arXiv:2601.00203v1 [math.CV] 1 Jan 2026

¨球丛与复欧几里得空间之间的凯勒子流形

MINGMING CHEN、YIHONG HAO 和 AN WANG

摘要。本文给出了关于复欧几里得空间与某些定义在凯勒流形上的厄米向量丛之球丛之间不存在共同凯勒子流形的一个充分条件。由此，我们得到了若干类球丛不存在此类子流形的定理，这些球丛的底空间为厄米对称空间或完备凯勒—爱因斯坦流形。

1. 引言

1953年，Calabi [2] 研究了凯勒流形与复空间形式之间是否存在全纯等距嵌入。¨继其研究之后，许多重要成果相继问世，涉及复空间形式中凯勒子流形的刻画与分类¨, [9, 11, 15, 22, 23, 24], 以及相关数论的研究 [8, 26, 27]。显然，两个凯勒流形具有共同凯勒¨子流形这一性质，有助于探讨它们之间是否存在全纯等距嵌入。现在，Di Scala 和 Loi 将具有这一性质的两个凯勒流形称为¨相对流形。若不具备这一性质，则称它们不是相对流形。事实上，两个凯勒流形之间相对性问题的研究可以追溯到 Umehara，¨他证明，爱因斯坦常数符号不同的两个复空间形式，不可能具有一个诱导度量相同的共同凯勒子流形。随后， [10]Di Scala 和 Loi 证明，任何赋有伯格曼度量的复有界域与射影凯勒流形都不是相对流形。此后，Mossa 指出，赋有齐性凯勒度量的有界齐性域不可能与射影凯勒流形互为¨相对流形。 [29] 关于不定复空间形式之间的相对性问题，读者可参阅¨，并可阅读近期若干相关研究的综述 [10], 。¨¨¨ [28] [4][6][30][36] [34]

由于任意紧型不可约厄米对称空间都可以通过经典的 Nakagawa-Takagi 嵌入全纯等距地嵌入复射影空间，由 Umehara 的结果可知 [29], 复欧几里得空间与紧型不可约厄米对称空间不能成为相对流形。后来，Huang 和 Yuan 证明了复欧几里得空间与非紧型厄米对称空间不能成为相对流形 [19]。他们引入 Nash代数函数作为研究公共复子流形存在性的有力工具。已有研究证明，非紧型厄米对称空间 [19], 对称化多圆盘 [31], Cartan-Hartogs域 [7, 35], 有界齐性域 [5], 极小域 [5], 以及某些 Hua 域 [25] 都不是复欧几里得空间的相对流形。回顾这些关于任意 K¨ahler 流形与复欧几里得空间之间相对性问题的研究，其中所有典范度量都是伯格曼度量。其主要原因在于，这些域上的伯格曼核具有显式表达式，而这些表达式已经被求得。

日期：2026年1月5日。2010 数学主题分类。32H02, 32Q40, 53B35.关键词和短语。K¨ahler 子流形、等距嵌入、Nash 代数函数、球丛。1

有界域上伯格曼度量的定义已被推广到复流形。并且，纤维维数为 k 的、定义在有界域上的任意伪凸 Hartogs 域，都可以视为平凡厄米向量丛中的一个特殊球丛E ，其秩为 k。对于任意厄米向量丛 E，记 $(\mathbb{B}(E),g^{\mathbb{B}(E)})$ 为赋予其典范度量（完备伯格曼度量或完备 K¨ahler-爱因斯坦度量）的球丛，自然会问，复欧几里得空间与 $(\mathbb{B}(E),g^{\mathbb{B}(E)})$ 之间是否存在公共子流形？我们在定义1 中引入指数 Nash 代数 K¨ahler 流形，并证明以下结果，这将有助于我们解决这一问题。

定理1。 设 $\pi:(L,h)\to M$ 是一个实解析 *K¨ahler* 流形(M,g_M) 上的厄米线丛，且 g_M 的 *K¨ahler* 形式满足 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = l\omega_M$，其中 l 为实数。设 E_k是 $(L,\overline{h})$ 的 k 重直和，其中 $k\in\mathbb{Z}^+$。该 *Ansatz*

$$\omega_{\mathbb{B}(E_k)} = \alpha\pi^*(\mathrm{Ric}(\omega_M)) + \beta\pi^*(\omega_M) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(\|v\|^2_{H_k}) \tag{1}$$

是 E_k 全空间上的一个(1,1)-形式，其中 u 是实值光滑函数，$||v||^2_{H_k} = \langle\xi,\xi\rangle h(z) = \sum_{j=1}^k \xi_j\bar{\xi}_j h(z)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$。球丛定义为 $\mathbb{B}(E_k) := \{v\in E_k : ||v||^2_{H_k} < 1\}$.

设 V 是 $\mathbb{C}$ 中的一个连通开子集。假设 $F: V\to\mathbb{C}^n$ 和 $G: V\to\mathbb{B}(E_k)$ 是全纯映射，满足

$$F^*\omega_{\mathbb{C}^n} = \mu G^*\omega_{\mathbb{B}(E_k)} \text{ on } V \tag{2}$$

其中 μ 是一个实常数。若 (M,g_M) 是指数纳什代数 *K¨ahler* 流形，且 $\exp u(x)$ 是有理函数，则 F 必为常值映射。

为了清楚地陈述定理 1，我们引入以下两个条件：

A： K¨ahler 流形 (M,g_M) 是指数纳什代数的；**B：** 实函数 $\exp u(x): [0,1)\to\mathbb{R}^+$ 关于 x 是有理函数。

如果去掉条件 A 或 B，定理1 的结论可能不成立。事实上，假设（1）中的 ansatz $\omega_{\mathbb{B}(E_k)}$ 在 $\mathbb{B}(E_k)$上诱导出 K¨ahler 度量 $g_{\mathbb{B}(E_k)}$。那么，(1,1) 形式

$$\omega'_M := \alpha\mathrm{Ric}(\omega_M) + \beta\omega_M \text{ and } \omega_{D_p} := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(||v||^2_{H_k})|_{D_p} \tag{3}$$

分别在 M 上诱导出 K¨ahler 度量 g'_M，并在区域 $D_p = \{v\in E_k|_p : ||v||_{H_k} < 1\}$ 上诱导出 K^{D_p} ähler 度量 g'_M。容易看出，(M, g'_M) 和 (D^p, g^{D_p}) 是 $(\mathbb{B}(E_k), g_{\mathbb{B}(E_k)})$ 的 K¨ahler 子流形。显然，若 (M, g'_M) 或 (D^p, g^{D_p}) 是 K¨ahler 子流形，则 $(\mathbb{B}(E_k), g_{\mathbb{B}(E_k)})$ 和 $(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}^n})$ 有共同的 K¨ahler 子流形。然而，根据引理 5，条件 A 可以排除 (M, g'_M) 与 $(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}^n})$ 之间存在共同 K¨ahler 子流形的可能性。Cheng 和第二作者 [5] 证明，对于任意正实数 μ，若 K¨ahler 流形 $(M, \mu g_M)$ 的度量 g_M 是指数纳什代数，则该流形与复欧几里得空间没有共同的 K¨ahler 子流形。注意，如果 exp u 是有理函数，则式 (3) 中的度量 g^{D_p} 在 D^p 上是指数纳什代数。因此，条件 B 也排除了 (D^p, g^{D_p}) 与 $(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}^n})$ 之间存在共同 K¨ahler 子流形的可能性。

设 $(\mathbb{B}(E_k), g_{\mathbb{B}(E_k)})$ 是一个K¨ahler流形，其K¨ahler形式为 $\omega_{\mathbb{B}(E_k)}$，并且它与 之间存在公共K¨ahler子流形 $(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}^n})$。则方程（2）由此成立。作为定理 1的应用，我们研究复欧几里得空间与几类赋予典范度量的球丛之间公共子流形的不存在性。对于伯格曼度量，我们考虑厄米对称空间上的三类球丛。第一个不存在性结果由推论1给出，涉及球

丛，它们位于紧致厄米对称空间上的全纯切丛的最高外积 $\bigwedge^n T(1,0)$ 的直和丛中。第二个不存在性结果由推论 2给出，涉及有界对称域上的哈托格斯域。最后一个是推论 3 给出的存在性结果，涉及完备平坦空间上的哈托格斯域。对于K¨ahler-Einstein度量，我们考虑完备K¨ahler-Einstein流形上负厄米线丛的直和丛中的一类球丛；这些流形具有负Ricci 曲率，并在推论 4中得到不存在性结果。

