arXiv:2601.00179v1 [math.DS] 1 Jan 2026

康托最小系统的轨道等价

SU GAO、RUIWEN LI 和 YIMING SUN

Abstract. 本文研究若干博雷尔类康托尔极小系统的拓扑轨道等价关系的描述复杂度。具体而言，我们研究仅具有有限个遍历测度的所有康托尔极小系统所构成的博雷尔类，并证明该类上的轨道等价与等价关系 $=^+$博雷尔双可约。对于正则 $\{0,1\}$-托普利兹子移位这一子类，以及唯一遍历极小子移位这一子类，我们也证明了同样的结论。我们还研究有限拓扑秩极小子移位这一博雷尔类上的轨道等价。记 R_n 为拓扑秩 $n \geq 2$的极小子移位上的轨道等价。我们证明，对于任意 $n \geq 2$，R_n 几乎可数，即博雷尔可约于某个可数博雷尔等价关系。此外， R_2 几乎可和。另一方面，当 $n \geq 2$时，R_n 并不光滑；当 $n \geq 4$时，它并非几乎超有限；当 $n \geq 5$时，它并非几乎可树化。对于任意 $n \geq 2$，我们的构造给出了拓扑秩恰为 n 的唯一遍历极小子移位。

1. Introduction

本文从描述集合论的角度研究若干博雷尔类的 Cantor 极小系统上的拓扑轨道等价关系的复杂度。

在描述集合论中，通过博雷尔可约性的概念来比较标准博雷尔空间上的等价关系，从而衡量这些等价关系的相对复杂度。更具体地说，如果 E， F 分别是标准博雷尔空间 X， Y上的等价关系，那么，如果存在博雷尔映射 $f\colon X \to Y$，使得对于任意 x_1， $x_2 \in X$，我们就称E可博雷尔约于 F，记作 $E \leq_B F$，

$$x_1 E x_2 \iff f(x_1) F f(x_2).$$

我们称 E 与 F是博雷尔双可约的，记作 $E \sim_B F$，若 $E \leq_B F$ 且$F \leq_B E$。直观而言，若 $E \leq_B F$，则我们认为 E 的复杂度不超过 F的复杂度；若 $E \sim_B F$，则认为 E与 F具有相同的复杂度。给定一个等价关系 E，描述集合论的目标是找到一个易于理解的等价关系 F ，并证明$E \sim_B F$；这将完全确定 E的复杂度。若无法做到这一点，次优之策是为 E的复杂度找到一些上下界，也就是找到一些易于理解的等价关系 F_1 和 F_2 ，并证明$F_1 \leq_B E \leq_B F_2$；这也能提供关于E复杂度的大量信息。关于等价关系的描述集合论，以及

第一作者感谢国家自然科学基金委员会项目12271263和12250710128对其研究的部分资助。第二作者感谢国家自然科学基金委员会项目124B2001对其研究的部分资助。

许多易于理解的等价关系（称为基准等价关系）的定义，读者可参阅 [6]。

本文研究的等价关系是不同类别的康托尔极小系统之间的轨道等价。康托尔系统是一个二元组 (X,φ)，其中 X 是康托尔集，$\varphi\colon X\to X$ 是 X 上的自同胚。对于自同胚 $\varphi\colon X\to X$ 和 $x\in X$，x 在 φ 下的轨道记为 $\mathrm{orbit}_\varphi(x)$，它是集合 $\{\varphi^k(x)\colon k\in\mathbb{Z}\}$。如果对于任意 $x\in X$，$\mathrm{orbit}_\varphi(x)$ 在 X 中稠密，则称 φ 是极小的。如果 φ 是极小的，则称康托尔系统 (X,φ) 为康托尔极小系统。给定两个康托尔极小系统 (X,φ) 和 (Y,ψ)，如果存在同胚 $f\colon X\to Y$，使得对所有 $x\in X$，则称 (X,φ) 和 (Y,ψ) 轨道等价。

$$f(\mathrm{orbit}_\varphi(x))=\mathrm{orbit}_\psi(f(x)).$$

Giordano、Putnam 和 Skau [10] 对所有康托尔极小系统的轨道等价进行了奠基性研究。特别是，他们在以下著名定理中，将轨道等价与康托尔极小系统的不变概率测度联系起来。

定理 1.1 (Giordano–Putnam–Skau [10, 定理 2.2])。设 (X,φ) 和 (Y,ψ) 是康托尔极小系统。那么，以下条件等价：

(1) (X,φ) 和 (Y,ψ) 轨道等价。*(2)* 维数群 $K^0(X,\varphi)/\mathrm{Inf}(K^0(X,\varphi))$ 与 $K^0(Y,\psi)/\mathrm{Inf}(K^0(Y,\psi))$ 作为带序单位的维数群同构。*(3)* 存在一个同胚 $f\colon X\to Y$，将 X 上 φ-不变概率测度映到 Y 上的 ψ-不变概率测度。

所有康托尔极小系统构成的类是一个标准博雷尔空间（详情见第2节）。Melleray [19] 完全确定了这些类上轨道等价的复杂度，具体结果如下。

定理 1.2 (Melleray [19, 定理 5.9])。以下等价关系彼此博雷尔双可约：

(i) 所有 *Cantor* 极小系统的轨道等价。(ii) 所有托普利兹子移位的轨道等价。(iii) 所有 $\{0,1\}$-托普利兹子移位的轨道等价。(iv) 由群 S_∞ 的作用诱导的通用轨道等价关系 E_{S_∞}，其中 S_∞ 是所有 $\mathbb{N}$ 的置换所构成的群。

本文考察所有具有有限拓扑秩的 Cantor 极小系统这一类。这是所有 Cantor 极小系统的一个博雷尔子类，因此其自身也是一个标准博雷尔空间。我们将证明，对于任意正整数 K，拓扑秩为 K 的 Cantor 极小系统至多有 K 个遍历不变概率测度。鉴于此，我们还将考察仅具有有限多个遍历不变概率测度的所有 Cantor 极小系统构成的博雷尔类。以下结果将完全确定该类上轨道等价的复杂度。

定理 1.3. 以下等价关系彼此博雷尔双可约：

(i) 所有具有有限个遍历不变概率测度的康托尔极小系统之间的轨道等价。

(ii) 所有唯一遍历的康托尔极小系统之间的轨道等价。(iii) 所有唯一遍历极小子移位之间的轨道等价。(iv) 所有正则托普利兹子移位之间的轨道等价。(v) 所有正则 $\{0,1\}$-托普利兹子移位之间的轨道等价。(vi) 等价关系 $=^+$ 定义在 $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ 上如下：对于任意(x_n),(y_n) $\in(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$,

$$(x_n) =^+ (y_n) \iff \left\{x_n \in 2^{\mathbb{N}} \colon n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{y_n \in 2^{\mathbb{N}} \colon n \in \mathbb{N}\right\}.$$

从 **(ii)** 到 **(vi)** 的博雷尔可约性已在 [10, 推论 1] 中基本得到证明。

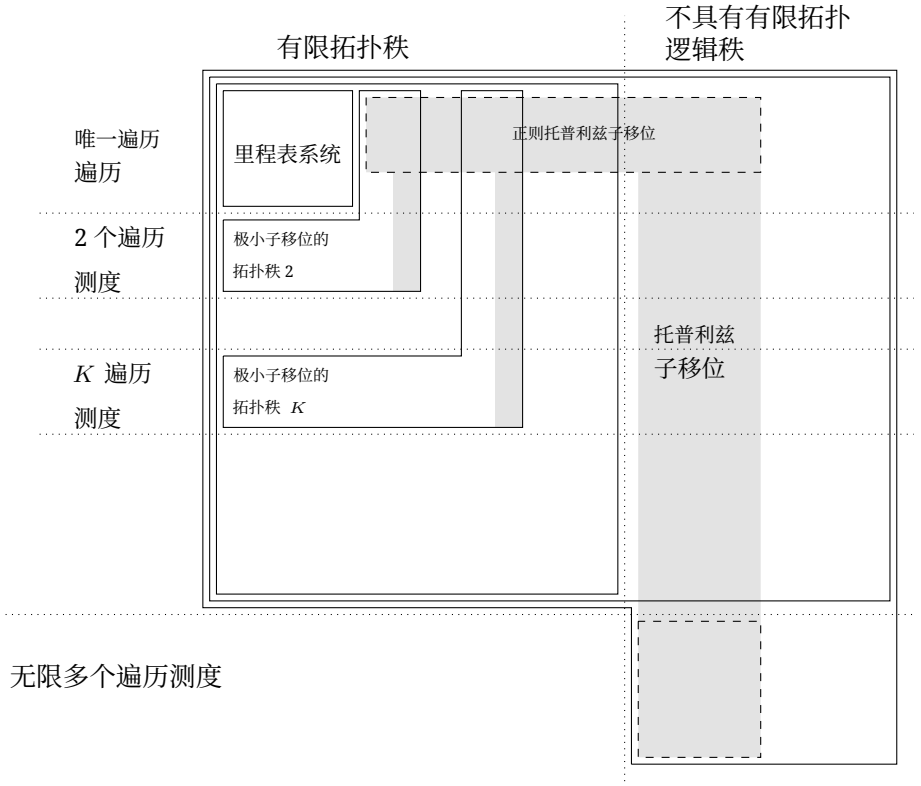

FIGURE 1. 本文所讨论的康托尔极小系统类别。

对于有限拓扑秩的康托尔极小系统，Downarowicz 和 Maass [3] 已证明，它们拓扑共轭于里程表系统（拓扑秩为 1 时）或极小子移位。对于里程表系统，很容易看出轨道等价与拓扑共轭一致，并且二者都与 $2^{\mathbb{N}}$上的相等关系 $=$ 博雷尔双可约。这类等价关系称为光滑。对于有限拓扑秩的极小子移位，我们证明如下结果。

定理 1.4。对于任意整数 $K \geq 2$，秩为 K 的极小子移位的轨道等价几乎可数，即博雷尔可约于一个可数等价关系。

利用 Poulin [22, 的一个最新定理，我们还得到了以下结果：推论 1.3]。

定理 1.5. 对于任意整数 $K \geq 2$，拓扑秩为 K 的极小子移位的轨道等价不是光滑的。此外，当 $K \geq 4$ 时，它不是几乎超有限的；当 $K \geq 5$ 时，它不是几乎可树化的。

这些结果给出了相关轨道等价关系的一些上下界。图1概述了本文所讨论的康托尔极小系统类别。图2概述了一些复杂度结果。

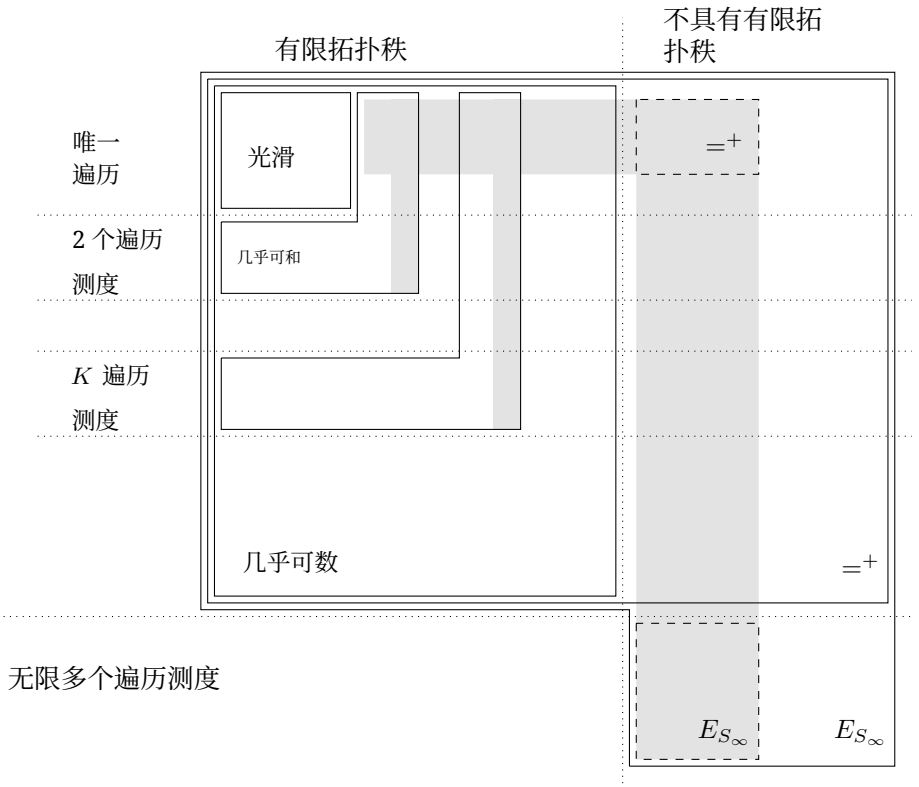

FIGURE 2. 关于轨道等价复杂度的已知结果。

在证明中，我们遇到了一些构造极小子移位的例子，其拓扑秩恰好为 K，其中 $K \geq 2$ 是任意整数。这似乎是新的结果，因此我们将其明确陈述出来。

定理1.6。 对于每个整数 $K \geq 2$，都存在拓扑秩恰好为 K的唯一遍历极小子移位。

本文其余部分安排如下。第2节介绍一些预备定义和定理。第3节证明定理 1.3。第4节证明定理 1.4 和定理 1.5。

ACKNOWLEDGMENTS. 我们感谢 Julien Melleray 和 Bo Peng 就本文主题进行的有益讨论。第二作者访问麦吉尔大学期间开展了这项研究。第二作者感谢麦吉尔大学和 Marcin Sabok 教授给予的热情接待与支持。

