arXiv:2601.00193v1 [math.NA] 1 Jan 2026

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程的时间双网格紧致差分格式*

Lisen Ding†[1]、Xiangyi Peng‡[1]和 Dongling Wang§[1]

[1]湖南省科学与工程计算与仿真重点实验室，湘潭大学数学与计算科学学院，中国湖南省湘潭市，邮编 411105。

2026年1月5日

摘要

本文提出了一种时间双网格紧致差分（TTCD）格式，用于求解具有初始条件和周期边界条件的 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers（BBMB）方程。该方法主要包括三个步骤：首先，在步长为 τ_c 的粗时间网格上求解非线性方程组；然后，通过线性拉格朗日插值，在步长为 τ_f 的细时间网格上获得粗略近似；最后，在细网格上求解线性化格式，以获得校正解。TTCD 格式在不牺牲精度的前提下降低了计算成本。此外，本文利用能量方法，严格证明了所提格式的守恒性、唯一可解性、收敛性和稳定性。结果表明，该方法在最大范数下达到 $\mathcal{O}(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4)$ 阶收敛，其中 h 为空间步长。最后，本文给出了一些数值实验，以验证所提策略的有效性和可行性。

关键词：BBMB 方程、时间双网格算法、紧致有限差分、收敛性与稳定性、守恒性

MSC2020：65M06，65M12，65M55

1 引言

波现象广泛存在于自然界中，其中大多数是非线性的。因此，非线性波的研究是物理学中的一个基础课题，而用于建模的工具通常是非线性偏微分方程。作为描述浅水波传播的模型，非线性 Benjamin-Bona-Mahony（BBM）方程于 1972 年由 Benjamin、Bona 和 Mahony 首次提出[BBM72]。与 Korteweg-de Vries（KdV）方程相比，作者证明，BBM 方程更适合模拟具有小波幅的长波单向传播。当耗散效应不可忽略时，需要在 BBM 方程中引入耗散项，从而得到 BBMB 方程。本文考虑使用时间双网格紧致差分法求解非线性 BBMB 方程

$$u_t-\mu u_{xxt}+uu_x+u_x-\lambda u_{xx}=0,\quad x\in\mathbb{R},\ 0<t\le T, \tag{1.1}$$

具有初值和周期边界条件

$$u(x,t)=u(x+L,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad 0<t\le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

*Dongling Wang 的研究部分得到了国家自然科学基金（项目编号：12271463）、111计划（项目编号：D23017）以及中国湖南省高等院校科学技术创新研究团队计划的资助。Lisen Ding 的研究得到了中国湘潭大学研究生科研创新项目（项目编号：XDCX2025Y213）的资助。

†电子邮箱：dingmath15@smail.xtu.edu.cn

‡电子邮箱：pxymath18@smail.xtu.edu.cn§电子邮箱：wdymath@xtu.edu.cn；通讯作者。

其中 μ 和黏性系数 λ 均为正常数。这里， u_{xxt} 表示色散项，u_{xx} 表示耗散项， L 为空间周期长度。

通过指数函数法、变分迭代法等解析方法，可以在特定情况下推导出 BBMB 方程的显式解，如 [GGB09、TG07、BGd16、BMGN18]所示。然而，这些显式解通常形式复杂，且仅适用于特定情形。若要了解解更一般的性质，数值模拟便成为近似求解并分析 BBMB 方程行为的一种必要且有效的策略。

目前，已有多种求解 BBMB 方程的数值方法，例如有限元法 [SQ24、Ngo24], 有限差分法 [ZLZ20、CW21、WMWY25],伪谱法或谱元法 [MBT18、DSA21], 虚元方法 [CLQL25], 无网格方法 [DAM14、SJ16], 等。其中，高阶格式的开发一直是研究重点。例如，Mohebbi 和 Faraz [MF17] 提出了一种标准的四阶线性化差分格式；Bayarassou [Bay21] 设计了四阶非线性和线性化差分格式；Zhang 和 Liu [ZL21] 则开发了一种线性化紧致差分格式。与原始非线性格式相比，这类线性化格式虽然能提高计算速度，但往往以牺牲精度为代价。另一方面，非线性格式需要通过迭代求解。当网格尺寸非常精细时，对由此产生的大型代数方程组进行迭代求解，不可避免地会带来高昂的计算成本。为了兼顾计算开销与精度，双网格算法提供了一种有效策略。

双网格算法最初由 Xu 提出[Xu94，Xu96], 其主要目的是在保持方法最优精度的同时，降低求解大型非线性方程组的计算成本。一般而言，其核心思想是先在粗网格上求解一个小规模非线性方程组，然后利用这一粗略近似，在细网格上构造并求解一个更简单的线性方程组。受 Xu 工作的启发，近年来，双网格方法已成功推广至多种非线性偏微分方程。关于空间双网格算法，可参见 [HHF14、CZZ$^+$25]；关于时空双网格法的详细介绍，可参见 [SYZ24、GHE$^+$25]。

本文关注时间双网格算法。例如，Liu等人 [LYL$^+$18] 采用时间双网格有限元法对含有 Burgers非线性项的时间分数阶水波模型进行了近似求解。Xu等人 [XGQ20] 采用时间双网格有限差分方法求解二维非线性分数阶演化方程。Peng等人 [PQWM24] 为黏性Burgers方程构造了时间双网格紧致差分格式。关于时间双网格方法的更多细节及进一步发展，还可参见 [LLLG23、CNQA23、NLLL23]。

我们针对式（1.1）-（1.3）给出的 BBMB 方程发展了该方法，并进行了相应的理论分析。所提出的格式包含三个主要步骤。首先，在粗网格上通过不动点迭代求解非线性紧致差分格式。其次，通过时间方向上的线性插值，获得细网格上的粗略近似。最后，利用该粗略近似构造并求解线性化紧致格式，从而得到校正后的细网格解。本文的主要贡献总结如下。

- 本文建立了一种用于 BBMB 方程的时间双网格紧致差分（TTCD）格式，并严格证明了数值解的守恒性和唯一性。
- 本文基于离散能量方法进行了全面的理论分析。结果表明，该格式在最大范数下达到 $\mathcal{O}(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4)$ 的收敛阶。TTCD 格式的稳定性可由同一框架直接推出。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍必要的记号和基本引理。第3 节给出一维 BBMB 方程的 TTCD 格式。第4节分析该格式的守恒性和唯一可解性。在第5节中，严格证明所提出格式的收敛性与稳定性。第6 节给出数值实验，以验证理论结果并展示 TTCD 格式的效率。最后，第7节作简要总结。

2 一些记号和引理

在 构造时间双网格算法之前，有必要介绍一些网格记号 n.
在空间方向上，设空间步长为 $h=\frac{L}{M}$，并将一个周期上的空间网格定义为 $\Omega_h=\{x_p \mid x_p=a+ph,$ $a\in\mathbb{R},\ 1\le p\le M\}$。在时间方向上，记粗时间步长

为 $\tau_c = \frac{T}{N_c}$，粗时间网格为 $\Omega_\tau^c = \{(t_c)_q \mid (t_c)_q = q\tau_c,\ 0 \le q \le N_c\}$。类似地，在细时间网格上，定义细时间步长 a $\tau_f = \frac{T}{N_f}$，细时间网格为 $\Omega_\tau^f = \{(t_f)_k \mid (t_f)_k = k\tau_f,\ 0 \le k \le N_f\}$。这里，$M$、$N_c$和 N_f均为正整数，且 $N_f = \beta_\tau N_c$，其中 $\beta_\tau \in \mathbb{Z}^+$称为时间步长比。显然，$\tau_c = \beta_\tau \tau_f$。对于每个粗网格点 $(x_p, (t_c)_q) \in \Omega_h \times \Omega_\tau^c$，将相应的粗网格函数记为 w_p^q。类似地，对任意细网格点 $(x_p, (t_f)_k) \in \Omega_h \times \Omega_\tau^f$，定义细网格函数为 w_p^k。为简便起见，统一记为 $w_p^l = w_p^q$或 w_p^k，其中网格节点 $(x_p, t_l) \in \Omega_h \times \Omega_\tau^\eta$（$0 \le l \le N_\eta$），适用于 $\eta = c$或 f。于是，对于任意网格函数 w_p^l、v_p^l，我们引入

$$
\begin{aligned}
w_p^{l-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(w_p^l + w_p^{l-1}\right), & \delta_t^\eta w_p^{l-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\tau_\eta}\left(w_p^l - w_p^{l-1}\right),\\
\delta_x w_{p-\frac{1}{2}}^l &= \frac{1}{h}\left(w_p^l - w_{p-1}^l\right), & \delta_{xx} w_p^l &= \frac{1}{h}\left(\delta_x w_{p+\frac{1}{2}}^l - \delta_x w_{p-\frac{1}{2}}^l\right),\\
\Delta_x w_p^l &= \frac{1}{2h}\left(w_{p+1}^l - w_{p-1}^l\right), & \Psi(v_p^l, w_p^l) &= \frac{1}{3}\left[v_p^l \Delta_x w_p^l + \Delta_x\left(v_p^l w_p^l\right)\right].
\end{aligned}
$$

在周期区域中，Ω_h 上的网格函数空间可表示为

$$
\mathcal{W}_h = \{w \mid w = (w_1, w_2, \cdots, w_M),\ w_p = w_{p+M} \text{ for any } p \in \mathbb{Z}\}.
$$

对于任意 v、$w \in \mathcal{W}_h$，我们定义如下有用的离散内积及其对应的范数

$$
\begin{aligned}
&\langle v, w\rangle := h\sum_{p=1}^{M} v_p w_p, \quad (v, w) := h\sum_{p=1}^{M}\left(\delta_x v_{p-\frac{1}{2}}\right)\left(\delta_x w_{p-\frac{1}{2}}\right),\\
&\|w\| := \sqrt{\langle w, w\rangle}, \quad |w|_1 := \sqrt{(w, w)}, \quad \|w\|_\infty := \max_{1\le p\le M} |w_p|.
\end{aligned}
$$

根据上述记号，下面给出一些重要的引理。

引理 2.1。 [Sun12] 对于任意网格函数 $w \in \mathcal{W}_h$，有

$$
\|w\|_\infty \le \frac{\sqrt{L}}{2}|w|_1, \quad |w|_1 \le \frac{2}{h}\|w\|, \quad \|w\| \le \frac{L}{\sqrt{6}}|w|_1, \quad \|\Delta_x w\| \le |w|_1.
$$

引理 2.2。[Sun12] 对于任意网格函数 v，$w \in \mathcal{W}_h$有

$$
\begin{aligned}
&\langle v, \delta_{xx} w\rangle = -\langle \delta_x v, \delta_x w\rangle = \langle \delta_{xx} v, w\rangle, \quad \langle \Delta_x v, w\rangle = -\langle v, \Delta_x w\rangle.\\
&\langle \Delta_x w, w\rangle = 0, \quad \langle \Delta_x w, \delta_{xx} w\rangle = 0, \quad \langle \Psi(v, w), w\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

引理2.3。 [ZL21]设 $f(x) \in C^5[x_{p-1}, x_{p+1}]$，并记 $F_p = f(x_p)$，$\widehat{\ } F_p = f''(x_p)$，则有

$$
\begin{aligned}
f(x_p)f'(x_p) &= \Psi(F_p, F_p) - \frac{h^2}{2}\Psi(\widehat{F}_p, F_p) + \mathcal{O}(h^4),\\
f'(x_p) &= \Delta_x F_p - \frac{h^2}{6}\Delta_x \widehat{F}_p + \mathcal{O}(h^4),\\
f''(x_p) &= \delta_{xx} F_p - \frac{h^2}{12}\delta_{xx}\widehat{F}_p + \mathcal{O}(h^4),
\end{aligned}
$$

其中 $1 \le p \le M$。

引理 2.4。 [ZL21] 对于任意网格函数 v，w，$S \in \mathcal{W}_h$，若

$$
w_p = \delta_{xx} v_p - \frac{h^2}{12}\delta_{xx} w_p + S_p, \quad 1 \le p \le M,
$$

于是我们得到以下恒等式和不等式，

$$
\langle w, v\rangle = -|v|_1^2 - \frac{h^2}{12}\|w\|^2 + \frac{h^4}{144}|w|_1^2 + \frac{h^2}{12}\langle w, S\rangle + \langle S, v\rangle, \tag{2.1a}
$$

$$
\langle w, v\rangle \le -|v|_1^2 - \frac{h^2}{18}\|w\|^2 + \frac{h^2}{12}\langle w, S\rangle + \langle S, v\rangle, \tag{2.1b}
$$

$$
\langle \Delta_x w, v\rangle = \frac{h^2}{12}\langle \Delta_x w, S\rangle + \langle \Delta_x S, v\rangle. \tag{2.1c}
$$

引理 2.5。 [ZL21] 对于任意网格函数 v, $w \in \mathcal{W}_h$, 我们有

$$\Delta_x(v_p w_p) = \frac{1}{2} w_{p+1} \left(\delta_x v_{p+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} w_{p-1} \left(\delta_x v_{p-\frac{1}{2}}\right) + v_p \Delta_x w_p, \quad 1 \le p \le M,$$

其向量形式可写为

$$\Delta_x(vw) = \frac{1}{2} D_+ w \left(\delta_x^{+\frac{1}{2}} v\right) + \frac{1}{2} D_- w \left(\delta_x^{-\frac{1}{2}} v\right) + v \Delta_x w$$

其中 $D_+ w_p = w_{p+1}, D_- w_p = w_{p-1}, \delta_x^{+\frac{1}{2}} v_p = \delta_x v_{p+\frac{1}{2}}, \delta_x^{-\frac{1}{2}} v_p = \delta_x v_{p-\frac{1}{2}}$.

