arXiv:2601.00211v1 [math.LO] 1 Jan 2026

模型中的测度与稳定性（再探）

CHRISTIAN D'ELB ´EE* AND KYLE GANNON†

Abstract. 本文为庆祝第八届哈萨克斯坦—法国逻辑学研讨会而作。我们扩展了第二作者一篇未发表的研究札记。我们记录了关于相对于一个 *stable in a model*公式的局部凯斯勒测度的一些结果。我们证明，在这一背景下，相关局部类型空间上的每个局部凯斯勒测度都是（至多可数多个）类型的加权和。利用这一观察，我们给出一个初等证明，说明在这一背景下莫利积具有交换性。随后，我们通过泛函分析证明，双重极限性质可提升至局部测度对上相应的求值映射。最后，我们对（适当意义下）稳定背景中的 NOP 和局部测度作一些评论。

1. Introduction

数理逻辑领域的法哈联系可追溯至 20 世纪 80 年代末，当时 Tolendi Mustafin 与 Bruno Poizat 开展合作，并促成了 1990年在哈萨克斯坦卡拉干达国立大学举行的首届苏法模型论研讨会。此后，维护并加强这些数学联系的意愿始终不变；近年来，这些联系先是在 2022年于里昂重燃，随后又于 2025年在阿斯塔纳延续。这些联系的影响自然远超法国和哈萨克斯坦，因为它们见证了欧洲、俄罗斯、美国和中国研究人员之间富有成效的知识交流与思想交融。本文体现了这种交互性，也呈现了部分源于作者参与第八届哈萨克斯坦—法国逻辑学研讨会的工作。作者谨向此次会议的组织者致以诚挚谢意。他们希望，自己对哈萨克斯坦数学文库的贡献能够帮助加强我们各研究团队之间既有的学术与社会联系。

继 Ben Yaacov 最初发表文章，将稳定性理论与格罗滕迪克的一些泛函分析工作联系起来之后， [1], 模型中的稳定性和模型中非独立性性质的概念受到了该领域众多研究者的关注 [3, 4, 11, 12, 10, 14, 17]。尤其是在2017年春季的圣母大学模型论研讨会上，这些概念引发了多场热烈讨论。本研究正是源于这阵局部的研究热潮。

事实证明，局部稳定性理论中的基本结果可以推广到模型中稳定的情形；特别是，通过重新诠释格罗滕迪克关于泛函分析的一些工作即可实现这一点。从我们的视角来看，自然会问：在这种情形下，凯斯勒测度理论是什么样的？我们证明，它也与稳定情形下的图景十分相似。首先，我们证明，若 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定，那么 M 上的每个 φ–测度（ φ–的可定义子集上的有限可加概率测度）都是（至多可数个）带权 φ–类型之和。因此， M上的所有 φ–测度都是 φ^{opp}–可定义的。由此，在公式 $\varphi(x,y)$ 上，任意一对 φ与 φ^{opp}–测度之间的莫利积都有定义。在 [1], 中，Ben Yaacov 证明稳定性理论基本定理可以推广到模型中稳定的情形；由上述观察可知，在适当的测度对上，莫利积在 $\varphi(x,y)$ 处的取值可交换。换句话说，若 $\varphi(x;y)$

Date: 2026年1月5日。*Key words and phrases.* 模型论、凯斯勒测度、模型中的稳定性、稳定性、莫利积、双重极限、随机化、VC理论。

* 本研究完全由 Ramon y Cajal 项目资助，项目编号 RYC2023-042677-I，资金来源为 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 ESF+。

† 本研究部分获得以下资助：法国驻美国大使馆科技处的夏多布里昂奖学金；北京大学中央高校基本科研业务费，项目编号 7100604835；国家自然科学基金，项目编号 12501001。

在 M 中稳定， $\mu \in \mathfrak{M}_{\varphi}(M)$，且 $\nu \in \mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$，那么

$$(\mu_x \otimes \nu_y)(\varphi(x,y)) = (\nu_y \otimes \mu_x)(\varphi(x,y)).$$

最终关注的对象就是求值映射本身。我们考虑函数 E_φ： $\mathfrak{M}_{\varphi}(M) \times \mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) \to [0,1]$，其定义如下：

$$E_\varphi(\mu,\nu) = (\mu_x \otimes \nu_y)(\varphi(x,y)).$$

我们证明，如果 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定，那么 E_φ 也见证了相应变体的非序性质。这几乎可以直接由泛函分析中的结果推出，即格罗滕迪克双极限定理和克里恩-斯穆利安定理。最后，我们考虑这样的情形： $\varphi(x;y)$ 是一个稳定公式（也就是说，对于某个固定的 k， $\varphi(x;y)$ 不具有 $k-$序性质）。我们证明，对于任意的 $r \in (0,1)$ 和 $\epsilon > 0$，映射 E_φ 是 $(r,\epsilon)-$稳定的。我们指出，这一结论隐含于 Ben Yaacov 和 Keisler 的一项结果中，即稳定公式的随机化仍然稳定（[2, 定理 5.14]）。我们阐述这一结论成立的原因，然后给出另一种证明，该证明源于 VC 定理，并模仿了 NIP 理论中涉及测度的技巧（即，参见 [7, 定理 3.12]的证明）。后一种证明蕴含着界的存在性，但我们将这方面的分析留待以后研究。

1.1. 预备知识。全文中，固定一个语言 $\mathcal{L}$ 和一个 $\mathcal{L}-$结构 M。我们用字母 x、 y、 z.....表示有限个变量组成的元组。公式 $\varphi(x;y)$ 是一个分块的 $\mathcal{L}-$公式，其变量为 x，参数变量为 y。我们令 $\varphi^{\mathrm{opp}}(y;x)$ 表示与 $\varphi(x;y)$ 相同的公式，只是交换了变量与参数的角色。我们令 $S_\varphi(M)$ 表示以 M 中的元素为参数的 $\varphi-$类型空间。我们令 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 表示由 $\{\varphi(x,b): b \in M\}$ 生成的 M可定义子集的布尔代数。我们通常将可定义集合与定义它们的公式视为同一对象。一个 $\varphi-$公式是 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 的一个元素。同样，我们对 $S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 和 $\mathrm{Def}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 也有类似的定义。类型 p 在 $S_\varphi(M)$ 中的一个 $\varphi^{\mathrm{opp}}-$定义，是一个 $\varphi^{\mathrm{opp}}-$公式 $d_p^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(y)$，使得对于每个 $b \in M^y$， $\varphi(x,b) \in p$ 当且仅当 $M \models d_p^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(b)$。最后，我们用 $\mathfrak{M}_\varphi(M)$ 和 $\mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 分别表示 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 和 $\mathrm{Def}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 上有限可加概率测度的空间。回顾一下，我们可以将这些空间中的测度分别与其对应类型空间上的正则博雷尔概率测度自然地对应起来，例如，$\mathfrak{M}_\varphi(M)$ 与 $S_\varphi(M)$ 上的正则博雷尔概率测度自然对应。

