}}^0$, 的唯一闭通信类，因此也是 R 的唯一闭通信类。注意，$\mathrm{R}\setminus(\widehat{\mathrm{R}})^0=\{S_1\xrightarrow{\kappa_3}2S_2\}$。取 $v=(2,1)\in\mathrm{S}^{\perp}\mathrm{R}\setminus(\widehat{\kappa})^0$，使得满足 (4.3)。于是由推论 4.2(ii) 可知，R 在 $\mathbb{N}_0^2$上指数遍历。

例5.4。 考虑以下二阶 SMART

$$\mathcal{R}\colon S_1 \xrightarrow{\kappa_1} S_2 \xrightarrow{\kappa_2} 0 \xrightarrow{\kappa_0} S_1 + S_2 \quad S_3 \underset{\kappa_4}{\overset{\kappa_3}{\rightleftharpoons}} S_4 \quad S_2 + S_3 \xrightarrow{\kappa_{23}} 0$$

它并非本质的：它有开放沟通类 $\mathbb{N}_0^2 \times \{(n,\ m-n)\colon n = 0, \ldots\ldots, m\}$，对应于 $m \in \mathbb{N}$，并且有唯一闭沟通类 $\Gamma := \mathbb{N}_0^2 \times \{(0,\ 0)\}$。尽管如此，它仍是一阶端向 SMART

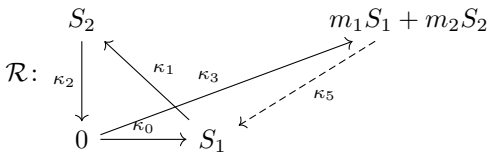
$$\widehat{\mathcal{R}}\colon S_1 \xrightarrow{\kappa_1} S_2 \xrightarrow{\kappa_2} 0 \xrightarrow{\kappa_0} S_1 + S_2 \quad S_3 \underset{\kappa_4}{\overset{\kappa_3}{\rightleftharpoons}} S_4$$

$\widehat{\ }$和 Γ 也是$\mathcal{R}$的闭通信类。因此

$$\mathcal{R} \setminus (\widehat{\mathcal{R}})^0 = \{S_3 \underset{\kappa_4}{\overset{\kappa_3}{\rightleftharpoons}} S_4 \quad S_2 + S_3 \xrightarrow{\kappa_{23}} 0\}$$

应用推论4.2(ii)，取 $v = (2,\ 1,\ 1,\ 1)$，$\mathcal{R}$ 在 Γ上指数遍历。

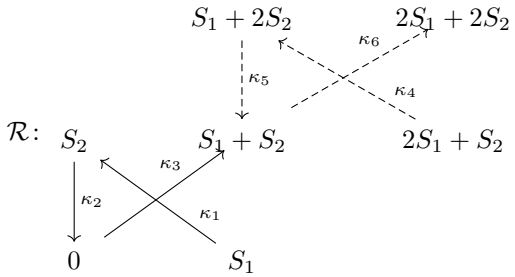
例5.5。考虑以下弱可逆 SMART：



其中 $m_1,\ \ m_2 \in \mathbb{N}$。移除用虚线箭头标记的递减反应后，我们得到$\widehat{\ }$一个一阶端向 SMART $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$，根据命题3.2。与前面的例子类似，可以证明 $\mathbb{N}_0^d$ 是两者的唯一闭通信类 $\widehat{\ }\mathcal{R}$和$\mathcal{R}$。由于 $(\widehat{\ }\mathcal{R})^0 = \widehat{\ }\mathcal{R}$，由推论4.2(iii)，$\mathcal{R}$ 是指数遍历的。

接下来，我们将给出一些基于一阶端向 SMART 模块的示例。

例5.6。 考虑以下三阶 SMART



注意，虚线箭头所示的反应集合可以看作是剩余反应集合 $\mathcal{R}$ 的平移（平移量为 (1,1)），但不保留动力学速率常数。容易验证，$\widehat{\ }\mathcal{R}$ 或 $\mathcal{R}$ 对应的底层连续时间马尔可夫链在 $\Gamma = \mathbb{N}_0^2$上不可约。此外，也很容易看出，$v_0 = (2,1)$满足 $A_0 v_0 < 0$，其中净流矩阵 A_0对应于 $(\widehat{\ }\mathcal{R})^0 = \widehat{\ }\mathcal{R}$，并且

$$\sum_{y \to y' \in \mathcal{R} \setminus (\widehat{\mathcal{R}})^0} \lambda_{y \to y'}(v \cdot (y' - y)) = -x_1 x_2(\kappa_4(x_1 - 1) + \kappa_5(x_2 - 1) - 3\kappa_6) \le 0,$$

