arXiv:2601.00206v1 [physics.ao-ph] 1 Jan 2026

具有构造几何的平流层模式验证

Johannes Lawen George Salman Akshita Bhardwaj 草稿 – 2026年1月5日

摘要

我们提出一种仅针对平流层的静力动力核心，该核心采用位势/气压坐标，并由对流层提供随时间演化的下边界。我们不再通过指定动力（“松弛逼近”）将平流层环流约束到再分析资料，而是将对流层顶视为移动的几何边界。因此，平流层区域会响应对流层变率而扩张、收缩并起伏，同时保持熟悉的混合 σ–p 结构和气压梯度计算。该方法能够自然地结合任意拉格朗日–欧拉（ALE）更新与守恒重映射，从而保持正层厚和示踪物单调性。我们概述了该方法的公式，重点介绍其解析性质（适定性、能量学和波传播），并简要说明一条基于改进标准测试案例和再分析驱动实验的验证与确认路径。

1 引言

平流层的动力学和成分通过各种遥相关和波—平均流相互作用[1–4]调节地表气候、臭氧恢复和极端事件。研究此类过程的常见方法是运行“仅平流层”配置，在其中通过向再分析产品[（例如，5, 6]）松弛，将大尺度环流约束或指定。这种做法有效且广泛采用，但不可避免地会带有资料同化的印记，并在预报流场层面混合对流层和平流层的变率，从而增加归因和机制解释的难度。

我们采用另一种方法：保持平流层运动方程为预报方程，同时通过几何与对流层进行运动学耦合。在位势/气压（或混合 σ–p）坐标[7, 8], 中，下边界的位置可以随时空变化，而不会扰乱静力平衡或水平气压梯度力的结构。若将这一移动边界视为对流层顶， $z_{\mathrm{trop}}(x, y, t)$，或等价地视为随时间变化的 p_{trop} 界面，那么对流层便成为一个动态底部，使平流层区域发生形变——这类似于地球物理流体中不断变化的水深地形/地形。平流层核心仍然紧凑且满足静力平衡；对流层影响完全通过边界运动传递。

具体而言，令 $\eta \in [0, 1]$ 为采用混合映射的广义垂直坐标

$$p(\eta, \mathbf{x}, t) = A(\eta)\, p_0 + B(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

其中 $A(0) = 0$、 $B(0) = 0$，且 $B(1) = 1$，因此 $\eta = 1$ 跟踪移动下边界，而顶部固定在 $p(0) = p_{\mathrm{top}}$。静力平衡 $\partial\Phi/\partial p = -\alpha$ 得以保持，标准的基于位势的气压梯度公式[7]也同样如此。边界处的运动学条件为

$$w\big|_{\eta=1} = \frac{\mathrm{D}z_{\mathrm{trop}}}{\mathrm{D}t} = \partial_t z_{\mathrm{trop}} + \mathbf{U} \cdot \nabla_h z_{\mathrm{trop}}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{U}$ 为在 $\eta = 1$处评估的水平风。垂直层运动和网格质量通过任意拉格朗日–欧拉（ALE）更新处理，随后进行守恒、单调的

重映射，采用海洋和可压缩流模型中的成熟技术[9–11]。当 z_{trop}保持不变时，该公式将精确退化为标准混合 σ–p 核心，从而提供了有力的验证依据。

将对流层顶视为一个动力表面，可以清晰地将平流层环流与再分析同化伪影区分开来，同时仍通过域几何传递对流层影响。这一视角自然地保留了平衡关系与能量学：边界运动所做的功通过定义明确的几何通量项进入预算，可与波活动和平均流加速一并诊断。从概念上说，这种做法将下平流层对对流层变率的敏感性重新表述为一个边值问题，为研究波在起伏界面上的传播开启了正规模态和 WKB 分析的途径。

结合已有研究来看，我们的方法关联了三个方向：(i) 原始方程模式的地形跟随坐标和混合垂直坐标[7, 8]；(ii) 通过将流场松弛逼近至再分析资料来驱动平流层的指定动力学研究[5, 6]；以及 (iii) 任意拉格朗日–欧拉/移动边界数值方法，这类方法可在演化网格中保持正层厚和示踪物单调性[9–11]。据我们所知，先前仅针对平流层的研究通过松弛逼近环流来传递对流层影响；而在这里，我们通过移动域以运动学方式传递影响。这为研究波—平均流相互作用和布鲁尔–多布森环流[1–3]提供了另一种途径，且无需对动力核心本身进行松弛逼近。我们的贡献有三点。首先，我们提出一个采用位势/气压坐标、具有时变下边界的静力原始方程平流层模式 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$；当 $\partial_t z_{\mathrm{trop}} \equiv 0$ 时，该模式退化为标准混合 σ–p 核心。其次，我们为小振幅边界起伏（包括正规模态和 WKB 标度关系）建立了一个微扰框架，并提出一个能量学预算，其中明确包含边界功，将几何强迫与波活动和平均流加速的变化联系起来。第三，我们概述了一条验证与确认路径，将经典测试（例如 Jablonowski–Williamson 斜压波[12]）改编为移动边界情形，并辅以再分析驱动的实验：其中 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$ 由 ERA5/MERRA-2 指定，而平流层流场仍作为预报变量。

我们按以下顺序展开。首先定义方程、坐标变换以及 ALE／重映射更新。接着推导微扰理论和能量收支，然后讨论离散化和稳定性。最后介绍验证套件，并以局限性和机遇作结。

1.1 解

混合气压坐标定义为

$$p(\eta, \mathbf{x}, t) = A(\eta)\, p_0 + B(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}, t), \qquad \eta \in [0, 1], \tag{3}$$

其中 $A(0) = 0$、$B(0) = 0$，且 $B(1) = 1$，因此上边界固定，且 $p(\eta = 1) = p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$。对 η 求导可得

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = A'(\eta)\, p_0 + B'(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

对于可接受的 A 和 B取值，该量严格为正，从而确保坐标变换可逆。在固定 η 时对 p 取物质导数，可得

$$\left.\frac{Dp}{Dt}\right|_{\eta} = B(\eta)\, \frac{Dp_{\mathrm{trop}}}{Dt}, \tag{5}$$

因为 $A(\eta)$ 和 $B(\eta)$ 都不随时间变化。气压坐标下的静力平衡，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha, \tag{6}$$

是 在该变换下得到精确保留，因为应用链式法则可得
pr

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\alpha \left(A'(\eta) p_0 + B'(\eta) p_{\mathrm{trop}} \right). \tag{7}$$

垂直速度定义为高度的物质导数，

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \partial_t z + \mathbf{U} \cdot \nabla_H z + \dot{\eta}\, \partial_\eta z, \tag{8}$$