引理 2.6. 对于满足以下条件的任意网格函数 $v, w, S \in \mathcal{W}_h$, $\eta = c, f$

$$\begin{cases} w_p^l = \delta_{xx} v_p^l - \frac{h^2}{12} \delta_{xx} w_p^l + S_p^l, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le l \le N_\eta, \\ v_p^l = v_{p+M}^l, \quad w_p^l = w_{p+M}^l, \quad 0 \le p \le M,\ 0 \le l \le N_\eta. \end{cases} \tag{2.2}$$

根据 [WZS21],可得

$$\begin{aligned} \langle w^{l-\frac{1}{2}}, \delta_t^\eta v^{l-\frac{1}{2}} \rangle = & -\frac{1}{2\tau_\eta} \left[\left(|v^l|_1^2 - |v^{l-1}|_1^2\right) + \frac{h^2}{12} \left(\|w^l\|^2 - \|w^{l-1}\|^2\right) - \frac{h^4}{144} \left(|w^l|_1^2 - |w^{l-1}|_1^2\right) \right] \\ & + \frac{h^2}{12} \langle w^{l-\frac{1}{2}}, \delta_t^\eta S^{l-\frac{1}{2}} \rangle + \langle S^{l-\frac{1}{2}}, \delta_t^\eta v^{l-\frac{1}{2}} \rangle, \quad 1 \le l \le N_\eta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

同理，还可推导出以下等式,

$$\begin{aligned} \langle \delta_t^\eta w^{l-\frac{1}{2}}, v^{l-\frac{1}{2}} \rangle = & -\frac{1}{2\tau_\eta} \left[\left(|v^l|_1^2 - |v^{l-1}|_1^2\right) + \frac{h^2}{12} \left(\|w^l\|^2 - \|w^{l-1}\|^2\right) - \frac{h^4}{144} \left(|w^l|_1^2 - |w^{l-1}|_1^2\right) \right] \\ & + \frac{h^2}{12} \langle \delta_t^\eta w^{l-\frac{1}{2}}, S^{l-\frac{1}{2}} \rangle + \langle \delta_t^\eta S^{l-\frac{1}{2}}, v^{l-\frac{1}{2}} \rangle, \quad 1 \le l \le N_\eta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3 数值格式的构造

本节首先构造一个用于求解 BBMB 方程（1.1）的非线性紧致差分（NCD）格式，空间离散采用紧致差分法，时间离散采用 Crank-Nicolson 方法。在此格式的基础上，我们进一步设计 TTCD 格式，以在保持相同网格分辨率的同时提高计算效率。

3.1 NCD格式

令 $w = u_{xx}$，则（1.1）可改写为

$$\begin{cases} u_t - \mu w_t + u u_x + u_x - \lambda w = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < t \le T, & \text{(3.1a)} \\ w = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < t \le T. & \text{(3.1b)} \end{cases}$$

接下来，我们关注周期区域 $\Omega = [a, a+L], a \in \mathbb{R}$ 上问题 (3.1a)-(3.1b) 的离散化。定义网格函数 $U_p^l = u(x_p, t_l)$ 和 $w_p^l = w(x_p, t_l)$，其中 $(x_p, t_l) \in \Omega_h \times \Omega_\tau^\eta$。通过泰勒展开， uu_x, u_x, u_{xx} 可达到四阶精度。这里省略推导细节，直接应用引理2.3，得到

$$\begin{cases} w(x_p, t_l) = \delta_{xx} U_p^l - \dfrac{h^2}{12} \delta_{xx} W_p^l + \mathcal{O}(h^4), \\ u u_x(x_p, t_l) = \Psi(U_p^l, U_p^l) - \dfrac{h^2}{2} \Psi(W_p^l, U_p^l) + \mathcal{O}(h^4), \\ u_x(x_p, t_l) = \Delta_x U_p^l - \dfrac{h^2}{6} \Delta_x W_p^l + \mathcal{O}(h^4), \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $1 < p < M$和 $0 \le l \le N_\eta$, $\eta = c$, f。选取 $(x_p,\ t_{l-\frac{1}{2}})$ 和 $(x_p,\ t_l$分别作为方程 (3.1a) 和 (3.1b) 的模板点。因此，结合 (3.2) 和克兰克-尼科尔森格式，可得

$$\begin{cases} \delta_t^\eta U_p^{l-\frac{1}{2}} - \mu\delta_t^\eta W_p^{l-\frac{1}{2}} + \Psi\left(U_p^{l-\frac{1}{2}}, U_p^{l-\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{h^2}{2}\Psi\left(W_p^{l-\frac{1}{2}}, U_p^{l-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad +\Delta_x U_p^{l-\frac{1}{2}} - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x W_p^{l-\frac{1}{2}} - \lambda W_p^{l-\frac{1}{2}} = (R_\eta)_p^{l-\frac{1}{2}}, \quad 1 \le p \le M,\ 1 \le l \le N_\eta, & (3.3a) \\ W_p^l = \delta_{xx} U_p^l - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx} W_p^l + (Q_\eta)_p^l, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le l \le N_\eta, & (3.3b) \end{cases}$$

其中截断误差的估计如下:

$$\begin{cases} |(R_\eta)_p^{l-\frac{1}{2}}| \le C\left(\tau_\eta^2 + h^4\right), & 1 \le m \le M,\ 1 \le l \le N_\eta, \\ |(Q_\eta)_p^l| \le Ch^4, & 1 \le m \le M,\ 0 \le l \le N_\eta, \\ |\delta_t^\eta (Q_\eta)_p^{l-\frac{1}{2}}| \le Ch^4, & 1 \le m \le M,\ 1 \le l \le N_\eta. \end{cases} \tag{3.4}$$

本文中, C 表示一个一般常数。其值可能因不同情形而变化，但与时间步长和空间步长均无关。

略去（3.3a）-（3.3b）中的高阶小量，并将 U_p^l、 W_p^l替换为 u_p^l、 w_p^l，即可得到问题（3.1a）-（3.1b）的如下 NCD 格式

$$\begin{cases} \delta_t^\eta u_p^{l-\frac{1}{2}} - \mu\delta_t^\eta w_p^{l-\frac{1}{2}} + \Psi\left(u_p^{l-\frac{1}{2}}, u_p^{l-\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{h^2}{2}\Psi\left(w_p^{l-\frac{1}{2}}, u_p^{l-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad +\Delta_x u_p^{l-\frac{1}{2}} - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x w_p^{l-\frac{1}{2}} - \lambda w_p^{l-\frac{1}{2}} = 0, \quad 1 \le p \le M,\ 1 \le l \le N_\eta, & (3.5a) \\ w_p^l = \delta_{xx} u_p^l - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx} w_p^l, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le l \le N_\eta, & (3.5b) \\ u_p^l = u_{p+M}^l, \quad w_p^l = w_{p+M}^l, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le l \le N_\eta, & (3.5c) \\ u_p^0 = \phi(x_p), \quad 1 \le p \le M. & (3.5d) \end{cases}$$

注 3.1. 请注意，指标 η 控制时间网格的类型。为了在粗细时间网格上得到 NCD格式，我们对网格函数作了如下修改

$$\{U_p^l,\ W_p^l\} \Longrightarrow \begin{cases} \{U_p^q,\ W_p^q\}, & for\ \eta = c, \\ \{U_p^k,\ W_p^k\}, & for\ \eta = f. \end{cases}, \quad \{u_p^l,\ w_p^l\} \Longrightarrow \begin{cases} \{(u_c)_p^q,\ (w_c)_p^q\}, & for\ \eta = c, \\ \{(u_f)_p^k,\ (w_f)_p^k\}, & for\ \eta = f. \end{cases}$$

注 3.2. 上述 NCD格式 (3.5a)-(3.5d) 是一个非线性方程组，这里我们选择不动点迭代来求解。在实际计算中，较大的 M 以及迭代导致计算成本极高。

3.2 TTCD格式

TTCD格式可概括为三个步骤，下面将详细说明。

步骤 I. 令 $\eta = c$ 在方程组 (3.5a)-(3.5d)中，则粗网格 $\Omega_h \times \Omega_\tau^c$ 上的 NCD格式可表示如下:

$$\begin{cases} \delta_t^c (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \mu\delta_t^c (w_c)_p^{q-\frac{1}{2}} + \Psi\left((u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{h^2}{2}\Psi\left((w_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad +\Delta_x (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x (w_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \lambda (w_c)_p^{q-\frac{1}{2}} = 0, \quad 1 \le p \le M,\ 1 \le q \le N_c, & (3.6a) \\ (w_c)_p^q = \delta_{xx} (u_c)_p^q - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx} (w_c)_p^q, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le q \le N_c, & (3.6b) \\ (u_c)_p^q = (u_c)_{p+M}^q, \quad (w_c)_p^q = (w_c)_{p+M}^q, \quad 1 \le p \le M,\ 0 \le q \le N_c, & (3.6c) \\ (u_c)_p^0 = \phi(x_p), \quad 1 \le p \le M. & (3.6d) \end{cases}$$

步骤 II。考虑细网格 $\Omega_h \times \Omega_\tau^f$。根据时间网格比 β_τ，有 $(t_f)_{q\beta\tau} = (t_c)_q$ ，其中 $1 \le q \le N_c$。对于固定的空间节点 x_p，我们在

时间方向

$$
\begin{aligned}
(u_f)_p^{(q-1)\beta_\tau+r} &= \frac{(t_c)_q-(t_f)_{(q-1)\beta_\tau+r}}{(t_c)_q-(t_c)_{q-1}}(u_c)_p^{q-1}+\frac{(t_f)_{(q-1)\beta_\tau+r}-(t_c)_{q-1}}{(t_c)_q-(t_c)_{q-1}}(u_c)_p^{q} \\
&= \left(1-\frac{r}{\beta_\tau}\right)(u_c)_p^{q-1}+\frac{r}{\beta_\tau}(u_c)_p^{q}, \quad 1\le q\le N_c, \quad 1\le r\le \beta_\tau-1.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

注意，$(u_f)_p^{q\beta_\tau}=(u_c)_p^q$ $(1\le p\le M,\ \ 1\le q\le N_c)$，则可由步骤 I 和（3.7）得出 $(u_f)_p^k$（$0\le k\le N_f$）的值。当 $\eta=f$ 时，$(w_f)_p^k$可借助（3.5b）计算得出，即

$$
(w_f)_p^k=\delta_{xx}(u_f)_p^k-\frac{h^2}{12}\delta_{xx}(w_f)_p^k, \quad 1\le p\le M,\ 0\le k\le N_f. \tag{3.8}
$$

步骤 III. 由于近似解的精度 $(u_f)_p^k$ 仍然不足，我们进一步设计如下线性化格式进行校正：

$$
\begin{cases}
\delta_t^f u_p^{k-\frac12}-\mu\delta_t^f w_p^{k-\frac12}+\Psi\left((u_f)_p^{k-\frac12},u_p^{k-\frac12}\right)-\dfrac{h^2}{2}\Psi\left((w_f)_p^{k-\frac12},u_p^{k-\frac12}\right) \\
\qquad +\Delta_x u_p^{k-\frac12}-\dfrac{h^2}{6}\Delta_x w_p^{k-\frac12}-\lambda w_p^{k-\frac12}=0, \quad 1\le p\le M,\ 1\le k\le N_f, & (3.9a)\\
w_p^k=\delta_{xx}u_p^k-\dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}w_p^k, \quad 1\le p\le M,\ 0\le k\le N_f, & (3.9b)\\
u_p^k=u_{p+M}^k, \quad w_p^k=w_{p+M}^k, \quad 1\le p\le M,\ 0\le k\le N_f, & (3.9c)\\
u_p^0=\phi(x_p), \quad 1\le p\le M. & (3.9d)
\end{cases}
$$

比　　较粗略近似解 $(u_f)_p^k$，校正解 u_p^k 具有更高精度　　.

4 守恒性与唯一可解性

4.1 守恒性

在周期区域内，BBMB 方程（1.1）包含一个守恒不变量。定义连续能量泛函

$$
E(t)=\int_y^{y+L}u^2(x,t)+\mu u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_0^t\int_y^{y+L}u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{4.1}
$$

我们知道 $E(t)=E(0)$ 由[SQ24]得出。下面，我们将验证 TTCD 格式能够保持离散能量不变量。

定理 4.1。设 $\{(u_c)_p^q,\ (w_c)_p^q\mid 1\le p\le M,\ \ 0\le q\le N_c\}$ 为步骤 I (3.6a)-(3.6d)的解。定义

$$
\begin{aligned}
\mathring{E}^q &= \|(u_c)^q\|^2+\mu\left(|(u_c)^q|_1^2+\frac{h^2}{12}\|(w_c)^q\|^2-\frac{h^4}{144}|(w_c)^q|_1^2\right) \\
&\quad +2\lambda\tau_c\sum_{n=1}^{q}\left(|(u_c)^{n-\frac12}|_1^2+\frac{h^2}{12}\|(w_c)^{n-\frac12}\|^2-\frac{h^4}{144}|(w_c)^{n-\frac12}|_1^2\right), \quad 0\le q\le N_c.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

则对任意 $0\le q\le N_c$，有 $\mathring{E}^q=\mathring{E}^0$

证明。对（3.5a）与 $(u_c)^{q-\frac12}$取内积，得到

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\delta_t^c(u_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle-\mu\left\langle\delta_t^c(w_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle+\left\langle\Psi\left((u_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right),(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle \\
&-\frac{h^2}{2}\left\langle\Psi\left((w_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right),(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle+\left\langle\Delta_x(u_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle-\frac{h^2}{6}\left\langle\Delta_x(w_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle \\
&-\lambda\left\langle(w_c)^{q-\frac12},(u_c)^{q-\frac12}\right\rangle=0, \quad 1\le q\le N_c.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

根据引理 2.2 并在引理 $S=0$ （2.1c）中取 2.4，可得

$$\left\langle \Psi\left(\cdot,(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right),(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=0,\quad \left\langle \Delta_x(u_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=0,\quad \left\langle \Delta_x(w_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=0.$$

对于其余内积项，我们逐步进行分析。不难看出，

$$\left\langle \delta_t^c(u_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=\frac{1}{2\tau_c}\left(\|(u_c)^q\|^2-\|(u_c)^{q-1}\|^2\right).$$