2. 预备知识

2.1. 等价关系的描述集合论。 本小节回顾等价关系描述集合论中的一些基本概念和结果。关于其他未定义的概念及更多细节，读者可参见 [17]和 [6]。

拓扑空间 X 称为波兰空间，如果 X 是可分且完全可度量的。拓扑空间的一个G_δ 子集是可数个开集的交。在波兰空间 X中，子空间 Y 是波兰空间，当且仅当 Y 是 X的一个 G_δ 子集。若子集 Y 满足 Y 包含 X的一个稠密 G_δ 子集，则称其为余瘦或泛型；若子集 X 的补集是余瘦的，则称其为瘦。

若 X 是波兰空间，且 $\mathcal{B}$ 是由 X的开集生成的 σ代数，则称 $\mathcal{B}$ 中的集合为博雷尔集。更抽象地说，博雷尔空间是一个有序对 $(X,\mathcal{B})$，其中 X 是一个集合，而 $\mathcal{B}$ 是 X子集构成的一个 σ代数； $\mathcal{B}$ 中的集合也称为博雷尔集。标准博雷尔空间是一个博雷尔空间 $(X,\mathcal{B})$，其中存在 X 上的一个波兰拓扑 τ，使得 $\mathcal{B}$ 是由 τ生成的 σ代数。我们将使用以下事实（见 [17, 推论 13.4]）：若 $(X,\mathcal{B})$ 是标准博雷尔空间且$Y\in\mathcal{B}$，那么 $(Y,\mathcal{B}\restriction Y)$ 也是标准博雷尔空间，其中

$$\mathcal{B}\restriction Y=\{B\cap Y\colon B\in\mathcal{B}\}.$$

为简化记号，如果不会引起混淆，我们将 X 写作标准博雷尔空间（X， $\mathcal{B}$）。

如果 X，Y 是波兰空间，且 $f\colon X\to Y$ 是一个映射，那么如果对于 Y 的任意开子集 U，$f^{-1}(U)$ 都是 X 的开子集，我们称 f 是连续的。如果 X，Y 是波兰空间或标准博雷尔空间，且 $f\colon X\to Y$ 是一个映射，那么如果对于 Y 的任意博雷尔子集 B， $f^{-1}(B)$ 都是 X 的博雷尔子集，我们称 f 是博雷尔的（或博雷尔可测的）。如果 X 是波兰空间或标准博雷尔空间，那么 X 的子集 A 是解析的，当且仅当存在一个标准博雷尔空间 Z 和一个博雷尔映射 $g\colon Z\to X$，使得 $A=g(Z)$；如果 $X\setminus A$ 是解析的，则 A 是余解析的。

如果 X 上的等价关系 E 是 $X\times X$ 的博雷尔子集（或解析子集），则称其为博雷尔的（或解析的）。正如我们在引言中已经回顾的那样，如果 E， F 分别是波兰空间或标准博雷尔空间 X， Y 上的等价关系，那么如果存在一个博雷尔映射 $f\colon X\to Y$，使得对于任意 x_1， $x_2\in X$，均有下式成立，则称 E 博雷尔可约于 F，记作 $E\leq_B F$。

$$x_1Ex_2\iff f(x_1)Ff(x_2).$$

我们称 E 与 F博雷尔双可约，记作 $E\sim_B F$，当且仅当 $E\leq_B F$ 且 $F\leq_B E$。如果 $E\leq_B F$ 但 $F\not\leq_B E$，则称 E 严格博雷尔可约于 F，记作 $E<_B F$。

如果拓扑群 G 的拓扑是波兰的，则称其为波兰群。如果 G 是波兰群，且 X 是波兰空间，那么作用 $a\colon G\times X\to X$（G 在 X 上）是连续的，当且仅当 a 是从波兰空间 $G\times X$ 到波兰空间 X 的连续映射。如果G 是波兰空间，且 X 是波兰空间或标准博雷尔空间，那么作用 $a\colon G\times X\to X$ 是博雷尔的，当且仅当 a 是从 $G\times X$ 到 X 的博雷尔映射。为了便于记

号，我们用 $G \curvearrowright_a X$ 或 $G \curvearrowright X$ 表示作用 a，并用 $g \cdot x$ 表示 $a(g, x)$。

若 $G \curvearrowright X$ 是波兰群 G 在波兰空间或标准博雷尔空间 X 上的连续作用或博雷尔作用，则对于任意 $x \in X$， x 的 轨道 是集合 $G \cdot x = \mathrm{orbit}_G(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$。该作用$G \curvearrowright X$ 所诱导的轨道等价关系定义为

$$x E_G^X y \iff G \cdot x = G \cdot y \iff \mathrm{orbit}_G(x) = \mathrm{orbit}_G(y) \iff \exists g \in G\ (g \cdot x = y).$$

一般而言，等价关系 E_G^X 是解析的，不一定是博雷尔的。

Becker 和 Kechris 的一个定理（例如参见 [6, 定理 3.3.4]）指出，对于任意波兰群 G，都存在一个博雷尔作用 $G \curvearrowright X$，其中 X 是标准博雷尔空间，使得对于任意博雷尔作用 $G \curvearrowright Y$（其中 Y 是标准博雷尔空间），都有 $E_G^Y \leq_B E_G^X$。轨道等价关系 E_G^X 称为万有 G-轨道等价关系，记作 E_G^∞，或简记为 E_G。如果 H 是波兰群 G 的闭子群，那么 H 也是波兰群，并且 $E_H \leq_B E_G$。

与本文最相关的波兰群是 S_∞，即 $\mathbb{N}$ 上所有置换构成的群。在赋予 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的子空间拓扑后， S_∞ 是一个波兰群。普适的 S_∞-轨道等价关系 E_{S_∞} 是等价关系描述集合论中研究最充分的基准等价关系之一。众所周知，它是解析的但不是博雷尔的，并且与许多自然等价关系博雷尔双可约，例如所有可数图、群、域等的同构关系（这些结果归功于 Friedman 和 Stanley [5]；另见 [6, 第 13] 章）。特别地，任何可数结构博雷尔类上的同构关系都博雷尔可约到 E_{S_∞}。因此，Melleray 定理 1.2 的一个方向（到 (v) 的 Borel 归约）可由定理 1.1 (2) 立即推出。

定理 1.3 (viii) 中定义的等价关系 $=^+$ 很容易看出是一个 S_∞-轨道等价关系。然而，它是博雷尔的，因此严格博雷尔可约到 E_{S_∞}。

如果波兰群 G 是离散可数群，那么 E_G 总是一个博雷尔等价关系。此外，E_G 的所有轨道都是可数的。这类等价关系称为可数；也就是说，如果每个 E-等价类都是可数的，那么博雷尔等价关系 E 就是可数 的。在所有可数博雷尔等价关系中，$E_{\mathbb{F}_2}$ 是普适的，即 $E \leq_B E_{\mathbb{F}_2}$ 对任意可数博雷尔等价关系都成立，其中 $\mathbb{F}_2$ 是赋予离散拓扑的双生成元自由群。这是 Jackson、Kechris 和 Louveau 的一个定理 [15]（另见 [6, 定理 7.3.8]）。由 Hjorth、Kechris 和 Louveau[14] 的结果可知， $E_{\mathbb{F}_2} <_B =^+$。因此， $E <_B =^+$ 对任意可数博雷尔等价关系都成立。

可数博雷尔等价关系之间的博雷尔可约性非常复杂。在本文中，我们只提及以下基本概念。首先，具有不可数多个等价类的博雷尔等价关系中，最简单、复杂度最低的是 $2^\mathbb{N}$ 上的相等关系，记作 $=$。若一个等价关系博雷尔可约到 $=$，则称其为光滑 等价关系。因此，在具有不可数多个等价类的博雷尔等价关系中，光滑等价关系在博雷尔可约性层级中复杂度最低。在非光滑博雷尔等价关系中，复杂度最低的是定义在 $2^\mathbb{N}$ 上的等价关系 E_0，其定义为

$$x E_0 y \iff \exists n\ \forall m > n\ x(m) = y(m).$$

这是 Harrington、Kechris 和 Louveau [11]的一条著名定理。 E_0 显然是一个可数博雷尔等价关系。若一个可数博雷尔等价关系博雷尔可约到 E_0，则称其为超有限。

我们有本节所考虑的等价关系之间如下的可约关系：

$$= <_B E_0 <_B E_{\mathbb{F}_2} <_B =^+ <_B E_{S_\infty}.$$

下面我们回顾可和性的概念。可数群 G 是 可和的，当且仅当 G 上存在一个左不变有限可加概率测度。对于可数博雷尔等价关系，也可以如下定义可和性的概念。设 μ 是标准博雷尔空间 X 上的一个 Borel测度，且 E 是 X 上的一个可数博雷尔等价关系。如果存在一个 μ-可测的赋值 $x \mapsto \nu_x$，使得：我们称 E 是 μ- 可和的，

- 每个 ν_x 都是 X 上满足 $\nu_x([x]_E) = 1$ 的有限可加概率测度，其中 $[x]_E$ 是 E-等价类 x；
- 若 xEy，则 $\nu_x = \nu_y$。

这里，赋值 $x \mapsto \nu_x$ 的 μ-可测性意味着，对于 $X \times X$ 的任意博雷尔子集 B，映射

$$x \mapsto \nu_x(\{y \in X : (x, y) \in B\})$$

是 μ-可测的。现在，若一个可数博雷尔等价关系 E 在 X 上相对于每个 Borel测度 μ X都是 μ-可和的，则称其为可和。若 G 是一个可和的可数群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个博雷尔作用，则 E_G^X 是一个可和的可数博雷尔等价关系。已知 $E_{\mathbb{F}_2}$ 不可和（例如，参见[6, 命题 7.4.4 和定理 7.4.8]）。因此，若 E 是一个非光滑、可和的可数博雷尔等价关系，则 $E_0 \leq_B E <_B E_{\mathbb{F}_2}$。

最后，若一个标准博雷尔空间 X上的可数博雷尔等价关系 E 满足存在一个博雷尔指派 $x \mapsto T_x$，使得

- 每个 T_x 都是一个无环图（树），且以 $[x]_E$ 为顶点集；
- 若 xEy 则 $T_x = T_y$。

这里，赋值 $x \mapsto T_x$ 的博雷尔性意味着边关系 $\{(x, y, z) \in X^3 : \{y, z\} \in T_x\}$ 是博雷尔的。超有限等价关系是可树化的，而 $E_{\mathbb{F}_2}$ 不可树化（见 [15, 推论 3.28]）。Naryshkin 和 Vaccaro 最近的一项结果[20] 指出，若轨道等价关系 E 是由可数可和群的博雷尔作用诱导的，那么 E 超有限，当且仅当 E 可树化。

对于不一定可数的博雷尔等价关系 E，以及性质 P $\in$ {可数，可树化，可和，超有限}，若 E 可博雷尔约化到具有性质 P 的可数博雷尔等价关系，我们就称 E 是几乎P。这是一个新术语，文献中此前称为本质 P。按照 [18, 第4节.1]，，现在我们称 E 是本质 P，若 E 与具有性质 P 的可数博雷尔等价关系博雷尔双可约。已知本质可数与几乎可数是不同的概念（[13]）。然而，根据 Harrington–Kechris–Louveau 二分定理（例如参见[6, 定理 6.3.1]），博雷尔等价关系几乎超有限，当且仅当它本质超有限。

2.2. 康托尔极小系统的标准博雷尔空间。本小节将建立一些关于所有康托尔极小系统所成空间的记号和基本结果。除非另有说明，我们的处理遵循 [8]。

康托尔集是一个没有孤立点的零维紧波兰空间。众所周知，所有康托尔集都与 $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{Z}} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 同胚。令 Aut($\mathcal{C}$) 表示 $\mathcal{C}$ 的所有自同胚所成的群，其中群运算为复合。赋予上确界范数度量后，Aut($\mathcal{C}$) 成为一个波兰群。令 $M(\mathcal{C})$ 表示 Aut($\mathcal{C}$) 中所有极小同胚的集合。那么， $M(\mathcal{C})$ 是 Aut($\mathcal{C}$) 的一个 G_δ 子集，因而自身也是一个波兰空间。我们将 $M(\mathcal{C})$ 视为所有康托尔极小系统所成的空间。因此，康托尔极小系统的轨道等价是 $M(\mathcal{C})$ 上的一个解析等价关系。由 Melleray 定理 1.2 可知，这个等价关系不是博雷尔的。

所有里程表系统构成了 G_δ ($\mathcal{C}$)中的一个稠密 M子集（例如，参见 [8, 命题 3.6] 或 [19, 引理 4.1]）。更一般地，对于每个正整数 K，所有拓扑秩至多为 K 的康托尔极小系统也构成了 $M(\mathcal{C})$中的一个 G_δ 子集（例如，参见 [8, 推论 3.4]）。因此，对于任意正整数 K，所有拓扑秩为 K 的康托尔极小系统构成 $M(\mathcal{C})$的一个博雷尔子集，因而是一个标准博雷尔空间。由此可知，所有有限拓扑秩的康托尔极小系统也构成一个标准博雷尔空间。

根据 Downarowicz 和 Maass 的一个定理 [3], ，有限拓扑秩的康托尔极小系统只有两种类型：当其拓扑秩为 1 时，它是一个里程表系统；当其拓扑秩为 $K > 1$ 时，它与一个极小子移位拓扑共轭。我们回顾一下子移位的定义。设 A 是一个有限集（称为字母表）。空间 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ 是一个康托尔集。考虑移位作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$：对于任意 $g \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$,

$$\varphi_g(x)(n) = (g \cdot x)(n) = x(n+g)$$

对于任意 $n \in \mathbb{Z}$。那么 ($\mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$, φ_1) 是一个康托尔系统。给定一个康托尔系统 (X, φ)，若子集 A 属于 X，则称其为 φ- 不变，如果 $\varphi(A) = A$。子移位 X 是 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ 的一个闭 φ_1- 不变子集。若 X 是一个子移位，则 (X, $\varphi_1 \restriction X$) 是一个康托尔系统。