可通过精确求解坐标速度得到，

$$\dot{\eta} = \frac{w - \partial_t z - \mathbf{U} \cdot \nabla_H z}{\partial_\eta z}. \tag{9}$$

在 下边界 $\eta = 1$ 处，其中 $z(\eta = 1,\ \mathbf{x}\ t) = z_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$，垂直速度满足 s

$$w\big|_{\eta=1} = \frac{Dz_{\mathrm{trop}}}{Dt} = \partial_t z_{\mathrm{trop}} + \mathbf{U} \cdot \nabla_H z_{\mathrm{trop}}, \tag{10}$$

因此运动学边界条件恒成立。若对流层顶固定，使得 $\partial_t p_{\mathrm{trop}} = 0$ 且 $\nabla_H p_{\mathrm{trop}} = 0$，则 $Dp/Dt|_\eta = 0$ 且 $\dot{\eta} = 0$，该表述便精确简化为标准的混合 σ–p 系统。

1.2 不可压缩情形：二维特化（制造几何)

我们考虑一个二维水平空间中的自由表面不可压浅流类比（x，y），其中涡黏度为 k_H，重力加速度为 g。令 $h_E(x,\ y,\ t)$ 表示表面高程，$h_B(x,\ y,\ t)$ 表示水深，因此总柱高为 $h = h_E + h_B$。标准守恒形式为

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \tag{11}$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_y(huv) = -\,g\,h\,\partial_x h_E + k_H\left[\partial_x(h\,\partial_x u) + \partial_y(h\,\partial_y u)\right], \tag{12}$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2) = -\,g\,h\,\partial_y h_E + k_H\left[\partial_x(h\,\partial_x v) + \partial_y(h\,\partial_y v)\right]. \tag{13}$$

制造场。令 $\Theta(x,\ y,\ t) \equiv x + y + t$，并选取一个常数 $c_1 > 1$，以使 h 保持为正。定义

$$h(x,y,t) = c_1 + \sin\Theta, \qquad u(x,y,t) = \frac{1}{\sin\Theta + c_1} - \frac{1}{2}, \qquad v(x,y,t) = \frac{1}{\sin\Theta + c_1} - \frac{1}{2}. \tag{14}$$

根据（14），连续性方程（11）恒成立。

将 h_E 和 h_B分开。令 $h = h_E + h_B$，并将 h_E 视为未知自由表面，通过制造的 h_B 使其达到平衡。将（14）代入（12）（13），可得所需的水平压力梯度关于 Θ 的函数表达式，

$$\partial_x h_E = \mathcal{R}(\Theta), \qquad \partial_y h_E = \mathcal{R}(\Theta), \tag{15}$$

$$\mathcal{R}(\Theta) = -\frac{1}{g}\Big[\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_y(huv) - k_H\left(\partial_x(h\,\partial_x u) + \partial_y(h\,\partial_y u)\right)\Big],$$

其中每个导数在 Θ 中都化为普通导数，因为所有场都仅通过 Θ 依赖于 $(x,\ y,\ t)$。由于 $\partial_x\Theta = \partial_y\Theta = 1$，相容条件 $\partial_y(\partial_x h_E) = \partial_x(\partial_y h_E)$ 自动满足，因此存在标量势 $H(\Theta)$，使得 $h_E(x,\ y,\ t) = H(\Theta)$，且$H'(\Theta) = \mathcal{R}(\Theta)$。一个方便的原函数是

$$H(\Theta) = \int^{\Theta} \mathcal{R}(s)\,\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad h_E(x,y,t) = H\big(\Theta(x,y,t)\big), \qquad h_B(x,y,t) = h - h_E. \tag{16}$$

封闭的 f 关于 $\mathcal{R}(\Theta)$ 的形式。根据式（14），为简洁起见，记 $S(\Theta) \equiv$ 正弦 Θ 和 $C(\Theta) \equiv$ 余弦 Θ 的

$$h = c_1 + S, \qquad u = v = \frac{1}{c_1 + S} - \frac{1}{2}, \qquad \partial_\Theta h = C, \qquad \partial_\Theta u = \partial_\Theta v = -\frac{C}{(c_1 + S)^2}.$$

经过直接计算可得

$$\mathcal{R}(\Theta) = -\frac{1}{g}\Bigg\{ C\left(\frac{1}{c_1 + S} - \frac{1}{2}\right) + \partial_\Theta\left[(c_1 + S)\left(\frac{1}{c_1 + S} - \frac{1}{2}\right)^2\right] - k_H\, \partial_\Theta\left[(c_1 + S)\,\frac{C}{(c_1 + S)^2}\right]\Bigg\}. \tag{17}$$

将 (17) 代入 (16) 积分，可得显式的 $H(\Theta)$（相差任意加法常数）。具体而言，初等部分会产生与 $\sin\Theta$、$\ln|c_1 + \sin\Theta|$ 以及 $(c_1 + \sin\Theta)^{-1}$ 成正比的项。为完整起见，

$$h_B(x, y, t) = c_1 + \sin\Theta - H(\Theta), \qquad \Theta = x + y + t. \tag{18}$$

备注。(i) 选择 $c_1 > 1$ 可避免 $c_1 + \sin\Theta$ 出现零值，并保持 $h > 0$。(ii) 该构造为标量形式且具有可移植性：将 Θ 替换为 $k_x x + k_y y + \omega t$，只会使导数按常数缩放。(iii) 这个构造的三元组 $(h,\ u,\ v)$ 与 (16) 中的 h_B 按构造满足 (11)(13)，适用于任意网格上的有限体积/有限元回归测试。

1.3 可压缩情形

$$\textbf{Conserved quantities:} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho h \\ \rho h u \\ \rho h v \\ \rho h T \end{pmatrix}$$

二维空间中的守恒形式控制方程：

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h\, v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho h\, u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h\, u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h\, uv)}{\partial y} = -\,h\,\frac{\partial p}{\partial x} + \rho h\, F_x,$$

$$\frac{\partial(\rho h\, v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h\, uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h\, v^2)}{\partial y} = -\,h\,\frac{\partial p}{\partial y} + \rho h\, F_y,$$

$$\frac{\partial(\rho h\, T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h\, uT)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h\, vT)}{\partial y} = \rho h\, Q.$$

Flux vectors:

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho h u \\ \rho h u^2 \\ \rho h uv \\ \rho h uT \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho h v \\ \rho h uv \\ \rho h v^2 \\ \rho h vT \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Source vector:} \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h\,\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho h F_x \\ -h\,\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho h F_y \\ \rho h Q \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Compact vector form:} \qquad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{S}.$$

状态方程（理想气体）： $p = \rho R T,$

以便

$$\frac{\partial p}{\partial x} = R\Big(T\,\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\,\frac{\partial T}{\partial x}\Big), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = R\Big(T\,\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big).$$

