arXiv:2601.00228v1 [math.HO] 1 Jan 2026

当数学遇见绘画：斐波那契几何、立体主义与视觉抽象

Shankhadeep Mondal[1],R. N. Mohapatra[1]

中佛罗里达大学数学系

摘要

本文探讨斐波那契数列与黄金比例如何作为绘画中视觉构图与抽象的组织原则。作者展示了递归比例系统如何影响艺术结构与视觉平衡；这些系统长期以来与自然生长和审美和谐密切相关。文章追溯了基于斐波那契数列的几何学从文艺复兴艺术到现代及当代艺术实践的发展，并特别关注立体主义：在立体主义中，碎片化与多重视点呼应了递归和几何分割的原则。通过精选的艺术实例和数学洞见，本文表明，斐波那契几何不仅仅是一种象征性指涉，更是一种塑造视觉抽象与艺术表达的生成框架。

关键词：斐波那契数列、黄金比例、数学艺术、视觉构图、立体主义

1. 引言

数学与视觉艺术之间的对话，几个世纪以来塑造了艺术理论与实践，从古典时期对比例的研究，到现代对抽象与形式的探索。对称、几何学和数值比等数学概念，长期以来一直是组织视觉空间、实现审美平衡的原则。其中，斐波那契数列凭借其递归结构以及与黄金比例的密切联系，占据了独特的地位。黄金比例历来与和谐、增长和视觉连贯性相关联[1, 4]。斐波那契数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 由递推关系定义

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1,$$

并生成连续项的比值，这些比值会收敛于黄金比例

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

这种收敛将离散递归与连续比例关系联系起来，并广泛存在于自然系统中，包括叶序、分枝模式和生物生长 [3, 7]。这种

*通讯作者：shankhadeep.mondal@ucf.edu

视觉规律启发艺术家运用基于斐波那契数列的网格、螺旋和尺度原则作为构图框架，同时体现自然秩序与数学结构。

文艺复兴时期，艺术家和理论家强调几何学、比例与透视是视觉表现的基础。尽管斐波那契数很少被明确提及，但与黄金比例密切相关的比例系统影响了解剖学、建筑和画面平衡的研究 [8]。因此，数学发挥的是潜在结构指引的作用，而非装饰元素。

在二十世纪，立体主义为视觉形式的数学组织带来了决定性的转变。立体主义艺术家摒弃单点透视，将物体分解为几何面，再通过多重视点将其重新组合。从数学角度看，这一过程可解释为几何分解与重新组合，并由比例划分、递归细分和模块化组织所支配 [9]。尽管立体主义画家并未明确援引斐波那契理论，但立体主义的内在逻辑与斐波那契原理密切契合，例如变化中的重复、层级尺度以及平衡的部分与整体关系。

本文旨在探讨斐波那契数列如何作为统一的数学框架，贯穿具象绘画、立体主义绘画与抽象绘画。我们不把斐波那契图案视为装饰母题，而是着重强调其在组织视觉空间和引导抽象方面的结构性作用。通过数学分析、历史背景梳理及对精选艺术案例的研究，我们展示斐波那契几何如何持续影响当代视觉抽象和以数学为基础的绘画。

2. 历史背景

数学与艺术的关系有着深厚的历史渊源，可追溯至古典时代，并在文艺复兴时期达到了成熟的融合。当时的艺术家和学者日益认识到，数值比例、几何和谐与空间秩序可以成为视觉美的基础。在这些数学工具中，斐波那契数列由比萨的莱昂纳多（斐波那契）于13世纪引入西方世界，并成为连接自然生长模式与美学原则的重要结构。

列奥纳多·达·芬奇等文艺复兴艺术家探索了源自数学的比例系统，其中包括与斐波那契数列密切相关的黄金比例。尽管列奥纳多并未明确提及斐波那契数，但他对解剖比例、建筑和谐与几何形式的研究，体现了他对数值平衡和模块化生长的哲学追求，这与斐波那契的递归结构相呼应。这种对隐含秩序和比例逻辑的强调，后来在现代艺术中再次出现；在现代艺术中，古典透视被有意解构，转而采用结构分析。

在二十世纪，立体主义通过将物体分解为几何平面，再依照内在的构图逻辑而非视觉写实主义重新组合，对艺术中的数学结构进行了激进的重新诠释。尽管巴勃罗·毕加索和乔治·布拉克等立体主义艺术家并未明确运用斐波那契数列，但他们对模块化分解、重复和比例平衡的强调，与斐波那契增长所蕴含的递归原则和层级原则相呼应。瓦西里·康定斯基等艺术家进一步将这些观念抽象化，他明确将形式、几何学和节奏与数学秩序及精神秩序联系起来。康定斯基的抽象构图强调动态平衡、几何关系和结构和谐，与受斐波那契启发的递进观念和