由于所有里程表系统构成 $M(\mathcal{C})$ 的一个余瘦子集，因此所有极小子移位构成 $M(\mathcal{C})$ 的一个瘦集。遵循 Pavlov 和 Schmieding [21]，可以考虑一个适当的子移位波兰空间，其中包含所有极小子移位（此处不详述，因为本文不会用到这些细节）。在这个波兰空间中，所有极小子移位构成一个余瘦的博雷尔子集（见 [21, 定理 1.3]），因此既可以将其视为标准博雷尔空间，也可以讨论极小子移位中的泛型性。根据 [21, 定理 1.3], ，所有拓扑秩 2 的正则托普利兹子移位构成极小子移位中的一个余瘦集。该陈述中的每个概念都对应一个博雷尔集。此外， [21, 定理 1.3] 证明了泛型极小子移位与通用里程表系统轨道等价。这与我们的结果（定理 1.4 和定理 1.5）形成对比：对于任意 $K > 1$，拓扑秩为 K 的极小子移位之间的轨道等价关系并不光滑。

给定一个动力系统（X, φ），若Borel测度 μ 在 X 上满足 φ-不变 条件，即对所有 X 的博雷尔子集 B，都有$\mu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$，则称其为 φ-不变 。如果对于每个 φ-不变的博雷尔集合 B， $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(X \setminus B) = 0$，则称 μ具有遍历性 。 μ 的遍历性等价于以下性质：如果对于两个测度和某个 $0 < a < 1$，有 $\mu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$，那么$\mu = \mu_1 = \mu_2$。

给定一个康托尔空间 X，我们用 Prob(X) 表示 X 上 Borel 概率测度的集合。请注意，X 上的 Borel 概率测度由其在开闭集上的取值唯一确定，并且 Clopen(X) 上的任何有限可加概率测度都可以扩展为 Prob(X) 中的一个元素。令 $C(X)$ 表示.....的空间

X 上所有取实值的连续函数。令 $C(X)^*$ 为 $C(X)$ 的对偶空间，并赋予弱星拓扑。我们可以将 Prob(X) 视为 $C(X)^*$ 的子空间，其中 Prob(X) 上继承的拓扑是由映射 $\mu \mapsto \mu(U)$ 诱导的自然紧拓扑，这些映射中的 U 遍历 X 的所有开闭子集。在 Prob(X) 上定义度量如下：

$$d(\mu,\nu) = \sup_{f\in C(X)} \left| \int_X f\, d\mu - \int_X f\, d\nu \right|$$

对任意 μ，$\nu \in$ Prob(X)。这是弱星拓扑的一个相容度量，它使 Prob(X) 成为紧波兰空间。

给定一个康托尔系统 (X，φ)，X 上所有 φ-不变的博雷尔概率测度组成的集合非空，记为 M$_\varphi$。注意，M$_\varphi$ 是 Prob(X) 的紧子集。令 ME$_\varphi$ 为 (X，φ) 上所有遍历测度组成的集合。假设 (X，φ) 是一个具有有限个遍历测度的康托尔极小系统。那么 EM$_\varphi$ 也是 Prob(X) 的紧子集。令 $\mu_1,\dots,\mu_n$ 为其所有遍历测度的一个枚举。那么对于每个 φ-不变测度 $\mu \in$Prob(X)，都存在正数 $a_1,\dots,a_n$，使得 $a_1+\cdots+a_n = 1$ 且

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i.$$

给定一个紧波兰空间 Z，我们用 $\mathcal{K}(Z)$ 表示 Z 的所有紧子集所构成的空间，并赋予维托里斯拓扑。于是 $\mathcal{K}(Z)$ 仍是一个紧波兰空间（例如参见 [17,定理 4.26]）。

在下一节中，我们将讨论具有有限多个遍历测度的康托尔极小系统的轨道等价。下面我们证明，这些系统构成一个博雷尔类，并且将每个此类系统映射到其遍历测度集合的映射是博雷尔映射。

命题 2.1. 对于任意正整数 $K \geq 1$，恰有 K 个遍历测度的康托尔系统所成的类是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$的博雷尔子集；并且，将一个康托尔系统映射到其遍历测度集合的函数是从该类到 $\mathcal{K}(\mathrm{Prob}(\mathcal{C}))$ 的博雷尔映射。

证明. 固定一个正整数 $K \geq 1$。不失一般性，我们可以假设 $X = \mathcal{C}$。根据 [19, 引理 4.2], ，将 Aut($\mathcal{C}$) 映射到 $\mathcal{K}$(Prob($\mathcal{C}$))、并将 φ 映射到 M$_\varphi$ 的映射是博雷尔映射。根据 Kuratowski–Ryll-Nardzewski选择定理（例如参见 [17, 定理 12.13]），存在一个博雷尔函数序列

$$S_m \colon \mathcal{K}(\mathrm{Prob}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Prob}(\mathcal{C})$$

对于满足以下条件的 $m \in \mathbb{N}$：对于任意 $F \in \mathcal{K}$（Prob($\mathcal{C}$)，$\{S_m(F)\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ 在 F 中稠密。

我们断言，$|\mathrm{ME}_\varphi| \leq K$ 当且仅当

存在 $n \leq K$ 和 $x_1,\cdots,x_n \in$M$_\varphi$，使得对于每个正有理数 $\epsilon > 0$ 以及每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在非负有理数 $a_1,\dots,a_n$，使得 $a_1+\cdots+a_n = 1$ 并且

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, S_m(\mathrm{M}_\varphi)\right) < \epsilon.$$

对于必要性的方向，我们只需将 $x_1,\cdots,x_n$ 取为 (X,φ) 的遍历测度。因此，只需证明充分性的方向。反设，所显示的条件成立，但存在两两不同的

$y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathrm{ME}_\varphi$。根据我们的假设，每个 $y_k, k = 1, \dots, n+1$ 都可以表示为 $x_1, \dots, x_n$ 的线性组合，且系数均为非负实数，其和为 1。由遍历性可知，对每个 $1 \le k \le n+1$，存在 $1 \le i \le n$ 使得$y_k = x_i$。这意味着存在某些 $1 \le j, k \le n+1, j \ne k$，使得 $y_j = y_k$，矛盾。至此，命题得证。由该命题可知，至多有 K 个遍历测度的康托尔系统所构成的类是 Aut($\mathcal{C}$) 的一个解析子集。

另一方面，我们断言，$|\mathrm{ME}_\varphi| \le K$ 当且仅当

> 对于任意 $x_1, \cdots, x_K, x_{K+1} \in \mathrm{M}_\varphi$，存在 $1 \le n \le K+1$，使得对每个正有理数 $\epsilon > 0$，都存在非负有理数 $a_1, \cdots, a_{K+1}$，使得 $a_n = 0$、$a_1 + \cdots + a_{K+1} = 1$ 且
>
> $$d\left(\sum_{i=1}^{K+1} a_i x_i, x_n\right) < \epsilon.$$

此断言的证明与上面的证明类似。由此断言可知，至多有 K 个遍历测度的康托尔系统类是 Aut($\mathcal{C}$) 的余解析子集。

结合这两个断言并应用苏斯林定理（例如参见 [17, 定理 14.11]），可得至多有 K 个遍历测度的康托尔系统类是 Aut($\mathcal{C}$) 的博雷尔子集。令 M_K 表示 Aut($\mathcal{C}$) 中恰有 K 个遍历测度的所有康托尔系统构成的子集。那么 M_K 也是博雷尔集。

令 $\Theta\colon M_K \to \mathcal{K}(\mathrm{Prob}(\mathcal{C}))$ 为映射，它将 M_K 中的康托尔系统 (X, φ) 映射到其遍历测度的集合 ME_φ。那么，Θ 是博雷尔的，当且仅当其图形$\{(\varphi, \mathrm{ME}_\varphi)\colon \varphi \in M_K\}$ 是博雷尔的。现在注意，对于 $\varphi \in M_K$ 和 $F \in \mathcal{K}(\mathrm{Prob}(\mathcal{C}), F = \Theta(\varphi) = \mathrm{ME}_\varphi$，当且仅当 $|F| = |\{S_m(F)\colon m \in \mathbb{N}\}| = K$, $F \subseteq \mathrm{M}_\varphi$；若将 F 的元素枚举为 $x_1, \cdots, x_K \in \mathrm{M}_\varphi$，那么对每个正有理数$\epsilon > 0$和 $m \in \mathbb{N}$，都存在正有理数 $a_1, \dots, a_K$，使得 $a_1 + \cdots + a_K = 1$ 且

$$d\left(\sum_{i=1}^{K} a_i x_i, S_m(\mathrm{M}_\varphi)\right) < \epsilon.$$

这个刻画是博雷尔的，因为例如，根据 [17, 练习 4.29 (ii)]，$F \subseteq \mathrm{M}_\varphi$ 是博雷尔的。□

推论 2.2。对于任意正整数 $K \ge 1$，恰好具有 K 个遍历测度的康托尔极小系统类是 $M(\mathcal{C})$的一个博雷尔子集，并且从该类到 $\mathcal{K}(\mathrm{Prob}(\mathcal{C}))$的函数（将一个康托尔极小系统映射到其遍历测度的集合）是博雷尔的。

3. Cantor minimal systems with finitely many ergodic measures

本节证明定理 1.3。定理 1.3 中考虑的康托尔极小系统类按照包含关系从 (i) 到 (v) 依次递减。因此，只需证明 (i) 中类的轨道等价是博雷尔可约于 $=^+$，并且 $=^+$ 是博雷尔可约于 (v) 中类的轨道等价。

我们将根据需要回顾有关康托尔极小系统的概念和结果。

3.1. 上界。 我们首先回顾 [10] 中的一些定义和定理。一个可数阿贝尔群 G 连同一个子集 G^+ 被称为**有序群**，如果 $G^+ + G^+ \subseteq G^+$、$G^+ - G^+ = G$ 且 $G^+ \cap (-G^+) = \varnothing$。这里，$G^+$ 被称为**正锥**。如果 $b - a \in G^+$，我们记作 $a \leq b$。如果 $(G,\ G^+)$ 是一个有序群，且 H 是 G 的子群，则我们令 $H^+ = H \cap G^+$。如果对于每个 $a \in G$，$a \leq nu$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则元素 $u \in G^+$ 称为 $(G,\ G^+)$ 的**序单位**。如果当 $a \in G$ 且 $na \in G^+$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立时，我们有 $a \in G^+$，则称有序群 $(G,\ G^+)$ 是**无挠有序**的。

无挠有序群 (G, G^+) 若满足以下条件，则称为维数群：给定 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$，其中 $a_i \leq b_j$ 对所有 $i, j = 1, 2$ 均成立，则存在一个 $c \in G$，使得 $a_i \leq c \leq b_j$ 对所有 $i, j = 1, 2$ 均成立。设 (G_1, G_1^+, u_1) 和 (G_2, G_2^+, u_2) 是两个带有指定序单位的维数群。若存在群同构 $f\colon G_1 \to G_2$，使得 $f(G_1^+) = G_2^+$ 且 $f(u_1) = u_2$，我们称它们同构，并记为 $(G_1, G_1^+, u_1) \cong (G_2, G_2^+, u_2)$。

若 (G, G^+) 是一个有序群，则**序理想**是 G 的一个子群 H，满足 $H^+ - H^+ = H$，并且只要 $0 \leq a \leq b$ 且 $b \in H$，就有 $a \in H$。若维数群 (G, G^+) 满足 G 不含任何非平凡序理想，则称其为**单纯**。容易看出，若 G 是一个单纯维数群，则任意 $a \in G^+ \setminus \{0\}$ 都是一个序单位。设 G 是一个单纯维数群，且设 $u \in G^+ \setminus \{0\}$。若对所有正整数 p, q，均有 $-pu \leq qa \leq pu$，则称 $a \in G$ 为**无穷小元素**。非正式地，我们也将这一条件写作：对所有 $0 < \epsilon \in \mathbb{Q}$，均有 $-\epsilon u \leq a \leq \epsilon u$。$G$ 中无穷小元素的集合构成一个子群，即 G 的**无穷小子群**，记作 $\mathrm{Inf}(G)$。

商群 $G/\mathrm{Inf}(G)$ 上有一种自然诱导的序。令 $a \mapsto \hat{a}$ 表示从 G 到 $G/\mathrm{Inf}(G)$ 的商映射。于是可以定义 $\hat{a} > 0$ iff $a > 0$。容易看出，$G/\mathrm{Inf}(G)$ 是一个单纯维数群，且除 0 外没有无穷小元素。若 G 具有指定序单位 u，那么 $G/\mathrm{Inf}(G)$ 继承指定序单位 $\hat{u}$。

设 (X, φ) 是一个 Cantor 极小系统。用 $C(X, \mathbb{Z})$ 表示从 X 到 $\mathbb{Z}$ 的连续映射集合。因此，$C(X, \mathbb{Z})$ 在加法运算下是一个可数阿贝尔群。令 B_φ 表示余边界子群 $\{f - f \circ \varphi^{-1}\colon\ f \in C(X, \mathbb{Z})\}$。定义 $K^0(X, \varphi)$ 为商群 $C(X, \mathbb{Z})/B_\varphi$，并令

$$K^0(X, \varphi)^+ = \{[f]\colon f \geq 0, f \in C(X, \mathbb{Z})\},$$

其中 $f \mapsto [f]$ 表示商映射。用 $\mathbf{1}$ 表示 $K^0(X, \varphi)^+$ 中由常值函数 1 映射得到的元素。于是，$K^0(X, \varphi)$ 配上正锥 $K^0(X, \varphi)^+$ 后，是一个带有指定序单位 $\hat{\mathbf{1}}$ 的单纯无挠维数群。