2 公式概述（草图）

我们概述具有随时间演变的下边界的仅平流层动力核心。目标是：(i) 使平流层内部的原始方程完全采用预报形式；(ii) 仅通过对流层顶处的边界运动来表示对流层影响；(iii) 同时确保静力平衡、守恒且数值稳定。

2.1 坐标、映射与预报状态

我们采用式（中已介绍的混合位势/气压坐标映射 1),

$$p(\eta, \mathbf{x}, t) = A(\eta)\, p_0 + B(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}, t), \qquad \eta \in [0, 1], \tag{19}$$

其中 $A(0) = 0$, $B(0) = 0$, $B(1) = 1$，且 $p(\eta{=}0) = p_{\mathrm{top}}$ 固定。按构造，$\eta = 1$ 与对流层顶重合，因此会随 $p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$ 和 $z_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$ 在空间和时间上移动，而$\eta = 0$ 则是固定的（高位）模式顶。

在此坐标系中，每个水平柱离散为 N_η 层，由 η_k个面界定。由于方程（19）中显式出现了 $p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$，因此当对流层顶移动时，这些层的物理气压厚度和几何厚度也会发生变化。

在这些 η层上推进的预报状态包括

- 水平风分量（u, v），
- 温度（或位温），
- 任意示踪物（例如臭氧、水汽），
- 以及对流层顶气压场 $p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$。

垂直动量根据 $\partial\Phi/\partial p = -\alpha$ 通过静力平衡诊断得到，并采用 $\alpha = RT/p$，与标准的静力原始方程核心 [7, 8] 相同。无需显式的预报垂直速度方程；相反，w 由质量连续性方程和运动学下边界条件式（2）求得。

将 $(\eta,\ \mathbf{x}) \mapsto (p,\ \mathbf{x})$ 映射的雅可比行列式记为

$$\mathcal{J}(\eta, \mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial(p, \mathbf{x})}{\partial(\eta, \mathbf{x})} = \frac{\partial p}{\partial \eta}(\eta, \mathbf{x}, t), \tag{20}$$

因为水平坐标保持不变。此时，各层的“单位面积质量”与$\mathcal{J}\,\Delta\eta$成正比，而$\mathcal{J}$ 的变化则反映了对流层顶演变所驱动的垂直网格运动。

2.2 移动垂直坐标中的质量连续性方程

设$\mathbf{U} = (u, v)$为水平速度，w 为几何高度下的物理垂直速度z。在与式（19）相关的广义坐标中，质量连续性方程可写成通量形式：

$$\partial_t(\mathcal{J}) + \nabla_h \cdot (\mathcal{J}\,\mathbf{U}) + \partial_\eta(\mathcal{J}\,\dot{\eta}) = 0, \tag{21}$$

其中，$\dot{\eta} \equiv \mathrm{D}\eta/\mathrm{D}t$ 是 η空间中的“垂直”输运速度，而 ∇_h 是水平梯度/散度算子。

方程 (21) 只是以移动网格形式表示的柱质量守恒：第一项是层质量的局地变化率，第二项是质量通量的水平散度，第三项则是穿过 η空间中层界面的通量。

在 $\eta = 1$处，下边界并非固定，而是与对流层顶重合。精确的运动学边界条件方程 (2) 表明，$\eta = 1$ 处的随网格速度满足

$$\dot{\eta}(\eta{=}1) \quad \Longleftrightarrow \quad w\big|_{\eta=1} = \frac{\mathrm{D}z_{\mathrm{trop}}}{\mathrm{D}t} = \partial_t z_{\mathrm{trop}} + \mathbf{U}\cdot\nabla_h z_{\mathrm{trop}}. \tag{22}$$

换言之，平流层柱底部的“垂直”质量通量完全由给定的几何形状 $z_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$ 所确定。这是对流层变率影响平流层质量收支的唯一途径。

当 z_{trop} （等价地，p_{trop}）保持固定时，$\partial_t z_{\mathrm{trop}} = 0$ ，方程 (22) 就简化为通常的不可渗透条件 $w|_{\eta=1} = 0$。在此极限下，该模型精确地退化为标准的混合 σ–p 核心。固定底边界一致性由此提供了一条直接的验证途径。

2.3 ALE + 守恒重映射时间步

我们按照任意拉格朗日–欧拉（ALE）的思路[9, 10] 结合守恒重映射 [8, 11]，将模型推进分为三个子步：

1. **网格运动（ALE 步）**。给定时间 t^n 的 $p^n_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x})$（或 z^n_{trop}），我们根据选定的强迫（例如再分析、理想化振荡），在 t^{n+1} 指定 $p^{n+1}_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x})$。由此定义新的对流层顶面，并根据方程（19）得到新的映射 $p(\eta, \mathbf{x}\ t^{n+1})$。中间的$\eta$层也会发生垂直位移，从而生成与更新后的对流层顶相一致的“移动”网格。

   在此步骤中，每一层都被视为以网格速度 w_{mesh} 垂直运动；该速度的选取确保 η层不会交叉，且每个水平柱中的总柱质量保持不变。这是纯粹的垂直（逐柱）输送：此时尚无水平平流。

2. **守恒重映射**。 网格运动之后，预报变量现在位于变形的、随时间变化的 η 网格上。我们采用遵循Lin和Rood [11]思路的守恒、单调的有限体积重映射，将它们重映射回目标网格（通常是针对 t^{n+1}略作调整的“规整” η 网格）。该重映射：(i) 以机器精度保持单元积分质量、示踪物质量以及（可选的）总能量；(ii) 应用斜率限制/PPM式单调性约束，以避免产生新的极值或负层厚；(iii) 保证即使 z_{trop} 发生剧烈移动，也不会有任何层塌缩为零厚度。

   从概念上讲，步骤（1）表示跟随对流层顶，从而精确表示下边界；步骤（2）表示重新投影回规则网格，使数值计算保持良好的稳定性。

3. **动力学更新**。 最后，在 t^{n+1} 处的重映射网格上，我们使用标准静力原始方程算子 [7, 8] 求解水平动量方程、热力学方程和示踪物方程（包括平流、科里奥利力、压力梯度和扩散项）。水平通量采用通量形式计算；垂直耦合项则使用式（21）所隐含的 η 空间通量，以及根据连续性方程诊断得到的 w 。

将网格运动 与动力学更新 分离至关重要。这意味着我们可以：（i）施加任意复杂的时变下边界 $z_{\mathrm{trop}}(x,y,t)$；同时（ii）仍在纵横比合理、层厚非零的网格上向前推进；并且（iii）仍能列出清晰的全球收支。尤其是，由于重映射具有守恒性，示踪物和总质量收支的误差仅在舍入误差范围内。