对于所有满足 $\kappa_4(x_1 - 1) + \kappa_5(x_2 - 1) \ge 3\kappa_6$ 的 $x \in \Gamma$。由于

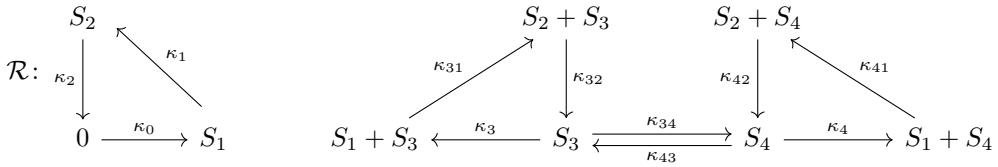
$$\{(x_1, x_2)\colon \kappa_4(x_1 - 1) + \kappa_5(x_2 - 1) < 3\kappa_6\} \cap \Gamma$$

是有限的，（4.1）得以满足。应用定理 4.1 可得，$\mathcal{R}$ 具有指数遍历性。

注 5.7。 顺带一提，尽管每个一维 内趋性 SMART 在每个闭通信类中都具有指数遍历性 [46, 定理 4。8], 并且（不同的）一维内趋性反应网络的平移的联合仍然具有内趋性，但这种联合 SMART 一般可能无法保持指数遍历性 ，例如例 E。

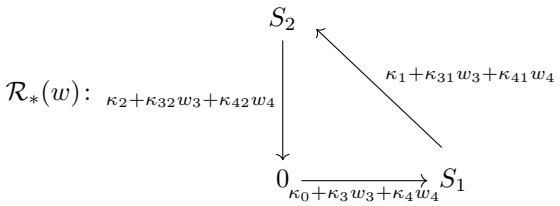
下面我们给出一个**具有一阶端向 SMART**渐近极限的 SMART 示例。

例5.8。考虑以下二阶 SMART



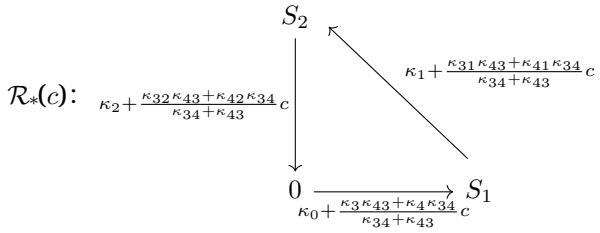
令 $\mathrm{R}_1=\{S_3 \overset{\kappa_{34}}{\rightleftharpoons} S_4\}$。显然，$\mathrm{R}_1$ 是一个守恒子反应网络（其中 $(1,1)\in\kappa_{43}\mathrm{S}_{\mathcal{R}_1}^{\perp}$），其物种 S_3 和 S_4 在 $\mathrm{R}\setminus\mathrm{R}_1$中的部分反应中充当催化剂；此外，由有限状态不可约连续时间马尔可夫链建模的弱可逆零缺陷随机质量作用系统 R_1 是指数遍历的，其平稳分布为有限状态集上的泊松平稳分布 π [7, 定理 4.2] 。在条件化于 $w=(w_3,w_4)\in\mathbb{N}_0^2$ 物种 S_3 和 S_4的计数后，R 可表示为以下条件反应网络：

(5.1)



很容易验证，$\mathrm{R}_*(w)$作为 SMART 是单分子且弱可逆零缺陷，因此根据定理3.10和 [7, 定理 4.2], 它是指数遍历的，且具有泊松平稳分布。注意，物种 S_3 和 S_4 的计数演化由 R_1控制，且独立于物种 S_1 和 S_2计数的演化。因此，随着时间趋于无穷，R 在物种 S_3 和 S_4 上的边缘分布收敛到 π 。仿照并借鉴渐近自治常微分方程 [44], 的极限，可以定义$\{\mathrm{R}_*(w)\colon w\in\mathbb{N}_0^2\}$——R 的一族条件随机反应系统，作为 R 的渐近极限。事实上，采用与例5.6类似的论证，也可以应用定理 4.1 来证明 R 是指数遍历的。