我们将使用以下结果，它曾被明确列为 [10,定理 1.13] 的一部分，但可以追溯至 [12, 定理 5.5] 和 [4, 推论 4.2]。

定理 3.1. 设 (X, φ) 是一个康托尔极小系统。那么

$$\mathrm{Inf}\left(K^0(X, \varphi)\right) = \left\{[f]\colon f \in C(X, \mathbb{Z}), \int f\, d\mu = 0 \text{ for all } \varphi\text{-invariant measures } \mu\right\}.$$

设 $(X,\ \varphi)$ 是一个具有有限个遍历测度的 Cantor 极小系统。设 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ 是其遍历测度的一个无重复枚举。

定义 Γ_φ 为

$$\Gamma_\varphi = \left\{ \left(\int f \, d\mu_1, \dots, \int f \, d\mu_n \right) : f \in C(X, \mathbb{Z}) \right\}.$$

显然， Γ_φ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子群，并且

$$\left(\Gamma_\varphi, \Gamma_\varphi \cap \left(\mathbb{R}^+\right)^n, 1^n\right)$$

是带有指定序单位的维数群，其中 $1^n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$。

我们首先注意到，定理 1.1 有如下直接推论。

引理 3.2。设 (X, φ) 是一个具有有限个遍历测度 $\mu_1, \dots, \mu_n$ 的 *Cantor* 极小系统。那么以下维数群同构：

$$\left(K^0(X,\varphi)/\mathrm{Inf}\left(K^0(X,\varphi)\right), K^0(X,\varphi)^+/\mathrm{Inf}\left(K^0(X,\varphi)\right), \hat{\mathbf{1}}\right) \cong \left(\Gamma_\varphi, \Gamma_\varphi \cap (\mathbb{R}^+)^n, 1^n\right).$$

证明。利用定理 3.1，可以很容易验证映射

$$[f] + \mathrm{Inf}\left(K^0(X,\varphi)\right) \mapsto \left(\int f \, d\mu_1, \dots, \int f \, d\mu_n \right)$$

是良定义且单射的。根据 [10, 定理 1.13],

$$\begin{aligned} K^0(X,\varphi)^+ &= \left\{ [f] \in K^0(X,\varphi) \colon \int f \, d\mu > 0 \text{ for all } \mu \in M_\varphi \right\} \cup \mathrm{Inf}\left(K^0(X,\varphi)\right) \\ &= \left\{ [f] \in K^0(X,\varphi) \colon \int f \, d\mu_i > 0 \text{ for all } 1 \le i \le n \right\} \cup \mathrm{Inf}\left(K^0(X,\varphi)\right). \end{aligned}$$

容易看出，该映射是一个群同构，它将正锥映到正锥，并将 $\mathbf{1}$ 映到 1^n。□

若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的子群，且 $\phi \in$ 属于 $\mathrm{Sym}(n)$，我们定义

$$\phi(G) = \left\{ (r_{\phi^{-1}(1)}, \dots, r_{\phi^{-1}(n)}) \colon (r_1, \dots, r_n) \in G \right\}.$$

那么 $\phi(G)$ 仍是 $\mathbb{R}^n$ 的子群。下面给出具有有限多个遍历测度的康托尔极小系统轨道等价的一个刻画。

引理 3.3. 设 (X, φ) 和 (Y, ψ) 是两个具有有限多个遍历测度的康托尔极小系统。那么 (X, φ) 与 (Y, ψ) 轨道等价，当且仅当 (X, φ) 与 (Y, ψ) 具有相同数量的遍历测度，设其数量为 n，并且存在 $\phi \in \mathrm{Sym}(n)$ 使得 $\Gamma_\varphi = \phi(\Gamma_\psi)$。

证明。设 (X, φ) 与 (Y, ψ) 轨道等价。由定理 1.1 (3)，存在一个同胚 $f\colon X \to Y$，将 X 上的 φ-不变测度映到 Y 上的 ψ-不变测度。特别地，f 将 φ 的遍历测度映到 ψ 的遍历测度。设 φ 的遍历测度数量为 n。那么 f 诱导出一个 $\phi \in \mathrm{Sym}(n)$，使得 $\Gamma_\varphi = \phi(\Gamma_\psi)$。

反过来，假设存在 $\phi \in \mathrm{Sym}(n)$ 使得 $\Gamma_\varphi = \phi(\Gamma_\psi)$。那么特别地，群 Γ_φ 和 Γ_ψ 作为维数群是同构的。根据引理 3.2 和定理 1.1 (2)，我们有 (X, φ) 和 (Y, ψ) 轨道等价。□

上述引理表明，康托尔极小系统的轨道等价是一种博雷尔等价关系。下面我们将确定它在博雷尔可约性层级中的复杂度。

定理 3.4. 具有有限个遍历测度的 *Cantor* 极小系统之间的轨道等价博雷尔可约于 $=^+$。

证明。固定一个正整数 n，令 M_n 为恰有 n 个遍历测度的 Cantor 极小系统类。根据推论 2.2，M_n 是 $M(\mathcal{C})$ 的博雷尔子集，因此是一个标准博雷尔空间。只需证明 M_n 上的轨道等价博雷尔可约于 $=^+$。

将从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的所有连续函数枚举为 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$。对于 $\varphi \in M_n$，将其遍历测度枚举为 μ_1^φ，$\cdots$，μ_n^φ，根据 Kuratowski–Ryll-Nardzewski选择定理，这可以通过博雷尔方式完成。定义 $\Phi\colon M_n \to (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$，令

$$\Phi(\varphi) = \left(\int f_i \, d\mu_1^\varphi, \cdots, \int f_i \, d\mu_n^\varphi \right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

那么 Φ 是一个博雷尔函数。

在 $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ 上定义等价关系 E：

$$(x_{i,1}, \cdots, x_{i,n})_{i\in\mathbb{N}} \text{ and } (y_{i,1}, \cdots, y_{i,n})_{i\in\mathbb{N}} \text{ are } E\text{-equivalent}$$

当且仅当存在 $\phi \in \mathrm{Sym}(n)$，使得

$$\{(x_{i,1}, \cdots, x_{i,n})\colon i \in \mathbb{N}\} = \{(y_{i,\phi(1)}, \cdots, y_{i,\phi(n)})\colon i \in \mathbb{N}\}.$$

根据引理 3.3，Φ 见证了 M_n 上的轨道等价博雷尔可约到 E。现在注意到 E 是 $\mathbf{\Pi}^0_3$，且它由群 $S_\infty \times S(n)$ 在 $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ 上的连续作用所诱导。根据 Hjorth、Kechris和Louveau 的一个定理 [14, 定理2]（另见 [6,定理 12.5.5]），E 博雷尔可约到 $=^+$。□

该定理给出了具有有限多个遍历测度的康托尔极小系统的轨道等价复杂度上界。

3.2. 下界。 我们考虑一类特殊的康托尔极小系统，即托普利兹子移位。

我们首先根据 [23] 回顾有关托普利兹子移位的一些基本定义和结果。

设 A 为一个有限集。若 X 是某个 $x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ 的轨道闭包$\varphi_1(x)$，且 x 满足：对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，存在 $p \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$，均有 $x(k) = x(k+np)$，则称子移位 $X \subseteq \mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ 为托普利兹子移位。这样的 x 称为*Toeplitz*序列；并称 X 由 x生成。在子移位的语境中，我们通常将移位映射 φ_1 记作 σ。为强调字母表时，我们也称 x 为 A-*Toeplitz* 序列，称 X 为 A-*Toeplitz* 子移位。

设 x 是一个 A-托普利茨序列。对于 $p \in \mathbb{N}$，令

$$\mathrm{Per}_p(x) = \{k \in \mathbb{Z}\colon x(k) = x(k+np) \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}.$$

固定一个新符号 $\square \notin \mathrm{A}$。定义 x 的 p-骨架 为一个元素 $x' \in (A \cup \{\square\})^{\mathbb{Z}}$，其中

$$x'(k) = \begin{cases} x(k), & \text{if } k \in \mathrm{Per}_p(x), \\ \square, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，x 的 p-骨架以 p为周期。若 p-骨架不是以任何更小的周期为周期，我们就称 p 为x 的本质周期。令 $P(x)$表示 x的所有本质周期的集合。对于 p，$q \in P(x)$，若 p是q的因子，则记为 $p \sqsubseteq q$。于是（$P(x)$ $\sqsubseteq$）是一个有向集（见 [23, 命题 2.1]）。对于每个 $p \in P(x)$，定义

$$\delta_p(x) = \frac{1}{p} |\{k \in \mathbb{Z}\colon 0 \le k < p, k \in \mathrm{Per}_p(x)\}|.$$

于是容易看出， $p \sqsubseteq q$ 意味着 $\delta_p(x) \leq \delta_q(x)$。因此，当 $p \in P(x)$时，$\delta_p(x)$的极限存在（作为网的极限），我们将其记为 $\delta(x)$。如果 $\delta(x) = 1$，则称 x 为正则。若由 x 生成的托普利兹子移位 x 是正则的，我们也称其为正则。Jacobs 和 Keane 的一个定理（见 [23, 定理 2.6]）指出，正则托普利兹子移位是唯一遍历的。

容易看出，所有正则 $\{0,1\}$-托普利茨子移位构成 $M(\mathcal{C})$ 的一个博雷尔子集。当然，它也是 M_1 的一个博雷尔子集； M_1 是所有唯一遍历的康托尔极小系统构成的类。

为了构造托普利茨子移位，我们将使用它们的 $\mathcal{S}$-进表示法；Arbul´u、Durand 和 Espinoza [1] 对此进行了研究。下面我们回顾这一理论的基本概念，并作出适合本文目的的调整。因此，我们的论述也部分基于 [9]。

字母表 A 的元素称为字母。令 A^* 表示所有有限 A 序列（或词）构成的集合。对每个词 $u \in \mathrm{A}^*$，令 $|u|$ 表示 u 的长度。长度为 0 的唯一词是空词，记为 $\varnothing$。任意词 u 都可以写成若干字母的串接

$$u = u(0)u(1)\dots u(|u|-1)$$

其中 $u(0)\, u(1)\dots, u(|u|-1) \in \mathrm{A}$。如果 $S \subseteq \mathrm{A}^*$ 和 $u \in \mathrm{A}^*$，我们称 u 是由 S 构造而成的，如果可以将 u写成若干个词的串接

$$u = v_1 \cdots v_k$$

其中 $v_1, \dots, v_k \in S$。序列 $(v_1, \dots, v_k)$ 称为由 S构造 u 的一个构造。注意，“由..... 构造而成”这一关系具有传递性，即如果 u由 S构造而成，且 S中的每个词都由 T构造而成，那么 u就由 T构造而成。如果 u由 S构造而成，且 S 中的词具有相同长度，那么由 S构造 u的构造是唯一的，并且构造中各项在 u中的出现称为预期出现。

一个生成序列是一个双重指标序列

$$\mathbf{u} = (u_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}, i\leq \ell_n}$$

对于某个满足以下条件的 $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

- 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \leq \ell_n$， $u_{n,i} \in \mathrm{A}^*$;
- 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i,\ j \leq \ell_n$，若 $i \neq j$ 则 $u_{n,\,i} \neq u_{n,\,j}$;
- 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $i \leq \ell_n$， $u_{n,\,i}$ 由以下词集构造而成

$$S_{n-1} = \{u_{n-1,j} \colon 0 \leq j \leq \ell_{n-1}\}.$$

如上所述，生成序列$\mathbf{u}$ 称为具有常长度，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$和 $i,\ j \leq \ell_n$， $|u_{n,\,i}| = |u_{n,\,j}|$均成立。如上所述，生成序列$\mathbf{u}$ 称为适当，如果对于所有$n \in \mathbb{N}^+$，都存在 $v_0,\ v_1 \in S_{n-1}$，使得对于任意 $i \leq \ell_n$，都存在$u_{n,\,i}$ 的某种构造，该构造由 S_{n-1} 构成，其中 v_0 是首项， v_1 是末项。如上所述，生成序列$\mathbf{u}$ 称为本原，如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $N > n$，使得对于所有$i \leq \ell_N$，都存在由 S_n 构造的 $u_{N,\,i}$，其中 S_n 的每个元素都作为一项出现。

给定生成序列 $\mathbf{u} = (u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}, i\leq\ell_n}$，我们定义

$$X_{\mathbf{u}} = \{x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}} \colon\ x \text{ 的每个有限子词都是某个 } u_{n,i} \text{ 的子词,}\\ \text{其中 } n \in \mathbb{N} \text{ 且 } i \leq \ell_n\}.$$

那么 $X_{\mathbf{u}}$ 是 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}}$ 的一个子移位。我们将使用 [1, 命题 2.5] 中的以下结果（另见 [9, 命题 3.1]）。

命题 3.5。 设 **u**是一个生成序列。假设 $\mathbf{u}$ 具有常长度，且是适当且本原的。那么 $X_{\mathbf{u}}$ 是一个托普利兹子移位。