令 $S=0$ 满足引理2.6中的（2.4），并利用引理2.4中的（2.1a），可得

$$\begin{aligned}-\mu\left\langle \delta_t^c(w_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=&\frac{\mu}{2\tau_c}\Big[\left(|(u_c)^q|_1^2-|(u_c)^{q-1}|_1^2\right)+\frac{h^2}{12}\left(\|(w_c)^q\|^2-\|(w_c)^{q-1}\|^2\right)\\&-\frac{h^4}{144}\left(|(w_c)^q|_1^2-|(w_c)^{q-1}|_1^2\right)\Big],\end{aligned}$$

and

$$-\lambda\left\langle (w_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=\lambda\left(|(u_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{h^2}{12}\|(w_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2-\frac{h^4}{144}|(w_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2\right).$$

将上述结果代入（4.3），并将上限索引 q 改为 n。最后，对 n 从 1 到 q求和，从而得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\tau_c}\left(\|(u_c)^q\|^2-\|(u_c)^0\|^2\right)+\frac{\mu}{2\tau_c}\left[\left(|(u_c)^q|_1^2-|(u_c)^0|_1^2\right)+\frac{h^2}{12}\left(\|(w_c)^q\|^2-\|(w_c)^0\|^2\right)-\frac{h^4}{144}\left(|(w_c)^q|_1^2-|(w_c)^0|_1^2\right)\right]\\&\quad+\lambda\sum_{n=1}^{q}\left(|(u_c)^{n-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{h^2}{12}\|(w_c)^{n-\frac{1}{2}}\|^2-\frac{h^4}{144}|(w_c)^{n-\frac{1}{2}}|_1^2\right)=0,\end{aligned}$$

由此可得结果。 □

推论 4.1。对于步骤 III，线性化格式（3.6a）-（3.6d）也具有守恒不变量。记

$$\begin{aligned}E^k=&\|u^k\|^2+\mu\left(|u^k|_1^2+\frac{h^2}{12}\|w^k\|^2-\frac{h^4}{144}|w^k|_1^2\right)\\&+2\lambda\tau_f\sum_{n=1}^{k}\left(|u^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{h^2}{12}\|w^{n-\frac{1}{2}}\|^2-\frac{h^4}{144}|w^{n-\frac{1}{2}}|_1^2\right),\quad 0\le k\le N_f,\end{aligned}\tag{4.4}$$

容易推出 $E^k=E^0$，其证明与定理4.1几乎相同。

注 4.1. 由引理 2.1中的不等式可得

$$\mathring{E}^q\ge\|(u_c)^q\|^2+\mu\left(|(u_c)^q|_1^2+\frac{h^2}{18}\|(w_c)^q\|^2\right)+2\lambda\tau_c\sum_{n=1}^{q}\left(|(u_c)^{n-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{h^2}{18}\|(w_c)^{n-\frac{1}{2}}\|^2\right)\ge\|(u_c)^q\|^2\ge 0.$$

这意味着 $\|(u_c)^q\|$ 有界，即存在一个常数 C，使得

$$\|(u_c)^q\|\le C,\quad 0\le q\le N_c.\tag{4.5}$$

类似地，我们还有 $\|u^k\|\le C$，对于 $0\le k\le N_f$。

4.2 唯一可解性

下面我们将证明 TTCD格式解的唯一可解性。由于步骤 II 仅涉及插值，其唯一可解性显然。因此，我们只需考虑步骤 I 和 III 的唯一可解性。

定理4.2。 步骤 I（NCD）(3.6a)-(3.6d) 存在唯一解。

证明。我们首先证明解的存在性。记 $(u_c)_p := (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}$, $(w_c)_p := (w_c)_p^{q-\frac{1}{2}}$。容易得知

$$(u_c)_p^q = 2(u_c)_p - (u_c)_p^{q-1}, \quad (w_c)_p^q = 2(w_c)_p - (w_c)_p^{q-1}, \quad 1 \le p \le M. \tag{4.6}$$

利用等式关系（3.6b）和（3.6d），我们可以确定（u_c）^{0} 和（w_c）^{0}的值。此外，假设（u_c）$^{q-1}$，（w_c）$^{q-1}$ 已知，并将等式（4.6）代入（3.6a）-（3.6d），则可得到一个关于 u_c 和 w_c 的新方程组，如下所示：

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\tau_c}\left((u_c)_p - (u_c)_p^{q-1}\right) - \dfrac{2\mu}{\tau_c}\left((w_c)_p - (w_c)_p^{q-1}\right) + \Psi\left((u_c)_p, (u_c)_p\right) - \dfrac{h^2}{2}\Psi\left((w_c)_p, (u_c)_p\right) \\ \quad + \Delta_x(u_c)_p - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x(w_c)_p - \lambda(w_c)_p = 0, \quad 1 \le p \le M, \\ (w_c)_p = \delta_{xx}(u_c)_p - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}(w_c)_p, \quad 1 \le p \le M, \\ (u_c)_p = (u_c)_{p+M}, \quad (w_c)_p = (w_c)_{p+M}, \quad 1 \le p \le M. \end{cases} \tag{4.7}$$

接下来，我们定义非线性算子 $\mathscr{F}(u_c)$：$\mathcal{W}_h \to \mathcal{W}_h$:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left((u_c)_p\right) =& \frac{2}{\tau_c}\left((u_c)_p - (u_c)_p^{q-1}\right) - \frac{2\mu}{\tau_c}\left((w_c)_p - (w_c)_p^{q-1}\right) + \Psi\left((u_c)_p, (u_c)_p\right) - \frac{h^2}{2}\Psi\left((w_c)_p, (u_c)_p\right) \\ & + \Delta_x(u_c)_p - \frac{h^2}{6}\Delta_x(w_c)_p - \lambda(w_c)_p, \quad 1 \le p \le M, \end{aligned}$$

并对 $\mathscr{F}(u_c)$ 与 u_c 作内积如下:

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{F}(u_c), u_c\rangle =& \frac{2}{\tau_c}\left(\|u_c\|^2 - \langle (u_c)^{q-1}, u_c\rangle\right) - \frac{2\mu}{\tau_c}\langle w_c - (w_c)^{q-1}, u_c\rangle - \lambda\langle w_c, u_c\rangle \\ & + \langle \Psi(u_c, u_c), u_c\rangle - \frac{h^2}{2}\langle \Psi(w_c, u_c), u_c\rangle + \langle \Delta_x u_c, u_c\rangle - \frac{h^2}{6}\langle \Delta_x w_c, u_c\rangle. \end{aligned}$$

根据布劳德尔定理 [引理 3.1，ADK91], 如果存在一个正的常数 α，使得对于任意 $u_c \in \mathcal{W}_h$ 满足 $\|u_c\| = \alpha$时，均有 $\langle \mathscr{F}(u_c)\ u_c\rangle \ge 0$，则方程组（4.7）至少有一个解。由引理2.2，并令 $S = 0$ 代入引理2.1b）中（2.4，可得

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{F}(u_c), u_c\rangle &\ge \frac{2}{\tau_c}\left[\|u_c\|^2 - \|(u_c)^{q-1}\| \cdot \|u_c\|\right] + \frac{2\mu}{\tau_c}\left(|u_c|_1^2 + \frac{h^2}{18}\|w_c - (w_c)^{q-1}\|^2\right) + \lambda\left(|u_c|_1^2 + \frac{h^2}{18}\|w_c\|^2\right) \\ &\ge \frac{2}{\tau_c}\left[\|u_c\|(\|u_c\| - \|(u_c)^{q-1}\|)\right]. \end{aligned}$$

当 $\alpha = \|(u_c)^{q-1}\|$时，对于任意 $\|u_c\| = \alpha$，都有 $\langle \mathscr{F}(u_c)\ u_c\rangle \ge 0$。这意味着方程组 NCD格式 (3.6a)-(3.6d) 至少有一个解。

假设方程组 (4.7) 存在两个不同的解，则结合能量方法和反证法，可以很容易地证明解的唯一性。关于唯一性证明的细节，可参见[定理 3.4，WZS21]。证明完毕。 □

定理4.3。 步骤 III (3.9a)-(3.9d) 存在唯一解。

证明。 首先， u^0 和 w^0 可通过应用（3.9b）和（3.9d）计算得到。此外，假设u^{k-1}， w^{k-1} 已知，则问题（3.9a）-（3.9d）是关于 u^k的非齐次线性方程组，其系数矩阵为 $M \times M$ 矩阵。现在，考虑以下对应的齐次方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau_f}u_p^k - \dfrac{\mu}{\tau_f}w_p^k + \dfrac{1}{2}\Psi\left((u_f)_p^{k-\frac{1}{2}}, u_p^k\right) - \dfrac{h^2}{4}\Psi\left((w_f)_p^{k-\frac{1}{2}}, u_p^k\right) \\ \quad + \dfrac{1}{2}\Delta_x u_p^k - \dfrac{h^2}{12}\Delta_x w_p^k - \dfrac{\lambda}{2}w_p^k = 0, \quad 1 \le p \le M, \qquad (4.8a) \\ w_p^k = \delta_{xx}u_p^k - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}w_p^k, \quad 1 \le p \le M. \qquad (4.8b) \end{cases}$$

将（4.8a）与 u^k取内积，并利用引理2.2，得到

$$\frac{1}{\tau_f}\|u^k\|^2-\left(\frac{\mu}{\tau_f}+\frac{\lambda}{2}\right)\langle w^k,u^k\rangle-\frac{h^2}{12}\langle\Delta_x w^k,u^k\rangle=0.$$

令 $S=0$ 在（2.1b）和（2.1c）中满足引理2.4，则得到

$$\frac{1}{\tau_f}\|u^k\|^2+\left(\frac{\mu}{\tau_f}+\frac{\lambda}{2}\right)\left(|u^k|_1^2+\frac{h^2}{18}\|w^k\|^2\right)\le 0,$$

这意味着 $u^k=0$ 和 $w^k=0$。因此，相应的非齐次线性方程组有唯一解，证明完毕。

□

5 收敛性与稳定性分析

本节分为三部分，分析 TTCD格式在最大范数下的误差估计。最后，给出 TTCD格式的稳定性结果。

5.1 步骤 I 的误差估计

现在我们 接下来证明格式（3.6a）-（3.6d）的收敛性。定义如下记号 n:

$$(e_c)_p^q=U_p^q-(u_c)_p^q,\quad (\rho_c)_p^q=W_p^q-(w_c)_p^q,\quad 1\le p\le M,\ 0\le q\le N_c,$$

以及常数

$$C_0=\max_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}|u(x,t)|,|u_x(x,t)|,|u_{xx}(x,t)|,|u_{xxx}(x,t)|. \tag{5.1}$$

将 $\eta=c$ 代入格式（3.3a）-（3.3b），并从中减去格式（3.6a）-（3.6d），得到误差系统

$$\begin{cases}\delta_t^c(e_c)_p^{q-\frac12}-\mu\delta_t^c(\rho_c)_p^{q-\frac12}+\Psi\left(U_p^{q-\frac12},U_p^{q-\frac12}\right)-\Psi\left((u_c)_p^{q-\frac12},(u_c)_p^{q-\frac12}\right)\\ \quad-\dfrac{h^2}{2}\left[\Psi\left(W_p^{q-\frac12},U_p^{q-\frac12}\right)-\Psi\left((w_c)_p^{q-\frac12},(u_c)_p^{q-\frac12}\right)\right]+\Delta_x(e_c)_p^{q-\frac12}-\dfrac{h^2}{6}\Delta_x(\rho_c)_p^{q-\frac12}\\ \quad-\lambda(\rho_c)_p^{q-\frac12}=(R_c)_p^{q-\frac12},\quad 1\le p\le M,\quad 0\le q\le N_c, &(5.2a)\\ (\rho_c)_p^q=\delta_{xx}(e_c)_p^q-\dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}(\rho_c)_p^q+(Q_c)_p^q,\quad 1\le p\le M,\quad 0\le q\le N_c, &(5.2b)\\ (e_c)_p^q=(e_c)_{p+M}^q,\quad (\rho_c)_p^q=(\rho_c)_{p+M}^q,\quad 1\le p\le M,\quad 0\le q\le N_c. &(5.2c)\end{cases}$$

定理 5.1. 假设 $\{u(x,t)\ w(x,t)\ |(x,t)\in\Omega\times[0,T]\}$ 是问题（3.1a）-（3.1b）的精确解，并设 $\{(u_c)_p^q,(w_c)_p^q\mid 1\le p\le M,\ 0\le q\le N_c\}$ 是粗网格问题（3.6a）-（3.6d）的数值解。若 $2C_1\tau_c<1/3$ 和 $\tau_c^2+h^4\le 1/C$，其中 C_1 由（5.13）定义，则有

$$|(e_c)^q|_1\le C(\tau_c^2+h^4),\qquad 0\le q\le N_c. \tag{5.3}$$

证明。 若 $q=0$，(5.3) 显然成立，因为初值已给定。对 $(\rho_c)^0$ 与 (5.2b) 取内积，并利用引理 2.1 和2.2，可得

$$\|(\rho_c)^0\|^2=-\frac{h^2}{12}\left\langle\delta_{xx}(\rho_c)^0,(\rho_c)^0\right\rangle+\left\langle(Q_c)^0,(\rho_c)^0\right\rangle\implies\|(\rho_c)^0\|^2\le\frac94\|(Q_c)^0\|^2.$$

然后，将 $\eta=c$ 的估计式 (3.4) 相匹配，可得

$$\left\|(\rho_c)^0\right\|^2\le\frac94L\left(Ch^4\right)^2. \tag{5.4}$$

现在，假设（5.3）对 $0\le q\le n-1\ (1\le n\le N_c)$ 成立。当 $\tau_c^2+h^4\le 1/C$ 并利用引理2.1，可得

$$|(e_c)^q|_1\le 1,\quad \|(e_c)^q\|\le\frac{L}{\sqrt6},\quad \|(e_c)^q\|_\infty\le\frac{\sqrt L}{2},\quad 0\le q\le n-1. \tag{5.5}$$