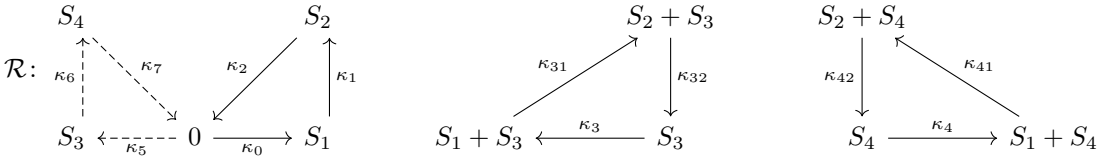
备注 5.9。 • 值得注意的是，相比之下，$\mathcal{R}$在示例 5.8被建模为确定性质量作用系统，在每个化学计量相容类中都有唯一的全局渐近稳定平衡 [48]。事实上，作为一个包含物种 S_1 和 S_2 、其动力学取决于物种 S_3 和 S_4浓度的确定性反应系统，限制在物种 S_1 和 S_2 上的确定性质量作用系统，在具有物种 c 总浓度为正的化学计量相容类上 S_3和 S_4 是渐近自治的，其极限是如下确定性质量作用系统



- 示例 5.8 进一步揭示了随机切换 *SRS* [13]稳定性研究的一些内容。事实上，从随机切换反应网络的角度来看，可逆反应 $S_3 \underset{\kappa_{43}}{\overset{\kappa_{34}}{\rightleftharpoons}} S_4$ 充当了环境（换句话说，$\kappa_{43}S_3$ 和 S_4 共同充当一个“开关”，将它们的分子总数限制为 1）。

在例5.8中，尽管控制催化剂计数演化的子反应系统 S_3 和 S_4 是守恒的，但催化物种子反应系统的守恒性对于具有一阶端向 *SMART* 渐近极限的 *SMART* 的指数遍历性并非必需。事实上，定理4.1并不适用，但该证明中类似的论证仍然足够，因此未来我们或可进一步推进这些论证，以期得到更强的结果。

例5.10。考虑以下 SMART，它是例5.8的一个变体：



容易验证，定义在$\Gamma = \mathbb{N}_0^4$ 上的底层连续时间马尔可夫链是不可约的。与例5.8类似， S_3 和 S_4 的演化独立于 S_1 和 S_2的演化，且由一个开放的[6] 一阶端向 SMART 控制——该子 SRS 由虚线箭头所示的反应构成。此外，$\mathcal{R}$ 具有相同的渐近极限$\{\mathcal{R}_*(w)\colon\ w \in \mathbb{N}_0^2\}$，其定义由反应网络（5.1）给出。

注意，R 的反应图由三个强连通分量组成。要应用定理 4.1，并使 Γ 也成为 R 的闭通信类，根据命题 3.2 对一阶内趋反应网络的刻画，我们只能选择 R 左侧的强连通分量作为 R（而不能选择该分量中的两个三角形之一）。不难验证，不存在满足 (4.1) 的 $v_0 \in \mathbb{R}^4_{++}$，因此定理3.10 不适用。尽管如此，仍然存在一个用于指数遍历性的线性李雅普诺夫函数。令 $v = (2, 1, 2c, c)$，其中正常数 $c > \max\{\frac{\kappa_3}{\kappa_6}, \frac{\kappa_4}{\kappa_7}\}$，则

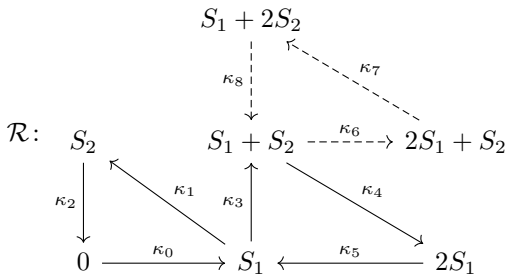
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(v\cdot x) = &\sum_{y\to y'\in\mathcal{R}} \lambda_{y\to y'}(x) v\cdot(y'-y)\\
&-(v_1-v_2)x_1(\kappa_1+\kappa_{31}x_3+\kappa_{41}x_4) - v_2x_2(\kappa_2+\kappa_{32}x_3+\kappa_{42}x_4)\\
=&2c\kappa_5+\kappa_0-(c\kappa_6-\kappa_3)x_3-(c\kappa_7-\kappa_4)x_4\\
&-x_1(\kappa_1+\kappa_{31}x_3+\kappa_{41}x_4) - x_2(\kappa_2+\kappa_{32}x_3+\kappa_{42}x_4)\\
\le&2c\kappa_5+\kappa_0-C(x\cdot v),
\end{aligned}
$$