自相似性。与此同时，萨尔瓦多·达利等艺术家直接将黄金比例和基于斐波那契数列的比例融入《style id='1'>最后的晚餐圣事等作品中，展现了数学比例与艺术意图的明确融合。

从文艺复兴时期的比例，到立体主义结构分析，再到康定斯基的抽象艺术以及有意采用斐波那契数列构图的作品，这一历史轨迹为当代对绘画中斐波那契数列的探索奠定了基础。它表明，数学与视觉艺术之间的对话并不局限于明确使用数值，还涵盖了更深层的结构原则，而这些原则仍在艺术运动和审美框架中不断演变。

3. 斐波那契数列的数学基础

斐波那契数列是一列数，其中每个数都是前两个数之和。它从 0 和 1 开始，并无限延续：0、1、1、2、3、5、8、13，依此类推。相邻斐波那契数的比值近似于黄金比例（约为 1.618）；黄金比例一直与审美和谐与美感联系在一起。

Th斐波那契数列由递推关系定义　　关系

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = 0,\ F_1 = 1,$$

是数学与自然中最优雅且无处不在的结构之一。它的递归结构体现了自我生成与增长的概念，反映出简单与复杂之间的平衡——这一理念与数学绘画中的视觉构图深深共鸣。

3.1. 闭式与黄金比例

斐波那契数列有一个闭式表达式，称为比奈公式：

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi},$$

其中，$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$是黄金比例，$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$是它的共轭数。相邻斐波那契数的比值满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

这一收敛体现了比例与和谐的审美理想。在视觉艺术与几何学中，φ 主导着空间平衡——通过安排元素的位置，使彼此不相互压过，从而营造出能自然契合人类感知的动态平衡。

3.2. 几何与解析解释

每个斐波那契数都可以用铺砌或空间划分来进行几何表示。例如，斐波那契螺旋是通过连接正方形内的四分之一圆得到的，这些正方形的边长等于斐波那契数。由此形成的螺旋近似于对数螺线，在极坐标中表示为

$$r = ae^{b\theta}, \quad \text{where} \quad b = \frac{\ln\varphi}{\pi/2}.$$

这条曲线象征着自相似生长，广泛存在于各种自然现象中，从向日葵种子排列到鹦鹉螺的贝壳以及树木分枝。在数学艺术中，这条螺旋捕捉了从有限递归到无限扩展的理念，连接了代数递推与几何之美。

3.3. 应用与数学联系

斐波那契数列与数学的多个分支有着深刻的联系：

- **数论：** 斐波那契数具有优美的整除性和模性质。例如，$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$，而斐波那契数列模$k$ 的结果总是周期性的（皮萨诺周期）。

- **组合数学：** F_n 表示使用 1×1 和1×2 块砖铺满一块 $1 \times (n-1)$棋盘的铺法数。它也表示长度为$n-1$ 且不含连续两个 1 的二进制串数量。

- **线性代数：** 递推关系可以表示为矩阵幂：

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  这种形式可用于谱分析；矩阵的特征值为 φ 和 ψ，再次印证了黄金比例的核心作用。

- **分形与动力系统：** 斐波那契递推关系自然地出现在替换动力系统的研究中。考虑斐波那契替换

$$\sigma: \quad a \mapsto ab, \qquad b \mapsto a.$$

  相应的替换矩阵为

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  其特征值为 φ 和 ψ。迭代 σ 会生成无限字序列，其字母频率收敛于 M_σ 的归一化佩龙–弗罗贝尼乌斯特征向量，从而得到a与b的极限比例φ 。从几何上看，用区间对这些字序列进行编码会生成斐波那契准晶，这是一种一维自相似铺砌，其膨胀因子为 φ，满足

$$\Lambda = \varphi\Lambda \cup (\varphi\Lambda + 1),$$

  一个表达精确自相似性的函数方程。铺砌动力系统（X_σ, T）的谱性质由 M_σ 控制，将斐波那契增长与准周期结构（如彭罗斯铺砌）所特有的纯点衍射谱联系起来。

3.4. 艺术插图：从列奥纳多到特纳

以斐波那契数列和黄金比例为体现的数学和谐，长期以来一直是视觉艺术的指导原则。比例、对称与视觉平衡之间的相互作用，在文艺复兴和浪漫主义大师的构图中都得到了生动展现。本节将通过两个著名范例，展示数学理念如何融入绘画：列奥纳多·达·芬奇的蒙娜丽莎 和 J. M. W. Turner 的风景画。