我们还将对 $X_{\mathbf{u}}$ 使用可识别性的概念，其中 $\mathbf{u}=(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N},i\le\ell_n}$是一个生成序列。关于这一概念的回顾，我们遵循 [8] 。对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X_{\mathbf{u}}$，都可以将 x 表示为由 S_n 中的词构成的双无限串接，这称为从 S_n 构造 x。在这种构造中，x 中的任意 $v\in S_n$ 作为构造的组成部分出现，称为该构造中的预期出现。若对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X_{\mathbf{u}}$，从 S_n 构造 x 的方式唯一，则称 $\mathbf{u}$ 是可识别的。可识别性这一概念还有一种实用的等价表述。对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0\le i\le\ell_n$，定义柱集 $[v_{n,i}]$ 为满足以下条件的所有 $x\in X_{\mathbf{u}}$ 的集合：$v_{n,i}$ 在 x 的位置 0 处出现，且是从 S_n 构造 x 的某种构造中的预期出现。用 σ 表示 $X_{\mathbf{u}}$ 上的移位映射。那么，$\mathbf{u}$ 可识别当且仅当对于每个 $n\in\mathbb{N}$，集合

$$\{\sigma^k[v_{n,i}]\colon 0\le i\le\ell_n, 0\le k<|v_{n,i}|\}$$

是 $X_{\mathbf{u}}$ 的一个闭开分割。当我们考察 $X_{\mathbf{u}}$ 上的不变测度时，这一等价表述便于处理。具体而言，如果**u** 具有常长度且是可识别的，并且 μ 是 $X_{\mathbf{u}}$ 上的一个 φ-不变概率测度，那么对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都有

$$\mu\left(\bigcup_{0\le i\le\ell_n}[v_{n,i}]\right)=\sum_{0\le i\le\ell_n}\mu([v_{n,i}])=\frac{1}{|v_{n,0}|}$$

根据等价表述。

现在我们可以陈述本小节的以下主要定理。

定理 3.6。 等价关系 $=^+$ 博雷尔可约于正规 $\{0,1\}$-托普利茨子移位的轨道等价。

本小节的其余部分将用于证明定理 3.6。

根据 [16, 引理 4.5], ，存在 $\mathbb{R}$ 的一个不可数博雷尔子集 A ，使得 $A\cup\{1\}$ 的每个有限子集都是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。我们固定这样一个集合 A。令 $=^+_A$ 表示 $=^+$ 在 $A^{\mathbb{N}}$ 上的限制。那么 $=^+_A$ 与 $=^+$ 博雷尔双可约。只需证明 $=^+_A$ 博雷尔可约于正规 $\{0,1\}$- 托普利茨子移位的轨道等价。

固定一个双射 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$。令 $\pi_0\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和 $\pi_1\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}^+$ 为唯一的函数，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\langle\pi_0(n),\pi_1(n)\rangle=n.$$

给定 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$，通过令其满足以下条件来定义 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$b_i=\frac{a_{\pi_0(i)}}{\pi_1(i)}.$$

这样调整的目的是，使得 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的所有 $\mathbb{Z}$-线性组合恰好是 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的所有 $\mathbb{Q}$-线性组合。

为简化记号，我们将归纳地定义一个生成序列

$$\mathbf{v}=(v_{n,j})_{n\ge1,0\le j\le n}$$

其具有常长度，且是适当、本原的，并配有一个双重指标化的实数序列

$$\mathbf{c}=(c_{n,j})_{n\ge1,0\le j\le n}$$

以 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为参数。若接受这一构造，则根据命题 3.5， $X_{\mathbf{v}}$ 是一个托普利兹子移位。复合映射

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \mathbf{v} \mapsto X_{\mathbf{v}}$$

将证明 $=_A^+$ 在博雷尔意义下可约于正则 Toeplitz 子移位的轨道等价。检验此映射是博雷尔映射是例行的。

对于 $n = 1$，取 $c_{1,1}$ 为 $(b_0 + \mathbb{Q}) \cap (1/4, 3/4)$ 中的任意元素，$c_{1,0} = 1 - c_{1,1}$，取 $v_{1,0}$ 为词 0，并取 $v_{1,1}$ 为词 1。

对于 $n \geq 2$，假设以下归纳假设成立：对于所有 $1 \leq m < n$，我们都已定义词 $v_{m,j}$ 以及实数 $c_{m,j}$，它们满足以下性质：

(1) 序列 $(v_{m,j})_{1\leq m<n, 0\leq j\leq m}$ 满足定长条件 h
且具有适当、本原和可识别性；(2) 对于每个 $1 \leq m < n$ 和 $0 \leq j \leq m$，$|v_{m,j}|$ 是 m 的倍数；(3) 对于每个 $1 \leq m < n$，集合的基数

$$\{0 \leq i < |v_{m,0}| \colon v_{m,j}(i) \text{ are the same letter for all } 0 \leq j \leq m\}$$

至少为 $(1 - 1/m)|v_{m,0}|$；
(4) 对于每个 $1 \leq m < n$ 和 $0 \leq j \leq m$、$0 < c_{m,j} < 1$ 和 $c_{m,m} \in b_{m-1} + \mathbb{Q}$。（5）对于 $1 \leq m < m' < n$ 和 $0 \leq j \leq m$、$0 \leq j' \leq m'$，设 $T^{m,m'}_{\ j,j'}$ 为 $v_{m,j}$ 在 $v_{m',j'}$中的预期出现次数。则对于 $1 \leq m < n-1$，$(c_{m+1,j})_{0\leq j\leq m+1}$ 是方程组的唯一解

$$\begin{cases} T^{m,0}_{m+1,0}x_0 + T^{m,0}_{m+1,1}x_1 + \cdots + T^{m,0}_{m+1,m+1}x_{m+1} = c_{m,0} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ T^{m,m}_{m+1,0}x_0 + T^{m,m}_{m+1,1}x_1 + \cdots + T^{m,m}_{m+1,m+1}x_{m+1} = c_{m,m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{m+1} = c_{m+1,m+1} \end{cases}$$

(6) 对于 $1 \leq m < m' < n$ 和 $0 \leq j \leq m$、$0 \leq j' \leq m'$，我们有

$$\left| \frac{T^{m,j}_{m',j'}}{|v_{m',0}|} - c_{m,j} \right| < \frac{1}{m(m+1)|v_{m,0}|}.$$

我们需要为 $0 \leq j \leq n$定义词 $v_{n,j}$ 和实数 $c_{n,j}$。

在进行此操作之前，我们注意到归纳假设 (5) 表明，对于一个 y
$1 \leq m < n-1$ 和 $0 \leq j \leq m$，我们有

$$(*) \qquad \sum_{0\leq i\leq n-1} T^{m,j}_{n-1,i} c_{n-1,i} = c_{m,j}.$$

由于 $c_{1,0} + c_{1,1} = 1 = |v_{1,0}|$，由归纳假设 (1) 和等式 (*) 可得

$$(**) \qquad \sum_{0\leq i\leq n-1} c_{n-1,i} = \frac{1}{|v_{n-1,0}|}.$$

我们声称存在 $0 < \epsilon_1 < 1$，使得如果

$$(***) \qquad \left| \frac{T^{n-1,j}_{n,j'}}{|v_{n,0}|} - c_{n-1,j} \right| < \epsilon_1$$

对于每个 $0 \le j \le n-1$ 和 $0 \le j' \le n$，那么当 $m' = n$ 时，归纳假设 (6) 将继续成立。事实上，设 $1 \le m < n-1$ 和 $0 \le j \le m$。对于 $0 \le i \le n-1$ 和 $0 \le j' \le n$，令

$$\frac{T_{n,j'}^{n-1,i}}{|v_{n,0}|} = c_{n-1,i} + \delta_{i,j'}.$$

那么不等式 (***) 给出 $|\delta_{i,\ j'}| < \epsilon_1$。记

$$M_{m,j} = \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j}.$$

由归纳假设 (5)，特别是等式 (*)，可得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{T_{n,j'}^{m,j}}{|v_{n,0}|} - c_{m,j} \right| &= \left| \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j} \frac{T_{n,j'}^{n-1,i}}{|v_{n,0}|} - c_{m,j} \right| \\
&= \left| \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j} (c_{n-1,i} + \delta_{i,j'}) - c_{m,j} \right| \\
&= \left| \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j} c_{n-1,i} - c_{m,j} + \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j} \delta_{i,j'} \right| \\
&= \left| \sum_{0 \le i \le n-1} T_{n-1,i}^{m,j} \delta_{i,j'} \right| \le \epsilon_1 M_{m,j}.
\end{aligned}$$

因此，若取

$$\epsilon_1 < \min \left\{ \frac{1}{(n-1)n|v_{n-1,0}|}, \frac{1}{m(m+1)|v_{m,0}|M_{m,j}} : 1 \le m < n-1, 0 \le j \le m \right\},$$

则结论成立。固定这样一个 ϵ_1。

任取满足以下条件的 $\epsilon_2 > 0$

$$\epsilon_2 < \min \left\{ \frac{\epsilon_1}{4}, \frac{c_{n-1,j}}{4} : 0 \le j \le n-1 \right\}.$$

令 $\epsilon_3 > 0$。考虑以下 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵 U

$$\begin{bmatrix}
c_{n-1,0} + \epsilon_2 & c_{n-1,0} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & \cdots & c_{n-1,0} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & c_{n-1,0} - \frac{\epsilon_2}{n-1} \\
c_{n-1,1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & c_{n-1,1} + \epsilon_2 & \cdots & c_{n-1,1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & c_{n-1,1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
c_{n-1,n-1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & c_{n-1,n-1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} & \cdots & c_{n-1,n-1} + \epsilon_2 & c_{n-1,n-1} - \frac{\epsilon_2}{n-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

以及向量

$$\vec{c} = [c_{n-1,0},\ c_{n-1,1},\ \dots,\ c_{n-1,n-1},\ \epsilon_3]^T.$$

容易验证， U 可逆，因此方程 $U\vec{x}=\vec{c}$ 有唯一解。当 ϵ_3 趋于 0 时，解趋于

$$\left[\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},0\right]^T.$$

因此，我们可以找到一个 $\epsilon_3\in b_{n-1}+\mathbb{Q}$，使得该解位于 $(0,1)^{n+1}$。

固定一个如上所述的 ϵ_3，注意到存在 $0<\epsilon_4<\epsilon_2$，使得若 U' 是任意一个满足以下条件的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵：$|U'_{j,i}-U_{j,i}|<\epsilon_4$ 对任意 $0\le j<n$、$0\le i\le n$ 和 $U'_{n,i}=U_{n,i}$ 对任意 $0\le i\le n$，那么方程 $U'\vec{x}=\vec{c}$ 也有一个位于 $(0,1)^{n+1}$ 的唯一解，且最后一个坐标恰为 ϵ_3。固定这样一个 ϵ_4。

我们得出结论：当满足以下条件时，归纳假设 (5) 中的方程组（其中 $m=n-1$）在 $(0,1)^{n+1}$ 中有唯一解：

- for any $0\le j\le n-1$, $0\le i\le n$ and $j\neq i$,
$$\left|\frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|}-c_{n-1,j}+\frac{\epsilon_2}{n-1}\right|<\epsilon_4;$$
- for any $0\le j\le n-1$,
$$\left|\frac{T^{n-1,j}_{n,j}}{|v_{n,0}|}-c_{n-1,j}-\epsilon_2\right|<\epsilon_4;$$
- $c_{n,n}=\epsilon_3$.

对于任意的 $0\le j\le n-1$ 和 $0\le i\le n$，令 $\frac{T^{n-1,n}_{n,j}}{|v_{n,0}|}$ 为满足上述条件及以下条件的有理数：

- 存在正整数 $p_{i,j}$、$q_{i,j}$，使得
$$\frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|}=\frac{p_{i,j}}{n^{q_{i,j}}};$$
- 对任意的 $0\le i\le n$,
$$\sum_{0\le j\le n-1}\frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|}=\frac{1}{|v_{n-1,0}|};$$
- 且
$$\sum_{0\le j\le n-1}\min_{0\le i\le n}\frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|}\ge\frac{1}{n|v_{n-1,0}|}.$$

由于等式 (**)，第二个条件可以满足。最后一个条件可以满足，因为

$$\frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|}\ge c_{n-1,j}-\frac{\epsilon_2}{n-1}-\epsilon_4,$$

$\epsilon_4<\epsilon_2$，以及等式 (**)。这些数确定一个 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 U'，使得对于任意的 $0\le j<n$、$0\le i\le n$ 和 $U'_{n,i}=U_{n,i}$，$|U'_{j,i}-U_{j,i}|<\epsilon_4$；对于任意的 $0\le i\le n$。令 $(c_{n,i})_{0\le i\le n}$ 为方程 $U'\vec{x}=\vec{c}$ 的唯一解。

最后，定义 $(v_{n,i})_{0\le i\le n}$，使其满足以下条件：

- 对于所有 $0\le i\le n$、$|v_{n,i}|=|v_{n,0}|$ 且它是 $n^{q_{i,j}}|v_{n-1,0}|$ 的一个充分大的倍数，因此对于任意 $0\le j\le n-1$、$T^{n-1,n}_{j,i}=U'_{j,i}|v_{n,0}|$ 是一个充分大的偶数；

- 对于每个 $0 \le i \le n$ 和 $0 \le j \le n-1$、$v_{n-1,\ j}$ 在 $v_{n,\ i}$ 从 S_{n-1}的构造中恰好出现 $T^{n-1}_{,\ n}{}^{j}_{,\ i} = U'_{j,\ i}|v_{n,\ 0}|$ 次；
- 对于每个 $0 \le i \le n$，$v_{n\text{的构造}i}$ 的前三项和最后三项都为 $v_{n-1,\ 0}v_{n-1,\ 1}v_{n-1,\ 0}$；而$v_{n-1,\ 1}$ 在$v_{n,\ i}$ 中的其他出现都成对出现；
- 令 $L = |v_{n,\ 0}|/|v_{n-1,\ 0}|$，则存在一个子集 $K \subseteq \{1, \dots, L\}$，使得$|K| \ge L/n$，并且对于任意 $k \in K$，对所有 $0 \le i \le n$，从 S_{n-1} 开始的$v_{n,\ i}$ 的构造的第 k 项都相同。

由第一个条件可知，$T^{n-1}_{,\ n\,i}{}^{1}_{,}$ 都为偶数，因此第三个条件可以满足。令.....，则最后一个条件也可以满足。

$$|K| = \left(\sum_{0 \le j \le n-1} \min_{0 \le i \le n} \frac{T^{n-1,j}_{n,i}}{|v_{n,0}|} \right) |v_{n,0}|,$$