其中 $C = \text{最小值}\{\frac{\kappa_1}{2},\ \cancel{\kappa_2},\ \frac{\kappa_6}{2}-\frac{\kappa_3}{2c},\ \cancel{\kappa_7}-\frac{\kappa_4}{c}\} > 0$。由命题 $\mathcal{R}$ B.1可得其具有指数遍历性。

人们可能会认为，定理 4.1 适用于示例5.6、示例 5.8或示例 5.10，或者这些例子中存在线性李雅普诺夫函数，这只是巧合：在这些例子中，高阶反应部分构成了同一个一阶内向反应网络的平移，而该网络是一个构件。下面的示例表明，定理 4.1 并不局限于这些模式。

[6]为了涵盖可能与环境发生质量交换的情况，按照 Feinberg 的定义，开放反应系统 [20] 是指包含“伪反应”的系统——这类反应以零复合物作为反应物或产物。

示例 5.11. 考虑以下三阶 SMART



设$\mathcal{R}_1$ 和$\mathcal{R}_2$ 分别是$\mathcal{R}$中的左下三角子反应网络和右下三角子反应网络。注意，$\mathcal{R}_2$ 不是$\mathcal{R}_1$，的平移，而是$\mathcal{R}_1$ 的逆反应的平移（即$\mathcal{R}_1$ 中的所有反应都被逆转）。此外，$\mathcal{R}$和$\mathcal{R}_1$ 共享唯一的互通类 $\Gamma=\mathbb{N}_0^2$，该互通类是闭的。取 $\widehat{\mathcal{R}}=\mathcal{R}_1,$，并令 $v=(2,1)$，使得$A_1v<0$，其中 A_1 是$\mathcal{R}_1$的净流矩阵。经过直接计算可得

$$\sum_{y\to y'\in\mathcal{R}\setminus(\widehat{\mathcal{R}})^0}\lambda_{y\to y'}(v\cdot(y'-y))=x_1g(x),$$

其中

$$g(x)=\kappa_3+\kappa_4x_2-2(x_1-1)\kappa_5+x_2(2\kappa_6-\kappa_7(x_1-1)-\kappa_8(x_2-1))$$

由于$\{x\colon g(x)>0\}\cap\mathbb{R}_+^2$有界，因此$\{x\colon g(x)>0\}\cap\mathbb{N}_0^2$有限。因此，(4.1)在 $f\equiv0$ 和4.1 定理 $\mathcal{R}$ 是指数遍历的。

示例 5.12. 从示例 5.11中的 SMART 中移除虚线箭头所示的反应集合后，我们得到一个二阶 SMART：$\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2$, 其中 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 在示例 5.11中定义。由于 $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R}$，$\mathbb{N}_0^2$ 再次是 $\mathcal{R}$的唯一闭通信类。$\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 的净流矩阵如下：

$$A_1=\begin{bmatrix}-\kappa_1 & \kappa_1\\ 0 & -\kappa_2\end{bmatrix},\quad A_2\begin{bmatrix}-\kappa_5 & 0\\ \kappa_4 & -\kappa_4\end{bmatrix}\tag{5.2}$$

注意，A_1 和 A_2 没有共同的下降方向：对于任意满足$v>0$ 的正向量 $A_1v<0$，我们有 $A_2v\not\leq0$。由于这一观察，不难验证定理 4.1 不适用于 $\mathcal{R}$。尽管如此，$\mathbf{1}\cdot x$ 是使$\mathcal{R}$指数遍历的李雅普诺夫函数，因为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(\mathbf{1}\cdot x)=&-\kappa_5x_1(x_1-1)+\kappa_3x_1-\kappa_2x_2+\kappa_0\\ \leq&-\kappa_2(x_1+x_2)+\frac{(\kappa_2+\kappa_3+\kappa_5)^2}{4\kappa_5}+\kappa_0\leq-\frac{\kappa_2}{2}\mathbf{1}\cdot x,\end{aligned}$$

