势阱驱动的三次-五次非线性薛定谔方程中一维和二维孤子的碰撞与融合

Liangwei Zeng, [1,2] Boris A. Malomed, [3,4] Dumitru Mihalache, [5] Jingzhen Li, [2] 和 Xing Zhu[1,*]

[1] School of Arts and Sciences, Guangzhou Maritime University, Guangzhou 510725, China

[2] College of Physics and Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China

[3] Department of Physical Electronics, School of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, and Center for Light-Matter Interaction, Tel Aviv University, P.O.B. 39040, Tel Aviv, Israel

[4] Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile

[5] Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering, 077125 Magurele, Bucharest, Romania

我们在具有三次-五次非线性和两个相交势阱的非线性薛定谔方程框架下，研究了一维和二维（1D 和 2D）高斯形与平顶孤子的形成和碰撞。我们发现，在势阱引导下，孤子之间的高斯-高斯碰撞和高斯-平顶碰撞均为准弹性；而平顶孤子之间的碰撞则可能是准弹性的，也可能是非弹性的，表现为合并成单个平顶孤子，从而自发打破引导势阱之间的对称性。总体而言，高斯-平顶碰撞是准弹性的，并会产生较弱的辐射场。

arXiv:2601.00187v1 [nlin.PS] 1 Jan 2026

孤子两个或更多组分之间的相互作用颇为有趣，近几十年来受到广泛关注。具体而言，光孤子的碰撞因其在全光信息处理中的潜在应用而备受关注。一般来说，孤子碰撞有两种类型：弹性碰撞和非弹性碰撞。厘清这两种碰撞的物理机制，有助于更好地理解孤子之间的相互作用。尽管已有研究报道了多种物理情境下的孤子碰撞，但平顶孤子的碰撞尚未得到研究。平顶孤子是孤子族中一种有趣的类型，其形状与常见孤子截然不同。换言之，平顶孤子可以表示为超高斯函数，而常见孤子则始终用高斯函数描述。因此，平顶孤子的碰撞值得进一步关注。

一、引言

孤子由色散/衍射与非线性的平衡所支撑，其重要意义广为人知[1–3]，包括其在物理学各个分支中的应用[4–8]。尽管该领域的大多数研究都针对一维（一维）孤子，但二维和三维孤子的研究颇具挑战性，因为它们容易发生不稳定性 [9–15]。具体而言，线性[16–20] 和非线性 [21–23] 势的应用，以及采用三次-五次（CQ） [24–29] 和饱和非线性[30–34]，都有助于多维孤子的产生与稳定。采用材料介质的三次-五次及更高阶非线性响应是光学领域一种前景广阔的技术；在该领域中，可以在复合材料（例如金属纳米颗粒的胶体悬浮液）中精确调控所需的非线性响应[35, 36]。

孤子之间的相互作用是各种情形下孤子理论与实验研究的重要方面 [37–40]。这类过程有助于改变孤子的状态。具体而言，许多研究 [41–47]都报道了孤子碰撞[41] 。以往大多数研究都聚焦于紧致局域（高斯形）孤子的碰撞。另一方面，包含竞争性非线性的系统（如三次-五次组合）会产生兼具类高斯模式与扩展平顶模式的孤子族[48–54]。本文重点对具有三次-五次非线性的一维和二维模型中行波孤子的碰撞进行系统数值分析，包括高斯孤子之间的碰撞、平顶孤子之间的碰撞，以及高斯-平顶碰撞。孤子的传播由势阱引导；在光学中，这是一种自然的配置，因为通过设计折射率的局部结构即可轻易构造势阱。碰撞的结果（例如弹性穿越，或孤子融合为单一模式）可用于设计光学器件，例如全光数据处理方案。

II. 模型

具有三次-五次非线性的光学介质中光束的传播，可用众所周知的非线性 Schr¨odinger 方程建模，其缩放形式如下：

$$i\frac{\partial E}{\partial z}=-\frac{1}{2}\nabla^2 E+V\left(x,y\right)E-\left|E\right|^2E+\left|E\right|^4E. \quad (1)$$

这里， E 和 z 分别表示场振幅和传播距离， $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2$ 或 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+$