本文的组织结构如下。我们先在第2 节介绍 Nash函数的一些性质。在第3节中，我们介绍 Ebenfelt、Xiao 和 Xu 针对球丛提出的设想，并给出定理1的证明。作为应用，我们在最后一节得到推论1-4 。

2. Some properties of Nash algebraic function

设$D \subset \mathbb{C}^n$ 是一个开子集，且f 是定义在D上的全纯函数。如果存在U 这个z_0 的开邻域以及一个非零多项式$P: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得$P(z, f(z)) \equiv 0$ 对$z \in U$成立，则称f 在$z_0 \in D$ 处是一个Nash函数。因此，定义在D 上的全纯函数若在D的每一点处都是 Nash函数，则称其为 Nash函数。我们用 $\mathcal{N}(D)$表示D 上的 Nash函数族。以下引理汇总了 Nash函数的一些基本性质。更多细节请参见文献 [17, 18, 32]。

引理 1. [32] 设 f，$g \in \mathcal{N}(D)$。则有以下结论：
(1)：$f \pm g$，fg，$fg \in \mathcal{N}(D)$，且对每个 $1 \le i \le n$，都有 $\partial f / \partial z_i \in \mathcal{N}(D)$。*(2)*：对任意固定的 $(z_{k+1}^0, \cdots, z_n^0)$，$f(z1, \cdots, z_k, z_{k+1}^0, \cdots, z_n^0)$ 是关于 $z1, \cdots, z_k$ 的 *Nash*函数。*(3)*：设 D_1 和 D_2 是 $\mathbb{C}^n$ 的两个开子集。假设 $\varphi(z, w) \in Hol(D_1 \times D_2)$，且对任意固定的 $w_0 \in D_2$，$\varphi(z, w_0) \in \mathcal{N}(D_1)$（相应地，对任意固定的 $z_0 \in D_1$，$\varphi(z_0, w) \in \mathcal{N}(D_2)$）。则 $\varphi(z, w) \in \mathcal{N}(D_1 \times D_2)$。*(4)*：*Nash*函数的复合仍是 *Nash*函数。

引理 2. [25] 设 $V \subset \mathbb{C}^\kappa$ 是一个连通开集，$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_\kappa) \in V$，且 $H_1(\xi)$、$\cdots, H^{\kappa_1+\kappa_2}(\xi)$、$H(\xi)$ 是 V 上的 *Nash* 函数，$\mu, \mu_1, \cdots, \mu_{\kappa_1+\kappa_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 且 R 是多变量全纯有理函数。假设

$$\exp\{H^\mu(\xi)\} = R\left(H_1^{\mu_1}(\xi), \cdots, H_{\kappa_1}^{\mu_{\kappa_1}}(\xi)\right) \prod_{j=\kappa_1+1}^{\kappa_1+\kappa_2} H_j^{\mu_j}(\xi), \tag{4}$$

那么 $H(\xi)$ 必为 V 上的常数。

该引理在 [25] 中的证明表明，条件“ $\mu_1, \cdots, \mu_{\kappa_1+\kappa_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ”可以替换为“$\mu_1, \cdots, \mu_{\kappa_1+\kappa_2} \in \mathbb{R}$ 且其中至少有一个非零”。Nash幂函数的矛盾方程（4）是定理1证明中的关键。以下结果最初包含在 [19] 中，后来在 [6]中被改写为一个引理。

引理3。 [19] [6] 设 U 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，$0 \in U$。设

$$S = \{h_1, \cdots, h_l\} := \{f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_m, g_{m+1}\}$$

是 U 上的全纯函数集合。记 $\Re$ 和 $\mathfrak{F} = \Re(S)$ 分别为 U 上的有理函数域和有理函数域上的域扩张。设域$\mathfrak{F}/\Re$ 的超越次数为 r，并且 $\{h_1, \cdots, h_r\} \subset S$ 是关于 $\Re$ 的极大代数无关子集。

- 若 $r = 0$，则 S 中的所有元素都是 *Nash*代数的。

• 若 $r > 0$，则存在 $\{h_1, \cdots, hr\} \subset S$，它是关于 $\Re$ 的极大代数无关子集，因此$\{hj, h_1, \cdots, hr\} \subset S$ 关于 $\Re$ 代数相关。根据隐函数定理的存在性和唯一性，存在 $D \subset U$，其中 $0 \in D$，并且存在全纯 *Nash* 代数函数$\hat{}hj(z,X)$，它们定义在 $\overline{\{(z,\Phi(z)|z \in D)}$ 的邻域 $\hat{}D$ 内，其中$\} \subset \mathbb{C}n \times \mathbb{C}r$，使得

$$h_j(z) = \hat{h}_j(z, \Phi(z)), \quad \forall j = 1, \cdots, l,$$

其中 $\Phi(z) = (h_1(z), \cdots, h_r(z))$。

3. 主要结果

我们首先研究带有实解析 K¨ahler 度量 g_M的 K¨ahler 流形 M 的 K¨ahler 势函数。设 ψ是 U $\subset$M 上的一个 K ¨ahler 势函数。在点 p $\in$ M 的某个邻域 U 上存在一个局部坐标系 z，使得 ψ(z) : U $\to \mathbb{R}$ 可以解析延拓到开邻域 W $\subset$ U $\times$conj(U)，其中 conj(U) = {w $\in \mathbb{C}^n$|w $\in$ U}。这个延拓函数称为 ψ 在 U 上的极化函数，记作 ψ(z, w)。显然，它是唯一的，并且 ψ(z) = ψ(z, ¯z)。

去掉仅包含 z 或 w的纯项后，下面的引理描述了一种常用方法，用于从旧的 K¨ahler 势函数及其极化函数构造新的 Kähler 势函数及其极化函数（另见 [18]中引理 4.1 的证明）。

引理 *4.* 设 M 是带有实解析 *K¨ahler* 度量 g_M 的复流形。记 ψ 为 g_M 在 $p \in M$ 附近的局部坐标系 *(U, z)* 中的任意 *K¨ahler* 势函数。则存在另一个 *K¨ahler* 势函数 φ，使得其极化函数 φ 满足 $\varphi(z, \bar{z}_0) = 0$ （即 $(\exp \varphi)(z, \bar{z}_0) = 1$），其中 z_0 表示 p 的坐标，而 $(\exp \varphi)(z, w)$ 是 $\exp(\varphi(z))$ 的极化函数。

此外，若极化函数 $\psi(z,w)$ （分别地，$\phi(z,w) := (\exp \psi)(z,w)$）在 $(z,w) \in U \times conj(U)$ 上是全纯纳什代数的，则

(i): 极化函数 $\varphi(z,w)$ （分别地，$(\exp \varphi(z,w))$ 在$(z,w) \in U \times conj(U)$ 上是全纯纳什代数的。

(ii): $\psi_{i\bar{j}}\det(\psi_{i\bar{j}}(z))_{1\le i 的j\le m}$ 极化函数为

$$\det\left(\frac{\partial^2 \psi(z,w)}{\partial z_i \partial w_j}\right),$$

并且它是关于$(z, w) \in U \times conj(U)$中的全纯 *Nash* 代数函数。

证明。令 $\psi(z,w)$ 为 ψ 在$U \times$ conj(U)上的极化函数。定义

$$\varphi(z,w) = \psi(z,w) - \psi(z,\bar{z}_0) - \psi(z_0,w) + \psi(z_0,\bar{z}_0). \tag{5}$$

于是，φ(z) = φ(z, ¯z) 是 U 上一个新的 K¨ahler 势，满足 φ(z, ¯z_0) = 0。显然，φ(z, w) 是 φ(z) 的极化函数。用 (exp ψ)(z, w) 表示 exp(ψ(z)) 的极化函数。由于 (exp φ)(z, w) = exp(φ(z, w))，我们知道，φ(z, ¯z_0) = 0 等价于 (exp φ)(z, ¯z_0) = exp(φ(z, ¯z_0)) = 1。