定义 1.1（双重极限性质）。设 X 和 Y 是集合，且 $f: X \times Y \to [0,1]$。如果对任意两个序列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$、$(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$，满足 $a_i \in X$ 和 $b_j \in Y$，我们称 f具有双重极限性质，

$$\lim_i \lim_j f(a_i,b_j) = \lim_j \lim_i f(a_i,b_j)$$

前提是两边的极限均存在。

The de在 [1] 中给出的模型中稳定 的定义，限制到离散结构上如下：

定义 1.2。 公式 $\varphi(x;y)$ 在 M中稳定，当且仅当 $\varphi: M^x \times M^y \to \{0,1\}$ 具有双重极限性质，其中 $\varphi(a,b)$ 当且仅当 $M \models \varphi(a,b)$，而在其他情况下， $\varphi(a,b) = 0$。

首先注意到，显然 $\varphi(x;y)$ 在 M中稳定，当且仅当 $\varphi^{\mathrm{opp}}(x;y)$ 在 M中稳定。我们还注意到，如果 $\varphi(x;y)$ 稳定，那么 $\varphi(x;y)$ 在底层理论的任意模型中都稳定。一个在模型中稳定但并非稳定的公式示例，是通过取所有定义在 $\mathbb{N}$ 子集上的有限图并作不交并所构造的图中的边关系。

在 [1], Ben Yaacov 建立了泛函分析与局部稳定性之间一个出人意料的联系。具体而言，他利用格罗滕迪克的双重极限定理[9]证明了稳定性基本定理。在陈述该定理之前，我们先简要回顾一些泛函分析的基础知识。

定义 1.3（弱拓扑）。设 Y 是域 F（$F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的巴拿赫空间。设 Y^* 是从 Y 到 F的连续线性泛函空间。那么， Y 上的弱拓扑 是使得对 Y^* 中的每个元素，它仍是从 Y到 F的连续函数的最粗拓扑。

定义 1.4（相对弱紧）。设 Y 是一个巴拿赫空间，且 $A \subset Y$。若在弱拓扑下， A 是 Y 的紧子集，则称 A 是弱紧的。此外，若在弱拓扑下 A 的闭包是弱紧的，则称 A 是相对弱紧的。

设 X 是一个拓扑空间。则 $C_b(X)$ 表示 X 上有界连续复值函数构成的巴拿赫空间，该空间配备了一致范数 $||\cdot||_\infty$ 若存在 c 属于 $\mathbb{R}$，使得对于所有属于 A 的 f，都有 $||f||_\infty < c$，则称集合 A 是 $||\cdot||_\infty$–有界的。格罗滕迪克定理如下:

定理 1.5 (格罗滕迪克 [9])。 设 X 是任意拓扑空间， $X_0 \subseteq X$ 是一个稠密子集。那么对于 $A \subset C_b(X)$，以下条件等价:

(i) 集合 A 在 $C_b(X)$中相对弱紧。(ii) 集合 A 是 $||\cdot||_\infty$–有界的，并且每当 $f_n \in A$ 和 $x_n \in X_0$ 是两个序列时，我们有

$$\lim_n \lim_m f_n(x_m) = \lim_m \lim_n f_n(x_m),$$

前提是两个极限都存在。

通过 上述双重极限定理，Ben Yaacov 推导出了以下结果（以及其他结果） :

定理 1.6. 假设 $\varphi(x;\ y)$在 M 中是稳定的， $p \in S_\varphi(M)$，且 $q \in S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$。那么 p有一个φ^{opp}–定义 $d_p^\varphi(y)$， q有一个 φ–定义 $d_q^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(x)$，并且 $d_p^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(y) \in q$ 当且仅当 $d_q^\varphi(x) \in p$。

最后，我们回顾 Starchenko 关于 topi 的研究札记中的以下等价关系 c.

事实 1.7。 以下各项等价:

(i) $\varphi(x;\, y)$ 在 M 中是稳定的。*(ii)* 不存在来自 $M^x \times M^y$ 的 $(a_i, b_j)^{(i,j)\in\omega\times\omega}$，使得 *(a)* 对每个 $i \neq j$, $M \models \varphi(a_i, b_j)$，当且仅当 $i < j$。 *(b)* 或对所有 $i \neq j$, $M \models \varphi(a_i, b_j)$ 当且仅当 $i > j$。*(iii)* 映射 $\chi_\varphi\colon S_\varphi(M) \times S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) \to \{0,1\}$ 具有双重极限性质，其中

$$\chi_\varphi(p,q) = 1 \iff d_p^\varphi(y) \in q \iff d_q^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(x) \in p.$$

在上述事实中，(i) 与 (ii) 的等价性 [17, 引理 1.3]。显然，(iii) 蕴含 (i)，而 (i) 蕴含 (iii) 则可由 [17, 定理 1.5] 以及定理 1.6 推出（另见 [14]）。

2. Local Keisler measures

在本节中，我们证明：如果 $\varphi(x;\, y)$ 在 M 中稳定，那么所有 φ–测度都至多是加权 φ–类型的可数和。该定理的证明使用了针对正有界电荷的 Sobczyk–Hammer 分解定理。我们回顾该定理在有限可加概率测度情形下的表述。不过首先，我们需要回顾两种不同类型的有限可加测度。

定义 2.1. 令 $\mathbb{B}$ 为 X 的子集构成的布尔代数（包含 X 和 $\emptyset$），且令 μ 为 $\mathbb{B}$ 上的有限可加概率测度。