* xingzhu@gzmtu.edu.cn

$\partial^2/\partial y^2$ 分别是一维和二维情况下的傍轴衍射算子，而三次项和五次项分别表示自聚焦和散焦非线性。

方程（1）包含导向势阱，其一维形式可写为

$$V_{1D}(x) = -A\sum_{i=1,2}\mathrm{sech}[V_i(x-x_i)^2], \tag{2}$$

其中 $A>0$ 和 V_i 分别为势阱的深度和反宽度，且

$$x_1 = \tilde{x}_1 - \Omega_1 z, x_2 = \tilde{x}_2 + \Omega_2 z, \tag{3}$$

常数 $\tilde{x}_{1,\ 2}$ 和 $\Omega_{1,2}$，定义了势阱在（x，z）平面内的倾斜。在二维情形下，导向势阱 V 由圆柱形通道组成，

$$V_{2D} = -A\sum_{i=1,2}\mathrm{sech}\{V_i[(x-x_i)^2+y^2]\}, \tag{4}$$

这些通道由（x，y）平面内的圆确定，并在（x，z）平面内倾斜。

在本研究中，我们首先求解方程（1）的定态解，其传播常数为实数 b，形式为$E(x,y,z) = U(x,y)\exp(ibz)$，其中定态波函数满足方程

$$-bU = -\frac{1}{2}\nabla^2 U + V(x,y)U - |U|^2U + |U|^4U. \tag{5}$$

定态解由积分功率表征，

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|U(x,y)|^2\,dxdy, \tag{6}$$

或其一维对应形式。下面给出了 $A=10$ 在方程（2）和（4）中的一般结果，以及 $b=9$ 在方程（5）中的一般结果。

方程（5）的解通过修正平方算子法[55]获得。随后，在方程（1）的框架下，利用有限差分算法，通过对受扰动演化进行直接模拟，检验了这些解的稳定性。

III. 孤子族的数值结果

A. 一维孤子

图 1（a）展示了势阱中钉扎的一维孤子的剖面（表示为 $|U(x)|$），其反宽度 V_i取不同值。这些孤子的振幅随V_i的变化几乎保持不变，这体现了众所周知的三次-五次孤子保持恒定振幅的倾向。另一方面，一维孤子的宽度自然地

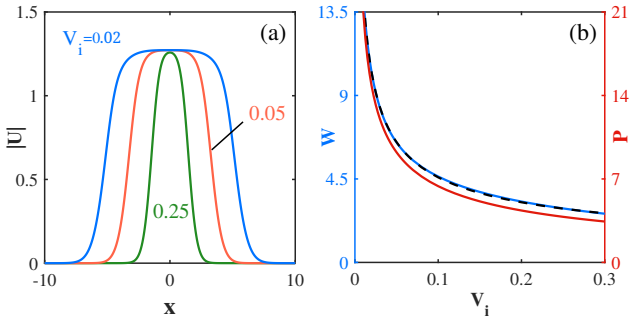

图1. (a) 由式(2)给出的单个势阱所钉扎的一维孤子剖面，其中 V_i 和 $x_i=0$取不同值。蓝线、红线和绿线分别表示 $V_i=0.02$, 0.05,0.25时的结果。(b) 一维孤子的半峰宽和功率（分别对应左、右纵轴）随 V_i的变化。黑色虚线是将 $W(V_i)$依赖关系拟合到关系式(7)得到的最佳拟合，其中常数 $=1.45$。在本文中，我们采用 $A=10$ 和 $b=9$，以便展示一般性结果。

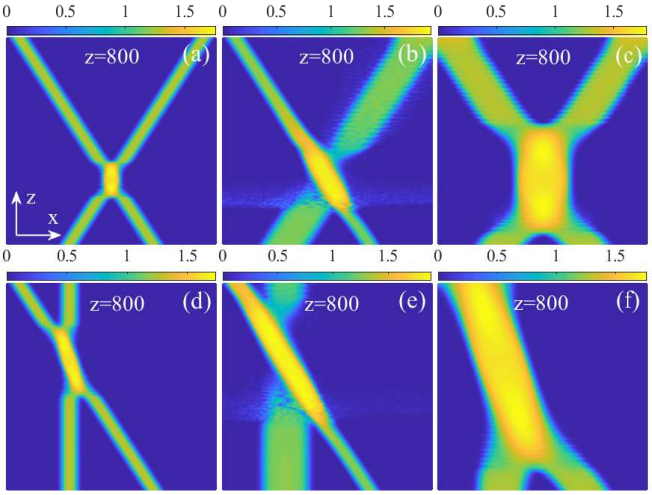

图2. 在式(1 =)中 $\Omega_2 = 0.04$ Ω3下的一维孤子碰撞：(a) 两个受势阱引导的高斯孤子之间的碰撞，参数为 2 $=0.2$；(b) FT-高斯碰撞，参数为 ,；(c) FT-FT 碰撞，参数为 。面板(d)–(f)与(a)–(c)类似，但展示的是 $\Omega_1=0.04, \Omega_2=0$时一维孤子的碰撞。在所有面板中，$\tilde{x}_1=10, \tilde{x}_2=-10$和 $|x|\le 25$。

随着 V_i增加而减小，这使得俘获势槽变窄。例如，$V_i=0.02$ 和 $V_i=0.25$对应的孤子（蓝线和绿线）的半峰宽分别为 $W\approx 10.3$和 3.0。注意，$V_i=0.25$对应的窄一维孤子（绿线）是高斯形状，而非 FT 孤子。另一方面，$V_i=0.02$和 0.05 对应的一维孤子（分别为蓝线和红线）呈现 FT 轮廓。为进一步探究这些一维孤子的半峰宽 W 与倒数