(i): 根据第2节中全纯 Nash 代数函数的性质，结论 (i) 可由 $\varphi(z,w)$ 的定义以及以下观察得出

$$\begin{aligned}(\exp\varphi)(z,w) &= \exp(\varphi(z,w)) \\ &= \frac{\exp(\psi(z,w))\exp(\psi(z_0,\bar{z}_0))}{\exp(\psi(z,\bar{z}_0))\exp(\psi(z_0,w))} = \frac{(\exp\psi)(z,w)(\exp\psi)(z_0,\bar{z}_0)}{(\exp\psi)(z,\bar{z}_0)(\exp\psi)(z_0,w)}.\end{aligned}$$

(ii)：对于结论 (ii)，我们有 $\psi_{i\bar{j}}(z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z,w)\,|_{w=\bar{z}}$ 在 $U \times \mathrm{conj}(U)$ 上。根据唯一性，我们得到 $\psi_{i\bar{j}}(z)$ 的极化函数为 $\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j}(z,w)$。这意味着，如果 $\psi(z,w)$ 是全纯纳什代数函数，那么 $\psi_{i\bar{j}}(z)$ 的极化函数也是全纯纳什代数函数。

注意，$\phi(z,w) = (\exp\psi)(z,w) = \exp(\psi(z,w))$。于是，$\psi(z) = \log\phi(z,z)$。因此，我们有 $\psi_{i\bar{j}}(z) = \frac{\partial^2 \log\phi}{\partial z_i \partial w_j}(z,w)\,|_{w=\bar{z}}$。$\psi_{i\bar{j}}(z)$ 的极化函数为

$$\frac{\partial^2 \log(\phi(z,w))}{\partial z_i \partial w_j} = -\frac{1}{\phi^2(z,w)}\frac{\partial\phi(z,w)}{\partial z_i}\frac{\partial\phi(z,w)}{\partial w_j} + \frac{1}{\phi(z,w)}\frac{\partial^2\phi(z,w)}{\partial z_i \partial w_j}.$$

这也意味着，如果 $\phi(z,w)$ 是全纯纳什代数的，则 $\psi_{i\bar{j}}(z)$ 的极化函数也是全纯纳什代数的。这表明，$\det(\psi_{i\bar{j}}(z))$ 的极化函数是在 $U \times \mathrm{conj}(U)$ 中的函数 $\det(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial w_j}(z,w))$。如果 $\psi(z,w)$ 或 $\phi(z,w) = (\exp\psi)(z,w)$ 是全纯纳什代数的，它也同样是全纯纳什代数的。

□

定义 1。设 M 是一个 K¨ahler 流形，带有实解析的 K¨ahler 度量 g_M。对于任意点 $p \in M$，若存在一个局部坐标邻域 $U \subset M$，以及 $U \subset M$ 上 g_M 的一个 K¨ahler 位势函数 ψ，使得 ψ（分别是 $\exp\psi$）的极化函数在 $U \times \mathrm{conj}(U)$ 上是全纯 Nash 代数函数，我们称 g_M 是纳什代数的（指数 Nash 代数）。并称 (M, g_M) 为纳什代数的 K¨ahler 流形（指数 Nash 代数 K¨ahler 流形）。

引理 5. 设 (M, g_M) 是一个 *K¨ahler* 流形，并假设 $\omega'_M := \alpha\mathrm{Ric}(\omega_M) + \beta\omega_M$ 在 M 上诱导出一个 *K¨ahler* 度量 g'_M。对于任意 $\mu \in \mathbb{R}^+$，若 ω_M 是指数 *Nash* 代数，则 $(M, \mu g'_M)$ 与复欧几里得空间没有公共的 *K¨ahler* 子流形。

证明。 假设 $(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}^n})$ 和 $(M, \mu g'_M)$ 具有共同的凯勒子流形。那么它们有一个一维复子流形 $V \subset \mathbb{C}$，全纯映射 $F : V \to \mathbb{C}^n$ 和 $G_1 : V \to M$，使得

$$F^*\omega_{\mathbb{C}^n} = \mu G_1^*\omega'_M \ on\ V. \tag{6}$$

不失一般性，假设 $0 \in V$、$F = (f_1, \cdots, f_n) : V \to \mathbb{C}^n$ 和 $G_1 = (g_1, \cdots, g_m) : V \to U \subset M$ 是全纯映射，且满足 $F(0) = 0$ 和 $G_1(0) = 0$，其中 (U, z) 是包含 $G_1(V)$ 的局部坐标系。根据引理 4，在 U 上总存在一个使其极化函数 φ 满足 $\varphi(z,0) = 0$（即 $\phi(z,0) := (\exp\varphi)(z,0) = 1$）的凯勒势函数 φ of ω_M。由 (6)，可得

$$\partial\bar{\partial}(\sum_{j=1}^{n}|f_j(s)|^2) = -\mu\alpha\partial\bar{\partial}\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s))) + \mu\beta\partial\bar{\partial}\log\phi(G_1(s)).$$

消去 $\partial\bar{\partial}$，存在一个全纯函数 $\mathfrak{a}_0(s)$ 定义在 V 上，使得

$$\sum_{j=1}^{n}|f_j(s)|^2 = -\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s))) + \mu\beta\log\phi(G_1(s)) + \mathfrak{a}_0(s) + \overline{\mathfrak{a}_0(s)}.$$

通过极化，得到

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(s)\bar{f}_j(t) = -\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s), \bar{G}_1(t))) + \mu\beta\log\phi(G_1(s), \bar{G}_1(t)) + \mathfrak{a}_0(s) + \bar{\mathfrak{a}}_0(t),$$

其中 (s,t) $\in$ V $\times$ 共轭(V)，共轭(V) = {s $\in \mathbb{C}$: $\bar{s} \in$ V}，$\bar{a}_0(t) = a_0(\bar{t})$，$\overline{\bar{f}_i(t)} = f_i(\bar{t})(1 \le$ j $\le$ n)，$\overline{\bar{g}_i(t)} = g_i(\bar{t})(1 \le$ i $\le$ m)。定义 H(z, w) = det($\varphi_{i\bar{j}}$(z, w))$_{1\le i,\ j\le m}$并且 ~~$\widetilde{H(z,w)} =$~~ H(z,w)H(0,0) H(0,w)H(z,0) 。于是存在一个全纯函数 $a_1(s)$，使得

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(s)\bar{f}_j(t) = -\mu\alpha \log \widetilde{H}(G_1(s), \bar{G}_1(t)) + \mu\beta \log \phi(G_1(s), \bar{G}_1(t)) + a_1(s) + \bar{a}_1(t).$$

由于 H(z, 0) = 1，且 ϕ(z, 0) = 1，分别令 s = 0 或 t = 0 或 s = t = 0，可得 a_1(t) + a_1(0) = 0、a_1(s) + a_1(0) = 0 和 a_1(0) + a_1(0) = 0。这意味着 a_1(s) + a_1(t) = 0，并且

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(s)\bar{f}_j(t) = \log\left(\widetilde{H}^{-\mu\alpha}(G_1(s), \bar{G}_1(t))\phi^{\mu\beta}(G_1(s), \bar{G}_1(t))\right). \tag{7}$$

注意 $\widetilde{H}(z, w)$ 为 且 ϕ（z，w）是 Nash代数的。根据 [36], 中$p \in V$，我们有 e

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(s)|^2 \in \widetilde{\Lambda}_p, \text{ and } \log\left(\widetilde{H}^{-\mu\alpha}(G_1(s), \bar{G}_1(s))\phi^{\mu\beta}(G_1(s), \bar{G}_1(s))\right) \notin \widetilde{\Lambda}_p \backslash \mathbb{R}_p, \tag{8}$$

其中 $\widetilde{\Lambda}_p = \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{\kappa} a_j|\chi_j|^2 | \chi_j \in \mathcal{O}_p,\ \chi_j\ (p) = 0,\ a_j \in \mathbb{R},\ \kappa \in \mathbb{Z}^+ \right\}$，$\mathcal{O}_p$ 表示 p 点全

纯函数芽的局部环，且 $\mathbb{R}_p$ 表示实数芽（详情请参见 [36] 第2.1节）。这存在冲突。□

在给出定理 1 的证明之前，我们先回顾圆盘丛、球丛及其试探形式的定义。设 $\pi: (L, h) \to M$ 是维数为 m 的 K¨ahler 流形 (M, g_M) 上的厄米线丛，满足 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = l\omega_M, l \in \mathbb{R}$。圆盘丛定义为

$$D(L) := \{v \in L : |v|_h < 1\}. \tag{9}$$

对于 M 的局部坐标 (U, z) 以及 U 上的自然局部自由标架 $\{e_U\}$，在 π^{-1}(U) 的每个纤维上都存在一组线性全纯坐标 (ξ)，因此 (z, ξ) 是 π^{-1}(U) 的全纯坐标系。厄米线丛 L 上的厄米结构可在局部表示为 U 上的正函数 h(z)，其厄米形式可写为 $|v|_h^2 = h(z)\xi\bar{\xi}$，为简便起见记作 x。设 u 是 $[0, +\infty)$ 上的光滑实值函数。那么，下列 (1,1)-形式

$$\omega_D = \alpha\pi^*(\mathrm{Ric}(\omega_M)) + \beta\pi^*(\omega_M) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(|v|_h^2) \tag{10}$$

i在$D(L)$上定义良好，其中 Ric(ω_M) 表示相应的Ricci形式 $-\sqrt{-1\partial\partial \log}\det(g^M)$.