列奥纳多·达·芬奇的蒙娜丽莎与黄金比例

列奥纳多的蒙娜丽莎 （约1503—1517年）现藏于卢浮宫博物馆，常被誉为艺术中数学美的典范。众多几何分析显示，这幅肖像的空间组织近似于黄金比例 $\varphi \approx 1.618$，而黄金比例与斐波那契数列直接相关，具体如下

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

当将黄金矩形或斐波那契螺旋叠加在画作上时，头部、眼睛和双手等关键特征都与其曲线大致对齐。这表明其构图自然呼应了递归比例关系，即每个视觉部分都以与前一部分相协调的比例增长。

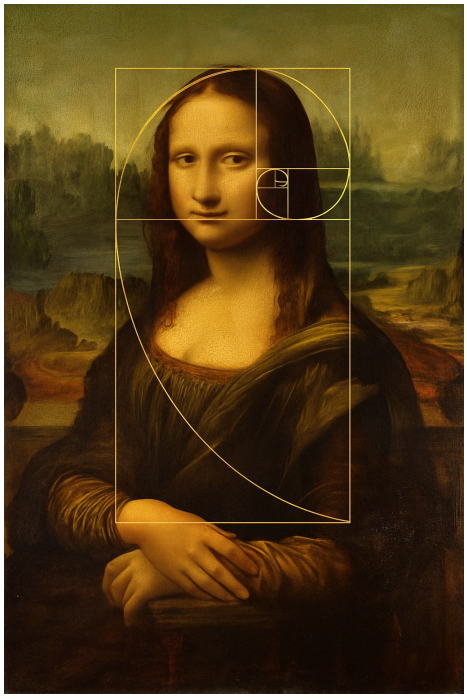


图1：图4.2：列奥纳多·达·芬奇的蒙娜丽莎，常被视为黄金比例的几何体现 . 斐波那契螺旋与黄金矩形的叠加展示了人物 s 面部区域与躯干之间近乎理想的比例平衡。

尽管没有确凿的历史证据表明列奥纳多曾有意识地运用黄金比例公式，但记录于《大西洋古抄本》中的几何学、解剖学和比例研究，表明他对数学和谐有着深刻的认识。蒙娜丽莎中基于斐波那契数列的螺旋划分体现了一种有机平衡：这是自相似生长与自然形态递归完美的视觉隐喻。

J. M. W. Turner 与光的几何学

约瑟夫·马洛德·威廉·透纳（1775–1851）是英国最具远见的浪漫主义画家之一，他将数学、几何学和科学观察融入自己的创作实践中。后来，他获任

透视学教授，并在皇家艺术学院任职。特纳以数学般的精确性探索几何投影、灭点和大气光学。他的素描本中绘有圆、螺旋和线性图示，用以指导他创作明亮的海景画与天空的构图。

两幅作品尤能体现艺术与数学的结合：

1. 诺勒姆城堡，日出 （约1845年）：特纳通过线性透视和平行的地平线来构建构图。城堡与倒影沿画布水平φ分区的布局，营造出一种视觉平衡，与黄金比例相类似。天空中色彩强度的渐变可以解读为连续的指数衰减，数学表达式为$I(x) = I_0 e^{-kx}$，代表光扩散。



图2：图4.3：J. M. W. Turner的诺勒姆城堡，日出。地平线的几何布局与城堡的位置大致对应黄金比例的分区，而亮度渐变则遵循指数衰减模式，展现了大气透视背后的数学结构。

2. 霜晨（1813年）：这幅作品展现了对灭线的精准控制，引导观者的视线投向远处的焦点。空间收缩遵循几何投影原理，即平行线相交于无穷远处——这是艺术中射影几何的优雅体现。

特纳的《霜晨》展现了一个组织严密的几何结构，其形态由黄金比例分割、对数螺线和经典构图网格共同塑造。在$x = W/\varphi$ 和$y = H/\varphi$ 处的垂直与水平分区，与马、马车和发光的地平线等主要叙事元素高度契合，从而将风景划分为和谐平衡的区域。一系列宽度分别为W、W/φ、W/φ^2.....的嵌套黄金矩形，包围着逐渐细化的视觉特征，形成递归的 φ尺度层级，呼应了这幅绘画富有节奏感的空间流动。叠加一条近似的斐波那契（对数）螺线，该螺线由满足$r(\theta) = ae^{b\theta}$ 且$b = \ln(\varphi)/(\pi/2)$的四分之一圆弧生成，描绘出一条自然的观看轨迹：从前景经过中央的马和马车，延伸至远处的大气光线。画布对角线在.....附近相交