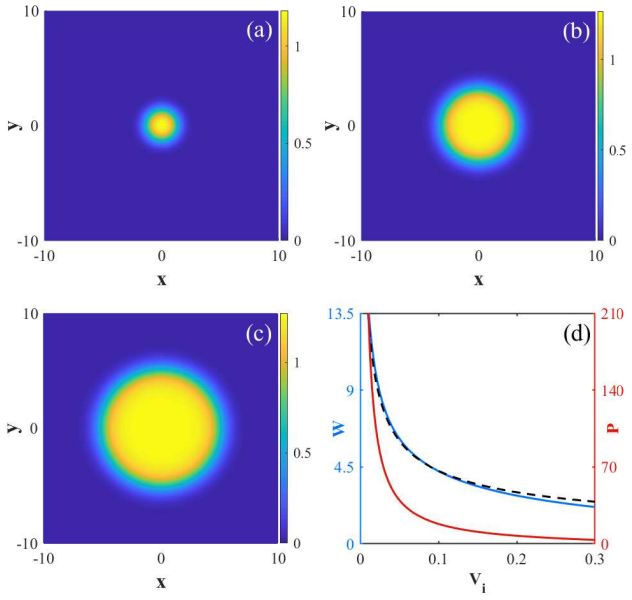

图 3. (a) 在不同的V_i 和 $x_i = 0$取值下，单槽圆柱势（4）支持的二维孤子等高线：(a) 位于 $V_i = 0.25$处的高斯孤子；(b) 位于 $V_i = 0.05$处的 FT 孤子；(c) 位于 $V_i = 0.02$处的 FT 孤子。(d) 二维孤子的半峰宽和总功率（分别以蓝色和红色曲线表示）随槽的反宽度V_i的变化。黑色虚线是 $W\,(V_i)$ 依赖关系对关系式（7）的最佳拟合，其中常数为 $= 1.35$。

宽度 V_i 与俘获势槽宽度之间的关系，我们在图 W 中绘出了 V_i 对 1(b) 中 W 随V_i [增加而先快速、后缓慢减小的变化]。事实上，方程（2）中的窄势阱决定了被俘获孤子呈准高斯形状，其宽度按$W \sim V_i^{-1/2}$ 标度。这一预期得到了图 1(b) 和 3(d) 中黑色虚线的充分验证，它们展示了实际关系 $W(V_i)$ 对

$$W = \text{const} \cdot V_i^{-1/2}. \tag{7}$$

图1(b) 还表明，孤子的功率 P（红色曲线）起初迅速下降，随后随着 V_i的增加而缓慢下降。 $P(V_i)$ 依赖关系与 W (V_i) 相似，这可由前文所述的三次-五次孤子倾向于保持恒定值来解释；因此，总功率粗略而言与 W成正比。

本文讨论的第一个问题是由具有不同斜率 Ω 的势阱（2）驱动的孤子之间的碰撞$_1$ 和 $-\Omega_2$ ，对应方程（3）。我们首先考察 Ω$_{1、2}$ $= 0.04$的高斯孤子之间的碰撞，如图2(a)所示。高斯孤子发生弹性碰撞，碰撞后继续不受干扰地运动。在所有数值模拟中，均加入强度为振幅 1 % 的随机噪声。

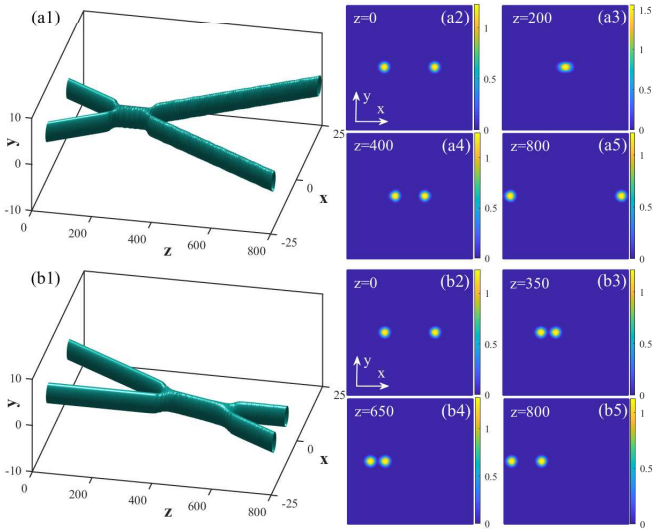

图 4 1 2 $V_1 =$。0.2 $V_2 = 0.2$ $_1 = 0.04$ $_2 = 0.04$

（a）具有（,）和（Ω , Ω ）的 D 个高斯孤子的碰撞。面板（a1）中碰撞在不同传播距离 z 下的等高线：（a2）在 $z = 0$ 处，（a3）在 $z = 200$ 处，（a4） $z = 400$，（a5） $z = 800$。面板（b1）–（b5）展示了与面板（a1）–（a5）类似的结果，但对应于（Ω $_1 = 0.04, \Omega_2 = 0$）。在所有面板中， $\tilde{x}_1 = 10, \tilde{x}_2 = -10, |x, y| \leq 25.$