(1) 若对所有 $\epsilon > 0$，都存在 $F_1, ..., F_n \in \mathbb{B}$，使得 $\{F_i\}_{i=1}^n$ 构成 X 的一个划分，且对于每个 $i \leq n$， $\mu(F_i) < \epsilon$，则称 μ 在 $\mathbb{B}$ 上是强连续 的。(2) 若对于 $\mathbb{B}$ 中的每个 F， $\mu(F) \in \{0,1\}$，则称 μ 在 $\mathbb{B}$ 上是 $\{0,1\}$–值 的。

证明下述定理，请参阅 [15, 定理 5.2。7]

定理 2.2 (Sobczyk–Hammer 分解定理 [16])。 设 $\mathbb{B}$ 是 X 上的一个布尔代数（包含 $\emptyset$ 和 X），而 μ 是定义在 $\mathbb{B}$上的有限可加概率测度。那么，存在 $\mathbb{N}$的一个初始段I 、一个由互不相同的有限可加概率测度组成的序列$(\mu_i)_{i\in I}$，以及一个由非负实数组成的序列$(r_i)_{i\in I}$，满足以下性质，

(i) μ_0 在 $\mathbb{B}$上强连续，*(ii)* μ_i 在每个 $\mathbb{B}$ 上都取 $\{0,1\}$–值，($i \geq 1$) $\sum_{i\in I} r_i = 1$，以及 *(iv)* $\mu = \sum_{i\in I} r_i\mu_i$。

此外，式(iv) 中的分解是唯一的（显然，序列和权重非平凡的测度（即 $r_i > 0$）的排列除外）。

Sobczyk–Hammer 分解定理允许我们将任意有限可加概率测度分解为一个强连续测度与至多可数个 $\{0,1\}$–值测度之和。我们将证明，如果 $\varphi(x;\ y)$ 在 M 中是稳定的，那么 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 上不存在任何强连续测度。因此，每个有限可加概率测度都将是至多可数种类型的“加权和”。

2.1. **测度是类型的和**。

定义 2.3. 设 $\mathbb{B}$是定义在集合 X上的布尔代数。我们称 $\mathbb{B}$ 具有 2–树，若存在 $T\in\mathcal{P}(\mathbb{B})$，使得 $(T,\supsetneq)$ 是一棵无限完备二叉树，并且若 $A,C\in T$, $A\not\supset C$ 和 $C\not\supset A$，则 $A\cap C=\emptyset$。

事实 2.4. 设 $\mathbb{B}$ 是定义在集合 X 上的布尔代数，并假设 $\mathbb{B}$ 具有 2–树。则 $|\mathrm{Ult}(\mathbb{B})|\geq 2^{\aleph_0}$，其中 $\mathrm{Ult}(\mathbb{B})$是 $\mathbb{B}$ 上的超滤子的集合。

证明。任取 T中的一条路径 γ，并令 $A_\gamma=\{B\in T\colon\ B\in\gamma\}$。显然， A_γ 具有有限交性质（因为若 $B,C\in A_\gamma$，则 $B\subset C$ 或 $C\subset B$），因此 A_γ 可以扩张为 $\mathbb{B}$上的一个超滤子。此构造给出了从 T 中的路径到 $\mathbb{B}$上的超滤子的单射，从而证明了该结论。□

引理 2.5. 设 $\mathbb{B}$ 是集合 X上的一个布尔代数。假设存在一个定义在 $\mathbb{B}$上的强连续测度μ 。那么 $\mathbb{B}$ 有一棵 2–树。

证明。利用 μ，我们将构造一棵 2–树。我们分步构造这棵树：**阶段 0：**
设 $T_0=\{X\}$。
阶段 $n+1$：我们构造一棵高度为 $n+1$的树。假设 T_n 是一棵高度为 n 的（完备）二叉树，并且对每个 $A\in T_n$，$\mu(A)>0$。进一步假设，如果 A、$B\in T$ 和 $A\not\supset B$，且 $B\not\supset A$，那么 $A\cap B=\emptyset$。我们将通过给每个叶添加两个子节点来构造 T_{n+1}。设 $\mathbb{L}_n$ 为 T_n 上叶的集合。令$\epsilon=\min_{\{\mu(L)\colon\ L\in\mathbb{L}_n\}}{}_2$。由于 μ 是强连续的，存在 H_1，...，$H_m\in\mathbb{B}$，使得 $\mathbb{H}=\{H_1,...,H_m\}$ 划分 X，并且对每个 $j\leq m$，$\mu(H_j)<\epsilon$。现在固定一个叶 L_i。考虑 $L_i\cap\mathbb{H}=\{L_i\cap H\colon\ H\in\mathbb{H}\}$。我们注意到 $L_i\cap\mathbb{H}$ 构成了 L_i的一个划分。因此，

$$0<\mu(L_i)=\mu\Big(\bigcup_{K\in L_i\cap\mathbb{H}}K\Big)=\sum_{K\in L_i\cap\mathbb{H}}\mu(K).$$

因此，存在 $K_r=L_i\cap H_r\in L_i\cap\mathbb{H}$，使得 $\mu(K_r)>0$。此外，

$$\mu(K_r)=\mu(L_i\cap H_r)\leq\mu(H_r)<\epsilon\leq\frac{L_i}{2}.$$

因此，必定存在某个 $K_l\in L_i\cap\mathbb{H}$，使得 $K_l\neq K_r$ 且 $\mu(K_l)>0$。现在，我们将 K_r，K_l作为叶 L_i的子节点添加进去。令 T_{n+1} 为对每个 $L\in\mathbb{L}_n$重复此过程后构造出的树。显然， T_{n+1} 是一棵高度为 $n+1$ 的二叉树，并且对每个 $A\in T_{n+1}$，都有 $\mu(A)>0$。

现在令 $T=\bigcup_{n\geq 0}T_n$。根据构造， T 显然是一棵 $2-$ 树。 □

定义 2.6。令 M_φ 为 M 在语言 $\mathcal{L}_\varphi=\{\varphi(x;y)\}$ 上的约化结构。若子集 N 是 M 的φ–子结构，记作 $N\prec_\varphi M$，则指在 N 上（在语言 $\mathcal{L}_\varphi$ 中）的诱导结构是 M_φ 的初等子结构。