接下来，我们开始验证（5.3）对 $q=n$成立。将（5.2a）与$\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}$作内积，得到

$$\begin{aligned}
&\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2-\mu\left\langle\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle+\left\langle\Psi\left(U^{q-\frac{1}{2}},U^{q-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((u_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\\
&-\frac{h^2}{2}\left\langle\Psi\left(W^{q-\frac{1}{2}},U^{q-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((w_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle-\lambda\left\langle(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\\
&+\left\langle\Delta_x(e_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle-\frac{h^2}{6}\left\langle\Delta_x(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=\left\langle(R_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle,1\le q\le n.
\end{aligned}\tag{5.6}$$

首先，我们估计包含算子 Δ_x 的项。根据柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
-\left\langle\Delta_x(e_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle&\le\frac{1}{8}\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2+2|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2,\\
\frac{h^2}{6}\left\langle\Delta_x(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle&\le\frac{1}{8}\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{h^4}{18}|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2.
\end{aligned}\tag{5.7}$$

其次，根据引理 2.1b中的（2.4），可得

$$\begin{aligned}
\mu\left\langle\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\le&-\mu|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2-\frac{\mu h^2}{18}\|\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2\\
&+\frac{\mu h^2}{12}\left\langle\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle+\mu\left\langle\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle.
\end{aligned}$$

By a应用引理 2.1、柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得如下结果 ws:

$$\begin{aligned}
-\mu|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2&\le-\frac{6\mu}{L^2}\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2,\\
\mu\left\langle\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle&\le\frac{6\mu}{L^2}\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{L^2\mu}{24}\|\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2,\\
\frac{\mu h^2}{12}\left\langle\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle&\le\frac{\mu h^2}{18}\|\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{\mu h^2}{32}\|\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}$$

Thus

$$\mu\left\langle\delta_t^c(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}},\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\le\mu\left(\frac{h^2}{32}+\frac{L^2}{24}\right)\|\delta_t^c(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2.\tag{5.8}$$

接下来，我们估计包含算子 Ψ 的项。注意到 $(e_c)^{q-\frac{1}{2}}=(e_c)^{q-1}+\frac{\tau_c}{2}\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}$。借助引理 2.2，可得

$$\left\langle\Psi(\cdot,(e_c)^{q-\frac{1}{2}}),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle=\left\langle\Psi(\cdot,(e_c)^{q-1}),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle.$$

依次应用 Ψ 的定义、引理 2.1 和 2.5、(5.1)，以及柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
&-\left\langle\Psi\left(U^{q-\frac{1}{2}},U^{q-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((u_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\\
\le&C_0\left(|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1+\|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|\right)\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|\\
&+\frac{1}{3}\left(2\|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|_\infty\cdot|(e_c)^{q-1}|_1+\|(e_c)^{q-1}\|_\infty\cdot|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1\right)\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{h^2}{2}\left\langle\Psi\left(W^{q-\frac{1}{2}},U^{q-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((w_c)^{q-\frac{1}{2}},(u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right),\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\right\rangle\\
\le&\frac{h^2}{6}\left(2C_0|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1+C_0\|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|+2C_0\|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|+C_0|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1\right)\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|\\
&+\frac{h^2}{6}\left(2\|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|_\infty\cdot|(e_c)^{q-1}|_1+\|(e_c)^{q-1}\|_\infty\cdot|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1\right)\|\delta_t^c(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|,
\end{aligned}$$

这两个不等式的推导细节可参见 [(3.49) 和 (3.50)，WZS21]。灵活运用柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式和 (5.5)，可得

$$\begin{aligned}
&-\left\langle \Psi\left(U^{q-\frac{1}{2}}, U^{q-\frac{1}{2}}\right) - \Psi\left((u_c)^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}} \right\rangle \\
\leq & C_0 \left(|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1 + \|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\| \right) \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\| + \frac{\sqrt{L}}{2} |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1 \cdot \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\| \\
\leq & \frac{1}{4} \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + 2\left(C_0 + \frac{\sqrt{L}}{2}\right)^2 |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + 2C_0^2 \|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 \\
\leq & \frac{1}{4} \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \left(4C_0^2 + L + \frac{C_0^2 L^2}{3}\right) |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{h^2}{2} \left\langle \Psi\left(W^{q-\frac{1}{2}}, U^{q-\frac{1}{2}}\right) - \Psi\left((w_c)^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)^{q-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}} \right\rangle \\
\leq & \frac{h^2}{6} \left(2C_0 + \frac{C_0 L}{\sqrt{6}}\right) |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1 \cdot \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\| + \frac{h^2}{6} \left(2C_0 + \frac{2C_0}{h} + \frac{3\sqrt{L}}{h}\right) \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\| \cdot \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\| \\
\leq & \frac{1}{4} \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{h^4}{18} \left(2C_0 + \frac{C_0 L}{\sqrt{6}}\right)^2 |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + \frac{h^4}{18} \left(\frac{4C_0}{h} + \frac{3\sqrt{L}}{h}\right)^2 \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 \\
\leq & \frac{1}{4} \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \left(\frac{4C_0^2}{9} + \frac{C_0^2 L^2}{54}\right) |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + h^2 \left(\frac{16C_0^2}{9} + L\right) \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

最后，将（5.7）-（5.10）代入（5.6），并应用引理2.6，可得

$$\begin{aligned}
&\|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\lambda}{2\tau_c} \left[\left(|(e_c)^q|_1^2 - |(e_c)^{q-1}|_1^2 \right) + \frac{h^2}{12} \left(\|(\rho_c)^q\|^2 - \|(\rho_c)^{q-1}\|^2 \right) - \frac{h^4}{144} \left(|(\rho_c)^q|_1^2 - |(\rho_c)^{q-1}|_1^2 \right) \right] \\
\leq & \frac{3}{4} \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \left(L + \frac{40C_0^2}{9} + \frac{19C_0^2 L^2}{54}\right) |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + h^2 \left(\frac{16C_0^2}{9} + L\right) \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 \\
& + \frac{\lambda h^2}{12} \left\langle (\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}, \delta_t^c (Q_c)^{q-\frac{1}{2}} \right\rangle + \lambda \left\langle (Q_c)^{q-\frac{1}{2}}, \delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}} \right\rangle + \left\langle (R_c)^{q-\frac{1}{2}}, \delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}} \right\rangle \\
& + \mu \left(\frac{h^2}{32} + \frac{L^2}{24}\right) \|\delta_t^c (Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\| + 2|(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + \frac{h^4}{18} |(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 \\
\leq & \|\delta_t^c (e_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + \left(L + \frac{40C_0^2}{9} + \frac{19C_0^2 L^2}{54} + 2\right) |(e_c)^{q-\frac{1}{2}}|_1^2 + \frac{h^2}{9} \left(16C_0^2 + 9L + 3\right) \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 \\
& + \left(\frac{\lambda^2}{64} + \frac{\mu}{32} + \frac{\mu L^2}{24}\right) \|\delta_t^c (Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + 2\lambda^2 \|(Q_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 + 2\|(R_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2, \quad 1 \leq q \leq n.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

根据引理2.1，我们有

$$\frac{h^2}{9} \|(\rho_c)^{q-\frac{1}{2}}\|^2 = \frac{h^2}{18} \left(\|(\rho_c)^q\|^2 + \|(\rho_c)^{q-1}\|^2 \right) \leq \frac{h^2}{12} \left(\|(\rho_c)^q\|^2 + \|(\rho_c)^{q-1}\|^2 \right) - \frac{h^4}{144} \left(|(\rho_c)^q|_1^2 + |(\rho_c)^{q-1}|_1^2 \right).$$

因此，若令

$$G^q = |(e_c)^q|_1^2 + \frac{h^2}{12} \|(\rho_c)^q\|^2 - \frac{h^4}{144} |(\rho_c)^q|_1^2, \quad 0 \leq q \leq N_c,$$

并对 $\eta = c$使用截断误差（3.4），则（5.11）可简化为

$$\frac{1}{2\tau_c} (G^q - G^{q-1}) \leq C_1 (G^q + G^{q-1}) + C_2 (\tau_c^2 + h^4)^2, \quad 1 \leq q \leq n, \tag{5.12}$$

其中常数

$$\begin{aligned}
C_1 &= \max \left\{ \frac{L}{2\lambda} + \frac{20C_0^2}{9\lambda} + \frac{19C_0^2 L^2}{108\lambda} + \frac{1}{\lambda}, \frac{16C_0^2}{\lambda} + \frac{9L}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} \right\}, \\
C_2 &= \left(\frac{\lambda}{64} + \frac{\mu}{32\lambda} + \frac{\mu L^2}{24\lambda} + 2\lambda + \frac{2}{\lambda} \right) C^2 L.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

对于（ q 5.12）中的索引，通过从 1 求和到 n，可得

$$G^n - G^0 \leq 2C_1\tau_c G^n + 4C_1\tau_c \sum_{q=0}^{n-1} G^q + 2C_2\tau_c \left(\tau_c^2 + h^4\right)^2.$$

这里还需要分析 G^0的正性。根据引理2.1 和（5.4），可得

$$0 \leq \frac{h^2}{18}\|(\rho_c)^0\|^2 \leq G^0 = \frac{h^2}{12}\|(\rho_c)^0\|^2 - \frac{h^4}{144}|(\rho_c)^0|_1^2 \leq \|(\rho_c)^0\|^2 \leq \frac{9}{4}L\left(Ch^4\right)^2. \tag{5.14}$$

此外，当 $2C_1\tau_c < 1/3$ 时，我们还有

$$G^n \leq 6C_1\tau_c \sum_{q=0}^{n-1} G^q + \frac{3}{2}G^0 + \frac{C_2}{2C_1}\left(\tau_c^2 + h^4\right)^2.$$

应用格朗沃尔不等式 [引理、ST86] 和引理2.1，可得

$$|(e_c)^n|_1^2 \leq G^n \leq \exp(6C_1T)\cdot\left[\frac{3}{2}G^0 + \frac{C_2}{2C_1}\left(\tau_c^2 + h^4\right)^2\right] \leq C^2\left(\tau_c^2 + h^4\right)^2,$$

这说明（5.3）的证明已完成。 □

推论 5.1。 根据引理2.1 和（5.3），可推导出 L^2 范数和粗网格上的最大范数误差估计，即

$$\|(e_c)^q\| \leq \frac{L}{\sqrt{6}}|(e_c)^q|_1 \leq \frac{LC}{\sqrt{6}}(\tau_c^2 + h^4), \quad 0 \leq q \leq N_c, \tag{5.15}$$

$$\|(e_c)^q\|_\infty \leq \frac{\sqrt{L}}{2}|(e_c)^q|_1 \leq \frac{C\sqrt{L}}{2}(\tau_c^2 + h^4), \quad 0 \leq q \leq N_c. \tag{5.16}$$

5.2 步骤 II 的误差估计

在陈述插值公式（3.7）-（3.8）的误差估计之前，我们先引入以下记号：

$$(e_f)_p^k = U_p^k - (u_f)_p^k, \quad (\rho_f)_p^k = W_p^k - (w_f)_p^k, \quad 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq k \leq N_f.$$

定理 5.2. 设 $\{u(x,t)\ w(x,t)\ |(x,t)\ \in \Omega\ \times [0,T]\}$ 是问题（3.1a）-（3.1b）的精确解，且 $\{(u_f)_p^k, (w_f)_p^k \mid 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq k \leq N_f\}$ 是通过插值公式（3.7）-（3.8）在细网格上得到的粗略解。若 $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{\Omega} \times [0,T])$，则

$$\|(e_f)^k\| \leq C(\tau_c^2 + h^4), \quad \|(e_f)^k\|_\infty \leq \widetilde{C}, \quad 0 \leq k \leq N_f, \tag{5.17}$$

‹ 其中正常数 C, C 与 τ_c 和 h无关。

证明。设 $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{\Omega} \times [0,T])$。对于固定的空间网格节点 x_p, $1 \leq p \leq M$，考虑时间方向上线性拉格朗日插值的截断误差，可得

$$\begin{aligned} U_p^{(q-1)\beta_\tau + r} = &\left(1 - \frac{r}{\beta_\tau}\right) U_p^{(q-1)\beta_\tau} + \frac{r}{\beta_\tau} U_p^{q\beta_\tau} + \frac{u_{tt}\left(x_p, \xi\right)}{2}\left[(t_f)_{(q-1)\beta_\tau + r} - (t_c)_{q-1}\right] \\ &\cdot\left[(t_f)_{(q-1)\beta_\tau + r} - (t_c)_q\right], \quad \xi \in \left((t_c)_{(q-1)}, (t_c)_q\right). \end{aligned} \tag{5.18}$$

将 (3.7) 从 (5.18) 中相减，得到

$$\begin{aligned} (e_f)_p^{(q-1)\beta_\tau + r} = &\left(1 - \frac{r}{\beta_\tau}\right)(e_c)_p^{q-1} + \frac{r}{\beta_\tau}(e_c)_p^q \\ &+ \frac{u_{tt}\left(x_p, \xi\right)}{2}\left[(t_f)_{(q-1)\beta_\tau + r} - (t_c)_{q-1}\right]\left[(t_f)_{(q-1)\beta_\tau + r} - (t_c)_q\right]. \end{aligned}$$

应用三角不等式可得

$$\|(e_f)^{(q-1)\beta_\tau+r}\| \le \left(1-\frac{r}{\beta_\tau}\right)\|(e_c)^{q-1}\| + \frac{r}{\beta_\tau}\|(e_c)^q\| + \frac{CL}{2}\tau_c^2,$$
$$|(e_f)^{(q-1)\beta_\tau+r}|_1 \le \left(1-\frac{r}{\beta_\tau}\right)|(e_c)^{q-1}|_1 + \frac{r}{\beta_\tau}|(e_c)^q|_1 + \frac{CL}{2}\tau_c^2.$$