对于任意固定的$k \in \mathbb{Z}^+$，令$(E_k, H_k) = (L, h) \oplus \cdots \oplus (L, h)$。右侧有$k$ 个(L, h) 的副本。球丛定义为

$$\mathbb{B}(E_k) := \{v \in E_k : ||v||_{H_k}^2 < 1\}, \tag{11}$$

其中 $||v||_{H_k}^2 = \langle\xi, \xi\rangle h(z) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j\bar{\xi}_j h(z)$。在$E_k$ 上定义一个$(1, 1)$形式:

$$\omega_{\mathbb{B}(E_k)} := \alpha\pi^*\mathrm{Ric}(\omega_M) + \beta\pi^*(\omega_M) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(||v||_{H_k}^2). \tag{12}$$

注记 1. 若 $\alpha = 0, \beta = 1, \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = l\omega_M$，则 $\omega_{\mathbb{B}(E_k)}$ 就变成了著名的 Calabi 构造 [3]。许多人研究了具有各种常数曲率（如 Ricci 曲率或标量曲率）的完备 K¨ahler 度量 [3, 20, 16]。

注 2。若 $\alpha = -\frac{1}{m+k+1}, \beta = \frac{1}{m+k+1}, \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = \omega_M$，则 $\omega_{\mathbb{B}(E_k)}$ 是 Ebenfelt、Xiao 和 Xu [12] 为研究球丛上完备卡勒-爱因斯坦度量的存在性而引入的$(1,1)$形式。

定理1的证明。假设存在一个连通开子集$V \subset \mathbb{C}$，以及非常数全纯映射$F : V \to \mathbb{C}^n$ 和$G : V \to \mathbb{B}(E_k)$，使得卡勒形式满足

$$F^*\omega_{\mathbb{C}^n} = \mu G^*\omega_{\mathbb{B}(E_k)} \text{ on } V \tag{13}$$

其中 μ 为实常数。

设 U $\subset$ M 是一个局部坐标邻域，使得 G(V) $\subset$ $\mathbb{B}(E_k) \cap \pi^{-1}$(U)（必要时缩小 V）。不失一般性，假设 $0 \in$ V 且 F $=(f_1, \cdots, f_n) : V \to \mathbb{C}^n$、G $=(G_1, G_2) = (g_1, \cdots, g_m, g_{m+1}, \cdots, g_{m+k}) : V \to \pi^{-1}$(U) $\cap \mathbb{B}(E_k)$ 是全纯映射，并且 F(0) $= 0$ 且 G(0) $= (z_0, \xi_0)$，因为 π^{-1}(U) 在局部上与 U $\times \mathbb{C}^k$同胚。

由于 (M, g_M) 是指数 Nash 代数的，因此在 U $\subset$ M 中存在 g_M 的一个 K¨ahler 势函数 ψ，使得 exp ψ 的极化函数在 U $\times$conj(U) 上是全纯纳什代数函数。根据引理 4，我们可以将 ψ 替换为新的 K¨ahler 势函数φ，使得 exp φ 的极化函数 (exp φ)(z, w) 和 $\det(\varphi_{i\bar{j}}(z))_{1\le i,j\le m}$ 的极化函数在 (z, w) $\in$ U $\times$ conj(U) 上是全纯纳什代数的，并且还满足 exp $\varphi(z, \bar{z}_0) = 1$。根据假设 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = l\omega_M$，我们有 h(z) $= |hol|^2 \exp(l\overline{\varphi(z)})$。通过适当选择 L 的局部自由标架，可以使 h(z) $= \exp(l\,\varphi(z))$ 在 U 上成立，且其极化函数 h(z, w) $= \exp(l\varphi(z, w))$ 在 U $\times$ conj(U) 上成立。此外，$x(z, \xi) := ||v||^2_{H_k} = h(z)\|\xi\|^2$ 的极化函数是 $\langle\xi, \zeta\rangle \exp(l\varphi(z, w))$。特别地，我们有 $\langle\xi, \bar{\xi}_0\rangle \exp(l\varphi(z, \bar{z}_0)) = \langle\xi, \bar{\xi}_0\rangle$。

定义 ϕ（z）：$=\exp$（φ（z））。于是，K¨ahler 势为 φ（z）$=\log\phi$（z），并且有

$$\omega_{\mathbb{B}(E_k)} = -\mu\alpha\partial\bar{\partial}\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(z)) + \mu\beta\partial\bar{\partial}\log\phi(z) + \mu\partial\bar{\partial}u(x(z,\xi)),$$

其中 x（z，ξ）$=\|\xi\|^2\phi^l$（z）。由引理 5 的证明可知 G（V）$\not\subset M$，即 $G_2 \neq 0$。根据（13），对任意 $s \in V$，有

$$\partial\bar{\partial}(\sum_{j=1}^{n}|f_j(s)|^2) = -\mu\alpha\partial\bar{\partial}\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s))) + \mu\beta\partial\bar{\partial}\log\phi(G_1(s)) + \mu\partial\bar{\partial}u(x(G(s))),$$

其中 x（G（s））$=\phi^l$（G_1（s））$\|G_2$（s）$\|^2$。消去 $\partial\bar{\partial}$，存在一个定义在V 上的全纯函数 $\mathfrak{a}$（s），使得

$$\sum_{j=1}^{n}|f_j(s)|^2 = -\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s))) + \mu\beta\log\phi(G_1(s)) + \mu u(x(G(s))) + \mathfrak{a}(s) + \overline{\mathfrak{a}(s)} \text{ for } s \in V.$$

通过极化，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n}f_j(s)\bar{f}_j(t) = -\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(G_1(s), \bar{G}_1(t)))_{1\le i,j\le m} + \mu\beta\log\phi(G_1(s), \bar{G}_1(t))$$

$$+\mu u(x(G(s),\bar{G}(t)))+\mathfrak{a}(s)+\bar{\mathfrak{a}}(t),$$

其中 (s, t) ∈ V × conj(V), conj(V) = {s ∈ ℂ : s̄ ∈ V}, a(t)‾ = a(t̄), f_j(t) = f_j(t̄)(1 ≤ j ≤ n), g_i(t) = g_i(t̄)(1 ≤ i ≤ m + 1), 且 Ḡ(t) = (Ḡ_1(t), Ḡ_2(t)) = (ḡ_1(t), ⋯, ḡ_m(t), ḡ_{m+1}(t), ⋯, ḡ_{m+k}(t)), x(G(s), Ḡ(t)) = φ^l(G_1(s), Ḡ_1(t)) < G_2(s), G_2(t) >.