引理 2.7。假设 $\varphi(x;\ \ y)$ 在 M 中稳定。那么$\mathrm{Def}_\varphi(M)$上不存在强连续测度。

证明。假设存在一个定义在 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 上的强连续测度。由引理 2.5，存在一棵2–树。令 $\mathbb{B}_0$ 为由这棵 2–树生成的布尔代数。由事实 2.4， $\mathbb{B}_0$ 是 $\mathrm{Def}_\varphi(M)$ 的一个可数子代数，满足 $\mathrm{Ult}(\mathbb{B}_0)\geq 2^{\aleph_0}$。选取 $C\subset M$，使得对于每个 $B\in\mathbb{B}_0$，都存在 b_1，.....，b_n属于C，且 B 是由 $\{\varphi(x;\ b_i)\colon\ i\leq n\}$生成的布尔代数中的一个元素。注意，由于 $\mathbb{B}$ 是可数的，我们可以选择使 C 为可数集。根据向下 Löwenheim–Skolem 定理，存在一个 $\mathcal{L}_\varphi$–结构 N，使得 $C\subseteq N$、$N\prec_\varphi M$和 $|N|=\aleph_0$。于是，

$$2^{\aleph_0}\leq|\,\mathrm{Ult}(\mathbb{B}_0)|\leq|\,\mathrm{Ult}(\mathrm{Def}_\varphi(C))|\leq|\,\mathrm{Ult}(\mathrm{Def}_\varphi(N))|=|S_\varphi(N)|.$$

然而，由于 $\varphi(x;\ y)$ 在 M 中是稳定的，它在 N 中也稳定。根据定理 1.6， φ–上每个关于 N 的类型，都可以由一个带有来自 N 的参数的 $\varphi^{\mathrm{opp}}-$ 公式定义。由于 $|N|=\aleph_0$，φ^{opp}–公式只有可数多个。因此，并非 N 上每个关于 $\varphi-$ 的类型都可定义——这就矛盾了。□

定理 2.8。设 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定，且 $\mu \in \mathfrak{M}_\varphi(M)$。那么存在 $\mathbb{N}$ 的一个初始段 I，使得 $\mu = \sum_{i\in I} r_i\delta_{p_i}$，其中 $p_i \in S_\varphi(M)$、$\sum_{i\in I} r_i = 1$，且每个 $r_i > 0$。显然，当 $\varphi(x;y)$ 是稳定的（即对某个 k 不具有 k-序性质）时，该结论也成立。

证明。由 Sobczyk–Hammer 分解定理和引理 2.7 可直接得出。 □

2.2. **莫利积满足交换律**。我们现在要证明，莫利积在适当的测度对上满足交换律。首先，我们需要在此语境下恰当地定义莫利积。为此，我们先做一些简要观察。

事实 2.9。设 X 是一个拓扑空间，Y 是 X 的一个稠密子集。设 $f : Y \to Z$ 是一个映射。若 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ 存在某个 $f\colon X \to Z$，使得 f 连续且 $f|_Y = f$，则 f 是具有此性质的唯一函数。

证明。由连续性的网定义显然可得。 □

命题 *2.10*。设 $\varphi(x;y)$ 在 M 中是稳定的，且 $\mu \in \mathfrak{M}_\varphi(M)$。考虑映射 $f_\mu^\varphi\colon \{\mathrm{tp}^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(b/M) : b \in M^y\} \to [0,1]$，其定义为 $f_\mu^\varphi(\mathrm{tp}^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(b/M)) = \mu(\varphi(x,b))$。此映射定义良好，并且存在唯一的连续函数 $F_\mu^\varphi\colon S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) \to [0,1]$，使得 $F_\mu^\varphi|_{\{\mathrm{tp}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(b/M):b\in M^y\}} = f_\mu^\varphi$。

证明。根据定理 2.8，$\mu = \sum_{i\in I} r_i\delta_{p_i}$ 其中每个 $p_i \in S_\varphi(M)$。我们来证明映射 f_μ^φ 定义良好。注意，若 $b \in M^y$，则

$$\mu(\varphi(x,b)) = \sum_{i\in I} r_i[\delta_{p_i}(\varphi(x,b))] = \sum_{\substack{i\in I\\ M\models d_{p_i}^\varphi(b)}} r_i.$$

根据定理 1.6，每个公式 $d_{p_i}^\varphi(y)$ 都是一个 φ^{opp}–公式，这意味着上面的值仅取决于 b 的 φ^{opp}–类型。由此可知映射定义良好。

由于 $\{\mathrm{tp}^{\varphi^{\mathrm{opp}}}(b/M) : b \in M^y\}$ 是 $S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 的稠密子集，根据事实 2.9，只需证明存在一个从 $S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 到 $[0,1]$ 的连续映射，其在 f_μ^φ 上的限制为 f_μ^φ。我们声称，$\sum_{i\in I} r_i\mathbf{1}_{[d_{p_i}^\varphi(y)]}$ 就是所需的映射。注意，我们可以将 $\sum_{i\in I} r_i\mathbf{1}_{[d_{p_i}^\varphi(y)]}$ 视为从 $S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$ 到 $[0,1]$ 的映射，因为 M 中的稳定性意味着每个形如 $d_{p_i}^\varphi(y)$ 的公式都是 φ^{opp}–公式（定理 1.6）。 □

现在我们可以在此情形下定义莫利积。

定义 2.11. 设 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定。令 $\mu \in \mathfrak{M}_\varphi(M)$ 且 $\nu \in \mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$。我们将 μ 与 ν 的莫利积记作 $\mu_x \otimes \nu_y$，定义如下：

$$(\mu\otimes\nu)(\varphi(x,y)) = \int_{S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)} F_\mu^\varphi d\tilde{\nu},$$

其中，F_μ^φ 是命题 2.10 中的函数，而 $\tilde{\nu}$ 是与 ν 对应的正则博雷尔概率测度。同样，由于 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定，当且仅当 $\varphi^{\mathrm{opp}}(x;y)$ 在 M 中稳定，我们也可以定义

$$(\nu\otimes\mu)(\varphi(x,y)) = \int_{S_\varphi(M)} F_\nu^{\varphi^{\mathrm{opp}}} d\tilde{\mu},$$