将上述估计与（5.15）和（5.3）结合，得到

$$\|(e_f)^k\| \le \frac{LC}{\sqrt{6}}(\tau_c^2+h^4) + \frac{CL}{2}\tau_c^2 \le C(\tau_c^2+h^4),\ 0\le k\le N_f, \tag{5.19}$$

$$\|(e_f)^k\|_\infty \le \frac{\sqrt{L}}{2}|(e_f)^k|_1 \le \frac{C\sqrt{L}}{2}(\tau_c^2+h^4) + \frac{C\sqrt{L^3}}{4}\tau_c^2 \le \widetilde{C},\quad 0\le k\le N_f. \tag{5.20}$$

‹其中 $C>0$ 与 τ_c 和 h无关。证毕。 □

现在，在（ $\eta=f$ 3.3b）中取，并用（3.8）减去（3.3b），则得到

$$(\rho_f)_p^k = \delta_{xx}(e_f)_p^k - \frac{h^2}{12}\delta_{xx}(\rho_f)_p^k + (Q_f)_p^k,\quad 1\le p\le M,\ 0\le k\le N_f, \tag{5.21}$$

并可改写为如下向量形式，

$$(\rho_f)^k = \left(\mathcal{I}+\frac{h^2}{12}\delta_{xx}\right)^{-1}\delta_{xx}(e_f)^k + \left(I+\frac{h^2}{12}\delta_{xx}\right)^{-1}(Q_f)^k,$$

其中 $\mathcal{I}$ 是恒等算子。记 $A=\mathcal{I}+\frac{h^2}{12}\delta_{xx}$。容易验证， A 是一个循环矩阵，其特征值（σ_A）$_p = 1-\frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{p\pi}{M}\right)$ 可通过离散傅里叶变换计算，参见 [Gra06]。因此， A^{-1}的特征值满足 $1\le$（$\sigma_{A^{-1}}$）$_p\le\frac{3}{2}$。基于这一结论和引理 2.1，可得

$$\begin{aligned}\|(\rho_f)^k\| &\le \|A^{-1}\left(\delta_{xx}(e_f)^k+(Q_f)^k\right)\| \le \|A^{-1}\|_{spec}\left(\|\delta_{xx}(e_f)^k\|+\|(Q_f)^k\|\right)\\ &\le \frac{3}{2}\left(\frac{4}{h^2}\|(e_f)^k\|+\|(Q_f)^k\|\right) = \frac{6}{h^2}\|(e_f)^k\|+\frac{3}{2}\|(Q_f)^k\|.\end{aligned} \tag{5.22}$$

最后，根据算子 δ_{xx}的定义，（5.21）可改写为

$$\frac{5}{6}(\rho_f)_p^k = \frac{1}{h^2}\left((e_f)_{p+1}^k - 2(e_f)_p^k + (e_f)_{p-1}^k\right) - \frac{1}{12}\left((\rho_f)_{p-1}^k + (\rho_f)_{p+1}^k\right) + (Q_f)_p^k.$$

因此，在周期边界条件下，我们可以推导出

$$\frac{5}{6}|(\rho_f)_p^k| \le \frac{4}{h^2}\|(e_f)^k\|_\infty + \frac{1}{6}\|(\rho_f)^k\|_\infty + |(Q_f)_p^k|,\quad 1\le p\le M.$$

我们知道 $|(Q_f)_p^k|\le\widehat{\ }Ch^4$, $\|(e_f)^k\|_\infty\le\widetilde{\ }C$来自式 (3.4) 和式 (5.17)，分别。由于上述不等式~对所有 p均成立，因此存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\left\|(\rho_f)^k\right\|_\infty \le \frac{6}{h^2}\left(\left\|(e_f)^k\right\|_\infty + \frac{3}{2}\widehat{C}h^6\right) \le \frac{6}{h^2}\widetilde{C}. \tag{5.23}$$

5.3 步骤 III 的误差估计

最后，我们分析格式 (3.9a)-(3.9d) 的收敛性。记

$$e_p^k = U_p^k - u_p^k,\quad \rho_p^k = W_p^k - w_p^k,\quad 1\le p\le M,\quad 0\le k\le N_f.$$

取 $\eta=f$ 于格式 (3.3a)-(3.3b)。将格式 (3.9a)-(3.9d) 从 (3.3a)-(3.3b) 中相减，得到以下误差方程组

$$\begin{cases}\delta_t^f e_p^{k-\frac12} - \mu\delta_t^f\rho_p^{k-\frac12} + \Psi\left(U_p^{k-\frac12},U_p^{k-\frac12}\right) - \Psi\left((u_f)_p^{k-\frac12},u_p^{k-\frac12}\right)\\ \quad -\frac{h^2}{2}\left[\Psi\left(W_p^{k-\frac12},U_p^{k-\frac12}\right) - \Psi\left((w_f)_p^{k-\frac12},u_p^{k-\frac12}\right)\right] + \Delta_x e_p^{k-\frac12} - \frac{h^2}{6}\Delta_x\rho_p^{k-\frac12}\\ \quad -\lambda\rho_p^{k-\frac12} = (R_f)_p^{k-\frac12},\quad 1\le p\le M,\quad 0\le k\le N_f, & (5.24a)\\ \rho_p^k = \delta_{xx}e_p^k - \frac{h^2}{12}\delta_{xx}\rho_p^k + (Q_f)_p^k,\quad 1\le p\le M,\quad 0\le k\le N_f, & (5.24b)\\ e_p^k = e_{p+M}^k,\quad \rho_p^k = \rho_{p+M}^k,\quad 1\le p\le M,\quad 0\le k\le N_f. & (5.24c)\end{cases}$$

定理 5.3。设 $\{u(x,t)\ w(x,t)\ |(x,t)\ \in\Omega\times[0,T]\}$ 是问题 (3.1a)-(3.1b) 的精确解，
$\{u_p^k, w_p^k \mid 1\le p\le M,\ 0\le k\le N_f\}$ 是通过求解问题 (3.9a)-(3.9d) 在细网格上得到的校正解。若 $2\tau_f C_3 < 1/3$，则

$$|e^k|_1 \le C\left(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4\right),\quad 0\le k\le N_f. \tag{5.25}$$

证明。由于初值已知，因此当5.25显然成立，此时 $k=0$。类似于（5.4），我们还得到 et

$$\|\rho^0\|^2 \le \frac{9}{4}L\left(Ch^4\right)^2. \tag{5.26}$$

现在，我们证明（5.25）对 $k=n$成立。将（5.24a）与$\delta_t^f e^{k-\frac12}$取内积，得到 ve

$$\begin{aligned}
&\|\delta_t^f e^{k-\frac12}\|^2-\mu\left\langle\delta_t^f\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle+\left\langle\Psi\left(U^{k-\frac12},U^{k-\frac12}\right)-\Psi\left((u_f)^{k-\frac12},u^{k-\frac12}\right),\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\\
&-\frac{h^2}{2}\left\langle\Psi\left(W^{k-\frac12},U^{k-\frac12}\right)-\Psi\left((w_f)^{k-\frac12},u^{k-\frac12}\right),\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle-\lambda\left\langle\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\\
&+\left\langle\Delta_x e^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle-\frac{h^2}{6}\left\langle\Delta_x\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle=\left\langle(R_f)^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle,\quad 1\le k\le n.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

由于（5.27）中的某些内积项与（5.6）一致，因此省略部分细节。对于第二项，我们使用引理2.1b中的（2.4 ），得到

$$\begin{aligned}
\mu\left\langle\delta_t^f\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\le&-\mu|\delta_t^f e^{k-\frac12}|_1^2-\frac{\mu h^2}{18}\|\delta_t^f\rho^{k-\frac12}\|^2\\
&+\frac{\mu h^2}{12}\left\langle\delta_t^f\rho^{k-\frac12},\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\right\rangle+\mu\left\langle\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle.
\end{aligned}$$

利用柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式和引理2.1，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu h_f^2}{12}\left\langle\delta_t^f\rho^{k-\frac12},\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\right\rangle\le\frac{\mu h^2}{18}\|\delta_t^f\rho^{k-\frac12}\|^2+\frac{\mu h^2}{32}\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\|^2,\\
&\mu\left\langle\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\le\frac{\mu L}{\sqrt{6}}\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\|\cdot|\delta_t^f e^{k-\frac12}|_1\le\frac{\mu}{2}|\delta_t^f e^{k-\frac12}|_1^2+\frac{\mu L^2}{12}\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\|^2.
\end{aligned}$$

这表明

$$\mu\left\langle\delta_t^f\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\le-\frac{\mu}{2}|\delta_t^f e^{k-\frac12}|_1^2+\mu\left(\frac{h_f^2}{32}+\frac{L^2}{12}\right)\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac12}\|^2. \tag{5.28}$$

对于包含算子 Δ_x的项，我们直接使用（5.7），即

$$\begin{aligned}
-\left\langle\Delta_x e^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle&\le\frac18\|\delta_t^f e^{k-\frac12}\|^2+2|e^{k-\frac12}|_1^2,\\
\frac{h^2}{6}\left\langle\Delta_x\rho^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle&\le\frac18\|\delta_t^f e^{k-\frac12}\|^2+\frac{h^4}{18}|\rho^{k-\frac12}|_1^2.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

接下来，我们重点估计含有算子 Ψ 的内积项。回顾记号 $(e_f)_p^k=U_p^k-(u_f)_{p^\circ}^k$ 结合 Ψ 的定义以及引理 2.2和 2.5，可得

$$\begin{aligned}
&-\left\langle\Psi\left(U^{k-\frac12},U^{k-\frac12}\right)-\Psi\left((u_f)^{k-\frac12},u^{k-\frac12}\right),\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\\
=&-\left\langle\Psi\left(U^{k-\frac12},e^{k-\frac12}\right)+\Psi\left((e_f)^{k-\frac12},U^{k-\frac12}\right)-\Psi\left((e_f)^{k-\frac12},e^{k-\frac12}\right),\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\\
=&-\frac13\left\langle2U^{k-\frac12}\Delta_x e^{k-\frac12}+\frac12 D_+e^{k-\frac12}\ \delta_x^{+\frac12}U^{k-\frac12}+\frac12 D_-e^{k-\frac12}\ \delta_x^{-\frac12}U^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle\\
&-\frac13\left\langle(e_f)^{k-\frac12}\Delta_x U^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle+\frac13\left\langle(e_f)^{k-\frac12}U^{k-1},\Delta_x\left(\delta_t^f e^{k-\frac12}\right)\right\rangle\\
&+\frac13\left\langle(e_f)^{k-\frac12}\Delta_x e^{k-\frac12},\delta_t^f e^{k-\frac12}\right\rangle-\frac13\left\langle(e_f)^{k-\frac12}e^{k-\frac12},\Delta_x\left(\delta_t^f e^{k-\frac12}\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

此外，通过灵活运用柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式、（5.1）、（5.17）以及引理 2.1，我们重新得到

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle \Psi\left(U^{k-\frac{1}{2}}, U^{k-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((u_f)^{k-\frac{1}{2}}, u^{k-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle \\
\leq&\left(\frac{2C_0}{3}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1+\frac{C_0}{3}\|e^{k-\frac{1}{2}}\|\right)\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\frac{C_0}{3}\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|\left(\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
&+\frac{1}{3}\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|_\infty\left(|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\|e^{k-\frac{1}{2}}\|\cdot|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
\leq&\left(\frac{2C_0}{3}+\frac{C_0L}{3\sqrt{6}}\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\frac{C_0}{3}\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|\left(\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
&+\frac{\widetilde{C}}{3}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|++\frac{\widetilde{C}L}{3\sqrt{6}}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1 \\
\leq&\frac{1}{4}\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\left(\frac{16C_0^2}{9}+\frac{2C_0^2L^2}{27}+\frac{4\widetilde{C}^2}{9}+\frac{\widetilde{C}^2L^2}{27\mu}\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{\mu}{4}|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\left(\frac{4C_0^2}{9}+\frac{2C_0^2}{9\mu}\right)\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

同理，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{h^2}{2}\left\langle \Psi\left(W^{k-\frac{1}{2}}, U^{k-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((w_f)^{k-\frac{1}{2}}, u^{k-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle \\
=&\frac{h^2}{2}\left\langle \Psi\left(W^{k-\frac{1}{2}}, e^{k-\frac{1}{2}}\right)+\Psi\left((\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}, U^{k-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}, e^{k-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle \\
=&\frac{h^2}{6}\left\langle 2W^{k-\frac{1}{2}}\Delta_x e^{k-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}D_+e^{k-\frac{1}{2}}\ \delta_x^{+\frac{1}{2}}W^{k-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}D_-e^{k-\frac{1}{2}}\ \delta_x^{-\frac{1}{2}}W^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle \\
&+\frac{h^2}{6}\left\langle (\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\Delta_x U^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle-\frac{h^2}{6}\left\langle (\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}U^{k-\frac{1}{2}}, \Delta_x\left(\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right)\right\rangle \\
&-\frac{h^2}{6}\left\langle (\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\Delta_x e^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle+\frac{h^2}{6}\left\langle (\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}e^{k-\frac{1}{2}}, \Delta_x\left(\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

并利用　柯西-施瓦茨不等式、杨氏不等式、(5.1)、(5.23)，引理 2.1 再次可得 th　at

$$
\begin{aligned}
&\frac{h^2}{2}\left\langle \Psi\left(W^{k-\frac{1}{2}}, U^{k-\frac{1}{2}}\right)-\Psi\left((w_f)^{k-\frac{1}{2}}, u^{k-\frac{1}{2}}\right), \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle \\
\leq&\left(\frac{C_0h^2}{3}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1+\frac{C_0h^2}{6}\|e^{k-\frac{1}{2}}\|\right)\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\frac{C_0h^2}{6}\|(\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\|\left(\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
&+\frac{h^2}{6}\|(\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\|_\infty\left(|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\|e^{k-\frac{1}{2}}\|\cdot|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
\leq&\left(\frac{C_0h^2}{3}+\frac{C_0Lh^2}{6\sqrt{6}}\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\frac{C_0h^2}{6}\|(\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\|\left(\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1\right) \\
&+\widetilde{C}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|+\frac{\widetilde{C}L}{\sqrt{6}}|e^{k-\frac{1}{2}}|_1\cdot|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1 \\
\leq&\frac{1}{4}\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\left(\frac{4C_0^2}{9}+\frac{C_0^2L^2}{54}+4\widetilde{C}^2+\frac{\widetilde{C}^2L^2}{3\mu}\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{\mu}{4}|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\left(\frac{C_0^2}{18\mu}+\frac{C_0^2}{9}\right)h^4\|(\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