考虑集合 S = {f1, ⋯, f_n, g1, ⋯, g_{m+1}, ⋯, g_{m+k}}。由引理3，存在定义在 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^r$ 中邻域 $\widehat{\ }$V 上的 Nash函数 $\widehat{\ }$f1, ⋯, $\widehat{\ }$f_n, $\widehat{\ }$g1, ⋯, $\widehat{\ }$g_{m+1}, ⋯, $\widehat{\ }$g_{m+k}，使得 f_j(z) = $\widehat{\ }$f_j(z, h_1(z), ⋯, h_r(z)) 且 g_j(z) = $\widehat{\ }$g_j(z, h_1(z), ⋯, h_r(z))，其中 {h1, ⋯, h_r} 是 ℜ 上的一个极大代数无关子集。

定义 $\widehat{\ }$G(s, X) := ($\widehat{\ }$G_1(s, X), $\hat{\ }$G_2(s, X))=($\hat{\ }$g_1(s, X), ⋯, $\hat{\ }$g_m(s, X), $\hat{\ }$g_{m+1}(s, X), ⋯, $\hat{\ }$g_{m+k}(s, X))$\widehat{\ }$ 在 V 上，并且

$$\Psi(s,X,t):=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(s,X)\bar{f}_j(t)+\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(\widehat{G}_1((s,X),\bar{G}_1(t))))$$

$$-\mu\beta\log\phi(\widehat{G}_1(s,X),\bar{G}_1(t))-\mu\log[\exp(u(x(\widehat{G}(s,X),\bar{G}(t))))]-\mathfrak{a}(s)-\bar{\mathfrak{a}}(t), \tag{14}$$

and

$$\Psi_\tau(s,X,t):=\frac{\partial^\tau\Psi}{\partial t^\tau}(s,X,t),$$

其中 (s, X, t)∈ $\widehat{\ }V\times V$, $\bar{\ }X=(X1,\ \cdots,\ Xr)$, $\tau\geq 1$。

现在我们证明，对于任意接近 0 的 t 以及任意 (s, X) ∈ $\widehat{\ }$V, Ψ(s, X, t) = Ψ(s, X, 0)。实际上，如果结论不成立，那么在 t 的一个邻域内，Ψ(s, X, t) = Ψ(s, X, 0) + $\sum_{\tau\geq 1}\Psi_\tau(s,X,0)t^\tau$，其中 t = 0，因为 Ψ(s, X, t) 关于 t 是复分析函数。

注意，$\hat{\ }f_1(s,X)$, ⋯, $\hat{\ }f_n(s,X)$, $\hat{\ }g_1(s,X)$, ⋯, $\hat{\ }g_m(s,X)$, ⋯, $\hat{\ }g_{m+k}(s,X)$ 都是 $(s,X)\in\widehat{\ }V$ 上的 Nash 代数函数。经过一些繁琐的运算可得，$\Psi_\tau(s,X,0)$ 也是 (s, X) 上的 Nash 代数函数。假设 $\Psi_\tau(s,X,0)$ 不是常数，则存在 $P(s,X,y)=A_d(s,X)y^d+$

⋯ + A0(s, X), A0(s, X) ≠ 0，使得 P(s, X, Ψ_τ(s, X, 0)) ≡ 0。对于任意 s ∈ V，方程Ψ(s, h1(s), ⋯, hr(s), t) ≡ 0 意味着 Ψ_τ(s, h1(s), ⋯, hr(s), 0) ≡ 0。因此，我们可以得到 A0(s, h1(s), ⋯, hr(s)) ≡ 0。这与 {h1(s), ⋯, hr(s)} 是 ℜ中的极大代数无关集相矛盾。因此

$$\Psi_\tau(s,X,0)=\Psi_\tau(s,h_1(s),\cdots,h_r(s),0)\equiv 0.$$

由（14），可得

$$\Psi(s,X,t)=\Psi(s,X,0)=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(s,X)\bar{f}_j(0)+\mu\alpha\log\det(\varphi_{i\bar{j}}(\widehat{G}_1((s,X),\bar{G}_1(0))))_{1\leq i,j\leq m}$$

$$-\mu\beta\log\phi(\widehat{G}_1(s,X),\bar{G}_1(0))-\mu\log(\exp u(x(\widehat{G}(s,X),\bar{G}(0))))-\mathfrak{a}(s)-\bar{\mathfrak{a}}(0), \tag{15}$$

其中 Ḡ_1（0）和 Ḡ（0）分别记为点 z̄_0 和 （z̄0, ξ̄_0）。

我们断言，存在 (s_0, t_0) ∈ V × V，满足 t̄_0 ≠ 0，使得 $\sum_{j=1}^{n}\hat{\ }f_j(s_0,X)\ \bar{f}_j(t_0)$ 不关于 X 为常数。事实上，若它在 V × V 中为常数，令 t = s̄，X = (h_1(s), ⋯, h_r(s))，则

$$\sum_{j=1}^{n}|f_j(s)|^2=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(s,h_1(s),\cdots,h_r(s))\bar{f}_j(\bar{s})\equiv constant,\ s\in V.$$

这是不可能的。

取上述所述的点 s_0,t_0，则 $\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(s_0,X)\bar{f}_j(t_0)$ 是关于 X 的全纯 Nash 代数函数。将 (14) 与 (15) 合并，得到

$$\exp\left(\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(s_0,X)\bar{f}_j(t_0)-\frac{1}{\mu}\bar{\mathfrak{a}}(t_0)+\frac{1}{\mu}\bar{\mathfrak{a}}(0)\right)$$
$$=\frac{\det^{\alpha}\left(\varphi_{i\bar{j}}(\widehat{G}_1((s_0,X),\bar{G}_1(0)))\right)\phi^{\beta}(\widehat{G}_1((s_0,X),\bar{G}_1(t_0)))\exp u(x(\widehat{G}(s_0,X),\bar{G}(t_0)))}{\det^{\alpha}\left(\varphi_{i\bar{j}}(\widehat{G}_1((s_0,X),\bar{G}_1(t_0)))\right)\phi^{\beta}(\widehat{G}_1((s_0,X),\bar{G}_1(0)))\exp u(x(\widehat{G}(s_0,X),\bar{G}(0)))},$$

其中 $\phi(z,w)=\exp(\varphi(z,w))$，且 $x((z,\xi),(w,\zeta))=\langle\xi,\zeta\rangle h(z,w)=\langle\xi,\zeta\rangle(\exp(\varphi(z,w)))^{l}$。由引理 2 和引理 4 可知，F 必为常值映射。证毕。□

4. 一些例子

4.1. 配备伯格曼度量的三类球丛。设 M 是一个复流形，L 表示其典范线丛。假设平方可积全纯 m-形式构成的希尔伯特空间 $H^2(M,L)$ 没有基点，并以 $\mathcal{K}_M(z,w)$ 表示 L 上的 Bergman核形式。将 $\mathcal{K}_M(z,z')=K_M(z,z')dz_1\wedge\cdots\wedge dz_m\wedge dz'_1\wedge\cdots\wedge dz'_m$视为反典范线丛 L^*上的 Hermitian度量 h^*。记

$$\Theta_h=-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K_M(z,z')^{-1}\geq 0$$

对偶度量h 在L上的曲率形式，并记ds_M^2 为M上相应的半 K¨ahler 度量。若ds_M^2 正定，则称其为**伯格曼度量**。如果流形只是 $\mathbb{C}^m$ 中的一个域，那么通过如下识别

$$f(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_m\to f(z) \tag{16}$$

将$(m,0)$-形式与函数对应起来，便可得到 $\mathbb{C}^m$ 中域的通常意义下的 Bergman空间和伯格曼核。与形式 $\mathcal{K}_M(z,z')$相对应的函数$K_M(z,z')$ 就是这些域通常意义下的伯格曼核函数。

设 G^* 为全纯自同构群，K 为 M 上某点处的各向同性子群。那么，紧致厄米对称空间 $M=G^*/K$。设 L 为 $M=G^*/K$ 上由表示 $k\to(\det(Adk))p$, $k\in K$ 诱导的齐性线丛。记 G^*/K 的亏格为 p。于是，丛 L^p 是 G^*/K 上全纯切丛的最高外积 $\bigwedge m\,T(1,0)$。利用局部坐标 $\mathfrak{p}^+:z\to\exp(iz)\in G^*/K$，可得 L^p 中的纤维度量为

$$\|\partial_1\wedge\cdots\wedge\partial_m\|_z=h(z,-z)^{-p}.$$

记$e(z)$ 为L 的局部全纯截面，使得$e(z)^p=\partial_1\wedge\cdots\wedge\partial_m$，则我们看到$L$ 上的度量由下式给出

$$\|e(z)\|_z^2=h(z,-z)^{-1},$$

其中，$h(z,-z)$ 是一个称为 Jordan标准多项式的不可约多项式。令 L^* 为 L 的对偶丛，$e^*(z)$ 为与 $e(z)$ 对偶的 L^* 局部截面。令 $D(L^{*\mu})$ 和 $S(L^{*\mu})=\partial D(L^{*\mu})$ 分别为 $L^{*\mu}$ 的高次幂 L^*, $\mu=0,1,2,\cdots$ 的单位圆盘丛和单位圆周丛，即，

$$D(L^{*\mu})=\{\xi\in L^{*\mu}:\|\xi\|^2<1\}.$$

$S(L^{*\mu})$ 的一个局部定义函数为

$$\rho(z,\lambda e^{*\mu}(z)) = |\lambda|^2 h(z,-z) - 1, \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathfrak{p}^+,$$