图2(b)展示了一个 FT 孤子与一个大振幅高斯孤子之间的碰撞；二者受斜率相同的势阱引导，对应方程（3）中的 Ω1、$_2 = 0.04$。结果表明，孤子再次彼此准弹性穿过，并产生了一些微弱的辐射场。此外，图2(c)展示了具有 Ω1、$_2 = 0.04$ 的一维 FT 孤子之间的碰撞；碰撞后，它们也基本上继续不受干扰地运动。

图2（a-c）中同一对一维孤子的另一组碰撞，不过这次由式（$_1 = 0.04$ 和$_2 = 0$ （3）中的斜率 Ω2所对应的槽状势引导。由于自由空间（没有槽状势）中底层非线性薛定谔方程具有伽利略不变性，这些结果与 $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.02$的情形本质上相同，见式（3）。

可以看出，图 (d,e) 所示的准弹性高斯-高斯碰撞和 FT-高斯碰撞，分别与图 (a,b) 中展示的情况相当相似。另一方面，图2 (f) 所示的非弹性 FT-FT 碰撞，与图 (c) 中的情形截然不同，因为在这里，发生碰撞的 FT 孤子会合并成一个。请注意，这种合并意味着系统发生了强烈的自发对称性破缺（SSB） [56], ，因为新形成的单个孤子会自发地选择两个势阱中的一个。下文将证明，二维 FT 孤子的碰撞合并同样意味着自发对称性破缺，见图6(b1-b5)。FT-FT 碰撞可能出现后一种结果，其原因在于，高斯孤子穿过另一个高斯孤子或 FT 孤子时，仍能保持其个体

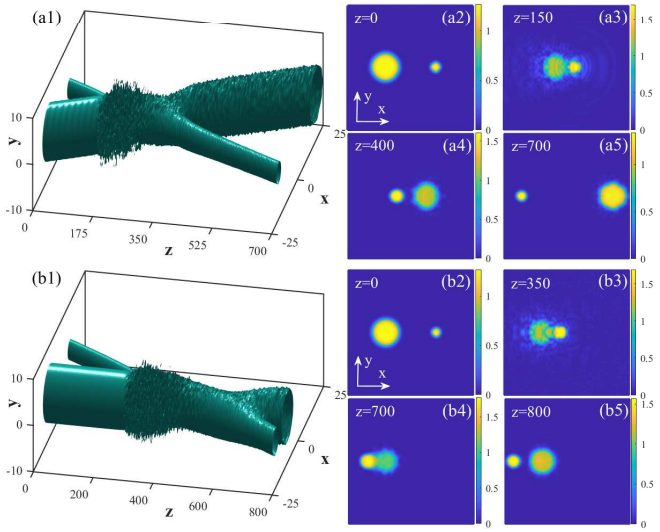

图 5。（a1）平顶孤子与高斯孤子的二维碰撞，其中 $V_1 = 0.2$、 $V_2 = 0.02$ ，$\Omega_1 = 0.04$、$\Omega_2 = 0.04$。面板（a1）中碰撞在不同传播距离 z 下的等高线：（a2） $z = 0$； （a3）$z = 150$； （a4） $z = 400$； （a5） $z = 700$。面板（b1）–（b5）所示结果与面板（a1）–（a5）中的结果相似，但对应于 Ω$_1 = 0.04$、$\Omega_2 = 0$。在所有面板中， $\tilde{x}_1 = 10$、 $\tilde{x}_2 = -10$、 x 、 $y \in [-25, +25]$。