除有限多个 $x\in\Gamma$ 外。

6. 讨论与展望

第 4 节中这些示例的大幅推广留待未来研究。细心的读者可能会注意到，我们缺少一个说明推论 4.2（i）情形的示例。或许可以很容易地构造一个不采用质量作用动力学的 SRS 作为示例；然而，对作者而言，构造一个 SMART 示例似乎并非易事。

根据定理 3，10, [48, 引理 4。15], 以及 [13, 定理 4、定理 8], 可以证明**一个在有限多个一阶端向 SMART 之间** 随机切换的马尔可夫过程**在切换速率较低和较高时都是指数遍历的** [47]；此外，不同类型的示例 [47]表明无论切换速率如何，这种指数遍历性结论都成立。值得注意的是，这类随机切换的一阶 SMART 可以表示为二阶 SMART，其中包含

新增的环境物种独立演化为次守恒弱可逆 SMART，并作为催化其他一阶反应的开关。因此，理解这类 SMART 的稳定性也可能有助于我们理解双分子 SMART 的猜想B 。

附录 A. 一阶反应网络到其单体化的结构嵌入

命题 A.1. 设 R 是一个一阶反应网络，$R^{\spadesuit}$ 是其单体化。假设 R 和作为 *SRS* 的 $R^{\spadesuit}$ 均为通用的。那么 $R \to R^{\spadesuit}$。

证明. 令 $x \rightharpoonup z$ 对于$\mathcal{R}$。那么存在一列（可能重复的）反应$y_i \to y_i' \in \mathcal{R}$，对应于 $i = 1,\ldots,m$，使得

$$x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j) \geq y_i, \quad i = 1,\ldots,m$$

其中，按约定 $\sum_{j=1}^{0}(y_j' - y_j) = 0$，且 $x + \sum_{j=1}^{m-1}(y_j' - y_j) = z$。我们用指标标记这些反应。不失一般性，假设 $y_i = 0$ 对于某个 $1 \leq i \leq m$成立。否则，根据单体化的定义，对于所有 $i = 1,\ldots,m$，$y_i \to y_i' \in \mathsf{R}^{\spadesuit}$，因此对于 R 有 $x \rightharpoonup z$。我们进一步假设第 i 个反应是第一个反应物为零的反应（因此对于 $j < i$，$y_j \neq 0$）。只需证明对于 R，$x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j) \rightharpoonup x + \sum_{j=1}^{i}(y_j' - y_j)$。注意，$x + \sum_{j=1}^{i}(y_j' - y_j) = x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j) + y_i'$。根据 $\mathsf{R}^{\spadesuit}$ 的定义，对于每个满足 $\operatorname{supp} y_i'$ 的 $k \in$，$0 \to S_k \in \mathsf{R}^{\spadesuit}$。因此，状态 $x + \sum_{j=1}^{i}(y_j' - y_j)$ 可以从状态 $x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j)$ 到达：对所有满足 $\operatorname{supp} y_i'$ 的 $k \in$，重复执行 $0 \to S_k$ 中的反应 $(y_i')_k$ 次即可。事实上，连接状态$x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j)$ 与状态 $x + \sum_{j=1}^{i}(y_j' - y_j)$ 的任何中间状态上，所有反应 $0 \to S_k \in \mathsf{R}^{\spadesuit}$ 都是活跃的，因为状态空间中的任何状态按分量均不小于 0。现在，基于相同的论证，可以通过归纳证明，在 i 不是第一个反应物为零的反应时，$x + \sum_{j=1}^{i-1}(y_j' - y_j)$ 到达状态 $x + \sum_{j=1}^{i}(y_j' - y_j)$。这表明对于 R，$x \rightharpoonup z$。□

附录 B. （指数）遍历性的 Lyapunov-Foster-Lyapunov 判据

定义在 V 的无界子集上的 $\mathbb{R}^d$ 非负函数是范数型的 [39]，如果 $\lim_{\|x\|_1 \to \infty} V(x) = \infty$。

命题 B.1. *[39, 定理 6.1]* 设 X_t 是状态空间$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ 上的不可约连续时间马尔可夫链，L 为其扩展生成元。则