3 解析框架

3.1 对移动下边界的线性响应

我们从一个满足静力原始方程的基态开始，该基态在水平方向上有所变化，但不随时间变化，且其下边界是固定的。用上横线表示这一参考配置，

$$\overline{z}_{\mathrm{trop}}(x,y), \qquad \overline{p}(\eta,x,y), \qquad \overline{\Phi}(\eta,x,y), \qquad \overline{\mathbf{U}}(\eta,x,y)=(\overline{u},\overline{v}), \tag{23}$$

其中，使用公式（1）中的混合形式将 $\eta\in[0,1]$ 映射到气压，并在稳态对流层顶气压 $\overline{p}_{\mathrm{trop}}(x,y)$ 处进行评估，

$$\overline{p}(\eta,x,y)=A(\eta)\,p_0+B(\eta)\,\overline{p}_{\mathrm{trop}}(x,y). \tag{24}$$

假设该基态满足水平动量平衡、质量连续性方程和静力平衡，

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial p}=-\,\overline{\alpha}, \qquad \overline{\alpha}=\frac{R\,\overline{T}}{\overline{p}}, \tag{25}$$

这与标准混合 σ–p 动力核心 [7, 8]一致。

现在我们引入一个对流层顶的小 位移，

$$z_{\mathrm{trop}}(x,y,t)=\overline{z}_{\mathrm{trop}}(x,y)+\epsilon\,\zeta(x,y,t), \qquad 0<\epsilon\ll 1, \tag{26}$$

并且根据式（1），引入受扰动的对流层顶气压 $p_{\mathrm{trop}}(x,y,t)=\overline{p}_{\mathrm{trop}}(x,y)+\epsilon\,\pi_{\mathrm{trop}}(x,y,t)$。所有预报场展开为

$$p=\overline{p}+\epsilon\,p', \tag{27}$$
$$\Phi=\overline{\Phi}+\epsilon\,\Phi', \tag{28}$$
$$\mathbf{U}=\overline{\mathbf{U}}+\epsilon\,\mathbf{U}', \tag{29}$$
$$w=0+\epsilon\,w', \tag{30}$$
$$T=\overline{T}+\epsilon\,T', \quad \text{etc.} \tag{31}$$

这里，撇号表示$\mathcal{O}(\epsilon)$ 阶扰动。为简明起见，我们令基态垂直速度为零；若计入微弱的布鲁尔–多布森上升流，只会改变高阶项。

移动下边界处的精确运动学边界条件（式（2））在一阶近似下变为

$$w'\big|_{\eta=1}=\partial_t\zeta+\overline{u}_{\mathrm{trop}}\,\partial_x\zeta+\overline{v}_{\mathrm{trop}}\,\partial_y\zeta, \tag{32}$$

其中 $\overline{u}_{\mathrm{trop}},\overline{v}_{\mathrm{trop}}$ 是在 $\eta=1$ （对流层顶）处计算的基态水平风。式（32）是几何强迫图景的核心：对流层仅通过施加的边界位移 ζ起作用，该位移决定了注入平流层柱底部的垂直速度 w' 。无需对$\mathbf{U}$ 进行松弛逼近。

在平流层区域内，气压坐标下的线性化原始方程具有熟知的形式

$$\partial_t\mathbf{U}'+(\overline{\mathbf{U}}\cdot\nabla_h)\mathbf{U}'+(\mathbf{U}'\cdot\nabla_h)\overline{\mathbf{U}}+f\,\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{U}'=-\,\nabla_h\Phi', \tag{33}$$
$$\partial_p w'=-\,\nabla_h\cdot(\overline{\mathbf{U}})-\,\nabla_h\cdot(\mathbf{U}'), \tag{34}$$
$$\partial_t T'+(\overline{\mathbf{U}}\cdot\nabla_h)T'+w'\,\partial_p\overline{T}=(\text{diabatic terms}), \tag{35}$$

其中， f 为科里奥利参数，$\hat{\mathbf{z}}$ 为局地垂直单位向量。为简洁起见，此处省略由（$A(\eta)$ $B(\eta)$）映射产生的度量因子；这些因子可以系统地恢复。

方程（33）–（35）与边界条件（32）共同定义了一个受迫线性初值问题，其变量为（$\mathbf{U}'$， w'， T'， Φ'）。强迫完全是运动学上的：它是指定的下边界运动 ζ。

为分析哪些扰动能够向上传播，我们考虑局地 β 平面，并按水平正规模展开。令

$$\zeta(x,y,t) = \mathrm{Re}\Big\{\hat{\zeta}\, e^{i(kx+\ell y-\omega t)}\Big\}, \tag{36}$$

并寻求如下形式的解

$$(u',v',w',T',\Phi')(x,y,p,t) = \mathrm{Re}\Big\{\hat{\mathbf{q}}(p)\, e^{i(kx+\ell y-\omega t)}\Big\}, \tag{37}$$

其中 $\hat{\mathbf{q}}(p)$ 是垂直结构向量。将其代入方程（33）至（35），得到关于 p 的常微分方程组，变量为 $\hat{\mathbf{q}}(p)$，其下边界条件为

$$\hat{w}(p_{\mathrm{trop}}) = -\,i\omega\hat{\zeta} + ik\,\overline{u}_{\mathrm{trop}}\,\hat{\zeta} + i\ell\,\overline{v}_{\mathrm{trop}}\,\hat{\zeta}. \tag{38}$$

这与经典的行星波在下平流层中的传播问题直接类似 [4], ，但其“源”是对流层顶受到的外加几何运动，而不是对流层内部显式的涡度或加热扰动。

在平均流 $U(p)$、静力稳定度 $N^2(p)$ 和科里奥利参数 f 缓慢变化的 WKB极限下，垂直波数 $m(p)$ 满足如下示意形式的类色散关系

$$\big(\overline{U}-c\big)^2(k^2+\ell^2) + \mathcal{F}(p) = N^2\,\frac{m^2}{(k^2+\ell^2)}, \tag{39}$$

其中， $c=\omega/k$ 是纬向相速度，$\mathcal{F}(p)$汇集了行星波理论中熟知的科里奥利力项和可压缩性项[4]。方程（39）告诉我们，在对流层顶激发的哪些水平尺度（k、ℓ）和频率 ω 能够实际传播进入中平流层（实数 m），以及哪些会被俘获/呈现倏逝特征（虚数 m）。

关键在于，由于边界条件（32）同时确定了对流层顶处 w'的相位和振幅，它也就确定了向上传播波包的相位和振幅。这使我们能够定量预测：（i）哪些模态能够将对流层变率有效传输至平流层下部/中部；以及（ii）对流层顶位移 ζ 的符号和相位如何控制由此产生的动量和热量的垂直通量。