其中 $e^{*\mu}(z) = e^*(z) \otimes \cdots \otimes e^*(z)$ 是$L^{*\mu}$的局部截面。

将 $\mathfrak{p}^+$ 与M 中如上所述的全测度稠密开子集 [14], 并利用之前的局部平凡化截面$e^*(z)$，对应关系 $\mathfrak{p}^+ \times \mathbb{C} \ni (z,\lambda) \mapsto \xi = (z, \lambda e^{*\mu}(z)) \in L^{*\mu}$ 集在全测度稠密开子集与哈托格斯域D 之间建立了一个双射

$$\Omega_\mu = \{(z,\lambda) \in \mathfrak{p}^+ \times \mathbb{C} : |\lambda|^2 h^\mu(z,-z) < 1\}.$$

记

$$\rho(x,\alpha;y,\beta) = \alpha\bar{\beta}h(x,-y)^\mu - 1,$$

定义函数 ρ 的双全纯延拓。

引理 6。 [14] 圆盘丛 $D(L^{*\mu})$ 的伯格曼核在局部坐标 $\alpha e^{*\mu}(z) \to (z,\alpha) \in \mathfrak{p}^+ \times \mathbb{C}, |\alpha|^2 h(z,-z)^\mu < 1$中由下式给出

$$K_D(x,\alpha;y,\beta) = K^*(x,\alpha;y,\beta) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge d\alpha \wedge d\bar{y}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{y}_m \wedge d\bar{\beta},$$

其中

$$K^*(x,\alpha;y,\beta) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\nu+1}{\pi} c_{\mu,\nu} h(x,-y)^{\mu\nu+1} (\alpha\bar{\beta})^\nu.$$

其中 $c_{\mu,\nu} = \frac{((\mu\nu+p-\frac{m}{r}))_r^m}{((p-mr))_r^m}$。它可按亚纯全纯扩展定义函数 $\rho(x,\alpha;y,\beta) = \alpha\bar{\beta}h(x,-y)^\mu - 1$ 展开为

$$\frac{K^*(x,\alpha;y,\beta)}{h(x,-y)} = c_0\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-m-2} + \cdots + c_{m+1}\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-1},$$

其中 $c_0 = (-1)^{m+2} \frac{(m+1)!\mu^m((p-mr))_r^m}{((p-mr))_r^m}$，$c_j$ 是一些实常数，并且

$$\rho(x,\alpha;y,\beta) = \alpha\bar{\beta}h(x,-y)^\mu - 1.$$

根据 Boas、Fu 和 Straube 提出的膨胀原理 [1]，它可以扩展到 L^{*s} 的直和的单位球丛。对于任意固定的 $k \in \mathbb{Z}^+$，令 $(E_k, H_k) = (L^{*\mu}, h^\mu) \oplus \cdots \oplus (L^{*\mu}, h^\mu)$，右侧有 k 个 $(L^{*\mu}, h^\mu)$ 副本。球丛定义为

$$\mathbb{B}(E_k) := \{v \in E_k : ||v||_{H_k}^2 < 1\}, \tag{17}$$

其中 $\|v\|_{H_k}^2 = \langle\xi,\xi\rangle h(z,-z)^\mu = \sum_{j=1}^k \xi_j\bar{\xi}_j h(z,-z)^\mu$。单位圆丛 $S(E_k) = \partial\mathbb{B}(E_k)$。$S(E_k)$ 的局部定义函数为

$$\rho(z,\nu) = \|\lambda\|^2 h(z,-z)^\mu - 1, \lambda \in \mathbb{C}^k, z \in \mathfrak{p}^+,$$

其中 $\nu = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta_j(z)$，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 和 $\{\delta_1(z), \cdots, \delta_k(z)\}$ 是 E_k 的局部标架。

引理 7。 在局部坐标 $\alpha e^*(z) \to (z,\alpha) \in \mathfrak{p}^+ \times \mathbb{C}^k, \|\alpha\|^2 h(z,-z)^\mu < 1$下，式（17）中的球丛 $\mathbb{B}(E_k)$ 的伯格曼核为

$K_{\mathbb{B}(E_k)}(x,\alpha;y,\beta) = K^*(x,\alpha;y,\beta) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge d\alpha_1 \wedge \cdots \wedge d\alpha_k \wedge d\bar{y}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{y}_m \wedge d\bar{\beta}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\beta}_k$，其中

$$K^*(x,\alpha;y,\beta) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+1)_k}{\pi^k} \frac{((\mu(j+k-1)+p-\frac{m}{r}))_r^m}{((p-\frac{m}{r}))_r^m} h(x,-y)^{\mu(j+k-1)+1} \langle\alpha,\bar{\beta}\rangle^j. \tag{18}$$

它可用亚纯全纯扩展定义函数 $\rho(x,\ \alpha;\ y,\ \beta)\ =\langle\alpha,\ \bar{\beta}\rangle h(x,\ -y)^{\mu}-1$ 展开为

$$\frac{K^*(x,\alpha;y,\beta)}{h^{\mu(k-1)+1}(x,-y)}=C_0\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-(m+k+1)}+\cdots+C_{m+1}\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-k},\tag{19}$$

其中 C_j 是一些实常数。

证明。利用局部坐标，将 $(m,0)$-形式通过 (16) 识别为函数，因此 $\mathbb{B}(E_k)$ 上的伯格曼空间可识别为在 Ω_μ 上全纯且平方可积的所有函数所构成的空间，也就是哈托格斯域 $\mathbb{C}^{m+k}$ 上通常的伯格曼空间。定义

$$L_1(x,y,t)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(\nu+1)}{\pi}c_{\mu,\nu}h(x,-y)^{\mu\nu+1}t^{\nu},$$

and

$$L_2(x,y,t)=c_0\sigma(x,y,t)^{-m-2}+\cdots+c_{n+1}\sigma(x,y,t)^{-1},$$

其中 $\sigma(x,y,t)\ =h(x,\ -y)^{\mu}t\ -1$。根据膨胀原理和引理6，$B(E_k)$的伯格曼核为

$$\begin{aligned}K^*(x,\alpha;y,\beta)\ &=\ \frac{1}{\pi^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}L_1(x,y,t)}{\partial t^{k-1}}|_{t=\langle\alpha,\beta\rangle}\\&=\ \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+1)_k}{\pi^k}c_{\mu,j+k-1}h(x,-y)^{\mu(j+k-1)+1}t^j|_{t=\langle\alpha,\beta\rangle},\end{aligned}$$

其中 $(j\ +1)_k$ 表示次数为k的波赫哈默多项式，即$(j\ +1)_k=\frac{\Gamma}{(j+1+k)\,\Gamma(j+1)}$，并且 _____

$$\frac{K^*(x,\alpha;y,\beta)}{h(x,-y)}=\frac{1}{\pi^{k-1}}\frac{\partial^{k-1}L_2(x,y,t)}{\partial t^{k-1}}|_{t=\langle\alpha,\beta\rangle}$$

$$=\ \frac{1}{\pi^{k-1}}h^{\mu(k-1)}(x,-y)\left(\frac{(m+k)!}{(m+1)!}c_0\sigma(x,y,t)^{-(m+k+1)}+\cdots+(k-1)!c_{m+1}\sigma(x,y,t)^{-k}\right)|_{t=\langle\alpha,\beta\rangle}.$$

结论得证。 □

由 (19)，在 $(B(E_k)$ 中的 (17) 的伯格曼度量为

$$\omega_{B_{E(k)}}=(\mu(k-1)+1)\pi^*\omega_M+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(||\alpha||^2h(x,-x)^{\mu}-1),$$

其中 $\omega_M=\sqrt{-1\partial\bar{\partial}}\log h(z,\ -z)$，并且

$$\exp u(\rho)=C_0\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-(m+k+1)}+\cdots+C_{m+1}\rho(x,\alpha;y,\beta)^{-k}.$$

注意到 $h(z,\ -w)$ 是该紧致厄米对称空间的 Jordan标准多项式。因此，底空间是一个指数 Nash 代数 K¨ahler 流形。推论 1由引理 7 和定理 1得证。