- X_t 在 Γ 上遍历，当且仅当存在正常数 C 和非负范数型函数 V，使得

$$\mathcal{L}V(x) \leq -C$$

对除有限多个状态 $x \in \Gamma$之外的所有状态均成立；

当且仅当存在正常数 C 和非负范数型函数 V，使得• X_t 在 Γ 上指数遍历

$$\mathcal{L}V(x) \leq -CV(x)$$

除有限多个状态 $x \in \Gamma$ 外的所有状态。

参考文献

[1] Andrea Agazzi 和 Lucie Laurence。《无边界效应的化学反应网络中的噪声诱导稳定化》。arXiv:2506.12163，2025。[2] Andrea Agazzi 和 Jonathan C Mattingly。《看似稳定的化学动力学可能是稳定的、临界稳定的或不稳定的》。《数学科学通讯》，18(6):1605–1642，2018。[3] David F Anderson、Daniele Cappelletti、Wai-Tong Louis Fan 和 Jinsu Kim。《一种关于马尔可夫过程指数遍历性的新路径方法及其在随机反应网络中的应用》。《SIAM应用动力系统杂志》，24(2):1668–1710，2025。[4] David F Anderson、Daniele Cappelletti 和 Jinsu Kim。《具有单一连接类的随机建模弱可逆反应网络》。《应用概率杂志》，57(3):792–810，2020。[5] David F Anderson、Daniele Cappelletti、Jinsu Kim 和 Tung D Nguyen。《强端向反应网络的层级结构》。《随机过程及其应用》，130(12):7218–7259，2020。[6]David F Anderson、Daniele Cappelletti、Masanori Koyama 和 Thomas G Kurtz。《复平衡随机建模反应网络的非爆炸性》。《数学生物学通报》，80:2561–2579，2018。[7] David F Anderson、Gheorghe Craciun 和 Thomas G Kurtz。《零缺陷化学反应网络的乘积形式平稳分布》。《数学生物学通报》，72:1947–1970，2010。[8] David F Anderson 和 Jinsu Kim。《随机建模反应网络正常返的一些网络条件》。《SIAM应用数学杂志》，78(5):2692–2713，2018。[9] David F Anderson 和 Jinsu Kim。《两类随机建模反应网络的混合时间》。《数学生命科学与工程》，20(3):4690–4713，2023。[10] David F Anderson 和 Thomas G Kurtz。《化学反应网络的连续时间马尔可夫链模型》。载于《生物分子电路的设计与分析：系统与合成生物学的工程方法》，第3–42页。施普林格，2011。[11] George W Beadle。《生化遗传学》。《化学评论》，37(1):15–96，1945。[12] Abraham Berman 和 Robert J Plemmons。《数学科学中的非负矩阵》。工业与应用数学学会，1994。[13] Daniele Cappelletti、Aidan Howells 和 Chuang Xu。《具有渐近线性转移率的随机切换随机反应网络的稳定性》。arXiv:2507.09421v2，2025。[14] Gheorghe Craciun。《环面微分包含与全局吸引子猜想的证明》。arXiv:1501.02860，2015。[15] Gheorghe Craciun、Jiaxin Jin 和 Polly Y Yu。《复平衡、细致平衡和弱可逆系统的高效刻画》。《SIAM应用数学杂志》，80(1):183–205，2020。[16] Gheorghe Craciun、Fedor Nazarov 和 Casian Pantea。《质量作用律和幂律动力系统的持久性与持久性》。《SIAM应用数学杂志》，73(1):305–329，2013。[17] Gheorghe Craciun 和 Casian Pantea。《化学反应网络的可辨识性》。《数学化学杂志》，44(1):244–259，2008。[18] Abhishek Deshpande。《仅源实现、弱可逆单缺陷网络与动力学等价》。《SIAM应用动力系统杂志》，22(2):1502–1521，2023。[19] Peter Dittrich 和 Lars Winter。《作为解释社会现象的形式机制的反应网络》。载于《第四届经济学与社会复杂系统中基于主体的方法国际研讨会论文集》（AESCS 2005），第9–13页。2005年7月。[20] Martin Feinberg。《化学反应网络结构与复合等温反应器的稳定性-I：零缺陷定理与单缺陷定理》。《化学工程科学》，42(10):2229–2268，1987。[21] Martin Feinberg。《化学反应网络理论基础》。施普林格科学与商业媒体，2019。[22] Manoj Gopalkrishnan、Ezra Miller 和 Anne Shiu。《全局吸引子猜想的几何方法》。《SIAM应用动力系统杂志》，13(2):758–797，2014。[23] Jeremy Gunawardena。《面向计算生物学家的化学反应网络理论》。可访问：https://vcp.med.harvard.edu/papers/crnt.pdf，2003。