最后，应用引理2.1、2.6，并将（5.28）-（5.30）代入（5.27），可得

$$
\begin{aligned}
&\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{\lambda}{2\tau_f}\left[\left(|e^k|_1^2-|e^{k-1}|_1^2\right)+\frac{h^2}{12}\left(\|\rho^k\|^2-\|\rho^{k-1}\|^2\right)-\frac{h^4}{144}\left(|\rho^k|_1^2-|\rho^{k-1}|_1^2\right)\right] \\
\leq&\frac{3}{4}\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\left(\frac{20C_0^2}{9}+\frac{5C_0^2L^2}{54}+\frac{40\widetilde{C}^2}{9}+\frac{10\widetilde{C}^2L^2}{27\mu}+2\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{2h^2}{9}\|\rho^{k-\frac{1}{2}}\| \\
&+\left(\frac{4C_0^2}{9}+\frac{2C_0^2}{9\mu}\right)\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\left(\frac{C_0^2}{18\mu}+\frac{C_0^2}{9}\right)h^4\|(\rho_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\mu\left(\frac{h^2}{32}+\frac{L^2}{12}\right)\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2 \\
&+\frac{\lambda h^2}{12}\left\langle \rho^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f(Q_f)^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle+\lambda\left\langle (Q_f)^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle+\left\langle (R_f)^{k-\frac{1}{2}}, \delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

现在，我们对剩余的内积项应用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，以消去 $\|\delta_t^f e^{k-\frac{1}{2}}\|^2$。然后，代入（5.22），得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{2\tau_f}\left[\left(|e^k|_1^2-|e^{k-1}|_1^2\right)+\frac{h^2}{12}\left(\|\rho^k\|^2-\|\rho^{k-1}\|^2\right)-\frac{h^4}{144}\left(|\rho^k|_1^2-|\rho^{k-1}|_1^2\right)\right]\\
\le&\left(\frac{20C_0^2}{9}+\frac{5C_0^2L^2}{54}+\frac{40\widetilde{C}^2}{9}+\frac{10\widetilde{C}^2L^2}{27\mu}+2\right)|e^{k-\frac{1}{2}}|_1^2+\frac{3h^2}{9}\|\rho^{k-\frac{1}{2}}\|+\left(\frac{76C_0^2}{9}+\frac{38C_0^2}{9\mu}\right)\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2\\
&+\mu\left(\frac{\lambda^2h^2}{64}+\frac{h^2}{32}+\frac{L^2}{12}\right)\|\delta_t^f(Q_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2+\left(\frac{C_0^2h^4}{4\mu}+\frac{C_0^2h^4}{2}+2\lambda^2\right)\|(Q_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2+2\|(R_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}$$

令 $G^k=|e^k|_1^2+\frac{h^2}{12}\|\rho^k\|^2-\frac{h^4}{144}|\rho^k|_1^2$. 于是，通过取 $\eta=f$在（3.4）中，并利用（5.17），可得

$$\frac{1}{2\tau_f}\left(G^k-G^{k-1}\right)\le C_3\left(G^k+G^{k-1}\right)+C_4\left(\tau_c^2+h^4\right)^2+C_5\left(\tau_f^2+h^4\right)^2,\quad 1\le k\le n. \tag{5.33}$$

其中，常数记为

$$\begin{aligned}
C_3&=\max\left\{\frac{10C_0^2}{9\lambda}+\frac{5C_0^2L^2}{108\lambda}+\frac{20\widetilde{C}^2}{9\lambda}+\frac{5\widetilde{C}^2L^2}{27\mu\lambda}+\frac{1}{\lambda}\,,\ \frac{3}{\lambda}\right\},\quad C_4=\left(\frac{76C_0^2}{9\lambda}+\frac{38C_0^2}{9\mu\lambda}\right)C^2,\\
C_5&=\left(\frac{\mu\lambda}{64}+\frac{\mu}{32\lambda}+\frac{\mu L^2}{12\lambda}+\frac{C_0^2}{4\mu\lambda}+\frac{C_0^2}{2\lambda}+2\lambda+\frac{2}{\lambda}\right)C^2L.
\end{aligned}$$

对于不等式（5.33，对指标 k 从 1 到 n求和，得到

$$G^n-G^0\le 2\tau_fC_3G^n+4\tau_fC_3\sum_{k=0}^{n-1}G^k+2\tau_fC_4\left(\tau_c^2+h^4\right)^2+2\tau_fC_5\left(\tau_f^2+h^4\right)^2.$$

显然， $0\le G^0\le\frac{9}{4}L\left(Ch^4\right)^2$可由（5.26）和引理 2.1推出。因此，当 $2\tau_fC_3<1/3$时，有

$$G^n\le 6\tau_fC_3\sum_{k=0}^{n-1}G^k+\frac{3}{2}G^0+\frac{C_4}{2C_3}\left(\tau_c^2+h^4\right)^2+\frac{C_5}{2C_3}\left(\tau_f^2+h^4\right)^2.$$

利用格朗沃尔不等式和引理 2.1，可得

$$|e^n|_1^2\le G^n\le\exp\left(6C_3T\right)\left[\frac{3}{2}G^0+\frac{C_4}{2C_3}\left(\tau_c^2+h^4\right)^2+\frac{C_5}{2C_3}\left(\tau_f^2+h^4\right)^2\right]\le C^2\left(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4\right)^2,$$

这意味着（5.25）的证明已经完成。 □

注 5.1。一些学者采用牛顿线性化（即泰勒展开）来设计步骤 III，这不可避免地会引入必须加以考虑的截断误差，正如 *[QXGZ20]*中所讨论的。因此，相应不等式的右端将包含诸如 $\|(e_f)^{k-\frac{1}{2}}\|^4$这样的项，最终导致误差估计的阶为 $\mathcal{O}(\tau_f^2+\tau_c^4+h^4)$。

相比之下，本文在步骤 III 中引入的线性化格式(3.9a)-(3.9d) 不依赖泰勒展开，因此避免了此类线性化所带来的截断误差。鉴于$\tau_c=\beta_\tau\tau_f$且 $\beta_\tau\ge 1$，我们的误差估计 $\mathcal{O}(\tau_f^2+\tau_c^2+h^4)$在(5.25)中给出，仍然有效且在计算上可行。

C推论 5.2. 细网格上的 L^2 范数误差估计和最大范数误差估计如下 *s:*

$$\|e^k\|\le\frac{L}{\sqrt{6}}|e^k|_1\le\frac{LC}{\sqrt{6}}\left(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4\right),\quad 0\le k\le N_f, \tag{5.34}$$

$$\|e^k\|_\infty\le\frac{\sqrt{L}}{2}|e^k|_1\le\frac{C\sqrt{L}}{2}\left(\tau_c^2+\tau_f^2+h^4\right),\quad 0\le k\le N_f. \tag{5.35}$$

5.4 稳定性

下文将分析 TTCD格式中步骤 I 和步骤 III 的稳定性。在步骤 I 中，由式 (5.3) 和引理 2.1，可得数值解 $(u_c)_p^q$ 的有界性:

$$\|(u_c)^q\|_\infty \leq \frac{\sqrt{L}}{2}|(u_c)^q|_1 \leq \frac{\sqrt{L}}{2}\left(|U^q|_1 + |(e_c)^q|_1\right) \leq \frac{\sqrt{L}}{2}\left(C_0\sqrt{L} + C(\tau_c^2 + h^4)\right) \leq C. \tag{5.36}$$

设 $\{(\tilde{u}_c)_p^q, (\tilde{w}_c)_p^q\}$ 是

$$\begin{cases} \delta_t^c(\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \mu\delta_t^c(\tilde{w}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} + \Psi\left((\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{h^2}{2}\Psi\left((\tilde{w}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad + \Delta_x(\tilde{u}_c)^{q-\frac{1}{2}}{}_p - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x(\tilde{w}_c)^{q-\frac{1}{2}}{}_p - \lambda(\tilde{w}_c)^{q-\frac{1}{2}}{}_p = r^{q-\frac{1}{2}}{}_p, \quad 1 \leq p \leq M,\ 1 \leq q \leq N_c, & (5.37a) \\ (\tilde{w}_c)_p^q = \delta_{xx}(\tilde{u}_c)_p^q - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}(\tilde{w}_c)_p^q, \quad 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq q \leq N_c, & (5.37b) \\ (\tilde{u}_c)_p^q = (\tilde{u}_c)_{p+M}^q, \quad (\tilde{w}_c)_p^q = (\tilde{w}_c)_{p+M}^q, \quad 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq q \leq N_c, & (5.37c) \\ (\tilde{u}_c)_p^0 = \phi(x_p) + \zeta(x_p), \quad 1 \leq p \leq M, & (5.37d) \end{cases}$$

其中 $r^{q-\frac{1}{2}}{}_p$ 且 $\zeta(x_p)$ 分别表示关于源项和初值的扰动。Deno te

$$(\tilde{\varepsilon}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} = (\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, \quad (\tilde{\sigma}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} = (\tilde{w}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - (w_c)_p^{q-\frac{1}{2}}.$$

相减 方程组（3.6a）-（3.6d）与（5.37a）-（5.37d）相减，得到如下扰动系统 s:

$$\begin{cases} \delta_t^c(\tilde{\varepsilon}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \mu\delta_t^c(\tilde{\sigma}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} + \Psi\left((\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) - \Psi\left((u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad - \dfrac{h^2}{2}\left[\Psi\left((\tilde{w}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (\tilde{u}_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right) - \Psi\left((w_c)_p^{q-\frac{1}{2}}, (u_c)_p^{q-\frac{1}{2}}\right)\right] + \Delta_x(\tilde{\varepsilon}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} - \dfrac{h^2}{6}\Delta_x(\tilde{\sigma}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} \\ \quad - \lambda(\tilde{\sigma}_c)_p^{q-\frac{1}{2}} = r_p^{q-\frac{1}{2}}, \ 1 \leq p \leq M,\ 1 \leq q \leq N_c, & (5.38a) \\ (\tilde{\sigma}_c)_p^q = \delta_{xx}(\tilde{\varepsilon}_c)_p^q - \dfrac{h^2}{12}\delta_{xx}(\tilde{\sigma}_c)_p^q, \quad 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq q \leq N_c, & (5.38b) \\ (\tilde{\varepsilon}_c)_p^q = (\tilde{\varepsilon}_c)_{p+M}^q, \quad (\tilde{\sigma}_c)_p^q = (\tilde{\sigma}_c)_{p+M}^q, \quad 1 \leq p \leq M,\ 0 \leq q \leq N_c, & (5.38c) \\ (\tilde{\varepsilon}_c)_p^0 = \zeta(x_p), \quad 1 \leq p \leq M. & (5.38d) \end{cases}$$

在步骤 III 中，我们还可以得到 $\|u^k\|_\infty \leq \widehat{C}$。类似于（5.37a）-（5.37d），也可以建立一个差分格式，其中涉及初值扰动 ζ（x_p）和源项扰动 $\hat{r}_p^{k-\frac{1}{2}}$ 关于$1 \leq p \leq M$， $0 \leq k \leq N_f$。若将该格式的解记为$\{\tilde{u}_p^k, \tilde{w}_p^k\}$，并记 $\tilde{\varepsilon}_p^{k-\frac{1}{2}} = \tilde{u}_p^k - u_p^k$，$\tilde{\sigma}_p^{k-\frac{1}{2}} = \tilde{w}_p^k - w_p^k$，则可得到一个与（5.38a）-（5.38d）类似的扰动系统，其中 $\{u_p^k, w_p^k\}$是问题（3.9a）-（3.9d）的解。

将（5.38a）与 $(\tilde{\varepsilon}_c)^{q-\frac{1}{2}}$作内积，并采用定理 5.1的类似证明方法，可推导出步骤 I 的稳定性，也可轻易得到步骤 III 的稳定性。

定理 5.4。假设 $\{(\tilde{\varepsilon}_c)_p^q, (\tilde{\sigma}_c)_p^q\}$ 是扰动问题 (5.38a)-(5.38d)的解，而 $\{\tilde{\varepsilon}_p^k, \tilde{\sigma}_p^k\}$是对应步骤 III 的扰动问题的解。于是有

$$\|(\tilde{\varepsilon}_c)^q\|^2 \leq C\left(\sum_{n=1}^{q}\|r^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\zeta\|^2\right), \quad 0 \leq q \leq N_c, \tag{5.39}$$

and

$$\|\tilde{\varepsilon}^k\|^2 \leq C\left(\sum_{n=1}^{k}\|\hat{r}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\zeta\|^2\right), \quad 0 \leq k \leq N_f. \tag{5.40}$$

6 数值实验

本节将给出一些数值实验，以验证 TTCD格式（3.6)-(3.9)，并选取细网格上的标准 NCD格式（3.5a)-(3.5d）作为参考。所有示例均在配备英特尔酷睿 i7-12700 处理器和 16GB 内存的计算机上实现，软件环境为 MATLAB R2023a。