推论*1.* 设 *(L, h)* 是一个厄米线丛，满足其 *p* 次幂丛 L^p 是紧致厄米对称空间 *M* 上全纯切丛的最高外积 $\wedge m\ T(1,\ 0)$。设 $(L^*,\ h^{-1})$ 是 *(L, h)* 的对偶丛。对任意固定的 $k\ \in\ \mathbb{Z}^+$，令 $(E_k,\ H_k)\ =$ $(L^{*\mu},\ h^{-\mu})\ \oplus\cdots\oplus(L^{*\mu},\ h^{-\mu})$。复欧几里得空间与赋予伯格曼度量的 $(E_k,\ H_k)$ 球丛之间不存在共同的 *K¨ahler* 子流形。

设 Ω 是 $\mathbb{C}^m$ 中的一个有界域。定义 $L = \Omega \times \mathbb{C}$，并令 h 为 L 上的 Hermitian度量，其定义为：对于任意 (z, ξ)、$(z', \xi') \in L$，有 $h(z, z') := K^{-1}(z, z)$。则 $\omega_M := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log K(z, z)$ 在 Ω 上诱导伯格曼度量 g_Ω。注意，$(E_k, H_k) = (L, h) \oplus \cdots \oplus (L, h) = (\Omega \times \mathbb{C}^k, K^{-1}(z, z)I_k)$。该球丛是以有界齐性域为底空间的哈托格斯域。也就是说

$$\widehat{\Omega}_{m,s} := \left\{(z, \xi) \in \Omega \times \mathbb{C}^k : \|\xi\|^2 K_\Omega(z, z)^s < 1\right\} \tag{20}$$

对于$s \in \mathbb{R}^+$. 其称为**Bergman-Hartogs域**。

引理8。 [21] 若有界域 Ω 是齐性的，则哈托格斯域$\widehat{\Omega}_{m,\ s}$ 的伯格曼核为

$$K_{\widehat{\Omega}_{m,s}}((z, \xi), (z', \xi')) = \frac{K_\Omega(z, z')^{ms+1}}{\pi^m} \sum_{j=0}^{m+1} \frac{c(s, j)(j + m)!}{(1 - x)^{j+m+1}} \Big|_{x=K_\Omega(z,z')^s<\xi,\xi'>}, \tag{21}$$

其中$(z, \xi), (z', \xi') \in \widehat{\Omega}_{m,s}$，而$c(s, j)$ 是依赖于 Ω的常数。

此引理 $\widehat{\ }$表明，Ω_m上的完备伯格曼度量的K¨ahler形式，$_s$ i s

$$\omega_{\widehat{\Omega}_{m,s}} = (ms + 1)\pi^*(\omega_\Omega) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(K_\Omega(z, z)^s < \xi, \xi >),$$

其中 $\omega_\Omega = \partial\bar{\partial}\log K_\Omega(z, z)$ 以及 $\exp u(x) = \sum^{m+1}{}_{j=0} \frac{c(s,j)(j+m)!}{(1-x)^{j+m+1}}$。

推论2。 复欧几里得空间与配备其伯格曼度量 g 的 *Bergman-Hartogs*域 (20) 之间不存在共同的 *K¨ahler*子流形$\widehat{\Omega}_{m,\ s}$。特别地，对于 (20) 中有界对称域上的哈托格斯域，这一结论同样成立。

证明。只需证明 (Ω, g_Ω) 是一个 Nash代数的 K¨ahler流形。一般来说，有界齐性域的伯格曼核未必是有理函数。但可以证明，对于任意点 $p \in \Omega$，存在一个局部坐标邻域 $U \subset \Omega$，以及伯格曼度量在 $U \subset \Omega$上的一个凯勒势函数 ψ，使得 ψ 的极化函数（分别地，$\exp\psi$）是 $U \times \mathrm{conj}(U)$ 上的有理函数。事实上，任何有界齐性域Ω 都可以通过一个双全纯映射 ϕ 等价于第二类 Siegel 域 V。还存在一个有理映射 ψ，使得任何 Siegel 域 V 都可以等价于一个有界齐性域。定义 $w := (\psi \circ \phi(z))$。由于 V 的伯格曼核是有理的，$\psi \circ \phi(\Omega)$ 的伯格曼核函数

$$K_{(\psi\circ\phi)(\Omega)}(w, w) = K_\Omega(z, z)|\det J(\psi \circ \phi)|^2 = K_V(s, s)|\det J\psi|^2$$

是有理的，并且在新坐标下，K¨ahler 形式可表示为 $\omega_\Omega = \partial\bar{\partial}\log K^{\psi\circ\phi(\Omega)}(w, w)$。此外，我们得到

$$\widehat{\Omega}_{m,s} \cong \left\{(w, \zeta) \in (\psi \circ \phi)(\Omega) \times \mathbb{C}^k : \|\zeta\|^2 K_{(\psi\circ\phi)(\Omega)}(w, w)^s < 1\right\}. \tag{22}$$

因此，证明完成。 □

设 $L = \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}\}$ 是 $\mathbb{C}^m$上的平凡线丛。设 h 为 L 上定义的 Hermitian度量，满足 $h(z, z') := e^{<z,z'>}$，对任意 $(z, \xi), (z', \xi') \in L$。于是，$\omega := -c(L, h) = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\|z\|^2$在 $\mathbb{C}^m$上诱导平坦度量 $g_{\mathbb{C}^m}$。因此，特征值 $\lambda_i(z) \equiv 0$。令 $(E_k, H_k) = (L, h) \oplus \cdots \oplus (L, h) = (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k, e^{<z,z'>}I_k)$。球丛为

$$D_{m,k} := \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k : \|\xi\|^2 < e^{-||z||^2}\}. \tag{23}$$

它是一个无界、非双曲的强伪凸域，称为**福克-贝格曼-哈托格斯域**。

引理 9. [33] $D_{m,k}$ 上的伯格曼核的显式公式为

$$K_{D_{m,k}}((z,\xi),(z',\xi')) = \pi^{-(m+1)} e^{<z,z'>} A_m(t)(1-t)^{-(m+2)}\big|_{t=e^{<z,z'><\xi,\xi'>}}, \tag{24}$$

其中，多项式 $A_m(t) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m+j}(2)_j S(1+m,1+j)(1-t)^{m-j}$, $(x)_j$ 和 $S(\cdot,\cdot)$ 分别表示波赫哈默符号和第二类斯特林数。

推论 3. 配备伯格曼度量的福克-伯格曼-哈托格斯域 $D_{m,k}$ 与复欧几里得空间具有共同的凯勒子流形。

证明。 由引理9可知，$D_{m,k}$ i上的完备伯格曼度量的 K¨ahler 形式　　s

$$\omega_{D_{m,k}} = \pi^*(\omega_{\mathbb{C}^m}) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u(\|\xi\|^2 e^{\|z\|^2}),$$

其中，$\omega_{\mathbb{C}^m} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\|z\|^2$ 是复平坦度量的 K¨ahler 形式，$\exp u(x) = A_m(x)\,(1-x)^{m+2}$。令$f$: D $\to D_{m,k}$为包含映射，则$f^*(\omega_{D_{m,k}}) = \omega_{\mathbb{C}^m}$。因此，我们得出结论。□

4.2. 配备完备 K¨ahler–Einstein 度量的球丛。设 (M, g_M) 是一个 m 维 K¨ahler 流形。K¨ahler 度量 g_M 的里奇张量自然诱导全纯切空间 $T^{1,0}_p$上的 Ricci 自同态，M 由 $\mathrm{Ric}\cdot(g_M)^{-1}$ 给出，其中 $p \in M$。该自同态的特征值称为 (M, g_M) 的里奇特征值，对于固定的 $p \in M$，记为 $\lambda_1(p) \le \cdots \le \lambda_m(p)$。由于 Ric 和 g_M 都是厄米张量，所有里奇特征值均为实数。根据 [12] ,中的定理 1.3、推论 1.4 和备注 5.6，我们得到以下结果。