[24] Ankit Gupta、Corentin Briat 和 Mustafa Khammash。建立随机反应网络长期行为的可扩展计算框架。《PLoS Computational Biology》，10(6):e1003669，2014。[25] Mads C Hansen。随机反应网络中的准平稳分布。博士论文，哥本哈根大学，2018。[26] Fritz Horn 和 Roy Jackson。一般质量作用动力学。《Archive for Rational Mechanics and Analysis》，47:81–116，1972。[27] Roger A Horn 和 Charles R Johnson。《Topics in Matrix Analysis》，1994。[28] J Hutton。二维线性生灭过程的常返性与暂态性。《Advances in Applied Probability》，12(3):615–639，1980。[29] John A Jacquez 和 Carl P Simon。分室系统的定性理论。《SIAM Review》，35(1):43–79，1993。[30] Tobias Jahnke 和 Wilhelm Huisinga。解析求解单分子反应系统的化学主方程。《Journal of Mathematical Biology》，54:1–26，2007。[31] Daniel Jerison。通过绝对谱隙给出有限马尔可夫链的一般混合时间界。arXiv:1310.8021，2013。[32] Matthew Johnston。《化学反应网络理论专题》。博士论文，滑铁卢大学，2012。[33] Harry Kesten。多维马尔可夫链及多维线性生灭过程的常返性判据。《Advances in Applied Probability》，8(1):58–87，1976。[34] Minjun Kim 和 Jinsu Kim。马尔可夫链非指数遍历性的路径方法及其在化学反应系统中的应用：M. Kim，J. Kim。《Journal of Statistical Physics》，192(6):74，2025。[35] Thomas G Kurtz。作为纯跳马尔可夫过程极限的常微分方程解。《Journal of Applied Probability》，7(1):49–58，1970。[36] Thomas G Kurtz。逼近常微分过程的跳跃马尔可夫过程序列的极限定理。《Journal of Applied Probability》，8(2):344–356，1971。[37] Thomas G Kurtz。密度依赖马尔可夫链的极限定理与扩散近似。载于《随机系统：建模、辨识与优化》I，第67–78页。施普林格，1976。[38] Lucie Laurence 和 Philippe Robert。随机化学反应网络的尺度方法。arXiv:2310.01949，2023。[39] Sean P Meyn 和 Richard L Tweedie。马尔可夫过程的稳定性 III：连续时间过程的 Foster–Lyapunov判据。《Advances in Applied Probability》，25(3):518–548，1993。[40] James R Norris。《马尔可夫链》。剑桥统计与概率数学丛书第2卷。剑桥大学出版社，1998。[41] Loıc Paulev´e、Gheorghe Craciun 和 Heinz Koeppl。离散反应网络的动力学性质。《Journal of Mathematical Biology》，69:55–72，2014。[42] Hong Qian 和 Hao Ge。《生物学中的随机化学反应系统》。生命科学数学建模讲义。施普林格，2021。[43] David Soloveichik、Matthew Cook、Erik Winfree 和 Jehoshua Bruck。有限随机化学反应网络中的计算。《Natural Computing》，7:615–633，2008。[44] Horst R Thieme。渐近自治微分方程的收敛结果与 Poincar´e–Bendixson 三分法。《Journal of Mathematical Biology》，30(7):755–763，1992。[45] Tomas Veloz、Pablo Razeto-Barry、Peter Dittrich 和 Alejandro Fajardo。反应网络与进化博弈论。《Journal of Mathematical Biology》，68(1):181–206，2014。[46] Carsten Wiuf 和 CHUANG XU。随机反应网络的分类与阈值动力学。arXiv:2012.07954，2020。[47] CHUANG XU。随机切换一阶内趋反应系统的指数遍历性。准备中。[48] CHUANG XU。一阶内趋反应网络。arXiv:2409.01598v2，2024。[49] CHUANG XU。端向性随机反应系统的非爆发性。arXiv:2409.05340，2024。[50] CHUANG XU、Mads C Hansen 和 Carsten Wiuf。连续时间马尔可夫链的结构分类及其应用。《Stochastics》，94(7):1003–1030，2022。

[51] CHUANG XU、Mads C Hansen 和 Carsten Wiuf。具有多项式转移率的一维连续时间马尔可夫链动力学的完整分类。*Advances in Ap- plied Probability*，55(1):321–355，2023。