3.2 能量学、波活动和平均流变化

除线性传输问题之外，我们还关注移动边界如何向所解析的平流层环流注入能量和伪动量。这里，人工构造几何的公式具有吸引力，因为它能够给出一个简洁的机械能收支，其中来自下方的唯一显式强迫表现为下边界处所做的功。

令 $K=\frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2$ 表示单位质量的水平动能， Φ 表示位势。在静力平衡、气压坐标下，并暂时忽略非绝热加热时，机械能方程可概括写为

$$\partial_t(K+\Phi) + \nabla_h\cdot\Big[(K+\Phi+\Pi)\,\mathbf{U}\Big] + \partial_p\Big[(K+\Phi+\Pi)\,w\Big] = 0, \tag{40}$$

其中， Π 是压力功（类似焓）的项。 Π 的具体代数形式取决于我们演化的是温度、位温还是湿静能，但方程（40）的结构具有普遍性。

从移动下边界 $p_{\mathrm{trop}}(x,y,t)$ 垂直积分方程（40），直至固定模式顶 p_{top}。对具有随时间变化的下限的积分应用莱布尼茨法则，会产生三类项：

1. 垂直积分能量通量的水平散度；2. 通过 p_{top} 处固定上边界的通量（可通过海绵层加以阻尼，或仅进行诊断）；3. 与移动下边界处的边界能量密度乘以该边界法向速度成正比的功项。

最后一项是新增的内容。利用精确的运动学条件式（2），边界的瞬时功率输入可概略地写为

$$\mathcal{W}_{\mathrm{trop}} = (K + \Phi + \Pi)_{\mathrm{trop}}\, w\big|_{\eta=1} = (K + \Phi + \Pi)_{\mathrm{trop}}\, \frac{\mathrm{D}z_{\mathrm{trop}}}{\mathrm{D}t}. \tag{41}$$

方程（41）表明，来自对流层的所有显式“强迫”都表现为对流层顶几何运动所做的机械功。模式内部不会受到临时施加的体力或经松弛调整的速度趋势；能量只会通过这一边界功通道进入（或离开）。从概念上说，这类似于风应力在海洋表面注入动量，但这里的控制变量是下边界的位移，而不是施加在刚性边界上的应力。

我们关心的另一项诊断是对纬向平均流的影响。在变换欧拉平均（TEM）理论中，纬向平均纬向风 $\overline{u}$ 的演变遵循

$$\partial_t\, \overline{u} = -\frac{1}{a\cos\varphi}\, \partial_\varphi(F_\varphi) - \partial_z(F_z) + (\text{Coriolis / metric terms}), \tag{42}$$

其中， F_φ 和 F_z 是Eliassen–Palm（EP）通量的分量， a 是地球半径， φ是纬度 [3]。右侧的EP通量散度衡量波伪动量向平均流的汇聚，也就是说，它代表布鲁尔–多布森环流 [1–3]的波驱动加速度。

我们的线性框架为此提供了直接的分析手段：给定的边界位移ζ 确定了从对流层顶发射的波的振幅、水平尺度（k， ℓ）、相速度 $c = \omega/k$以及向上的群速度（通过边界条件式 (32) 和色散关系式 (39)）。这些波将确定的 EP通量带入内部，而该 EP通量的垂直辐合随后决定式 (42) 中的平均流趋势。

换言之，一旦选定 ζ（x， y， t），(i) 式 (41) 中的机械功率 $\mathcal{W}_{\mathrm{trop}}$和 (ii) 式 (42) 中的EP通量辐合便都是由此确定的预测结果，而非可调参数。这使得移动边界平流层模型能够接受经验检验。在数值实验中，我们可以：

- 计算垂直积分的机械能，并明确诊断$\mathcal{W}_{\text{对流层顶}}$；
- 计算 EP通量及其散度，从而得到预测的纬向平均加速度。

这些诊断结果与上述理论相符，这有力地验证了制造几何（MMG）实现具有动力学上的忠实性，而不仅仅是数值稳定。

在实践中，只有当规定的对流层顶位移 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$ 随时间快速变化或具有非常陡峭的水平梯度时，网格运动限制才会生效。在准地转或天气尺度变率区制下（对流层顶缓慢、大尺度起伏），标准水平CFL条件是主要限制。

3.3 正性、单调性和层厚

必须避免两种数值病态：（i）层厚为负（或式（20）中的$\mathcal{J}$ 趋于零）；（ii）重映射过程中示踪物超调／欠调。

层厚。 由于我们通过 ALE步显式推进 η 面，然后重构出良态的目标网格，因此不会让两个 η 层面相交。随后在两个层体积严格为正的网格之间执行守恒重映射，从而保证 t^{n+1} 处的层厚为正。这与混合等密度面–压力坐标海洋模式[10], 的思路相同：在垂直方向移动各层，然后通过重映射避免层塌陷。

示踪物单调性。该重映射采用通量形式的单调重构，遵循 Lin和Rood [11]提出的方法。每列的单元积分示踪剂质量守恒至舍入误差范围内；当场变量在 ALE变形网格与目标网格之间插值时，斜率限制器可确保不会产生新的极值或负浓度。这一点很重要，因为对流层顶位移在空间上可能很陡峭；若不使用限制器，薄层就会产生吉布斯式振荡。

3.4 能量和动量收支

来自下方的机械能唯一显式来源是与移动对流层顶相关的边界功项，可概略地写为

$$\mathcal{W}_{\mathrm{trop}} = (K + \Phi + \Pi)_{\mathrm{trop}} \, \frac{\mathrm{D}z_{\mathrm{trop}}}{\mathrm{D}t}, \tag{43}$$

其中， $K = \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2$ 为单位质量的水平动能， Π 汇总了压力功/焓项（见第 3 节）。由于 ALE+重映射过程在柱积分意义上是守恒的，因此不会在其他内部区域引入虚假的能量源。因此，除$\mathcal{W}_{\mathrm{trop}}$之外，离散能量收支与连续静力能量收支 [7, 8]相符。

3.5 固定边界极限下的一致性

如果冻结下边界，即指定 $\partial_t z_{\mathrm{trop}} \equiv 0$ 并保持 $p_{\mathrm{trop}}(\mathbf{x}\ t)$ 不变，那么网格运动步骤就变得十分简单： η层不再移动， $w_{\mathrm{mesh}} = 0$，重映射也退化为恒等变换。在这种极限下，该算法恰好简化为传统的混合 σ–p 静力平衡核心 [7, 8]。这种“底边界固定”极限提供了直接的回归测试：我们可以分别在启用和未启用 MMG 的情况下运行代码，并验证当 z_{trop} 保持不变时，两种解在多个时间步内的差异始终处于截断误差范围内。