设 U_p^k是问题（1.1）-（1.3）在点（x_p, t_k）处的精确解，u_p^k是由格式（3.9a）-（3.9d）得到的数值解。为评估所提出格式的收敛性，我们将 TTCD 格式的最大范数误差定义如下：$\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h) = \max_{\substack{1\le p\le M,\\ 0\le k\le N_f}} \left|u_p^k - U_p^k\right|$,
and

$$\mathrm{Rate}_{\mathrm{TTCD}}^{t} = \log_2\left(\frac{\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{TTCD}}(2\tau_f, h)}{\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h)}\right), \quad \mathrm{Rate}_{\mathrm{TTCD}}^{s} = \log_2\left(\frac{\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, 2h)}{\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h)}\right).$$

其中，Rate^t 和 Rate^s 分别表示时间收敛率和空间收敛率。对于 NCD 格式，记号 $\mathrm{Error}_{\infty}^{\mathrm{NCD}}$、$\mathrm{Rate}^{t}{}_{\mathrm{NCD}}$ 和 $\mathrm{Rate}^{s}{}_{\mathrm{NCD}}$ 可类似定义。若精确解未知，则按如下方式评估误差和收敛率：

$$\mathrm{Error}_{\infty,t}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h) = \max_{\substack{1\le p\le M,\\ 0\le k\le N_f}} \left|u_p^k(\tau_f, h) - u_p^{2k}\left(\frac{\tau_f}{2}, h\right)\right|, \quad \mathrm{Rate}_{\mathrm{TTCD}}^{t,\star} = \log_2\left(\frac{\mathrm{Error}_{\infty,t}^{\mathrm{TTCD}}(2\tau_f, h)}{\mathrm{Error}_{\infty,t}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h)}\right),$$

$$\mathrm{Error}_{\infty,s}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h) = \max_{\substack{1\le p\le M,\\ 0\le k\le N_f}} \left|u_p^k(\tau_f, h) - u_{2p}^k\left(\tau_f, \frac{h}{2}\right)\right|, \quad \mathrm{Rate}_{\mathrm{TTCD}}^{s,\star} = \log_2\left(\frac{\mathrm{Error}_{\infty,s}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, 2h)}{\mathrm{Error}_{\infty,s}^{\mathrm{TTCD}}(\tau_f, h)}\right).$$

然后，我们以相同方式定义 $\mathrm{Error}_{\infty\,t}^{\mathrm{NCD}}(\tau_f, h)$、$\mathrm{Error}_{\infty\,,s}^{\mathrm{NCD}}(\tau_f, h)$、$\mathrm{Rate}^{t,\star}{}_{\mathrm{NCD}}$、$\mathrm{Rate}^{s,\star}{}_{\mathrm{NCD}}$。

本文采用不动点迭代求解 NCD格式（3.5a）-（3.5d）。具体迭代步骤如下：

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_\eta}\left(\mathbf{u}^{l,m+1} - \mathbf{u}^{l-1}\right) - \frac{\mu}{\tau_\eta}\left(\mathbf{w}^{l,m+1} - \mathbf{w}^{l-1}\right) + \Psi\left(\mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}\right) - \frac{h^2}{2}\Psi\left(\mathbf{w}^{l-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}\right) \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\Delta_x\mathbf{u}^{l,m+1} + \Delta_x\mathbf{u}^{l-1}\right) - \frac{h^2}{12}\left(\Delta_x\mathbf{w}^{l,m+1} + \Delta_x\mathbf{w}^{l-1}\right) - \frac{\lambda}{2}\left(\mathbf{w}^{l,m+1} + \mathbf{w}^{l-1}\right) = 0, \\ \Psi\left(\mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\Psi\left(\mathbf{u}^{l,m+1}, \mathbf{u}^{l,m}\right) + \Psi\left(\mathbf{u}^{l,m+1}, \mathbf{u}^{l-1}\right) + \Psi\left(\mathbf{u}^{l-1}, \mathbf{u}^{l,m+1}\right) + \Psi\left(\mathbf{u}^{l-1}, \mathbf{u}^{l-1}\right)\right), \\ \Psi\left(\mathbf{w}^{l-\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{l-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\Psi\left(\mathbf{w}^{l,m+1}, \mathbf{u}^{l,m}\right) + \Psi\left(\mathbf{w}^{l,m+1}, \mathbf{u}^{l-1}\right) + \Psi\left(\mathbf{w}^{l-1}, \mathbf{u}^{l,m+1}\right) + \Psi\left(\mathbf{w}^{l-1}, \mathbf{u}^{l-1}\right)\right), \\ \mathbf{w}^l = \left(\mathcal{I} + \frac{h^2}{12}\delta_{xx}\right)^{-1}\delta_{xx}\mathbf{u}^l, \quad 1 \le l \le N_\eta, \quad \eta = c, f, \end{cases}$$

其中，$\mathbf{u}^l = (u_1^l, u_2^l, \cdots, u_M^l)^T$和 $\mathbf{w}^l = (w_1^l, w_2^l, \cdots, w_M^k)^T$。这里，$m$表示第 m次迭代，$\mathcal{I}$ 是一个恒等算子，初始迭代值为 $\mathbf{u}^{l,\,0} = \mathbf{u}^{l-1}$。每一步只需满足以下停止条件之一：

- 停止容差：$\max_{1\le p\le M} |\mathbf{u}_p^{l\,m+1} -, \mathbf{u}_p^{l\,m}| \le 10^{-12}$，。
- 最大迭代次数：200。

注意，η 表示时间网格类型。根据备注3.1，可直接得到 NCD格式在粗时间网格或细时间网格上的迭代格式。

例6.1（制造解）。考虑方程（1.1）具有精确解 $u(x, t) = e^t\sin(\pi x)$，$(x, t) \in [0, 2]\times[0, 1]$ 且周期为 $L = 2$。于是其源项可推导为

$$f(x, t) = \left[1 + (\mu + \lambda)\pi^2\right]e^t\sin(\pi x) + \frac{\pi}{2}e^{2t}\sin(2\pi x) + \pi e^t\cos(\pi x). \tag{6.1}$$

在表1 和2中，我们给出了 TTCD 格式和标准 NCD 格式的离散最大范数误差、时间收敛阶及 CPU 时间，其中参数（μ，λ）取为（1，1）和（1，0.01）。数值结果表明，两种方法在时间上均达到二阶收敛，这与理论分析一致。尽管两种方法的误差处于相同的

数量级，TTCD 格式的计算成本明显低于 NCD 格式。特别是对于较大的时间步长比 β_τ，TTCD 格式可以节省更多运行时间。

在表3中，在粗网格步长固定为 $\tau_c = 1/2500$且 $\beta_\tau = 4$的情况下，我们发现，对于不同的参数（μ, λ），两种格式在空间上都达到了理论四阶收敛，且误差几乎相同。特别是，TTCD格式显著降低了计算成本。图1 展示了TTCD格式在不同参数（μ, λ）下的收敛率，可以直观地观察到时间二阶收敛和空间四阶收敛。图2 显示，对于两种格式，最大范数误差均随CPU时间的增加而减小。然而，在精度相同的情况下，TTCD格式所需的CPU时间少于NCD格式。总之，我们可以得出结论：TTCD格式在保持NCD格式精度的同时降低了计算成本。

表1：例6.1 在$h = 1/600$ 和 $\beta_\tau = 2$条件下的最大范数误差、时间收敛率和CPU时间。

(μ, λ)	τ_c	τ_f	误差$_\infty^{\text{TTCD}}$	速率$^t_{\text{TTCD}}$	CPU（秒）	误差$_\infty^{\text{NCD}}$	速率$^t_{\text{NCD}}$	CPU（秒）
(1, 1)	1/8	1/16	4.5684×10^{-04}	-	10.59	4.3088×10^{-04}	-	14.90
	1/16	1/32	1.1421×10^{-04}	2.0000	19.81	1.0774×10^{-04}	1.9997	25.36
	1/32	1/64	2.8551×10^{-05}	2.0000	36.46	2.6935×10^{-05}	2.0000	51.27
	1/64	1/128	7.1381×10^{-06}	1.9999	70.32	6.7321×10^{-06}	2.0004	90.02
(1, 0.01)	1/8	1/16	6.5858×10^{-04}	-	10.62	6.0428×10^{-04}	-	16.25
	1/16	1/32	1.6448×10^{-04}	2.0014	19.82	1.5108×10^{-04}	1.9999	25.95
	1/32	1/64	4.1111×10^{-05}	2.0003	36.43	3.7772×10^{-05}	2.0000	48.34
	1/64	1/128	1.0274×10^{-05}	2.0005	70.40	9.4449×10^{-06}	1.9997	85.74

表 2：示例的最大范数误差、时间收敛率和 CPU 时间 6.1 其中$h = 1/500$ 和 $\beta_\tau = 3$。

(μ, λ)	τ_c	τ_f	误差$_\infty^{\text{TTCD}}$	速率$^t_{\text{TTCD}}$	CPU（秒）	误差$_\infty^{\text{NCD}}$	速率$^t_{\text{NCD}}$	CPU（秒）
(1, 1)	1/6	1/18	5.4253×10^{-04}	-	7.42	3.4047×10^{-04}	-	12.68
	1/12	1/36	1.3568×10^{-04}	1.9995	13.29	8.5128×10^{-05}	1.9998	23.65
	1/24	1/72	3.3920×10^{-05}	2.0000	25.11	2.1285×10^{-05}	1.9998	44.74
	1/48	1/144	8.4842×10^{-06}	1.9993	47.38	5.3245×10^{-06}	1.9991	76.89
(1, 0.01)	1/6	1/18	7.9326×10^{-04}	-	7.47	4.7747×10^{-04}	-	12.36
	1/12	1/36	1.9773×10^{-04}	2.0043	13.42	1.1937×10^{-04}	1.9999	21.86
	1/24	1/72	4.9396×10^{-05}	2.0011	25.38	2.9847×10^{-05}	1.9998	41.80
	1/48	1/144	1.2344×10^{-05}	2.0006	47.66	7.4554×10^{-06}	2.0012	72.75

例 6.2（未知解）。在本例中，我们考虑以下初值条件

$$u(x,0) = \frac{\sqrt{6}}{3}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{3}\right), \tag{6.2}$$

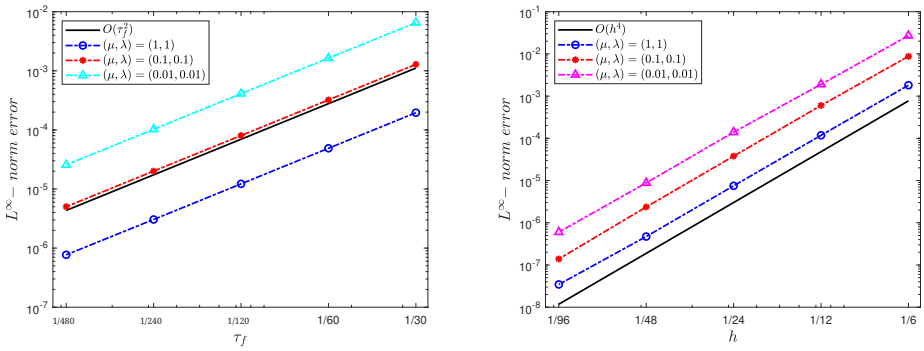
其中定义域为 $(x,t) \in [-30,30] \times [0,1]$，周期为 $L = 60$。这里没有精确解。

通过观察表 4 和 5，可以看出，两种格式均实现了时间二阶收敛和空间四阶收敛，这进一步验证了理论结果。注意，在本例中周期为 $L = 60$，这意味着，与例 6.1相比，在空间步长相同的情况下，我们需要更多的空间点 h。比较表 4 和 5中这两种方法的 CPU 时间可知，NCD格式耗时极长，而 TTCD格式在不损失精度的情况下可以显著缩短运行时间。

在表 6中，我们列出了守恒不变量 E^k （定义见（4.4））的计算值。结果表明，在不同参数（μ, λ）下，即使空间步长 h较大，TTCD格式仍能近似保持守恒不变量。图 3 清晰地展示了时间二阶和

表3：示例6.1 中 $\tau_c = 1/2500$和$\beta_\tau = 4$的最大范数误差和空间收敛率。

(μ, λ)	h	误差$_\infty^{\mathrm{TTCD}}$	速率^{TTCD}	CPU（秒）	误差$_\infty^{\mathrm{NCD}}$	比率^{NCD}	CPU（秒）
(1, 1)	1/6	1.8117×10^{-03}	-	2.33	1.8117×10^{-03}	-	4.21
	1/12	1.1796×10^{-04}	3.9410	3.34	1.1796×10^{-04}	3.9410	5.91
	1/24	7.5077×10^{-06}	3.9738	7.53	7.5087×10^{-06}	3.9736	12.28
	1/48	4.6693×10^{-07}	4.0071	21.54	4.6800×10^{-07}	4.0040	35.70
(1, 0.01)	1/6	2.1496×10^{-03}	-	2.35	2.1496×10^{-03}	-	4.16
	1/12	1.4475×10^{-04}	3.8924	3.28	1.4475×10^{-04}	3.8924	5.75
	1/24	9.1123×10^{-06}	3.9896	7.25	9.1139×10^{-06}	3.9894	12.09
	1/48	5.7014×10^{-07}	3.9984	21.68	5.7188×10^{-07}	3.9943	36.45



(a) $h = \frac{1}{500}$ 和 $\beta_\tau = 3$。　　(b) $\tau_f = \frac{1}{6000}$ 和 $\beta_\tau = 3$。