马、车轮和右侧工人附近，从而强化了构图中心；与此同时，三分法网格与树线、家庭群像和劳工的位置相重合。总的来说，这些黄金比例直线、螺旋曲线、对角线和三等分，将视觉注意力集中于关键焦点周围，揭示了特纳大气风景画背后紧凑而有力的数学框架。

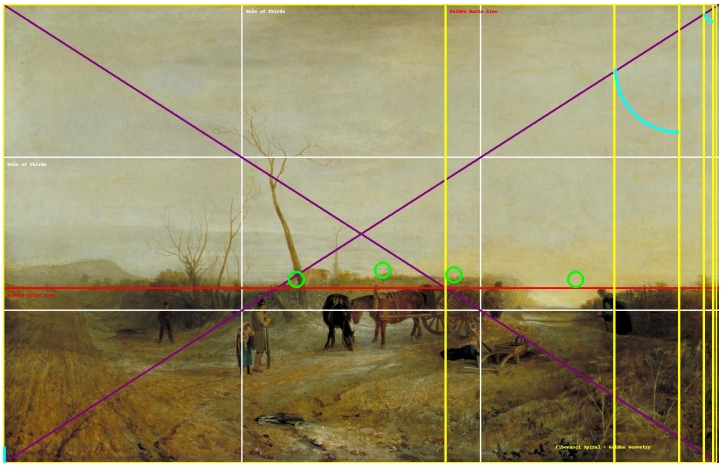


图3：图4.4：J. M. W. Turner 的《霜晨》。地平线、道路和建筑形态的布局呈现出接近黄金比例的比例分割，营造出均衡的视觉几何。此外，亮度分布——从明亮、雾气弥漫的前景延伸至柔和朦胧的远景——大致遵循指数衰减曲线。这些结构特征共同揭示了特纳在表现大气纵深与清晨光照时所依托的数学构造。

通过这些作品，特纳将科学与艺术融为一体，展现出光、空间与形式的变化可以建立在定量原理之上。他对透视和亮度的运用与反射和衰减的数学模型相契合，将经验观察化为视觉诗意。

因此，从列奥纳多的比例几何到特纳的光谱透视，数学既构成艺术无形的架构，也奠定了其哲学基础。借由斐波那契增长与几何和谐的语言，这些杰作提醒我们：美往往诞生于数学秩序与创作直觉交汇之处。

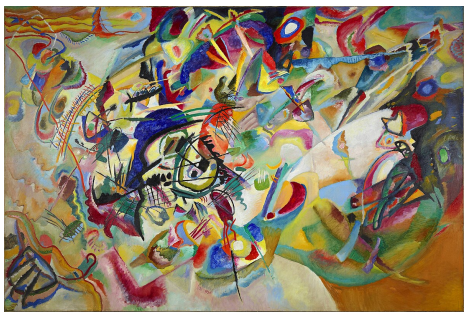
3.5. 康定斯基与数学抽象

瓦西里·康定斯基（1866–1944）通常被视为抽象艺术的先驱，他发展出了一种以数学结构为基础的视觉语言。在其论著《点线面》（1926年）中，康定斯基将绘画形式化为一个几何系统：点是“零维核”，线是点在运动作用下形成的轨迹，而平面则是这些元素相互作用的场域。这一框架映射了几何学和动力系统中的基本概念，在后者中，运动会生成高维对象。康定斯基的构图经常运用对称、旋转和仿射变换，创造出线性算子作用于几何基本元素的视觉类比。他反复使用圆、三角形和弧，形成准分形层叠，强化了斐波那契螺旋和自相似

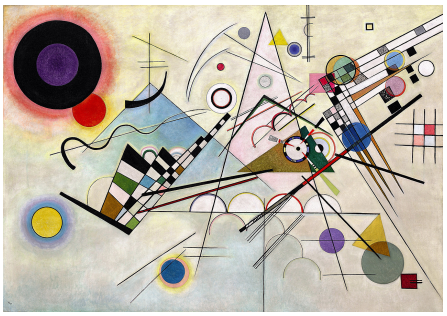
生长中所体现的结构逻辑。因此，康定斯基的作品在抽象绘画与数学思维之间架起了一座桥梁，揭示出一种根植于几何学、比例和视觉形式代数的美学。