总之，时间步控制、守恒重映射和固定边界一致性表明，移动边界 formulation 不仅在概念上定义良好，而且在实践中数值表现稳定。

4 验证。

我们概述三类测试，以证明移动边界平流层核心：(i) 在适当极限下再现标准混合 σ–p 动力学；(ii) 在下边界随时间变化时保持数值稳定且具有可解释的动力学特征；(iii) 在真实的对流层顶变率驱动下，产生具有物理意义的波动—平均流响应。每类测试都配有具体的定量诊断，以便对该方法进行可重复评估。

2. 理想化强迫边界测试（斜压波，周期性 z_{trop})

第二个实验检验当下边界随时间移动时，模型是否仍能保持良好的动力学表现。我们改编了经典的 Jablonowski–Williamson斜压

不稳定性测试案例 [12]并叠加对流层顶高度的受控大尺度调制，

$$z_{\mathrm{trop}}(x,y,t) = z^{(0)}_{\mathrm{trop}}(x,y) + \epsilon\ \mathrm{Re}\left\{\hat{Z}(y)\, e^{i(kx-\omega t)}\right\}, \qquad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{44}$$

其中 (*k*， *ω*) 的选取旨在模拟行星尺度起伏。这种调制仅通过 $\eta = 1$ 处的运动学边界条件传入平流层，即通过式（2）/式（22）施加的垂直速度，而不通过松弛逼近风或温度来实现。

我们将诊断：

- **稳定性与 CFL行为**。我们确认，该模拟不会产生负层厚，也不会发生灾难性的时间步长崩溃，这与网格运动约束一致。
- **波结构**。我们提取受迫扰动的水平波数、相速度和垂直穿透深度，并将其与第 3 节的线性/WKB预测进行比较，特别是垂直波数 $m(p)$ [的类色散关系（参见式（39））]。预测为垂直传播（实数 m）的模态应在高空出现，并具有预期的相位倾斜和群速度方向；预测为倏逝（虚数 m）的模态则应被限制在下边界附近。
- **能量收支核算**。 我们计算柱积分机械能倾向，并明确追踪诊断得到的边界功率$\mathcal{W}_{\mathrm{trop}}$ [参见公式（41）]。“倾向减去水平通量散度，再减去$\mathcal{W}_{\mathrm{trop}}$”所得的残差应很小，这验证了唯一得到解析的能量源／汇是移动边界所做的几何功。

这项实验旨在回答一个明确的问题：如果我们让对流层顶像轻柔起伏的下盖板一样运动，是否能够（i）向平流层注入预期且具有明确物理意义的波响应，以及（ii）维持数值控制?

3. 再分析驱动边界（现实耦合测试）

最后，我们直接根据 ERA5 或 MERRA-2 [5, 6] 等同化产品规定 $p_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$ 或 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$。在这种配置下，平流层仍完全采用预报方式，但下边界跟随分析对流层顶在时空中的变化。这正是该方法在科学上的应用动机：对流层变率仅通过几何以运动学方式传入，而非通过松弛逼近以动力学方式传入。

在本实验中，我们将：

- **计算 Eliassen–Palm（EP）通量及其散度**。利用预报型平流层中的已解析场，我们诊断 EP 通量及其垂直辐合；根据变换欧拉平均理论，它们会驱动纬向平均风倾向和布鲁尔 – 多布森环流[1–3]。随后，我们确认 EP通量辐合的符号及纬度—高度结构，与线性响应理论在 §3 [cf. 4] 中预测的边界强迫波活动一致。
- **诊断平均流加速**。我们评估纬向平均纬向风倾向和残余环流响应（即 TEM 强迫；见式（42））， 并将其与施加边界位移的预测影响进行比较 ζ。这里的问题是：纯粹的几何强迫能否在完全不将流场松弛逼近至再分析结果的情况下，再现平流层下部/中部常见的波—平均流耦合?
- **使用**$\mathcal{W}_{\text{对流层顶}}$**检验预算闭合**。 与理想化测试一样，我们验证，在纳入诊断得到的边界功$\mathcal{W}_{\text{对流层顶}}$后，垂直积分机械能预算能够闭合。

这项真实情景测试有两个作用。首先，它证明模型可以由观测到的对流层顶变率“驱动”，而无须完整耦合对流层。其次，它提供了一个直接的科学应用案例：开展有针对性的归因类实验，研究特定对流层事件如何影响平流层波强迫、平均流调整和布鲁尔–多布森环流，同时保持平流层核心部分为预报模式，且不进行直接松弛逼近。总的来说，这三个层次的评估——冻结边界回归、理想化周期强迫和再分析驱动的边界运动——旨在（i）证明数值正确性，（ii）揭示动力机制，以及（iii）展示实际科学价值。

5 讨论与展望

本研究的核心思想是让平流层保持完全预报，同时仅通过一个移动下边界来表示对流层。我们不通过松弛逼近风和温度使其趋近于再分析资料（“指定动力”）来动态引入对流层，而是将其以运动学方式作为几何引入：对流层顶高度 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$（或等价地$p_{\mathrm{trop}}$）定义了一个时变下边界，使整个平流层区域发生位移。随后，对流层影响通过 w 在 $\eta = 1$ [式（2）、式（32）], 中的运动学边界条件，以及机械能收支中的相关边界功 [式（41）]进入平流层。无需直接对流场进行松弛。

这种方法有三个优点。

首先，它**清晰地区分了归因**。由于平流层内部流场从未通过松弛逼近而趋近于再分析资料，因此诊断得到的纬向风、温度和残余环流倾向都可追溯至下边界的几何强迫。换言之，我们可以问：“这种特定的对流层顶位移形态会对平流层产生什么影响？”而不会将其与对流层中的资料同化增量混为一谈。

其次，它**将平流层—对流层耦合组织为一个边界问题**。第3节中的扰动框架展示了：对流层顶发生微小位移 $\zeta(x,\ y,\ t)$，会在平流层激发出可预测的波动／平均流响应：在底部受到强迫的 w' 、向上传播（或呈倏逝性）的行星尺度扰动，其特征由 WKB 垂直波数方程（39）描述；同时还会产生埃利亚森–帕尔姆通量，其辐合会加速纬向平均流 [1–4]。这为我们建立了一座直接的诊断桥梁，将“下边界的几何形状”与“对布鲁尔–多布森环流的波动强迫”联系起来。

第三，它**能够自然地接入现有的动力核心**。MMG方法建立在混合 σ–p 坐标 [7, 8] 之上，并采用 ALE + 守恒重映射循环 [9–11]。这意味着：（i）其数值方法并不特殊：随层运动和守恒重映射已是海洋模拟及垂直拉格朗日大气核心中的标准做法；（ii）CFL 条件和正性约束都是明确且可检验的；（iii）在极限 $\partial_t z_{\mathrm{trop}} \to 0$下，该方法会严格退化为熟悉的固定下边界静力核心。这一回归极限使该方法具备可验证性，而许多“特殊配置”则不具备这种性质。