图1：TTCD格式在算例 6.1中的最大范数误差。

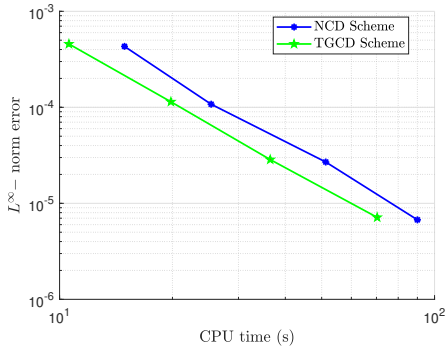


图2：算例 6.1 在 $(\mu、\ \lambda) = (1、1)$ $h = 1/600$ 和 $\beta_\tau = 2$。

表 4：示例 6.2 中$h = 1/20$ 和 $\beta_\tau = 4$的最大范数误差、时间收敛率和 CPU 时间。

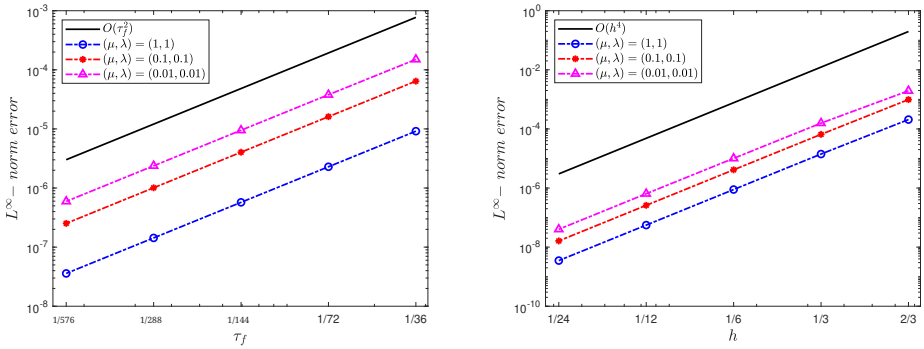
(μ, λ)	τ_c	τ_f	误差$^{\mathrm{TTCD}}_{\infty,t}$	收敛率$^{t,\star}_{\mathrm{TTCD}}$	CPU（秒）	误差$^{\mathrm{NCD}}_{\infty,t}$	比率$^{t,\star}_{\mathrm{NCD}}$	CPU（秒）
(1, 1)	1/10	1/40	1.0033×10^{-05}	-	15.83	4.4675×10^{-06}	-	30.14
	1/20	1/80	2.5088×10^{-06}	1.9997	31.61	1.1169×10^{-06}	1.9999	60.34
	1/40	1/160	6.2720×10^{-07}	2.0000	57.68	2.7919×10^{-07}	2.0002	99.26
	1/80	1/320	1.5684×10^{-07}	1.9996	115.85	6.9852×10^{-08}	1.9989	215.16
(1, 0.01)	1/10	1/40	1.5300×10^{-05}	-	16.01	4.4377×10^{-06}	-	30.69
	1/20	1/80	3.8278×10^{-06}	1.9989	31.97	1.1095×10^{-06}	1.9999	61.31
	1/40	1/160	9.5713×10^{-07}	1.9997	57.84	2.7738×10^{-07}	1.9999	99.71
	1/80	1/320	2.3923×10^{-07}	2.0003	116.33	6.9276×10^{-08}	2.0014	206.70

表5：例 6.2 在 $\tau_c = 1/1000$和$\beta_\tau = 4$。

(μ, λ)	h	误差$^{\mathrm{TTCD}}_{\infty,s}$	速率$^{s}_{\mathrm{TTCD}}$	CPU（秒）	误差$^{\mathrm{NCD}}_{\infty,s}$	比率$^{s}_{\mathrm{NCD}}$	CPU（秒）
(1, 1)	3/4	3.1652×10^{-04}	-	6.81	3.1652×10^{-04}	-	10.56
	3/8	2.2576×10^{-05}	3.8094	18.92	2.2576×10^{-05}	3.8095	28.30
	3/16	1.4247×10^{-06}	3.9860	65.48	1.4247×10^{-06}	3.9860	96.78
	3/32	8.9877×10^{-08}	3.9866	526.54	8.9848×10^{-08}	3.9871	936.86
(1, 0.01)	3/4	5.4130×10^{-04}	-	7.50	5.4130×10^{-04}	-	10.84
	3/8	3.9436×10^{-05}	3.7788	20.05	3.9436×10^{-05}	3.7788	29.44
	3/16	2.4927×10^{-06}	3.9837	69.66	2.4927×10^{-06}	3.9837	101.83
	3/32	1.5695×10^{-07}	3.9894	691.70	1.5698×10^{-07}	3.9891	1071.92

表6：对于例 6.2，数值守恒不变量 E^k 定义于（4.4）中，网格尺寸为$h = 1/10$ 和 $\tau_f = 1/1024$。

t	$(\mu, \lambda) = (1, 1)$	$(\mu, \lambda) = (0.1, 0.1)$	$(\mu, \lambda) = (0.01, 0.01)$
0	2.903703684187	2.690370368419	2.669037036842
1	2.903703684212	2.690370368490	2.669037036927
2	2.903703684227	2.690370368653	2.669037037266
3	2.903703684230	2.690370368908	2.669037038386
4	2.903703684220	2.690370369262	2.669037042923
5	2.903703684196	2.690370369724	2.669037062762



(a) $h = \frac{1}{15}$ 和 $\beta_\tau = 3$。　　(b) $\tau_f = \frac{1}{1500}$ 和 $\beta_\tau = 3$。

图3：例题中 TTCD格式的最大范数误差6.2。

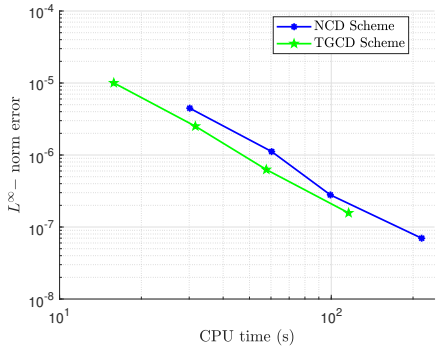


图 4：算例 6.2 在 $(\mu,\ \lambda) = (1,\ 1)$，$h = 1/20$ 以及 $\beta_\tau = 4$的 CPU 时间。

即使对于不同的参数（μ，λ），TTCD 格式仍具有四阶空间收敛性。此外，图 4 展示了最大范数误差与 CPU 时间之间的关系，表明 TTCD 格式比 NCD 格式效率更高。

7 结论

我们提出了一种基于 Crank-Nicolson 方法和时间双网格算法的时间双网格紧致差分（TTCD）格式，用于求解一维 BBMB 方程。通过能量方法证明，该格式在最大范数意义下，时间精度达到二阶，空间精度达到四阶。此外，还严格证明了该格式的守恒性、唯一可解性和稳定性。最后，两个数值算例验证了理论结果。计算结果的比较表明，在保持与标准非线性紧致差分格式相同精度的同时，TTCD 格式能够减少 CPU 时间。

参考文献

[ADK91] G. D. Akrivis、V. A. Dougalis 和 O. A. Karakashian. 关于非线性薛定谔方程的时间二阶精度全离散 Galerkin 方法. Numerische Mathematik, 59(1):31–53, 1991.[Bay21]K. Bayarassou. 求解 Benjamin–Bona–Mahony–Burgers (BBMB) 方程的四阶精度差分格式. Engineering with Computers, 37(1):123–138, 2021.[BBM72] T. B. Benjamin、J. L. Bona 和 J. J. Mahony. 非线性色散系统中长波的模型方程. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 272(1220):47–78, 1972.[BGd16] M. S. Bruz´on、T. M. Garrido 和 R. de la Rosa. 广义 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程的守恒律与精确解. Chaos, Solitons & Fractals, 89:578–583, 2016.[BMGN18] C. Besse、B. M´esognon-Gireau 和 P. Noble. 线性化 Benjamin–Bona–Mahony 方程的人工边界条件. Numerische Mathematik, 139(2):281–314, 2018.[CLQL25] Y. Chen、W. Liu、F. Qin 和 Q. Liang. 针对非线性 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程、具有能量耗散性质的虚元方法的最优收敛性分析. Computers & Mathematics with Applications, 192:37–53, 2025.[CNQA23] H. Chen、O. Nikan、W. Qiu 和 Z. Avazzadeh. 求解具有 Burgers 型非线性的 1D 四阶 Sobolev 型方程的双网格有限差分方法. Mathematics and Computers in Simulation, 209:248–266, 2023.

[CW21] H. Cheng 和 X. Wang. 保持耗散性质的二维 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程高阶线性化差分格式. 《数学分析与应用杂志》, 500(2):125182, 2021.[CZZ+25] H. Chen、M. A. Zaky、X. Zheng、A. S. Hendy 和 W. Qiu. 具有 Abel 核的非线性 Volterra 积分微分方程的空间双网格紧致差分方法. 《数值算法》, 98(2):677–718, 2025.[DAM14] M. Dehghan、M. Abbaszadeh 和 A. Mohebbi. 利用径向基函数无网格法求解非线性高维广义 Benjamin–Bona–Mahony–Burgers 方程. Computers & Mathematics with Applications, 68(3):212–237, 2014.[DSA21] M. Dehghan、N. Shafieeabyaneh 和 M. Abbaszadeh. 基于 Legendre 谱元法求解非线性广义 Benjamin–Bona–Mahony–Burgers 方程的数值与理论讨论. 《偏微分方程数值方法》, 37(1):360–382, 2021.[GGB09] Z. Z. Ganji、D. D. Ganji 和 H. Bararnia. 用 Exp 函数法求非线性 BBMB 方程的近似通解与显式解. 《应用数学建模》, 33(4):1836–1841, 2009.[GHE+25] J. Gao、S. He、B. Eerdun、C. He 和 J. He. 一种针对对称正则化长波的高效时空双网格差分方法：提升效率与精度. 《亚历山大工程期刊》, 121:53–65, 2025.[Gra06] R.M. Gray. Toeplitz 矩阵与循环矩阵：综述. Foundations and Trends® in Communications and Information Theory, 2(3):155–239, 2006.[HHF14] X. Hu、P. Huang 和 X. Feng. 基于一种新型混合有限元格式的 Burgers 方程双网格方法. 《数学建模与分析》, 19(1):1–17, 2014.[LLLG23] C. Li、Y. Liu、H. Li 和 W. Gao. 二维空间分数阶 Gray-Scott 模型的快速 TT-M 四阶紧致差分格式. Co mputers & Mathematics with Applications, 141:191–206, 2023.[LYL+18] Y. Liu、Z. Yu、H. Li、F. Liu 和 J. Wang. 时间分数阶水波模型的时间双网格算法与有限元法相结合. 《国际传热与传质杂志》, 120:1132–1145, 2018.[MBT18] A. K. Mittal 、 L. K. Balyan 和 D. Tiger. 利用时空伪谱方法求解 Benjamin-Bona-Mahony-Burger (BBMB) 方程与正则化长波 (RLW) 方程. 《物理学杂志：会议系列》, 1039(1):012002, 2018 年 6 月 .[MF17] A. Mohebbi 和 Z. Faraz. 利用高阶差分格式求解非线性 Benjamin–Bona–Mahony–Burgers 方程的孤立波解. Computational and Applied Mathematics, 36(2):915–927, 2017.[Ngo24] E. Ngondiep. 面向多维非线性广义 Benjamin–Bona–Mahony–Burgers 方程的高阶有限元与插值组合方法. Mathematics and Computers in Simulation, 215:560–577, 2024.[NLLL23] Y. Niu、Y. Liu、H. Li 和 F. Liu. 多孔介质中非线性分布阶分数阶 Sobolev 模型的快速高阶紧致差分格式. Mathematics and Computers in Simulation, 203:387–407, 2023.[PQWM 24] X. Peng、W. Qiu、J. Wang 和 L. Ma. 黏性 Burgers 方程的一种新型时间双网格紧致有限差分格式. 《应用数学与力学进展》 , 16:1358–1380, 2024.[QXGZ20] W. Qiu 、 D. Xu 、 J. Guo 和 J. Zhou. 基于有限差分法求解二维非线性时间分数阶可动/不可动输运模型的时间双网格算法. 《数值算法》, 85(1):39–58, 2020.

[SJ16] E. Shivanian 和 A. Jafarabadi. 通过谱无网格径向点插值（SMRPI）为非线性广义 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers（GBBMB）问题获得更精确的结果. 边界元工程分析, 72:42–54, 2016.[SQ24] D. Shi 和 Z. Qi. 非线性 BBMB 方程中保持能量耗散性质的非协调有限元法的无条件超收敛分析. 《计算与应用数学》, 43(4):207, 2024年.[ST86] I. H. Sloan 和 V. Thom´ee. 抛物型积分微分方程的时间离散. SIAM 数值分析杂志, 23(5):1052–1061, 1986.[Sun12] Z.-Z. Sun. 偏微分方程数值方法，第 2 版. 北京：科学出版社, 2012.[SYZ24] Y. Shi、X. Yang 和 Z. Zhang. 广义 Burgers 方程的新型时空双网格方法的构造及其求解. 应用数学快报, 158:109244, 2024年.[TG07] H. Tari 和 D. D. Ganji. 采用 He 方法求解非线性 BBMB 方程的近似显式解，并与精确解进行比较. 物理快报 A, 367(1):95–101, 2007.[WMWY25] S. Wang、T. Ma、L. Wu 和 X. Yang. 求解非线性广义 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程的两种高阶紧致有限差分格式. 应用数学与计算, 496:129360, 2025年.[WZS21] X. Wang、Q. Zhang 和 Z.-Z. Sun. 黏性 Burgers 方程两种能量守恒四阶紧致格式的逐点误差估计. 计算数学进展, 47(2):23, 2021年.[XGQ20] D. Xu、J. Guo 和 W. Qiu. 基于有限差分法的二维非线性分数阶演化方程时间双网格算法. 应用数值数学, 152:169–184, 2020年.[Xu94] J. Xu. 半线性椭圆方程的一种新型双网格方法. SIAM 科学计算杂志, 15(1):231–237, 1994.[Xu96] J. Xu. 线性与非线性偏微分方程的双网格离散技术. SIAM 数值分析杂志, 33(5):1759–1777, 1996.[ZL21] Q. Zhang 和 L. Liu. Benjamin–Bona–Mahony–Burgers 方程线性化四阶守恒紧致格式在最大范数下的收敛性与稳定性. 科学计算杂志, 87(2):59, 2021年.[ZLZ20] Q. Zhang、L. Liu 和 J. Zhang. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程两种线性化差分格式的数值分析. 偏微分方程数值方法, 36(6):1790–1810, 2020年。