3.5.1. 康定斯基《构图七》与《构图八》的数学分析

康定斯基的《构图七》（1913年）和《构图八》（1923年）代表了抽象艺术两个不同却在数学上相关的阶段。《构图七》展现出连续、流畅且高度非线性的运动场，而《构图八》则由圆、三角形和直线等刚性的几何基本元素构成，并遵循一套底层算子系统。两件作品都可以在希尔伯特空间 $H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ 中进行诠释，其中每个视觉元素都是由几何算子作用于有限组基形状而生成的。



(a) 图 4.5：瓦西里·康定斯基的《构图七》（1913年）。



(b) 图 4.6：瓦西里·康定斯基的《构图八》（1923年）。

图 4：康定斯基《构图七》与《构图八》的比较。

《构图七》作为一种非线性动力流：。《构图七》中的扫掠弧线、曲线和色彩渐变可以建模为初始几何场 $\phi_0 \in H$ 在非线性流作用下的演化

$$\phi(t) = \Phi_t(\phi_0),$$

其中，$\{\Phi_t\}$ 是由微分同胚变换构成的半群，在 Ω 上表示拉伸、剪切和平流。这些算子类似于流体动力学或非线性偏微分方程中出现的算子，产生连续变形，而非离散的几何轨道。绘画中的密集叠层对应于不同时刻的叠加 $\sum_{k=1}^{N} \phi(t_k)$，因此，《构图七》可被视为非线性算子作用随时间积分形成的场，产生了一个具有高维轨迹的动力系统的视觉类比。

《构图八》作为仿射算子系统..... 康定斯基的《构图八》（1923年）可以被解释为一个作用于有限个几何生成元上的算子系统的实现。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 表示画布，并考虑希尔伯特空间 $H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$，其中三个分量分别代表 RGB（或 CMY）颜色通道。固定一组小型原型形状集合 $\{\phi_j\}_{j=1}^{J} \subset H$，例如圆盘、线段、三角形和多边形；每种形状都由某个区域的示性函数乘以一个常值颜色向量给出。令 $\mathcal{G}$ 表示由 Ω 上的平移T_a、旋转R_θ和各向异性缩放S_λ 生成的半群；每个元素$U \in \mathcal{G}$ 通过 $(Uf)(x) = f(U^{-1}x)$ 在H 上酉地（差一个缩放因子）作用。

于是，《style id='1'>构图八》中的视觉内容可以建模为有限叠加

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \, U_k \phi_{j(k)}(x),$$

其中 $c_k \in \mathbb{R}^3$ 表示色彩强度，$U_k \in \mathcal{G}$表示每个元素的空间位置、方向和大小。轨道集 $\{U^k \phi_{j(k)}\}^N{}_{k=1}$ 为 span$\{\phi_j\}$构成一个结构化框架，因此几何冗余与重叠能够为构图提供稳定的表示。在此模型中，康定斯基对圆、放射线和相交多边形的运用，对应于 $\mathcal{G}$ 中可交换算子与不可交换算子的相互作用，由此产生谱分解（同心圆作为“特征模态”）和干涉（交叉直线作为叠加方向）的视觉类比。因此，《构图八》可视为一个明确的实例：几何基 H 上的抽象算子系统生成了一个复杂却受数学控制的视觉形式场。

比较数学结构.. 综合来看，《构图七》和《构图八》构成互补的数学模型：前者受形状空间中的非线性连续变形和高熵支配，后者则体现了离散仿射对称、群轨道和框架理论冗余。因此，这两件作品都可置于统一的算子理论框架之中，凸显康定斯基的抽象如何源于变换系统在 H中的几何场与颜色场上受控作用。

3.5.2. 康定斯基《构图》中的谱、代数与拓扑结构

除了视觉上的差异之外，还可以通过更深层的谱结构和代数结构来解读《构图七》和《构图八》。若 U 表示非线性流 $\{\Phi_t\}$ 或仿射半群 $\mathcal{G}$中的一种几何变换，则其在 H 上诱导的算子（定义为 $(U f)(x) = f(U^{-1}x)$）会生成视觉场上的一个变换群表示。《构图八》中的圆形图案表现得如同径向算子的近似特征函数，而《构图七》中的扫掠曲线则编码了 Ω 上向量场的积分曲线，暗示着一种潜在的拓扑流。直线与弧的交点构成算子相互作用的节点，类似于调和分析中特征模态的叠加。因此，两幅构图都展现出一种谱—拓扑组织：康定斯基的抽象形式源自变换系统的代数作用，将他的艺术呈现为几何、运动与算子理论之间的相互作用。