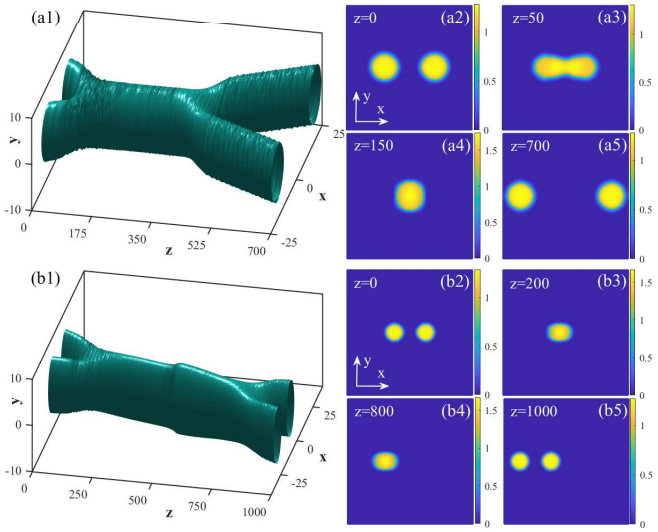

图 6. (a1) 在 $\Omega_1 = 0.04$、$\Omega_2 = 0.04$ 下，$V_1 = 0.02$、 $V_2 = 0.02$ 两个平顶孤子的二维碰撞。面板 (a1) 中碰撞在不同传播距离 z处的等高线：(a2) $z = 0$；(a3) $z = 200$；(a4) $z = 400$；(a5) $z = 800$。面板 (b1)–(b5) 所示结果与面板 (a1)–(a5) 类似，但对应 $\Omega_1 = 0.04$、$\Omega_2 = 0$。$\tilde{x}_1 = 10$、 $\tilde{x}_2 = -10$、 x、 $y \in [-25, +25]$ 分别对应面板 (a2)–(a5)； x、 $y \in [-40, +40]$ 分别对应面板 (b2)–(b5)。

特性，因此碰撞后会以原有形态重新出现。另一方面，当发生碰撞的 FT 孤子在长时间共同传播过程中持续重叠时，波场可能会发生均匀化，从而阻止重叠态随后分离为原来的 FT 孤子对。同样的论点也解释了二维 FT 孤子碰撞后可能发生合并的原因，见下文图6(b1-b6)。

B. 二维孤子及结果总结

不同 V_i值下二维孤子的等高线如图 3(a)–(c) 所示。它们的振幅相同，这与前述立方-五次模型的性质一致；而随着二维束缚势反宽度 V_i 减小，宽度自然增大，这与一维结果类似。图 3(d) 中，左侧蓝线和红线分别绘出了二维孤子族的半峰宽 W 和孤子功率 P 随V_i 变化的曲线。与一维情形类似， W 和 P 均随 V_i的增大先快速减小，随后缓慢减小。

接下来我们讨论二维孤子的碰撞。方程（$_1 = 0.04$，Ω$_2 = 0.04$）和（$\Omega_1 = 0.04$，$\Omega_2 = 0$）中两个二维高斯孤子的碰撞分别如图3中的图4（a1）–（a5）和4（b1）–（b5）所示。与上文图2（a、d）中给出的一维结果类似，图4（a1）表明，两个二维高斯孤子的碰撞是准弹性的，其中包括一个融合“颈部”的暂时形成。

在方程（$_1$ =3）中，对于转向参数（$\Omega_2 = 0.04\Omega$ $_1 = 0.04$）和（$\Omega_2 = 0$,$\Omega_2 = 0.02$）（别名为 ΩΩ，如上所述），FT 孤子与高斯孤子的碰撞分别展示于图5（a1）–（a5）和图5（b1）–（b5）中，其中高斯孤子的振幅大于 FT 孤子的振幅。与上文图2（b、e）所示的一维结果类似，图5（a1）表明，碰撞总体上仍为准弹性碰撞，并伴有辐射产生。

二维 FT 孤子与（$\Omega_1 = 0.04$,$\Omega_2 = 0.04$）和（Ω$_1 = 0.04$,$\Omega_2 = 0$）的碰撞分别展示于图6（a1）–（a5）和图6（b1）–（b5）中。与图2（c）和（f）所报告的结果类似，图6（a1）和（b1）分别展示了弹性碰撞和非弹性碰撞的实例（也就是碰撞孤子的相互穿越和合并）。

一维和二维系统中孤子-孤子碰撞的系统模拟结果总结在图中所绘制的参数图里。7 (a) 和 (b) 分别展示了准弹性穿越与碰撞合并结果之间的边界。自然地，倾斜差 $2\Omega_i$ 的增大，会促使碰撞从合并转变为穿越。与上述论述一致，合并主要发生在碰撞孤子属于 FT 类型的参数取值下，这与上文图2 (f) 和6 (b1-b5) 所示的情况类似。不过，缓慢移动的高斯孤子之间的碰撞也会导致合并。

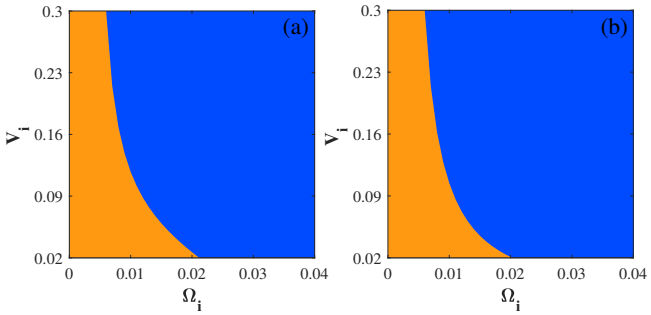

图7. 两个一维（a）或二维（b）孤子的碰撞结果，孤子按式（3）定义，其中 $\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega_i$，且式（ V_i 2）或（4）中的参数相等：黄色和蓝色区域分别表示合并和准弹性穿越。参数图未扩展到 $V_i < 0.02$，因为对于如此宽的势阱，数值解无法产生两个相距很远的平顶孤子。