那么 $|K| \ge L/n$。

这就完成了对 $v_{n,\ i}$ 和 $c_{n,\ i}$（$0 \le i \le n$）的定义。

容易看出，由上述第三个条件得到的序列 $(v_{n,i})_{1 \le i \le n}$ 具有常长度，并且是适当的。由于对于每个$0 \le i \le n$ 和 $0 \le j \le n-1$都有 $T^{n-1}_{,n}{}^{j}_{,i} > 0$，它是本原的。上述第三个条件结合归纳假设 (1) 表明，该序列是可识别的。因此，归纳假设 (1) 得以保持。显然，归纳假设 (2)、(4) 和 (5) 也都得到明确保持，而归纳假设 (6) 则由上述断言推出。对于 (3)，注意到根据归纳假设 (3)，集合的基数

$$\{0 \le i < |v_{n,0}| \colon v_{n,i} \text{ are the same letter for all } 0 \le i \le n\}$$

至少为

$$\begin{aligned} & |K||v_{n-1,0}| + (L - |K|) \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) |v_{n-1,0}| \\ \ge\ & \frac{1}{n} \frac{|v_{n,0}|}{|v_{n-1,0}|} |v_{n-1,0}| + \frac{|v_{n,0}|}{|v_{n-1,0}|} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) |v_{n-1,0}| \\ =\ & \left(1 - \frac{1}{n}\right) |v_{n,0}|. \end{aligned}$$

现在，归纳构造给出了一个生成序列

$$\mathbf{v} = (v_{n,j})_{n \ge 1, 0 \le j \le n}.$$

根据命题 3.5 以及归纳假设 (1) 和 (3)，$X_{\mathbf{v}}$ 是一个正则托普利兹子移位。设 μ 是 $X_{\mathbf{v}}$ 上的唯一遍历测度。那么根据归纳假设 (5) 和 (6)，对于每个 $n \ge 1$ 和 $0 \le i \le n$，都有 $\mu([v_{n,i}]) = c_{n,i}$。事实上，根据归纳假设 (5)，对于任意 $m > n$，都有

$$T^{n,i}_{m,0} c_{m,0} + T^{n,i}_{m,1} c_{m,1} + \cdots + T^{n,i}_{m,m} c_{m,m} = c_{n,i}.$$

根据归纳假设 (6)，对于任意 $m' > m$、$0 \le j \le m$，有

$$\left| \frac{T^{m,j}_{m',0}}{|v_{m',0}|} - c_{m,j} \right| < \frac{1}{m(m+1)|v_{m,0}|}.$$

Thus

$$\begin{aligned}\left|\frac{T^{n,i}_{m',0}}{|v_{m',0}|}-c_{n,i}\right| &= \left|\frac{1}{|v_{m',0}|}\sum_{0\le j\le m}T^{n,i}_{m,j}T^{m,j}_{m',0}-c_{n,i}\right|\\ &\le \sum_{0\le j\le m}T^{n,i}_{m,j}\left|\frac{T^{m,j}_{m',0}}{|v_{m',0}|}-c_{m,j}\right|\\ &<\frac{1}{m(m+1)|v_{m,0}|}\sum_{0\le j\le m}T^{n,i}_{m,j}<\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

当 m 和 m' 趋于无穷大时，$\frac{T^{n,i}_{m',0}}{|v_{m',0}|}$ 趋于 $\mu([v_{n,i}])$。因此 $\mu([v_{n,i}])=c_{n,i}$。

根据引理 3.3，正则 Toeplitz 子移位的轨道等价由 Γ_σ 作为一个实数可数集确定。由归纳假设 (2) 可得 $\mathbb{Q}\subseteq\Gamma_\sigma$。根据归纳假设 (4)，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$b_n\in\Gamma_\sigma$。因此，$(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的所有 $\mathbb{Z}$-线性组合都是 Γ_σ的元素。这进一步意味着，$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的所有 $\mathbb{Q}$-线性组合都是 Γ_σ的元素。根据归纳假设 (5)，对于每个 $n\ge 1$ 和 $0\le i\le n$，$c_{n,i}$ 是 $\{b_0,\cdots,b_n\}$ 的一个 $\mathbb{Q}$- 线性组合。因此，Γ_σ 恰好是由 $\{1,a_n$ 生成的 $\mathbb{Q}$- 模：$n\in\mathbb{N}\}$。所以，轨道等价由这个 $\mathbb{Q}$-模作为一个实数可数集确定。根据我们对集合 A 的假设，由 $\{1,a_n$ 生成的 $\mathbb{Q}$-模：$n\in\mathbb{N}\}$ 与由 $\{1,a'_n$ 生成的 $\mathbb{Q}$-模：$n\in\mathbb{N}\}$ 相同，当且仅当 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=^+(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$。因此，我们的构造是从 $=^+_A$ 到正则 Toeplitz 子移位的轨道等价的一个 Borel 归约。

定理 3.6 的证明至此完成。

4. Minimal Subshifts of Finite Topological Rank

本节讨论有限拓扑秩的极小子移位的轨道等价。根据 Downarowicz 和 Maass 的定理 [3], ，这些系统恰好是有限拓扑秩的康托尔极小系统 $n\ge 2$。首先注意到，这类系统是具有有限多个遍历测度的康托尔极小系统的一个子类。

回顾 [8]，若康托尔极小系统 $(X,\ \varphi)$ 与某个 Bratteli–Vershik 系统拓扑共轭，且该系统各层顶点数有界，则称其具有 有限拓扑秩 。这类有序 Bratteli 图也称为有限秩。上述定义中的最小上界称为 $(X,\ \varphi)$ 的拓扑秩。为了研究康托尔极小系统的不变测度，使用 Herman、Putnam 和 Skau 给出的 Kakutani–Rohlin 分划嵌套系统表示会很方便 [12, 定理 4.2]（另见 [8, 定理 2.2]）。有序 Bratteli 图与 Kakutani–Rohlin 分划的嵌套系统之间存在自然且直接的对应关系（见 [8,第2节5]）。

更具体地说，回顾一下，对于一个极小康托系统（$X,\ \varphi$），*Kakutani–Rohlin* 分割是一个分割

$$\mathcal{P}=\left\{\varphi^j B(k)\colon 1\le k\le d, 0\le j<h(k)\right\}$$

由具有开闭集的 X 构成，其中 d，h(1)……，h(d)为正整数，而 B(1)……，B(d)是 X 的开闭子集，且满足

$$\bigcup_{k=1}^{d}\varphi^{h(k)}B(k)=\bigcup_{k=1}^{d}B(k).$$

集合 $B(\mathcal{P}) = \bigcup_{k=1}^{d} B(k)$称为 $\mathcal{P}$的底。对于 $1 \le k \le d$，子分划$T_k = \{\varphi^j B(k): 0 \le j < h(k)\}$ 是 $\mathcal{P}$的第 k个塔，其底为 $B(k)$，高度为 $h(k)$。若 μ 是(X, φ)的不变测度，那么对于每个 $1 \le k \le d$， k-塔 T_k 中的每个集合的 μ-测度都与 T_k的底相同。此外，若 μ 是概率测度，那么

$$\sum_{k=1}^{d} h(k)\mu(B(k)) = 1.$$

引理 4.1. 对于任意 $n \ge 1$，拓扑秩为 n 的 *Cantor* 极小系统至多有 n 个遍历测度。特别地，对于任意 $n \ge 2$，拓扑秩为 n 的极小子移位至多有 n 个遍历测度。

证明。 设 (X, φ) 是一个拓扑秩为 n的 Cantor 极小系统。那么存在一个 Kakutani–Rohlin 分划的嵌套系统 $(\mathcal{P}_i)$，满足 [12, 定理 4.2]（另见 [8, 定理 2.2]），并且对每个 $i \in \mathbb{N}$， $\mathcal{P}_i$ 至多有 n 个塔。

回想一下，$\mathbf{M}\varphi$ 是 X 上所有 φ-不变 Borel 概率测度的集合。我们定义映射 $\Phi_i\colon \mathbf{M}_\varphi \to [0,1]^{\mathcal{P}_i}$ 如下。对每个 $\mu \in \mathbf{M}\varphi$ 和 $i \in \mathbb{N}$，令 $\Phi_i(\mu)$ 为 μ 在 $\mathcal{P}_i$ 上的限制。令 S_i 为 Φ_i 的像。于是 S_i 是一个单纯形。由于 $\mathcal{P}_i$ 至多有 n 个塔，S_i 至多为 $(n-1)$ 维，因此至多有 n 个极点。

现在考虑逆系统

$$Y_0 \xleftarrow{\theta_0} Y_1 \xleftarrow{\theta_1} \cdots \xleftarrow{\theta_{i-1}} Y_i \xleftarrow{\theta_i} Y_{i+1} \xleftarrow{\theta_{i+1}} \cdots\cdots$$

其中对每个 $i \in \mathbb{N}$、 $Y_i = [0,1]^{\mathcal{P}_i}$，以及每个 $m \in [0,1]^{\mathcal{P}_{i+1}}$ 和 $A \in \mathcal{P}_i$，

$$\theta_i(m)(A) = \sum \{m(B)\colon B \subseteq A, B \in \mathcal{P}_{i+1}\}.$$

那么，对 $\mu \in \mathbf{M}\varphi$， μ 是 $(\Phi_i(\mu))_{i\in\mathbb{N}}$ 的逆极限。

我们验证 $\mathbf{M}\varphi$ 至多有 n 个遍历测度。为导出矛盾，假设 (X, φ) 至少有 $n+1$ 个遍历测度 μ_0，……，μ_n。那么存在一个足够大的 $i \in \mathbb{N}$，使得 $\Phi_i(\mu_j) = \theta_{\infty,\, i}(\mu_j)$、$0 \le j \le n$ 两两不同且线性无关。令 S 为由 μ_0，……，μ_n 生成的单纯形。那么 $\theta_{\infty,\, i}$ 是 S 上的单射。由于 S 至少是 n 维的，$\theta_{\infty,\, i}(S) = S_i$ 也至少是 n 维的，矛盾。□

4.1. 上界。 本小节给出有限拓扑秩极小子移位的轨道等价的一些上界。对于 $N \ge 2$，将拓扑秩为 N 的极小子移位的轨道等价记为 R_N。我们将证明，对于 $N \ge 2$， R_N 博雷尔可约于一个可数博雷尔等价关系；此外，对于 $N = 2$， R_2 博雷尔可约于由可数可和群的作用所诱导的轨道等价关系。根据 Naryshkin 和 Vaccaro [20]，最近的结果可知， R_2 是超有限的，当且仅当它是可树化的。

对于 $N \ge 2$ 和 $1 \le K \le N$，令 $\mathcal{R}_{N,\, K}$ 为所有拓扑秩为 N 且恰有 K 个遍历测度的极小子移位所构成的类。根据 [8, 定理 3.3]和推论 2.2， $\mathcal{R}_{N,\, K}$ 是 $M(\mathcal{C})$ 的博雷尔子集。由定理 1.1 (3)， $\mathcal{R}_{N,\, K}$在 R_N 下是不变的。我们将 R_N 在 $\mathcal{R}_{N,\, K}$ 上的限制记为 $R_{N,\, K}$。对于$L \ge 1$，令 $\mathcal{R}_{N,\, K,\, L}$ 为 $\mathcal{R}_{N,\, K}$ 的子集，由所有极小子移位 (X, φ) 组成，其中 Γ_φ 的 $\mathbb{Q}$-线性无关集的最大基数为 L。它

容易看出，$\mathcal{R}_{N,\,K,\,L}$ 是 $R_{N,\,K}$ 的博雷尔子集。由定理 1.1 (2)，$\mathcal{R}_{N,\,K,\,L}$在 R_N 下是不变的。将 R_N 在 $\mathcal{R}_{N,\,K,\,L}$ 上的限制记为 $R_{N,\,K,\,L}$。

引理 4.2. $\mathcal{R}_{N,K,L} = \varnothing$ 对于 $L > N$。

证明。根据 Donoso、Durand、Maass 和 Petite 的一个定理 [2, 定理 4.1 (1)]，对于任意极小子移位 $(X,\varphi) \in R_N$，存在一个本原且可识别的生成序列 $\mathbf{v} = (v_{n,i})_{n\in\mathbb{N},\ 0\le i<N}$ 使得 (X,φ) 与 $(X_{\mathbf{v}},\sigma)$ 拓扑共轭。特别地，如果 $(X,\varphi)\in \mathcal{R}_{N,K,L}$，那么 $(X_{\mathbf{v}},\sigma)$ 也如此，并且我们有$\Gamma_\varphi = \Gamma_\sigma$。令 $\mu_1,\dots,\mu_K$为 $(X_{\mathbf{v}},\sigma)$ 的遍历测度。令 $\{f_1,f_2,\dots,f_L\}$为 $C(X,\mathbb{Z})$ 的一个集合。假设该集合

$$\left\{\left(\int f_\ell\,d\mu_1,\dots,\int f_\ell\,d\mu_K\right) : 1\le \ell\le L\right\}$$

是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。注意，存在 $n\in\mathbb{N}$，使得每个 $f_\ell, 1\le\ell\le L$ 都是该集合中元素的 $\mathbb{Z}$-线性组合

$$\left\{1_{\sigma^j([v_{n,i}])} : 0\le i<N, 0\le j<|v_{n,i}|\right\},$$

其中，对于任意 $A\subseteq X_{\mathbf{v}}$，$1_A$ 表示 A的示性函数。由此可知，对每个 $1\le\ell\le L$,

$$\left(\int f_\ell\,d\mu_1,\dots,\int f_\ell\,d\mu_K\right)$$

是集合中元素的一个 $\mathbb{Z}$-线性组合

$$\left\{\left(\mu_1([v_{n,i}]),\dots,\mu_K([v_{n,i}])\right) : 0\le i<N\right\}.$$