并采用显然类似的定义。

注 2.12. 由于我们对莫利积的定义略有不同寻常之处，因此我们谨慎地确保它与类型上的通常莫利积相似。设 $\varphi(x;y)$ 在 M 中稳定，令 $p \in S_\varphi(M)$、$q \in S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$，并固定满足 $M \prec \mathcal{U}$ 的 $\mathcal{U}$。令 $\hat{}p \in S_\varphi(\mathcal{U})$ 为 p 到 $\mathcal{U}$ 的唯一 M-可定义扩张。那么 $(\delta_p\otimes\delta_q)(\varphi(x,y)) = 1$ 当且仅当 $\mathcal{U} \models \varphi(a,b)$，其中 $b \models q$ 且 $a \models \hat{}p|_{Mb}$。事实上，考虑以下一系列双条件命题：

$$\begin{aligned}(\delta_p\otimes\delta_q)(\varphi(x,y)) = 1 &\iff \int_{S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)} \chi_{[d_p^\varphi(y)]} d\delta_q = 1 \iff \delta_q(d_p^\varphi(y)) = 1\\ &\iff d_p^\varphi(y) \in q \iff \mathcal{U} \models d_p^\varphi(b) \iff \varphi(x,b) \in \hat{p} \iff \mathcal{U} \models \varphi(a,b).\end{aligned}$$

定理 2.13. 假设 $\varphi(x;\ y)$ 在 M 中稳定。那么

$$(\mu\otimes\nu)(\varphi(x;y)) = (\nu\otimes\mu)(\varphi(x;y)).$$

证明。 考虑以下方程序列：

$$(\mu\otimes\nu)(\varphi(x,y)) = \int_{S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)} F_\mu^\varphi d\tilde{\nu} = \int_{S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)} \sum_{i\in I} r_i \mathbf{1}_{[d^\varphi_{p_i}(y)]} d\tilde{\nu}$$
$$= \sum_{i\in I} r_i \nu(d^\varphi_{p_i}(y)) = \sum_{i\in I} r_i \sum_{j\in J} s_j \delta_{q_j}(d^\varphi_{p_i}(y)) \overset{(*)}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_i s_j \delta_{p_i}(d^{\varphi^{\mathrm{opp}}}_{q_j}(x)).$$

由定理 1.6 可知，等式 $(*)$ 成立。对称地计算可得

$$(\nu\otimes\mu)(\varphi(x,y)) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_i s_j \delta_{p_i}(d^{\varphi^{opp}}_{q_j}(x)),$$

证明至此完成。 □

2.3. **一些泛函分析与双重极限**。 由定理 2.13，我们可以在适当的凯斯勒测度对上定义以下求值映射 E_φ。我们证明，若 $\varphi(x;\ y)$ 在 M 中稳定，则 E_φ 也具有双重极限性质。我们的证明直接基于泛函分析中的经典结果，即格罗滕迪克双重极限定理和 Krein-Smulian 定理。我们首先回顾引言中求值映射的定义。

定义 2.14。 假设 $\varphi(x,y)$ 在 M 中稳定。那么我们定义映射 $E_\varphi\colon \mathfrak{M}_\varphi(M)\times\mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) \to[0,1]$ 如下：

$$E_\varphi(\mu,\nu) = (\mu\otimes\nu)(\varphi(x,y)).$$

由定理 2.13， $E_\varphi(\mu,\nu)$ 也等于 $(\nu\otimes\mu)(\varphi(x,y))$。

以下定理的证明可见 $[6,$ 定理 13.4$]$。

定理 2.15 （Krein-Smulian 定理）。若 Y 是巴拿赫空间，且 K 是 Y的弱紧子集，则 K的闭凸包（记作 $\mathrm{co}(K)$）是弱紧的。 K 的闭凸包是所有包含 K 的 Y 范数闭凸子集的交集。

推论 2.16。若 Y 是巴拿赫空间，且 Z 是 Y 的相对弱紧子集，则 $\mathrm{co}(Z)$是 Y的弱紧子集。

证明。令 Z^w 表示 Z的弱闭包。则 Z^w 是弱紧的，因此根据 Krein-Smulian 定理，$\mathrm{co}(Z^w)$ 是弱紧的。注意，$\overline{\mathrm{co}(Z)} \subseteq \mathrm{co}(Z^w)$，且由于 $\mathrm{co}(Z)$ 是紧集的闭子集，因此它也是紧的。□

定义 2.17。设 X 是一个集合。若在 X 上赋予离散拓扑，并令 $\mathcal{M}(X)$ 表示 X上的正则博雷尔概率测度族，则可考虑以下测度凸集族，

$$\mathrm{conv}_\delta(X) \colon = \left\{ \sum_{i\in I} r_i\delta_{x_i} : I\subseteq\mathbb{N}; x_i\in X; r_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}; \sum_{i\in I} r_i = 1 \right\}.$$

为简化记号，我们将 $\sum_{i\in I} r_i\delta_{x_i}$ 简写为 $\sum_{i\in I} r_i x_i$。

定义 2.18。 设 X 和 Y 是集合，且 $f\colon X\times Y\to[0,1]$。那么我们通过以下方式定义 $f_c\colon \mathrm{conv}_\delta(X)\times\mathrm{conv}_\delta(Y) \to[0,1]$

$$f_c\left(\sum_{i\in I} r_i x_i, \sum_{j\in J} s_j y_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_i s_j f(x_i,y_i).$$

现在我们通过泛函分析证明这一关键的组合命题。

命题 2.19。 设 X 和 Y 是集合，且 $f\colon X\times Y\to[0,1]$。那么，当且仅当 $f_c\colon$ 凸包$_\delta$（X）$\times$凸包$_\delta$（Y）$\to[0,1]$ 具有双重极限性质时， f 具有双重极限性质。

证明。 如果 f_c 具有双重极限性质，那么显然 f 也具有双重极限性质。因此，我们只需证明另一个方向。赋予 Y 离散拓扑。令 $\mathbf{X} = \{f(a, y) : a \in X\}$。显然，$\mathbf{X} \subset C_b(Y)$，且 $\mathbf{X}$ 是 $||\cdot||_\infty-$ 有界的。根据假设，f 具有双重极限性质，由定理 1.5，$\mathbf{X}$ 在 $C_b(Y)$ 中相对弱紧。根据推论 2.15，我们有 $\mathrm{co}(\mathbf{X})$ 是 $C_b(Y)$ 的弱紧子集。由于 $\mathrm{co}(\mathbf{X})$ 在 $C_b(Y)$-中弱紧，它也是相对弱紧的，因此我们可以应用定理 1.5。于是，对于 $g_i \in \mathrm{co}(\mathbf{X})$ 中的任意无限序列 $b_j \in Y$

$$\lim_i \lim_j g_i(b_j) = \lim_j \lim_i g_i(b_j),$$

在两个极限都存在的前提下。特别地，这意味着对于 $g_i := \sum_{\ell_i \in L_i} r_{\ell_i} f(a_{\ell_i}, y)$，

$$\lim_i \lim_j f_c\left(\sum_{\ell_i \in L_i} r_{\ell_i} a_{\ell_i}, b_j\right) = \lim_j \lim_i f_c\left(\sum_{\ell_i \in L_i} r_{\ell_i} a_{\ell_i}, b_j\right),$$