展望未来，MMG 配置为以下几方面的研究提供了条件：

- **受控强迫实验**。 由于 $z_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$ 是输入项，我们可以施加理想化的模式（例如单一纬向波数、脉冲式位移事件或局地急流），并诊断这些模式如何投影到平流层波活动、极涡变率和平均流加速上。

- **不使用松弛逼近的再分析驱动重放**。 通过指定来自 ERA5 或 MERRA-2 [5, 6], 的 $p_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$，我们可以将真实的对流层扰动（急流偏移、对流层顶折叠、波破碎事件）“重放”到预报型平流层中。这就形成了一个中间大气层

e

试验平台：其动力过程活跃，同时仍以观测到的下边界几何形态为基础。

- **扩展**。双向耦合（允许平流层反馈改变 $z_{\text{对流层}}$），以及适用于对流层上部／平流层下部过渡区的非静力或可压缩变体

区域 [13], , 以及沿移动域边界进行全化学过程模拟或气溶胶输送，都是自然的后续发展方向。ALE 随层框架已兼容示踪物输送和单调重映射，因此这些扩展在技术上可行。

总之，几何耦合为基于松弛的指定动力提供了一种简洁的替代方案。将对流层顶视为动态下边界，可实现预算闭合，提升可解释性，并增强实验控制能力。我们预计，这种制造几何（MMG）公式既可作为一种精简且计算高效的配置，用于有针对性的平流层过程研究；也可作为一个清晰的平台，用于归因平流层与对流层耦合中的作用机制。

附录 A

本附录对正文中用到的四项性质给出正式陈述和简短证明：(i) 随着对流层顶移动，混合 η–p 映射仍保持垂直有序；(ii) 静力平衡保持不变；(iii) 水平气压梯度力保留标准混合 σ–p 形式；(iv) 平流层柱质量收支闭合，并且当下边界固定时退化为经典混合核心。

命题 1（混合 η–p 映射的单调性）。设混合气压映射为

$$p(\eta, x, y, t) = A(\eta)\, p_0 \;+\; B(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(x, y, t), \qquad \eta \in [0, 1], \tag{45}$$

其中 $A(\eta)$ 和 $B(\eta)$ 连续可微，$p_0 > 0$ 为常数参考气压，且$p_{\mathrm{trop}}(x, y, t) > 0$为对流层顶气压。定义

$$\mathcal{J}(\eta, x, y, t) \equiv \frac{\partial p}{\partial \eta} = A'(\eta)\, p_0 + B'(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(x, y, t). \tag{46}$$

若对所有 $\eta \in [0, 1]$ 以及所有 (x, y, t)，$J\,(\eta, x, y, t) > 0$，则 $p(\eta, x, y, t)$ 对每个 (x, y, t)都随 η严格递增。特别是，即使 $p_{\mathrm{trop}}(x, y, t)$随时空变化，不同的 η层也不会在气压空间中交叉。

证明。对于任意固定的 (x, y, t)，$\partial p/\partial \eta = \mathrm{J}\,(\eta, x, y, t) > 0$意味着 $p(\eta, x, y, t)$ 随 η严格递增。严格递增函数是一一对应的：若 $\eta_1 \neq \eta_2$，则 $p(\eta_1) \neq p(\eta_2)$。因此，η等值面在 p 中保持有序，不会“折叠”或交叉。这确保了随着 $p_{\mathrm{trop}}(x, y, t)$演变，垂直坐标始终定义良好。保证 $\mathrm{J} > 0$ 的一个实用充分条件是：对所有 η，$A'(\eta) \geq 0$且 $B'(\eta) \geq 0$，并且至少一个严格为正，因为 $p_0 > 0$ 和 $p_{\mathrm{trop}} > 0$。这类似于标准混合 σ–p 坐标 [7, 8]中的单调性要求。 □

命题 2（移动边界不改变静力平衡）。令 Φ（x, y, p, t）为位势，$\alpha \equiv \rho^{-1}$ 为比容。可压缩静力平衡大气中的静力平衡为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\,\alpha, \qquad \alpha = \frac{RT}{p}. \tag{47}$$

即使下边界（对流层顶气压 p_{trop}（x, y, t））根据混合映射 （45）随时空变化，这个逐点关系仍然成立。$\partial\Phi/\partial p$中不会出现额外的几何项。

证明。在物理高度 z 下，静力平衡给出

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\,\rho g, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g, \qquad \Phi = gz. \tag{48}$$

因此

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Phi / \partial z}{\partial p / \partial z} = \frac{g}{-\rho g} = -\frac{1}{\rho} = -\alpha. \tag{49}$$

这个推导仅涉及垂直方向上的局部关系，不取决于模式坐标 η 如何标记 p，也不取决于 $p_{\mathrm{trop}}(x,\ y,\ t)$ 随时间如何变化。因此，基本静力关系 $\partial\Phi/\partial p = -\alpha$ 在移动的混合坐标中仍然严格成立。特别是，$\partial_t p_{\mathrm{trop}}$ 不会进入静力方程。这与标准静力原始方程核心 [7, 8] 所采用的假设相同。

□

命题 3（混合形式的水平气压梯度力）。设 ∇_η 表示在 η 保持不变时的水平梯度，∇_p 表示在 p 保持不变时的水平梯度。那么，对于任意标量场 Φ（x、y、p、t），

$$\nabla_p \Phi = \nabla_\eta \Phi + \alpha\, \nabla_\eta p, \qquad \alpha \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{RT}{p}. \tag{50}$$

在混合映射 （45）下，

$$p(\eta, x, y, t) = A(\eta)\, p_0 + B(\eta)\, p_{\mathrm{trop}}(x, y, t), \tag{51}$$

在 η 固定时，有

$$\nabla_\eta p = B(\eta)\, \nabla p_{\mathrm{trop}}(x, y, t), \tag{52}$$

因为 A（η）和 B（η）仅依赖于 η。因此

$$\nabla_p \Phi = \nabla_\eta \Phi + \alpha\, B(\eta)\, \nabla p_{\mathrm{trop}}(x, y, t). \tag{53}$$

方程 （53）是水平气压梯度力 *[7, 8],* 的标准混合 σ–p ***Simmons–Burridge*** 形式，其中 p_{trop} 取代了通常使用的地面气压 p_s。值得注意的是，气压梯度力中没有显式的 $\partial_t p_{\mathrm{trop}}$ 项。

证明。根据链式法则，

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_\eta = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\eta. \tag{54}$$

用向量表示即为

$$\nabla_\eta \Phi = \nabla_p \Phi + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) \nabla_\eta p. \tag{55}$$