这意味着 $L\le N$。 □

现在，对于任意 $1\le K,\ L\le N$，令 $E_{N,\,K,\,L}$ 为定义在

$$\Sigma = (\mathbb{R}^K)^L\times 2^{\mathbb{Q}^L}$$

上的等价关系，定义如下：对于 $\vec{a}_1,\ \cdots,\ \vec{a}_L,\ \vec{b}_1,\ \cdots,\ \vec{b}_L\in\mathbb{R}^K$以及 $p,\ q\in 2^{\mathbb{Q}^k}$,

$$(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_L,p) \text{ and } (\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_L,q) \text{ are } E_{N,K,L}\text{-equivalent}$$

当且仅当存在 $\phi\in \mathsf{Sym}(K)$ 和 $M\in \mathsf{GL}(L,\ \mathbb{Q})$，使得对每个 $\vec{r}\in\mathbb{Q}^L$,

$$M(\phi(\vec{a}_1),\dots,\phi(\vec{a}_L))^T = (\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_L)^T \text{ and } q(\vec{r}) = p(\vec{r}M),$$

其中 $\vec{c}=(c_1,\dots,c_K)\in\mathbb{R}^K$，$\phi(\vec{c}) = \phi(c_1,\dots,c_K) = (c_{\phi(1)},\dots,c_{\phi(K)})$。

容易看出，$E_{N,\,K,\,L}$ 是由 $\mathsf{GL}(L,\ \mathbb{Q})\times\mathsf{Sym}(K)$ 在 Σ 上的连续作用所诱导的可数博雷尔等价关系。我们证明 $R_{N,\,K,\,L}$ 博雷尔可约于 $E_{N,\,K,\,L}$。

对于任意的 $(X,\ \varphi)\in\mathcal{R}_{N,\,K,\,L}$，令 $\{\vec{a}_1^{\varphi},\dots,\vec{a}_L^{\varphi}\}$ 为 Γ_φ 的一个极大 $\mathbb{Q}$-线性无关集。这样的集合可以通过博雷尔方式得到。于是，对于每个 $f\in C(X,\ \mathbb{Z})$，存在 $\vec{r}\in\mathbb{Q}^L$ 使得

$$\left(\int f\,d\mu_1,\dots,\int f\,d\mu_K\right) = \vec{r}(\vec{a}_1^{\varphi},\dots,\vec{a}_L^{\varphi})^T. \tag{†}$$

定义 $p^{\varphi}\in 2^{\mathbb{Q}^k}$：令 $p^{\varphi}(\vec{r}) = 1$ 当且仅当存在 $f\in C(X,\ \mathbb{Z})$，使得恒等式 (†) 成立。于是我们定义了映射 $\pi\colon \mathcal{R}_{N,\,K,\,L}\to\Sigma$，其定义为

$$(X,\varphi)\mapsto(\vec{a}_1^{\varphi},\dots,\vec{a}_L^{\varphi},p^{\varphi}).$$

不难看出，π 是一个博雷尔映射。我们验证 π 证明了$R_{N,K,L}$博雷尔可约到$E_{N,K,L}$。

首先，假设$(X,\varphi),(Y,\psi)\in\mathcal{R}_{N,K,L}$轨道等价。由引理 3.3，存在 $\phi\in\mathrm{Sym}(K)$，使得 $\Gamma_\varphi=\phi(\Gamma_\psi)$。因此，$\phi(\vec{a}_1^{\varphi})\dots,\phi(\vec{a}_L^{\varphi})$和 $\vec{a}_1^{\psi},\dots,\vec{a}_L^{\psi}$可以彼此表示为 $\mathbb{Q}$-线性组合。这意味着存在 $M\in\mathrm{GL}(L,\mathbb{Q})$，使得

$$M(\phi(\vec{a}_1^{\varphi}),\dots,\phi(\vec{a}_L^{\varphi}))^T=(\vec{a}_1^{\psi},\dots,\vec{a}_L^{\psi})^T.$$

此外，由于

$$\Gamma_\psi=\left\{\vec{r}(\vec{a}_1^{\psi},\dots,\vec{a}_L^{\psi})^T:p^{\psi}(\vec{r})=1\right\},$$

我们有 $p^{\varphi}(\vec{r})=p^{\psi}(\vec{r}M)$。这意味着 $\pi(X,\varphi)E_{N,K,L}\pi(Y,\psi)$。反过来，若 $\pi(X,\varphi)E_{N,K,L}\pi(Y,\psi)$，则存在 $\phi\in\mathrm{Sym}(K)$，使得 $\Gamma_\varphi=\phi(\Gamma_\psi)$。由引理 3.3，$(X,\varphi)$ 和 (X',φ) 轨道等价。

因此，我们证明了以下定理。

定理 4.3。对于任意 $N\geq 2$，R_N 几乎可数。

我们的证明立即推出以下推论。

推论 4.4。对于任意 $N\geq 2$ 和 $1\leq K\leq N$, $R_{N,K,1}$ 几乎超有限。

证明。在此情形下，$E_{N,K,1}$ 由群 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q})\times\mathrm{Sym}(K)$ 在 Σ 上的作用给出。注意，$\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q})$ 是 $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 的乘法群，因此是阿贝尔群。该作用诱导出 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q})$ 在 Σ 上的作用。令 F 为 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q})$ 的作用所诱导的等价关系。则 $F\subseteq E_{N,K,1}$ 是一个子等价关系，并且每个 $E_{N,K,1}$ 等价类都包含有限多个 F 等价类。由于 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q})$ 是阿贝尔群，根据 Gao 和 Jackson 的一个定理，[7, 推论 8.2]，F 是超有限的。由 Jackson、Kechris 和 Louveau 的定理 [15, 命题 1.3 (vii)] 可知，$E_{N,K,1}$ 是超有限的。□

采用相同的技巧，并稍加仔细处理，我们就能解决 $N=2$ 的情形，并得到一个非平凡的上界。

定理 4.5。对于任意 $N\geq 2$ 和 $1\leq K\leq N$，$R_{N,K,2}$ 都博雷尔可约到由可数可和群的博雷尔作用所诱导的轨道等价关系。特别地，R_2 博雷尔可约到由可数可和群的博雷尔作用所诱导的轨道等价关系。因此，R_2 几乎可和。

证明。关键在于注意到，若 $(X,\varphi)\in\mathcal{R}_{N,K,L}$，那么我们总可以选取$1^K$，使其属于 Γ_φ 的一个极大 $\mathbb{Q}$-线性无关子集。因此，若$1\leq K\leq 2$ 且 $L=2$，那么我们可以假设 1^K 和 $\vec{a}^{\varphi}\in\mathbb{R}^K$ 构成 Γ_φ 的一个极大 $\mathbb{Q}$-线性无关子集。

定义 Q_K 在 $\mathbb{R}^K\times 2^{\mathbb{Q}^2}$ 上的等价关系如下。对于 $\vec{a}$，$\vec{b}\in\mathbb{R}^K$ 和p，$q\in 2^{\mathbb{Q}^2}$，

$$(\vec{a},p)\text{ and }(\vec{b},q)\text{ are }Q_K\text{-equivalent}$$

当且仅当存在 $\phi\in\mathrm{Sym}(K)$和 r_0，$s_0\in\mathbb{Q}$，且满足 $r_0\neq 0$，使得

$$r_0\phi(\vec{a})+s_0 1^K=\vec{b}$$

并且对于任意的 $r,s\in\mathbb{Q}$,

$$p(r,s)=q(rr_0,rs_0+s).$$

注意， Q_K 是由群的连续作用所诱导的轨道等价关系

$$G = (\mathrm{GL}(1,\mathbb{Q}) \ltimes \mathbb{Q}) \times \mathrm{Sym}(K),$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是加法群，半直积定义为

$$(r,s)(r',s') = (rr', rs' + s)$$

对于 r， $r' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 和 s， $s' \in \mathbb{Q}$。由于 G 是秩为 2 的可解群，因此它是可和的。

通过与定理 4.3 的证明类似的论证，我们有$R_{N,\ K,\ 2}$ 在博雷尔意义下可约到 Q_K。

定理的第二部分由引理 4.2 和推论 4.4 得出。 □

4.2. 下界。 在本小节的最后部分，我们给出 R_N,$N \geq 2$ 在博雷尔可约性层级中的一些下界。在此过程中，我们还构造了拓扑秩恰为 N 的极小子移位，这似乎是一个新结果。我们构造的极小子移位仍将是托普利茨子移位。

对于 $N \geq 2$，令 F_N 为 $\mathbb{R}^{N-1}$ 上的等价关系，使得

$$(x_1, \cdots, x_{N-1}) F_N (y_1, \cdots, y_{N-1})$$

当且仅当存在 $M \in \mathrm{GL}(N,\ \mathbb{Q})$ 使得

$$(x_1, \cdots, x_{N-1}, 1)M = (y_1, \cdots, y_{N-1}, 1).$$

令 $\mathsf{A}_N = \{1, \ldots, N\}$。我们将证明，对于任意 $N \geq 2$， F_N 都博雷尔可约到 A_N-托普利茨子移位（其拓扑秩为 N）的轨道等价关系。

固定参数 $(x_1,\ \cdots,\ x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$。取 $0 < y_i \leq 1/n$，使得$y_i - x_i \in \mathbb{Q}$ 对每个 $1 \leq i \leq N-1$ 都成立。我们将定义生成序列$\mathbf{v} = (v_{n,\ i})_{n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq N}$，使其满足以下条件：

- $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 是一个正则 A_N-托普利茨子移位；
- 令 μ 为 $X_{\mathbf{v}}$ 上唯一的 φ-不变测度，则对于$1 \leq i \leq N-1$，有 $y_i = \mu([i])$；
- 并且

$$\Gamma_\sigma = \left\{ (q_1, \cdots, q_N)(x_1, \cdots, x_{N-1}, 1)^T : (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{Q}^N \right\}.$$

若承认这一点，我们便可得到一个映射，证明 F_N 在博雷尔意义下可约到 A_N-托普利兹子移位的轨道等价关系。事实上，若

$$(x_1, \cdots, x_{N-1}), (x'_1, \cdots, x'_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1},$$

那么根据构造的最后一个条件，当且仅当.....时，它们是 F_N-等价的

$$\begin{aligned} &\{(q_1, \cdots, q_N)(x_1, \cdots, x_{N-1}, 1)^T : (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\} \\ =\ &\{(q_1, \cdots, q_N)(x'_1, \cdots, x'_{N-1}, 1)^T : (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\}, \end{aligned}$$

这成立，当且仅当根据引理 3.3，$(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 和 $(X_{\mathbf{v}'},\ \sigma)$ 轨道等价。

接下来，我们对 n 进行归纳，定义 $(v_{n,\ i})_{n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq N}$。对于 $n = 0$，令每个 $1 \leq i \leq N$ 都有 $v_{0,\ i} = i$。对于 $1 \leq j \leq N-1$，令 $c_{0,\ j} = y_j$，并且

$$c_{0,N} = 1 - \sum_{1 \leq j \leq N-1} y_j.$$

令 $h_0 = 1$。令 $h_1 \geq 1$ 为一个充分大的偶数，并取 $k_{1,i} \geq 1$，使得每个 $1 \leq i \leq N$ 都是满足以下条件的偶数

$$c_{0,i} - \frac{1}{2N} < \frac{k_{1,i}}{h_1} < c_{0,i}.$$

Let

$$r_1 = h_1 - \sum_{1\le i\le N} k_{1,i} = h_1\left(1 - \sum_{1\le i\le N}\frac{k_{1,i}}{h_1}\right).$$

Then

$$0 = h_1\left(1 - \sum_{1\le i\le N} c_{0,i}\right) < r_1 < \frac{h_1}{2}.$$

我们可以构造 $(v_{1,i})_{1\le i\le N}$，使得对每个 $1 \le i \le N$,

- $v_{1,\ i}$ 由 $S_0 = \{v_{0,j}$ 构造而成：$1 \le j \le N\}$;
- $|v_{1,i}| = h_1$;
- 对于每个 $1 \le j \le N$，$v_{0,\ j} = j$ 在 $v_{1,\ i}$ 中的（预期）出现次数为 $k_{1,\ j} + r_1\delta(i,\ j)$, 其中

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \ne j, \\ 1, & \text{if } i = j; \end{cases}$$

- $v_{1,\ i}$ 从 S_0 构造而成的构造的前三项和后三项均为 $v_{0,\ 1}v_{0,\ 2}v_{0,\ 1}$，而 $v_{0,\ 2}$ 的其他出现均成对出现。

对于每个 $1 \le i \le N$，令

$$c_{1,i} = \frac{1}{r_1}\left(c_{0,i} - \frac{k_{1,i}}{h_1}\right).$$

一般而言，假设我们已定义了 $v_{m,i}$, h_m, $k_{m,i}, r_m$ 以及 $c_{m,i}$，其中 $1 \le m \le n$, $1 \le i \le N$，并且满足以下条件:

(1) 对每个 $1 \le m \le n$ 和 $1 \le i \le N$，$v_{m,i}$ 均由 $S_{m-1} = \{v_{m-1,i}$ 构成：$1 \le i \le N\}$; (2) 序列 $(v_{m,i})_{0\le m\le n, 1\le i\le N}$ 满足常长度 $(h_m)_{0\le m\le n}$，且是适当、本原并且可识别的; (3) 对每个 $1 \le m \le n$，存在 $\{0, \dots, h_m - 1\}$ 的一个子集 J，使得 $|J| \ge (1 - 1/m)h_m$，从而对任意 $j \in J$，$v_{m,i}(j)$ 对所有 $1 \le i \le N$ 取相同的值;