在两个极限都存在的前提下。

注意，上述计算表明映射 $f_c|_{\mathrm{conv}_\delta(X)\times Y}$ 具有双重极限性质。现在考虑赋予离散拓扑的 $\mathrm{conv}_\delta(X)$，并令 $\mathbf{Y} = \{f_c(x, b) : b \in Y\}$。显然，$\mathbf{Y} \subset C_b(\mathrm{conv}_\delta(X))$，且 $\mathbf{Y}$ 是有界的，因为每个函数都以 1 为界。由于 $f_c|_{\mathrm{conv}_\delta(X)\times Y}$ 具有双重极限性质，我们可以再次应用定理 1.5，因此 $\mathbf{Y}$ 在 $C_b(\mathrm{conv}_\delta(X))$ 中相对弱紧。根据推论 2.15，$\mathrm{co}(\mathbf{Y})$ 在 $C_b(\mathrm{conv}_\delta(X))$ 中弱紧。根据定理 1.5，f_c 具有双重极限性质。□

推论 2.20。 如果 $\varphi(x; y)$ 在 M 中稳定，那么映射 $E_\varphi : \mathfrak{M}_\varphi(M) \times \mathfrak{M}_{\varphi^*}(M) \to [0, 1]$ 具有双重极限性质。

证明。 根据事实 1.7，映射 $\chi_\varphi : S_\varphi(M) \times S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) \to \{0, 1\}$ 具有双重极限性质。根据定理 2.8，我们有 $\mathfrak{M}_\varphi(M) = \mathrm{conv}_\delta(S_\varphi(M))$，并且由于 φ^{opp} 在 M 中也是稳定的，$\mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M) = \mathrm{conv}_\delta(S_{\varphi^{\mathrm{opp}}})$。定理 2.13 中的计算表明 $E_\varphi = (\chi_\varphi)_c$。根据命题 2.19，$E_\varphi$ 具有双重极限性质。□

3. Proper stability and the order property

本节中，我们研究真正的稳定公式，并给出 Ben Yaacov 和 Keisler 的一个隐式定理的证明。Khanaki 和 Pourmahdian 使用不可分辨数组给出了该定理的另一种证明（见 [13, 定理 3.11]）。我们证明，如果 $\varphi(x; y)$ 是稳定的，那么求值映射 E_φ 不会见证序性质的连续逻辑类比。在本节中，我们固定 $\mathcal{L}$–结构 M 和 $\mathcal{U}$，使得 $M \prec \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U}$ 是一个怪兽模型。令 T 为 M 在语言 $\mathcal{L}$ 中的理论。我们首先说明如何使用随机化来导出一个证明。随后我们使用 VC 定理给出另一种证明。给定一个理论 T，我们将其随机化记为 T^R。关于随机化的背景和记号，请读者参阅 [5] 的第 3.2 节。

以下事实归功于 Ben Yaacov 和 Keisler [2, 定理 5.14]。

事实 3.1。 假设 $\varphi(x; y)$ 是关于 T 的稳定公式。那么，随机化公式 $\mathbb{E}[\varphi(x; y)]$ 关于 T^R 是稳定的（按照连续逻辑的意义）。换言之，若 N 是 T^R 的一个模型，那么对于任意 $r \in (0, 1)$ 和 $\epsilon > 0$，存在某个整数 $n = n(\epsilon, r)$，使得不存在来自 $N^x \times N^y$ 的元素数组 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ 满足

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)] \geq r + \epsilon \text{ whenver } i \geq j,$$

and

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)] \leq r \text{ whenver } i < j.$$

注意，整数 n 不取决于模型 N 的选择。

利用上述结果，很容易看出 E_φ 也不能见证序性质的连续版本。这是因为随机化编码了莫利积的计算过程。

命题 3.2. 假设 $\varphi(x;\ y)$ 是稳定的。对于每个 $r\in(0,\ 1)$ 以及 $\epsilon>0$，都存在某个整数$n=n(\epsilon,\ r)$，使得不存在凯斯勒测度数组 $(\mu_i,\ \nu_j)^{(i,j)\in[n]\times[n]}$，其中 $\mu_i\in\mathfrak{M}_\varphi(M)$且 $\nu_j\in\mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$，满足

$$(\mu_i\otimes\nu_j)(\varphi(x,y))\geq r+\epsilon\quad whenever\ i\geq j,$$

and,

$$(\mu_i\otimes\nu_j)(\varphi(x,y))\leq r\quad whenever\ i<j.$$

证明。考虑 $[0,1]^2$ 及其对应的勒贝格测度 L^2，以及相对于 $[0,1]^2$,对 T进行随机化所得的简单模型 $M^{[0,1]^2}$和 $\mathcal{U}^{[0,1]^2}$。更明确地说，若 N是 T的模型，则 $N^{[0,1]}$是从 $[0,1]^2$ 到 N 的有限像可测映射的集合。由 T^R的量词消去可知 $M^{[0,1]^2}\prec\mathcal{U}^{[0,1]^2}$。若 $\mu\in\mathfrak{M}_\varphi(M)$且 $\nu\in\mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$，则由定理 2.8可得 $\mu=\sum_{k\in K}r_k\delta_{p_k}$ 和 $\nu=\sum_{w\in W}d_w\delta_{q_w}$，其中 K 和 W 是 $\mathbb{N}$ 的初始段，并且

(1) 对每个 $k\in K$，p_k 都属于 $S_\varphi(M)$；(2) 对每个 $w\in W$，q_w都属于 $S_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$；(3) 对每个 $k\in K$ 和 $w\in W$，r_k 和 d_w 都是正实数；(4) $\sum_{k\in K}r_k=\sum_{w\in W}d_w=1$。