重新整理并使用 $\partial\Phi/\partial p = -\alpha$ （命题 2）：

$$\nabla_p \Phi = \nabla_\eta \Phi + \alpha\, \nabla_\eta p, \tag{56}$$

即为（ 50）。接下来，在（45）中固定 η，A（η）和 B（η）相对于（x，y而言均为常数 ），so

$$\nabla_\eta p = \nabla_\eta \Big[A(\eta) p_0 + B(\eta) p_{\mathrm{trop}}(x, y, t) \Big] = B(\eta)\, \nabla p_{\mathrm{trop}}(x, y, t), \tag{57}$$

即为（52）。代入（50）可得（53）。这与标准的混合 σ–p 公式形式[7, 8], 相符，其中对流层顶气压 p_{trop} 发挥了通常由地面气压p_s承担的作用。重要的是，（53）中不含涉及 $\partial_t p_{\mathrm{trop}}$ 的项，因此大尺度地转平衡仍保持其熟悉的形式 $f\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{U} \approx -\nabla_p \Phi$。

□

命题 4（柱质量收支与固定边界极限）。设 $\mathcal{J}(\eta, x, y, t) = \partial p/\partial \eta$ 由 (46) 给出，且 $\mathbf{U} = (u, v)$ 为水平速度。在混合坐标中，质量连续性方程可写成通量形式：

$$\partial_t \mathcal{J} + \nabla_h \cdot (\mathcal{J}\, \mathbf{U}) + \partial_\eta (\mathcal{J}\, \dot{\eta}) = 0, \tag{58}$$

其中，$\dot{\eta}$ 是 η 空间中的逆变垂直输送速度，∇_h 是水平散度算子。定义柱“气压厚度”

$$P(x,y,t) \equiv \int_0^1 \mathcal{J}(\eta,x,y,t)\,d\eta = p_{\mathrm{trop}}(x,y,t) - p_{top}, \tag{59}$$

其中 p_{top} 固定。对(58) 从 $\eta = 0$ （模式顶）到 $\eta = 1$ （对流层顶）进行垂直积分，得到

$$\partial_t P + \nabla_h \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{J}\,\mathbf{U}\,d\eta \right) + \mathcal{J}(1)\,\dot{\eta}(1) = 0. \tag{60}$$

具体而言，*(i)* 柱质量的唯一源/汇是通过与对流层顶移动相关的下边界通量 $\mathcal{J}(1)\dot{\eta}(1)$，以及 *(ii)* 如果 $\partial_t p_{\mathrm{trop}} = 0$ （下边界固定），那么 $\dot{\eta}(1) = 0$，预算方程(60) 便恰好简化为标准的不可渗透下边界混合 σ–p 核心。

证明。对 $\eta \in [0,1]$ 上的 (58) 进行积分：

$$\int_0^1 \partial_t \mathcal{J}\,d\eta + \int_0^1 \nabla_h \cdot (\mathcal{J}\mathbf{U})\,d\eta + \int_0^1 \partial_\eta(\mathcal{J}\dot{\eta})\,d\eta = 0. \tag{61}$$

利用 ∂_t 和 ∇_h 的线性性质，并对最后一项应用微积分基本定理：

$$\partial_t \int_0^1 \mathcal{J}\,d\eta + \nabla_h \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{J}\mathbf{U}\,d\eta \right) + [\mathcal{J}\dot{\eta}]_{\eta=0}^{\eta=1} = 0. \tag{62}$$

由于 $\int_0^1 \mathcal{J}\,d\eta = p_{\mathrm{trop}}(x,y,t) - p_{\mathrm{top}} \equiv P(x,y,t)$，因此得到

$$\partial_t P + \nabla_h \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{J}\mathbf{U}\,d\eta \right) + \mathcal{J}(1)\dot{\eta}(1) - \mathcal{J}(0)\dot{\eta}(0) = 0. \tag{63}$$

根据构造，模式顶 $\eta = 0$ 固定（没有质量通量通过上盖），因此 $\dot{\eta}(0) = 0$，且$\mathcal{J}(0)\dot{\eta}(0) = 0$。由此得到 (60)。项$\mathcal{J}(1)\,\dot{\eta}(1)$ 严格来说是“气压质量”通过移动对流层顶的垂直通量。如果对流层顶固定不动，那么 $\partial_t p_{\mathrm{trop}} = 0$，且下边界不移动，这意味着 $\dot{\eta}(1) = 0$。在这种情况下，$\mathcal{J}(1)\dot{\eta}(1) = 0$，且 (60) 简化为

$$\partial_t P + \nabla_h \cdot \left(\int_0^1 \mathcal{J}\mathbf{U}\,d\eta \right) = 0, \tag{64}$$

这正是混合 σ–p 坐标 [7, 8]下，具有不可渗透下边界的静力原始方程核心所遵循的标准柱质量守恒。□

致谢

TBD.

参考文献

[1] Alan W. Brewer. 平流层水汽分布所揭示的全球环流证据。《英国皇家气象学会季刊》，1949年。[2] Gordon M. B. Dobson. 平流层臭氧的起源与分布。英国皇家学会会刊 *A*辑，1956年。[3] David G. Andrews、James R. Holton 和 Conway B. Leovy. 《中层大气动力学》。学术出版社，1987年。

[4] Jule G. Charney 和 Philip G. Drazin. 行星尺度扰动从低层大气向高层大气的传播。《地球物理研究杂志》，1961年。[5] H. Hersbach、B. Bell、P. Berrisford 等。ERA5全球再分析。《英国皇家气象学会季刊》，2020年。[6] Ronald Gelaro、Will McCarty、M. Joan Suárez 等。MERRA-2：面向研究与应用的现代回溯分析，第2版。《气候杂志》，2017年。[7] Adrian J. Simmons 和 David M. Burridge. 一种守恒能量和角动量的有限差分格式及混合垂直坐标。《英国皇家气象学会季刊》，1981年。[8] Shian-Jiann Lin. 一种用于全球模式的垂直拉格朗日有限体积动力核心。《月刊天气评论》，2004年。[9] C. W. Hirt、A. A. Amsden 和 J. L. Cook. 一种适用于所有流速的任意拉格朗日–欧拉计算方法。《计算物理学杂志》，1974年。[10] Rainer Bleck. 一种采用混合等密度–笛卡尔坐标的海洋环流模式。《海洋模拟》，2002年。[11] Shian-Jiann Lin 和 Richard B. Rood. 多维通量形式半拉格朗日输运格式。《月刊天气评论》，1996年。[12] Christiane Jablonowski 和 David L. Williamson. 大气模式动力核心的斜压不稳定性测试案例。《英国皇家气象学会季刊》，2006年。[13] William C. Skamarock 和 Joseph B. Klemp. 一种时间分裂非静力大气模式。《计算物理学杂志》，2008年。