因此， V_i 的增大使孤子变窄，也会逐渐促使其从合并转变为穿越。

四、结论

本文证明，在加入相交势阱的三次-五次（CQ）非线性薛定谔方程中，受势阱引导的一维和二维高斯形孤子及平顶（FT）孤子会发生准弹性或非弹性碰撞（分别表现为相互穿越或合并为单个孤子）。后一种情况下，合并形成的孤子被束缚在单个引导势阱中，这意味着发生强烈的自发对称性破缺。具体而言，高斯-高斯碰撞和高斯-平顶碰撞均为准弹性碰撞，而平顶-平顶碰撞则可能是准弹性碰撞，也可能导致对称性破缺并合并为单个平顶孤子。此外，我们发现，高斯-平顶碰撞虽然整体上保持准弹性，却会产生微弱的辐射场。

本研究中阐述的设定可用于设计全光数据处理方案，其中每个空间孤子承载一个比特。该研究还可进一步扩展至描述原子玻色–爱因斯坦凝聚体的有效一维 Gross-Pitaevskii 方程（GPE），该方程具有三次自排斥与二次自吸引的组合，其中二次项体现了对平均场近似的 Lee-Huang-Yang修正，由此产生量子液滴 [57–59]。具有二次-三次非线性的 GPE 还会产生高斯形孤子和平顶孤子族。此类孤子在自由空间中的碰撞可能是弹性或非弹性的，具体取决于参数[60]。此外，本研究的一个有趣拓展方向是考察碰撞孤子之间的相位差对碰撞结果的影响。尤其是，预计相位差 π 会使相互作用力反向。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（62205224、61827185、11774068）、广东省基础与应用基础研究基金（2023A1515010865）、广州科技计划项目（2025A04J4068）和以色列科学基金会（1695/22）的资助。

利益冲突声明

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

作者贡献

Liangwei Zeng：概念构思（共同）；调查研究（共同）；方法学（共同）；撰写——初稿（主要）；撰写——审阅与编辑（共同）。Boris A. Malomed：形式分析（共同）；方法学（共同）；撰写——审阅与编辑（共同）。Dumitru Mihalache：形式分析（共同）；方法学（共同）；撰写——审阅与编辑（共同）。Jingzhen Li：方法学（共同）；撰写——审阅与编辑（共同）。Xing Zhu：概念构思（共同）；调查研究（共同）；方法学（共同）；撰写——审阅与编辑（共同）。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。

[1] V. E. Zakharov、S. V. Manakov、S. P. Novikov 和 L. P. Pitaevskii, *Theory of Solitons: The Inverse Problem Method* 1980 ”，科学出版社，莫斯科（）。英文译本：Consultants Bureau，纽约（1984）。

[2] M. Ablowitz 和 H. Segur，《*Solitons and the Inverse Scattering Transform* 1981 》，工业与应用数学学会，费城（）。[3] A. Newell，《*Solitons in Mathematics and Physics*》，工业与应用数学学会，费城（1985）。

[4] Y. S. Kivshar 和 B. A. Malomed，《近可积系统中的孤子动力学》，《现代物理评论》61，763–915（1989）。[5] T. Dauxois 和 M. Peyrard，《*Physics of Solitons*》，剑桥大学出版社，剑桥（2006）。[6] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed 和 L. Torner，《非线性晶格中的孤子》，《现代物理评论》83，247–305（2011）。[7] H. Leblond 和 D. Mihalache，《超越慢变包络近似的少周期光学循环孤子模型》，《物理报告》523，61–126（2013）。[8] V. V. Konotop、J. Yang 和 D. A. Zezyulin，《

$\mathcal{PT}$

88, 对称 035002，2016

系统中的非线性波》，《现代物理评论》（）。[9] L. Berg´e，《物理学中的波塌缩：原理及其在光波和等离子体波中的应用》，《物理报告》303，259–370（1998）。[10] E. A. Kuznetsov 和 F. Dias，《孤子分岔及其稳定性》，《物理报告》507，43–105（2011）。[11] G. Fibich，《

The Nonlinear Schrödinger Equation: Singular Solutions and Optical Collapse》，施普林格，海德堡（2015）。[12] B. A. Malomed，《*Multidimensional Solitons*》，美国物理联合会出版社，纽约（2022）。[13] Y. V. Kartashov、G. E. Astrakharchik、B. A. Malomed 和 L. Torner，《非线性场与物质多维自陷研究前沿》，《自然综述：物理》1，185–197（2019）。[14] B. A. Malomed，《多维孤子系统》，《物理进展X》9，2301592（2024）。[15] D. Mihalache，《光学介质和玻色–爱因斯坦凝聚体中的局域结构：近期理论与实验结果综述》，《罗马尼亚物理报告》76，402（2024）。[16] D. Pelinovsky，《