对于每个 q_w，选取某个 b_w属于 $\mathcal{U}^y$，使得 $b_w\models q_w$。令 $\mathbf{b}_\nu\colon[0,1]^2\to\mathcal{U}$，定义为 $\mathbf{b}_\nu((s,t))=b_w$，当且仅当 $s\in[\sum_{\ell=0}^{w-1}d_\ell,\sum_{\ell=0}^{w}d_\ell)$，并约定 $\sum_{\ell=0}^{-1}d_\ell=0$。对于每个 p_k，选取某个 a_k属于 $\mathcal{U}^x$，使得$a_k\models\hat{}p_k|_{M(b_w)_{w\in W}}$，其中 $\hat{}p_k$ 是 p 在 $S_\varphi(\mathcal{U})$ 中唯一的 M-可定义扩张。令 $\mathbf{a}_\mu\colon[0,1]^2\to\mathcal{U}$，定义为 $\mathbf{a}_\mu((s,t))=a_k$，当 $t\in[\sum_{\ell=0}^{k-1}r_\ell,\sum_{\ell=0}^{k}r_\ell)$ 时成立，并再次约定$\sum_{\ell=0}^{-1}r_\ell=0$。在下列计算中，若 $(a,b)\in\mathcal{U}^x\times\mathcal{U}^y$，则令 $\varphi(a,b)=1$，当且仅当 $\mathcal{U}\models\varphi(a,b)$；否则取 0。于是

$$\begin{aligned}(\mu\otimes\nu)(\varphi(x,y))&\overset{(a)}{=}\sum_{k\in K}\sum_{w\in W}r_kd_w(\delta_{q_w}(d^\varphi_{p_k}(y)))\overset{(b)}{=}\sum_{k\in K}\sum_{w\in W}r_kd_w\varphi(a_k,b_w)\\&=\int_{(s,t)\in[0,1]^2}\varphi(\mathbf{a}_\mu(s,t)),\mathbf{b}_\nu(s,t))dL^2=\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{a}_\mu,\mathbf{b}_\nu)].\end{aligned}$$

方程 (a) 在定理 2.8 的证明中得到。方程 (b) 由注 2.12 推出。因此，如果该陈述为假，那么 $\mathbb{E}[\varphi(x,\ y)]$ 见证了序性质的连续逻辑版本。这与事实 3.1 矛盾。□

现在我们将通过 VC 定理给出命题 3.2 的第二个证明。下文给出的 VC 定理陈述远弱于一般形式，但这正是我们所需要的。

定理 3.3 (VC 定理)。设 X 是一个集合，$\mathcal{F}$ 是一个子集族。假设类 $\mathcal{F}$ 的 *VC* 维数有界于 d。那么对于每个 $\epsilon>0$，存在一个整数 $n=n(\epsilon,d)$，使得对于 X上的每个原子测度 μ（即，$\mu=\sum_{i\in I}r_i\delta_{x_i}$，其中 $I\subseteq\mathbb{N}$），都存在 $a_1,...,a_n\in X$，使得对于任意 $F\in\mathcal{F}$，

$$\sup_{F\in\mathcal{F}}|\mu(F)-\mathrm{Av}(a_1,...,a_n)(F)|<\epsilon.$$

我们注意到，n 不依赖于测度的选择。

引理 3.4. 假设 $\varphi(x,y)$ 是稳定的。对于每个 $\epsilon>0$，都存在某个自然数 $N=N(\epsilon)$，使得对于每个 $\mu\in\mathfrak{M}_\varphi(M)$，都存在 $a_1,...,a_N\in M$，使得对于任意 $b\in M^y$，

$$|\mu(\varphi(x,b))-\mathrm{Av}(a_1,....,a_N)(\varphi(x,b))|<\epsilon.$$

证明。有几种方法可以看出这一点。由推论 2.8，我们可以写成 $\mu=\sum_{i=0}^{\omega}r_i\delta_{p_i}$，其中每个 p_i 都属于 $S_\varphi(M)$。令 $\mathcal{U}$ 为一个满足 $M\prec\mathcal{U}$ 的怪兽模型，并考虑由 $\sum_{i=0}^{\omega}r_i\delta_{\hat{p}_i}$ 给出的测度 $\hat{}\mu\in\mathfrak{M}_\varphi(\mathcal{U})$，其中 $\hat{}p_i$ 是 p 到 $\mathcal{U}$ 的唯一全局 M-可定义扩张。对于每个 $i\in\omega$，$\hat{}p_i$ 既可在 M 上定义，又在 M 中有限可满足（[14, 命题 2.3]）。因此，测度 $\hat{}\mu$ 有限可满足，且可在 M 上定义（关于此处的适当定义，见 [8, 第 6] 节）。如果 $\varphi(x;y)$ 是稳定的，那么它具有 NIP，因此应用 [8, 定理 6.4] 可知，对于每个 $\epsilon>0$，存在 a_1, ...，$a_n\in M^x$ 使得

$$\sup_{b\in\mathcal{U}^y}|\mu(\varphi(x,b))-\mathrm{Av}(\bar{a})(\varphi(x,b))|<\epsilon.$$

应用 VC 定理可得一致有界性。 □

命题 ***3.2*** 的另一种证明。 反设不然。那么存在 $r \in (0,\ 1)$ 和 $\epsilon > 0$，以及序列 $(\mu_i,\ \nu_j)_{(i,j)\in\omega\times\omega}$，它见证了 $(r,\ \epsilon)$– 序性质。现在我们构造一个离散公式（它是 $\varphi(x; y)$ 的布尔组合），该公式见证了序性质；由于稳定公式在布尔组合下封闭，便得到矛盾。由命题 3.4，存在一个自然数 N，使得

(1) 对每个 $\mu \in \mathfrak{M}_\varphi(M)$，都存在 $a_1, \ldots, a_N \in M^x$ 使得

$$\sup_{b\in M^y} |\mu(\varphi(x,b)) - \mathrm{Av}(\bar{a})(\varphi(x,b))| < \frac{\epsilon}{16}.$$

对每个 $i \in \omega$，令 $\bar{a}_i = a^i_1, \ldots, a^i_n$ 见证上述关于 μ_i 的方程。

(2) 对每个 $\nu \in \mathfrak{M}_{\varphi^{\mathrm{opp}}}(M)$，都存在 $b_1, \ldots, b_N \in M^y$ 使得

$$\sup_{a\in M^x} |\nu(\varphi(a,y)) - \mathrm{Av}(\bar{b})(\varphi(a,y))| < \frac{\epsilon}{16}.$$