引理10。 [12] 球丛 $\mathbb{B}(E_k) = \{v \in E_k : ||v||_{H_k} < 1\}$ 属于(11)，并且存在唯一的完备 *K¨ahler-Einstein* 度量 $g_{\mathbb{B}(E_k)}$，其 *Ricci* 曲率为 $-(m+k+1)$，当且仅当(M,g_M) 具有常数的 *Ricci* 特征值，且每个 *Ricci* 特征值都严格小于 *1*。此外，该度量由以下 *K¨ahler* 形式诱导：

$$\omega_{\mathbb{B}(E_k)} = -\frac{1}{m+k+1}\pi^*(\mathrm{Ric}_M) + \frac{1}{m+k+1}\pi^*(\omega_M) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\psi(||v||^2_{H_k}),$$

其中 ω_M 和 Ric_M 分别是(M, g_M) 的 *K¨ahler* 形式和 *Ricci* 形式，$\psi : (-1,1) \to \mathbb{R}^+$ 是一个偶实解析函数，仅依赖于 *Ricci* 自同态的特征多项式。

特别地，若　g_M 是一个完备的 *K¨ahler-Einstein* 度量，其 *Ricci* 曲率为 $-(m+1)$，则

$$\omega_{\mathbb{B}(E_k)} = -\frac{1}{m+k+1}\pi^*(\mathrm{Ric}_M) + \frac{1}{m+k+1}\pi^*(\omega_M) - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1-||v||^2_{H_k})$$

可以在 $B(E_k)$上生成完备的 *K¨ahler-Einstein* 度量。

由引理10 和定理1，可得推论4。

推论4。 设(M, ω_M) 是一个 *Ricci* 曲率为 $-(m+1)$ 的完备 *K¨ahler-Einstein* 流形。设$\pi : (L, h) \to M$ 是 M 上满足 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h = l\omega_M$, $l \in \mathbb{R}$ 的负*Hermitian*线丛。设 E_k 为(L, h)的直和。若 *K¨ahler* 流形(M, ω_M) 是指数 *Nash* 代数的，则复欧几里得空间与配备其 *K¨ahler-Einstein* 度量的 $\mathbb{B}(E_k)$ 没有公共 *K¨ahler* 子流形。

参考文献

[1] Boas, H., Fu, S., Straube, E：伯格曼核函数：显式公式与零点，Proc. Amer. Math. Soc. (3)127, (1999), 805-811.[2] Calabi, E：复流形的等距嵌入，Ann. of Math., (2) 58, (1953年), 1-23.[3] Calabi, E：K´é¨hler 度量与全纯纤维丛，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup., (4), 12(2), (1979), 269–294.[4] Cheng, X., Di Scala, A., Yuan, Y：K¨ahler 子流形与 Umehara 代数，Int. J. Math., (4) 28, (2017), 179-195.[5] Cheng, X., Hao, Y：K¨ahler 流形与复空间形式不存在公共子流形，Ann. Global. Anal. Geom., (1) 60, (2021), 167-180.[6] Cheng, X., Hao, Y., Yuan, Y., Zhang, X：不定复空间形式中的复子流形，Proc. Amer. Math. Soc., (6) 152, (2024), 2541-2550.[7] Cheng, X., Niu, Y：Cartan-Hartogs域与复欧几里得空间中的子流形，J. Math. Anal. Appl., (2) 452, (2017), 1262-1268.[8] Clozel, L., Ullmo, E：模对应与不变测度，J. Reine Angew. Math., 558, (2003), 47-83.[9] Di Scala, A., Loi, A：厄米对称空间到复空间形式的 K¨ahler 映射，Geom. Dedicata, 125, (2007), 103-113.[10] Di Scala, A., Loi, A：K¨ahler 流形及其相对流形，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., (5) 9, (2010), 495-501.[11] Di Scala, A., Ishi, H., Loi, A：齐性 K¨ahler 流形到复空间形式的 K¨ahler 浸入，Asian J. Math., (3) 16, (2012), 479-488.[12] Ebenfelt, P., Xiao, M., Xu, H：K¨ahler-Einstein 度量与圆丛的障碍平坦性，Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees, 177, (2023), 368-414.[13] Ebenfelt, P., Xiao, M., Xu, H：K¨ahler-Einstein 度量与障碍平坦性 II：单位球丛，J. Funct. Anal., 286, (2024), 110366.[14] Englis, M., Zhang, G：Ramadanov猜想与紧致厄米对称空间上的线丛，Math. Z. 264, (2010), 901-912.[15] Hao, Y., Wang, A., Zhang, L：非齐性 K¨ahler-Einstein 流形到无限维复射影空间的全纯等距浸入，J. Math. Anal. Appl., 423, 2015, 547-560.[16] Hao, Y., Wang, A., Zhang, L：关于紧致齐性 K¨ahler 流形上的圆盘丛的完备 K¨ahler-Einstein 度量的一点注记。J. Geom. Anal. 33, 291, (2023). https://doi.org/10.1007/s12220-023-01355-1.[17] Huang, X：不同维数复空间中的代数实超曲面的映射问题，Ann. Inst. Fourier (Grenoble), (2) 44, (1994), 433-463.[18] Huang, X., Yuan, Y：K¨ahler 流形到复射影流形乘积的全纯等距映射，Geom. Funct. Anal., (3) 24, (2014), 854-886.[19] Huang, X., Yuan, Y：厄米对称空间中的子流形，Analysis and Geometry, in: Springer Proc. Math. Stat., vol. 127, Springer, Cham, (2015), 197-206.[20] Hwang, A., Singer：圆不变 K¨ahler 度量的动量构造。Trans. Amer. Math. Soc., 354, (2002), 2285-2325.[21] Ishi, H., Park, J. D., Yamamori, A：齐性有界域上哈托格斯域的伯格曼核函数，J. Geom. Anal., (2) 27, (2017), 1703-1736.[22] Loi, A., Zedda, M：K¨ahler 流形到复空间形式的 K¨ahler 浸入，意大利数学联合会讲义 23, Springer, (2018).[23] Loi, A., Mossa, R：到齐性有界域的全纯等距映射，Proc. Amer. Math. Soc., (9) 151, (2023), 3975-3984.[24] Loi A., Zedda M：无限维射影空间的 K¨ahler-Einstein 子流形，Math Ann., 350 (1), (2011), 145-154.[25] Ma, H., Hao, Y., Cheng, X：Hua域与复欧几里得空间中的子流形，Houston Journal of Mathematics, 49(4), (2023), 785-794.[26] Mok, N：有界域之间全纯等距映射及相关映射的几何，Geometry and Analysis. No. 2, 225-270, Adv. Lect. Math., (ALM) 18, Int. Press, 马萨诸塞州萨默维尔, 2011.1.[27] Mok, N：关于伯格曼度量且模去正规化常数的全纯等距映射芽的延拓，J. Eur. Math. Soc., 14 (2012), 1617-1656.[28] Mossa, R：一个有界齐性域与一个射影流形互不为相对流形，Riv. di. Univ. Parma., (1) 24, (2013), 55-59.[29] Umehara, M：复空间形式中的 K¨ahler 子流形，Tokyo J. Math., (1) 10, (1987), 203-214.

[30] Umehara, M.: 复流形上的对角距离与实解析函数，《日本数学杂志》，(3) 40, (1988), 519-539.[31] Su, G., Tang, Y., Tu, Z.: 凯¨勒子流形与对称化多圆盘，巴黎科学院学报（第一辑），(4) 356, (2018), 203-214.[32] Tworzewski, P.: 解析集与线性子空间的交，Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 17, (1990), 227–271.[33] Yamamori, A.: 福克–伯格曼–哈托格斯域的伯格曼核与多对数函数，Complex Var. Elliptic Equ., (6) 58, (2013), 783-793.[34] Yuan, Y.: 局部全纯等距映射：新旧成果。载于：Ji, L., Yang, L., Yau, S.-T. (编)《第七届华人数学家大会论文集》，第 II 卷，第 409-422 页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔 (2019).[35] Zhang, X., Ji, D.: 某些哈托格斯域与复欧几里得空间中的子流形，Complex Var. Elliptic Equ., (1) 1, (2022), 1-7.[36] Zhang, X., Ji, D.: *Umehara*代数与不定复空间形式中的复子流形，Ann. Glob. Anal. Geom., (3) 63, (2023), 1-12. (Mingming Chen) 河南师范大学数学与统计学院，中国新乡 453007电子邮箱：chenmingming105@126.com (Yihong Hao) 西北大学数学系，中国西安 710127电子邮箱：haoyihong@126.com (An Wang) 首都师范大学数学科学学院，中国北京 100048电子邮箱：wangan@cnu.edu.cn