(4) 令 $T^{m}_{m',i'}$ 表示 $v_{m,i}$ 在 $v_{m',i'}$ 中对于 $0 \le m < m' \le n$ 和 $1 \le i, i' \le N$ 的预期出现次数，则对所有 $0 \le m < n$ 和 $1 \le i, j \le N$，有

$$T^{m,j}_{m+1,i} = k_{m+1,j} + r_{m+1}\delta(i,j)$$

and

$$c_{m+1,i} = \frac{1}{r_{m+1}}\left(c_{m,i} - \frac{k_{m+1,i}}{h_{m+1}}\right);$$

(5) 对于每个 $1 \le m \le n$ 和 $1 \le i \le N$，我们有

$$\frac{k_{m,i}}{h_m} < c_{m-1,i},\ r_m = \frac{h_m}{h_{m-1}} - \sum_{1\le i\le N} k_{m,i},$$

h_m 和 r_m 是 m 的正倍数，并且

$$\sum_{1\le i\le N} c_{m,i} = \frac{1}{h_m};$$

（6）对于每个 $0 \leq m < m' \leq n$ 和 $1 \leq i,\ i' \leq N$,

$$\left| \frac{T^{m,i}_{m',i'}}{h_{m'}} - c_{m,i} \right| \leq \frac{1}{2^{m'}}.$$

在定义 $(v_{n+1,\ i})_{1 \leq i \leq N}$ 之前，我们注意到归纳假设 (4) 和 (5) 意味着，对于任意 $0 \leq m < n$ 和 $1 \leq j \leq N$,

$$c_{m,j} = \sum_{1 \leq i \leq N} T^{m,j}_{m+1,i} c_{m+1,i}.$$

由此可知，对于任意 $0 \leq m < m' \leq n$ 和 $1 \leq j \leq N$,

$$c_{m,j} = \sum_{1 \leq j' \leq N} T^{m,j}_{m',j'} c_{m',j'}.$$

类似于定理 3.6 证明中的论断，我们得到一个 $\epsilon > 0$，使得以下结论成立。

假设每个 $v_{n+1,\ i}$、$1 \leq i \leq N$ 都由 $S_n = \{v_{n,i} \colon 1 \leq i \leq N\}$ 构成，其中 $|v_{n+1,\ i}| = h_{n+1}$。假设对于任意 $1 \leq m \leq n$ 和 $1 \leq i,\ j \leq N$，$v_{n+1,\ i}$ 中 $v_{m,\ j}$ 的预期出现次数是 $T^{m,j}_{n+1,\ i}$。如果对于所有 $1 \leq i,\ j \leq N$，都有

$$\left| \frac{T^{n,j}_{n+1,i}}{h_{n+1}} - c_{n,j} \right| < \epsilon,$$

那么对于所有 $1 \leq m \leq n$ 和 $1 \leq i,\ j \leq N$,

$$\left| \frac{T^{m,j}_{n+1,i}}{h_{n+1}} - c_{m,j} \right| < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

现在定义 $v_{n+1,\ i}$、h_{n+1}、$k_{n+1,\ i}$、r_{n+1} 和 $c_{n+1,\ i}$，其中 $1 \leq i \leq N$ 满足以下条件:

（a）对于每个 $1 \leq i \leq N$，$v_{n+1,\ i}$ 由 S_n 构成，长度为 h_{n+1}；（b）h_{n+1} 是 $(n+1)h_n$的充分大的倍数；（c）对于每个 $1 \leq i \leq N$，$k_{n+1,\ i}$ 是 $2(n+1)$ 的充分大的正倍数，并且

$$c_{n,i} - \frac{\epsilon}{N} < \frac{k_{n+1,i}}{h_{n+1}} < c_{n,i};$$

（d）r_{n+1} 是 $2(n+1)$ 的充分大的正倍数，使得

$$r_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{h_n} - \sum_{1 \leq i \leq N} k_{n+1,i};$$

(e) 对于每个 $1 \leq i \leq N$,

$$c_{n+1,i} = \frac{1}{r_{n+1}} \left(c_{n,i} - \frac{k_{n+1,i}}{h_{n+1}} \right);$$

(f) 对于每个 $1 \leq i,\ j \leq N$，令

$$T^{n,j}_{n+1,i} = k_{n+1,j} + r_{n+1} \delta(i,j),$$

那么，$T^{n,\ j}_{n+1,\ i}$ 是从 S_n构造$v_{n+1,\ i}$ 时，$v_{n,\ j}$ 的预期出现次数;

(g) 对每个 $1 \le i \le N$，从 S_n 构造$v_{n+1,\ i}$时，构造的前三项和后三项分别为$v_{n,\ 1}v_{n,\ 2}v_{n,\ 1}$，而$v_{n,\ 2}$ 在$v_{n+1,\ i}$ 中的其他预期出现均成对出现；(h) 存在一个子集 $K \subseteq \{1, \dots, h_{n+1}/h_n\}$，使得 $|K| \ge h_{n+1}/[(n+1)h_n]$，并且对于任意 $k \in K$，从 S_n 构造$v_{n+1,\ i}$ 时，第 k项对所有 $1 \le i \le N$都相同。

条件 (a)–(f) 显然都能满足。由于根据条件 (c) 和 (d)，对于任意 $1 \le i,\ j \le N$, $T^{n,\ j}_{n+1,\ i}$都是偶数，因此条件 (g) 可以满足。参照定理 3.6 的证明，可用类似论证满足条件 (h)。同样，这些定义也保留了归纳假设。

至此，生成序列 $\mathbf{v} = (v_{n,\ i})_{n\in\mathbb{N},\ 1\le i\le N}$的定义完成。

现在，归纳假设 (1)–(3) 保证 $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 是一个正则托普利兹子移位。令 μ 为 $X_{\mathbf{v}}$ 的唯一 σ-不变测度。那么，与之前类似，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le N$，我们有 $\mu([v_{n,i}]) = c_{n,\ i}$。特别地，对于 $1 \le j \le N-1$，我们得到 $\mu([v_{0,j}]) = \mu([j]) = c_{0,\ j} = y_j$。根据条件 (b)，有 $\mathbb{Q} \subseteq \Gamma_\sigma$。根据条件 (e)，对每个 $1 \le j \le N-1$，有 $y_j\mathbb{Q} \subseteq \Gamma_\sigma$。因此，

$$\Gamma_\sigma = \left\{(q_1, \cdots, q_N)(y_1, \cdots, y_{N-1}, 1)^T \colon (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\right\}.$$

根据 $(y_j)_{1\le j\le N-1}$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}&\{(q_1, \cdots, q_N)(x_1, \cdots, x_{N-1}, 1)^T \colon (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\}\\ =\ &\{(q_1, \cdots, q_N)(y_1, \cdots, y_{N-1}, 1)^T \colon (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\}.\end{aligned}$$

因此，最终得到

$$\Gamma_\sigma = \left\{(q_1, \cdots, q_N)(x_1, \cdots, x_{N-1}, 1)^T \colon (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{Q}^N\right\}$$

如所需。

现在我们来计算 $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 的精确拓扑秩。首先，根据 Donoso、Durand、Maass 和 Petite 的一项结果 [2, 命题 4.5]（另见 [9, 命题 3.6 (ii)]），存在一个秩为 N 的有序 Bratteli 图，其 Bratteli–Vershik 系统与 $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 拓扑共轭。这意味着 $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 的拓扑秩至多为 N。若我们选择参数 $(x_1,\ \dots,\ x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$，使得 $x_1,\ \dots,\ x_{N-1}$ 与 1 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，那么 $(X_{\mathbf{v}},\ \sigma) \in \mathcal{R}_{N,\ 1,\ N}$。根据引理 4.2，$(X_{\mathbf{v}},\ \sigma)$ 的拓扑秩恰为 N。

因此，我们证明了以下定理。

定理 4.6。对于任意 $N \ge 2$，F_N 都是正则 A_N-托普利茨子移位的拓扑秩 N的轨道等价的博雷尔可约关系。特别地，$F_N \le_B R_{N,\ 1} \le_B R_N$。

引理 4.7。等价关系 F_2 不是光滑的。当 $n \ge 4$，F_n 不是超有限的。当 $n \ge 5$，F_n 不是可树化的。

证明。注意，$\mathrm{GL}(n-1, \mathbb{Q})$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的右作用所诱导的轨道等价关系满足：若 $M \cdot (x_1, \cdots, x_{n-1}) = (x_1, \cdots, x_{n-1})M$，则它是 F_n 的一个子关系。当 $n = 2$ 时，这个作用诱导的轨道等价关系不是光滑的。根据 Poulin 最近的一项结果 [22, 推论 1.3]，，当 $n \ge 4$ 时，这个作用诱导的等价关系不是超有限的；当 $n \ge 5$ 时，它诱导的等价关系不是可树化的。由于光滑、超有限或可树化的可数博雷尔等价关系的子关系仍分别是光滑、超有限或可树化的，因此引理的结论成立。□

我们有如下直接推论。

推论 4.8。 当 $n \geq 2$ 时， R_n 不是光滑的。当 $n \geq 4$ 时， R_n 不是几乎超有限的。当 $n \geq 5$ 时， R_n 不是几乎可树化的。

4.3. 进一步的评注。 在引理 4.1 中，我们证明了拓扑秩为 $n \geq 2$ 的任意极小子移位至多有 n个遍历测度。在定理 4.6 的证明中，我们构造了拓扑秩为 n 的唯一遍历极小子移位，其中$n \geq 2$可取任意值。因此，拓扑秩为 $n \geq 2$ 的极小子移位可能具有严格少于 n个遍历测度。

我们对定理 4.6 的证明还给出如下结果。

推论 4.9。 对于任意 $N \geq 2$，都存在一个拓扑秩恰为 N的正则 A_N-托普利兹子移位。特别地，对于任意 $N \geq 2$，都存在一个拓扑秩恰为 N的唯一遍历极小子移位。

References

[1] F. Arbul´u、F. Durand 和 B. Espinoza, *The Jacobs–Keane theorem from the $\mathcal{S}$-adic viewpoint*, 《Discrete Contin. Dyn. Syst.》44（2024），第 10 期，3077–3108。[2] S. Donoso、F. Durand、A. Maass 和 S. Petite, *Interplay between finite topological rank minimal Cantor systems $\mathcal{S}$-adic subshifts and their complexity* 374 2021 ，，《Trans. Amer. Math. Soc.》（），第 5 期，3453–3489。[3] T. Downarowicz 和 A. Maass, *Finite rank Bratteli–Vershik diagrams are expansive*, 《Ergod. Th. & Dynam. Sys.》28（2008），第 3 期，739–747。[4] E. G. Effros, 维数与 C^*-代数, Conf. Board Math. Sci. 46, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, R.I., 1981。[5] H. Friedman 和 L. Stanley, *A Borel reducibility theory for classes of countable structures*, 《J. Symbolic Logic》54（1989），第 3 期，894–914。[6] S. Gao, 《不变描述集合论》, Chapman and Hall/CRC, 2009。[7] S. Gao 和 S. Jackson, *Countable abelian group actions and hyperfinite equivalence relations*, 《Invent. Math.》201（2015），第 1 期，309–383。[8] S. Gao 和 R. Li, *Subshifts of finite symbolic rank*, 《Ergodic Theory Dynam. Systems》45（2025），第 3 期，807–848。[9] S. Gao、R. Li、B. Peng 和 Y. Sun, *Toeplitz subshifts of finite rank*, 预印本, 2025。可见于 arXiv:2504.05582。[10] T. Giordano、I. F. Putnam 和 C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products* 469 1995 51 111 ，《J. Reine Angew. Math.》（），–。[11] L. Harrington、A. S. Kechris 和 A. Louveau, *A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations* 3 1990 4, 903 928 ，《J. Amer. Math. Soc.》（），第 – 期。[12] R. H. Herman、I. F. Putnam 和 C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams dimension groups and topological dynamics* 3 1992 6, 827 864 ，，《Int. J. Math.》（），第 – 期。[13] G. Hjorth, *Bi-Borel reducibility of essentially countable Borel equivalence relations*, 《J. Sym- bolic Logic》70（2005），第 3 期，979–992。[14] G. Hjorth、A. S. Kechris 和 A. Louveau, *Borel equivalence relations induced by actions of the symmetric group* 92 1998 63 112 ，《Ann. Pure Appl. Logic》（），–。[15] S. Jackson、A. S. Kechris 和 A. Louveau, *Countable Borel equivalence relations*, 《J. Math. Logic》2（2002），第 1 期，1–80。[16] B. Kaya, *The complexity of topological conjugacy of pointed Cantor minimal systems*, 《Arch. Math. Logic》56（2017），第 3 期，215–235。[17] A. S. Kechris, 《经典描述集合论》, Springer-Verlag, 纽约, 1995。[18] A. S. Kechris, 《可数博雷尔等价关系理论》。Cambridge Tracts of Mathematics, 第 234 卷。Cambridge University Press, 剑桥, 2024。[19] J. Melleray, *Dynamical simplices and Borel complexity of orbit equivalence*, 《Israel J. Math.》236（2020），第 1 期，317–344。[20] P. Naryshkin 和 A. Vaccaro, *Hyper-$\mathcal{A}$-amenability and hyperfiniteness of treeable equivalence relations* 2025 2507 07891 ，预印本，。可见于 arXiv:。。

[21] R. Pavlov 和 S. Schmieding, *On the structure of generic subshifts*, 《非线性》36（2023），第 9 期，4904–4953。[22] A. Poulin, *Borel complexity of the isomorphism relation of Archimedean orders in finitely generated groups* 153 2025 8, 3595 3605 ,

《美国数学学会会刊》（），第 – 期。[23] S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Ge- biete 67（1984），第 1 期，95–107。

School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R.China*Email address*: sgao@nankai.edu.cn
School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China*Email address*: rwli@mail.nankai.edu.cn
School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, P.R. China*Email address*: ymsun@mail.nankai.edu.cn