对每个 $j \in \omega$，令 $\bar{b}_j = b^j_1, \ldots, b^j_N$ 见证上述关于 ν_j 的方程。

考虑由下式给出的公式，

$$\theta(x_1, ..., x_N, y_1, ..., y_N) := \bigvee_{\substack{A\times B\subseteq[N]\times[N] \\ \frac{|A\times B|}{N^2} > r+\frac{\epsilon}{2}}} \left(\bigwedge_{(i,j)\in A\times B} \varphi(x_i, y_i) \right).$$

我们断言 $\theta(\bar{x},\ \bar{y})$ 不稳定。注意

$$M \models \theta(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Longrightarrow M \models \bigvee_{\substack{A\times B\subseteq[N]\times[N] \\ \frac{|A\times B|}{N^2} > r+\frac{\epsilon}{2}}} \left(\bigwedge_{(\ell,k)\in A\times B} \varphi(a^i_\ell, b^j_k) \right) \Longrightarrow (\mathrm{Av}(\bar{a}_i) \otimes \mathrm{Av}(\bar{b}_j))(\varphi(x,y)) > r + \frac{\epsilon}{2},$$

同样，

$$M \models \neg\theta(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Longrightarrow (\mathrm{Av}(\bar{a}_i) \otimes \mathrm{Av}(\bar{b}_j))(\varphi(x,y)) \leq r + \frac{\epsilon}{2}.$$

此外，若 $i < j$，则

$$\begin{aligned} r \geq (\mu_i \otimes \nu_j)(\varphi(x,y)) &\approx_{\epsilon/16} (\mathrm{Av}(\bar{a}_i) \otimes \nu_j)(\varphi(x,y)) \\ &= (\nu_j \otimes \mathrm{Av}(\bar{a}_i))(\varphi(x,y)) \approx_{\epsilon/16} (\mathrm{Av}(\bar{b}_j) \otimes \mathrm{Av}(\bar{a}_i))(\varphi(x,y)), \end{aligned}$$

同样，若 $i \geq j$，

$$\begin{aligned} r + \epsilon \leq (\mu_i \otimes \nu_j)(\varphi(x,y)) &\approx_{\epsilon/16} (\mathrm{Av}(\bar{a}_i) \otimes \nu_j)(\varphi(x,y)) \\ &= (\nu_j \otimes \mathrm{Av}(\bar{a}_i))(\varphi(x,y)) \approx_{\epsilon/16} (\mathrm{Av}(\bar{b}_j) \otimes \mathrm{Av}(\bar{a}_i))(\varphi(x,y)), \end{aligned}$$

因此，若 $i < j$ 且 $\models \theta(\bar{a}_i,\ b_i)$，则 $\mathrm{Av}(\bar{a}_i) \otimes \mathrm{Av}(b_j)(\varphi(\bar{x},\ \bar{y}))$ 大于 $r + \frac{\epsilon}{2}$（由 θ 作证），且小于 $r + \frac{\epsilon}{8}$（由上述蕴含关系得出）——这就矛盾了。因此，若 $i < j$，则 $\models \neg\theta(\bar{a}_i,\ b_i)$。类似的论证表明，若 $i \geq j$，则必有 $\theta(\bar{a}_i,\ b_j)$。因此 $\theta(\bar{x},\ \bar{y})$ 是 $\varphi(x;\ y)$ 的一个布尔组合，且不稳定——矛盾。□

致谢。 我们感谢 Sergei Starchenko 和 Gabriel Conant 在撰写最初的研究札记期间进行的有益讨论。我们感谢哈萨克斯坦热情的接待与款待。

References

[1] Ita¨ı Ben Yaacov。关于模型论稳定性与类型的可定义性，取法于 a. grothendieck。 *Bulletin of Symbolic Logic*, 20 4 491 496, 2014 ( ): – 。[2] Ita¨ı Ben Yaacov 和 H Jerome Keisler。模型的随机化作为度量结构。 *Confluentes Mathematici*, 1(02):197–223, 2009。[3] Gabrial Conant 和 Caroline Terry。关于模型中的稳定性札记。2019。[4] Gabriel Conant。群中的稳定性。 *Groups, Geometry, and Dynamics*, 15(4):1297–1330, 2021。[5] Gabriel Conant、Kyle Gannon 和 James E Hanson。泛稳定性、随机化与 NIP 公式。 *arXiv preprint arXiv:2308.01801* 2023 , 。

[6] John B Conway。 *A course in functional analysis*, 第 96 卷。施普林格，1985。[7] Kyle Gannon。局部凯斯勒测度与 NIP 公式。 *The Journal of Symbolic Logic*, 84(3):1279–1292, 2019。[8] Kyle Gannon。类型与凯斯勒测度的序列逼近。 *Fundamenta Mathematicae*, 257:305–336, 2022。[9] 亚历山大·格罗滕迪克。一般函数空间中的紧性判据。 *American Journal of Mathematics*, 第 168–186 页，1952。[10] K. Khanaki。格罗滕迪克双重极限定理与模型论。 *Mathematical Culture and Thought* 43 2 247 259, , ( ): – 2024 。[11] Karim Khanaki。稳定性、 NIP 与 NSOP：通过函数空间的拓扑性质研究公式的模型论性质。 *Mathematical Logic Quarterly*, 66(2):136–149, 2020。[12] Karim Khanaki 和 Anand Pillay。关于模型中 NIP 的评论。 *Mathematical Logic Quarterly*, 64(6):429–434, 2018。[13] Karim Khanaki 和 Massoud Pourmahdian。随机化的简单模型与保持定理。 *arXiv preprint*, 2024。[14] Anand Pillay。泛稳定性与格罗滕迪克。 *South American Journal of Logic*, 2(2):1–6, 2016。[15] KPS Bhaskara Rao 和 M Bhaskara Rao。 *Theory of charges: a study of finitely additive measures*, 第 109 卷。学术出版社，1983。[16] A Sobczyk 和 PC Hammer。可加集合函数的分解。 *Duke Mathematical Journal*, 1944。[17] Sergei Starchenko。论格罗滕迪克的稳定性方法。未发表的研究札记，可通过 Wayback Machine 查阅，2017 年 3 月。

*University of the Basque Country、 Department of Mathematics (Leioa) / Institute for Logic、 Cognition、Language and Information (Donostia-San Sebastián)、 Spain;*Email address*: christian.delbee@ehu.eus

†Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR)、 Peking University、 Beijing、 China. *Email address*: kgannon@bicmr.pku.edu.cn