Localization in Periodic Potentials: From Schrödinger Operators to the Gross-Pitaevskii Equation》，剑桥大学出版社，剑桥（2011）。[17] V. E. Lobanov、Y. V. Kartashov 和 V. V. Konotop，《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的基态、多极和半涡旋带隙孤子》，《物理评论快报》112，180403（2014）。[18] Z. Chen 和 J. Zeng，《相干原子系综中二维光学带隙孤子与涡旋》，《非线性科学与数值模拟通讯》102，105911（2021）。[19] L. Zeng、T. Wang、M. R. Beli´c、D. Mihalache 和 X. Zhu，《平底势中的克尔非线性介质高阶涡旋孤子》，《非线性动力学》112，22283–22293（2024）。[20] L. Zeng、B. A. Malomed、D. Mihalache、J. Li 和 X. Zhu，《复合线性-非线性莫尔´晶格中的孤子》，《光学快报》49，6944–6947（2024）。[21] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed、V. A. Vysloukh 和 L. Torner，《非线性晶格中的二维孤子》，《光学快报》34，770–772（2009）。[22] J. Shi、L. Zeng 和 J. Chen，《饱和五次非线性晶格中的二维局域模式》，《非线性动力学》111，13415–13424（2023）。[23] X. Zeng、M. R. Beli´c、D. Mihalache、X. Lu、Y. Cai、J. Li、X. Zhu 和 L. Zeng，《饱和准非线性晶格中的二维孤子族》，《光学快报》33，33483–33493（2025）。[24] R. Driben、B. A. Malomed、A. Gubeskys 和 J. Zyss，《棋盘格势中的三次-五次孤子

,”

《物理评论E》76, 066604 (2007). [25] D. Feijoo, D. A. Zezyulin, and V. V. Konotop, “具有三次-五次非线性的保守型与宇称-时间对称三芯波导中的二维孤子,”《物理评论E》92, 062909 (2015). [26] L. Zeng and J. Zeng, “通过定制非常规光学衍射与非线性，避免高阶孤子的临界坍缩,”《通讯物理》3, 26 (2020). [27] A. Paredes, J. R. Salgueiro, and H. Michinel, “论三次-五次非线性 Schr¨odinger 方程中的涡旋孤子与暗孤子,”《物理学D》437, 133340 (2022). [28] X. Zhu, M. R. Beli´c, D. Mihalache, D. Xiang, and L. Zeng, “具有PT 对称晶格和分数阶衍射的三次-五次非线性介质中的二维带隙孤子,”《欧洲物理期刊 Plus》139, 1116 (2024). [29] L. Zeng, M. R. Beli´c, D. Mihalache, and X. Zhu, “竞争性三次-五次非线性介质中的椭圆形与矩形孤子,”《混沌、孤子与分形》181, 114645 2024( ). [30] Y. Zhang, M. R. Beli´c, H. Zheng, H. Chen, C. Li, Y. Li, and Y. Zhang, “艾里光束、非线性加速光束与诱导孤子在克尔介质和饱和非线性介质中的相互作用,”《光学快报》22, 7160–7171 (2014). [31] A. S. Reyna, G. Boudebs, B. A. Malomed, and C. B. de Ara´ujo, “涡旋光束在饱和光学介质中的稳健自陷,”《物理评论A》93, 013840 (2016). [32] S. V. Fedorov, N. A. Veretenov, and N. N. Rosanov, “利用相干维持辐射控制饱和吸收激光器中二维孤子的拓扑,”《光学快报》45, 3284–3287 (2020). [33] L. Zeng, M. R. Beli´c, D. Mihalache, J. Shi, J. Li, S. Li, X. Lu, Y. Cai, and J. Li, “饱和非线性与分数阶衍射介质中的带隙孤子族及其复合结构,”《非线性动力学》108, 1671–1680 (2022). [34] X. Zhu, M. R. Beli´c, D. Mihalache, D. Xiang, and L. Zeng, “由具有饱和非线性和分数阶衍射的宇称-时间对称光学晶格支持的二维带隙孤子,”《光学与激光技术》184, 112426 (2025). [35] A. S. Reyna and C. B. de Ara´ujo, “三次-五次介质中的光学涡旋孤子诱导的光引导与约束,”《光学快报》41, 191–194 (2016). [36] A. S. Reyna and C. B. de Ara´ujo, “等离激元纳米复合材料中的高阶光学非线性：综述,”《光学与光子学进展》9, 720–774 (2017). [37] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, “物质波孤子列的形成与传播,”《自然》417, 150–153 (2002). [38] C. Rotschild, B. Alfassi, O. Cohen, and M. Segev, “光孤子间的长程相互作用,”《自然·物理》2, 769–774 (2006). [39] L. Zeng, J. He, B. A. Malomed, J. Chen, and X. Zhu, “线性与非线性双阱势组合中双分量孤子的自发对称性与反对称性破缺,”《物理评论E》110, 064216 2024( ). [40] J. Chen, D. Mihalache, M. R. Beli´c, J. Shi, D. Zhu, D. Deng, S. Qiu, R. Liao, X. Zhu, and L. Zeng, “三次-五次非线性作用下双频光学超晶格中的暗带隙孤子,”《混沌》34, 113131 (2024).

[41] R. Hirota, “多孤子碰撞的科尔特韦格–德弗里斯方程精确解,” 《物理评论快报》 27, 1192–1194 (1971). [42] M. F. Shih, M. Segev, and G. Salamo, “相互作用空间孤子的三维螺旋运动,” 《物理评论快报》 78, 2551–2554 (1997). [43] G. I. Stege man and M. Segev, “空间光孤子及其相互作用：普遍性与多样性,” Sci- ence 286, 1518–1523 (1999). [44] J. Yang and Y. Tan, “矢量孤子碰撞中的分形结构,” 《物理评论快报》85, 3624–3627 (2000). [45] I. E. Papacharalampous, P. G. Kevrekidis, B. A. Mal- omed, and D. J. Frantzeskakis, “离散非线性 Schr¨odinger 方程中的孤子碰撞,” 《物理评论E》68, 046604 (2003). [46] S. Lannig, C. M. Schmied, M. Pr¨ufer, P. Kunkel, R. Strohmaier, H. Strobel, T. Gasenzer, P. G. Kevrekidis, and M. K. Oberthaler, “玻色–爱因斯坦凝聚体中三分量矢量孤子的碰撞,” 《物理评论快报》125, 170401 (2020). [47] M. V. Flamarion, E. Pelinovsky, and E. Didenkulova, “研究 Schamel 方程中孤立波的追越碰撞,” 《混沌、孤子与分形》174, 113870 2023( ). [48] Kh. I. Pushkarov, D. I. Pushkarov, and I. V. Tomov, “非线性介质中光束的自作用：孤子解,” Opt. Quant. Electr. 11, 471–478 (1979). [49] M. Quiroga-Teixeiro and H. Michinel, “五次非线性光学介质中的方位角驻定态,” J. Opt. Soc. Am. B 14, 2004–2009 (1997). [50] M. Quiroga-Teixeiro, A. Berntson, and H. Michinel, “基态非线性光束的内部动力学：短寿命与长寿命激发,” J. Opt. Soc. Am. B 16, 1697–1704 (1999). [51] B. Baizakov, A. Bouketir, A. Messikh, A. Benseghir, and B. Pumarov, “平顶孤子的变分分析，见玻色–爱因斯坦凝聚体”，国际现代物理学杂志B 25, 2427–2440（2011）。[52] L. Zeng、J. Zeng、Y. V. Kartashov 和 B. A. Malomed，“纯克尔非线性模型中的平顶孤子”，《光学快报》44，1206–1209（2019）。[53] V. E. Lobanov、A. E. Shitikov、R. R. Galiev、K. N. Min’kov、O. V. Borovkova 和 N. M. Kondratiev，“通过调制泵浦在光学微腔中生成矢量平顶孤子和混合明亮–平顶孤子复合体”，《物理评论A》104，063511（2021）。[54] U. A. Khawaja、M. O. D. Alotaibi 和 L. A. Sakkaf，“平顶孤子的弹性和非弹性散射”，《物理评论E》110，044215（2024）。[55] J. Yang 和 T. I. Lakoba，“一般非线性波动方程中孤立波的普适收敛平方算子迭代方法”，《应用数学研究》118，153–197（2007）。[56] B. A. Malomed，“*Spontaneous Symmetry Breaking*、*Self-Trapping*、 *and Josephson Oscillations*”，施普林格出版社，柏林和海德堡（2013）。[57] D. S. Petrov 和 G. E. Astrakharchik，“超稀低维液体”，《物理评论快报》117, 100401（2016）。[58] A. Paredes、J. R. Salgueiro 和 H. Michinel，“涡旋量子液滴的变分模型”，《混沌》、孤子与分形 186，115297（2024）。[59] A. Paredes、J. Guerra-Carmenate、J. R. Salgueiro、D. Tommasini 和 H. Michinel，“对称二维量子液滴中的行进气泡和涡旋对”，《物理评论E》111，054217（2025）。[60] G. E. Astrakharchik 和 B. A. Malomed，“一维量子液滴的动力学”，《物理评论A》98，013631（2018）。