4. 自然与艺术中的斐波那契数列

在自然界中，斐波那契数列以各种形式出现，例如茎上叶片的排列、树木的分枝，以及向日葵中种子的排列模式。这些自然图案启发了艺术家将斐波那契数列融入作品，在有机世界与人类创造力之间架起桥梁。

从艺术角度来看，斐波那契数列体现了增长、节奏与比例的数学本质。比例 φ历来指导着建筑师和画家——从帕特农神庙的立面到列奥纳多·达·芬奇的《维特鲁威人》。在数学绘画中，使用基于斐波那契数列的网格、螺旋构图或缩放因子，会引入一种自然的秩序感

融入抽象之中。每一次迭代都在视觉上映射出该数列的递归逻辑：不失真的扩展，以及通过自我指涉实现的和谐。

因此，斐波那契数列不仅是一个有趣的数值现象，也是连接数学、几何学与艺术的基础桥梁——一种定义结构之美与创作平衡的普遍节奏。

斐波那契数列的数学基础

斐波那契数列由递归方式定义为

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 1,$$

由此得到广为人知的递进数列

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots$$

其影响远远超出数论的范畴。斐波那契数自然地出现在叶序、生物生长模式、贝壳与花朵的比例、建筑设计以及众多艺术构图中。数列的递归特性使其比值趋近于黄金比例 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，由此形成特征性的缩放模式与螺旋，这些形态定义了自然界中许多自相似结构。



图 5.1数学与艺术的交汇 作者：Shankhadeep Mondal。

在绘画《当数学与艺术相遇》中，斐波那契数列构成了整幅构图背后的生成结构。鸟群的聚集、阳光在水面的倒影，以及云的分布，都遵循类斐波那契分组，视觉元素的数量和间距按照 1、2、3、5、8 递增。前景中的树木采用斐波那契分枝模式构建，其中每一条新枝都由前两条枝向相加而成，映照出递推关系$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$。

山脉的几何学构成了作品的核心数学主题。当山峰被视为X,Y 平面上的点时，它们之间的水平和垂直距离遵循如下比例模式

$$1 : 1 : 2 : 3 : 5 : 8,$$

展现出由斐波那契数列构成的风景。连接这些山脉分界处的端点，所得总数对应于下一个斐波那契数，在视觉上

体现了数列在地形中的递归特性。陆地的轮廓和船的位置也呈现出类似的比例逻辑；船的朝向沿着受斐波那契引导的视觉轨迹展开。

这些元素共同展示了斐波那契数列如何不仅在象征意义上，而且在结构层面支配一件艺术作品，塑造空间韵律、构图平衡以及场景中逐渐浮现的和谐。因此，这幅绘画诠释了数学递归如何与自然意象无缝融合，在数值抽象与有机表现之间架起桥梁。

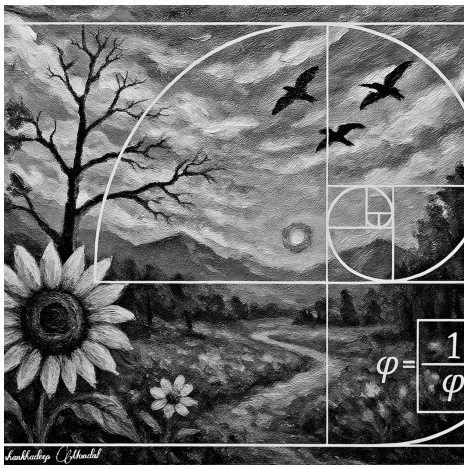


图 5.2 无限的对称 作者：Shankhadeep Mondal。

第二幅绘画 《无限的对称》呈现了一幅单色风景，其中斐波那契数列和黄金比例 φ 被明确嵌入构图的几何结构之中。向日葵体现了斐波那契叶序，其各个方向上的螺旋数量反映了连续的斐波那契数，而树木的分枝则遵循递推关系 $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$。云朵的排列、鸟的飞行轨迹以及山脉的层叠，都与由嵌套黄金矩形生成的不断扩展的黄金螺旋相一致。甚至小径的曲率和太阳的位置，也对应于画布上按φ缩放的分割。

《梦之几何中的孤独》
这幅超现实主义绘画将情感孤独与隐约的数学意蕴融为一体。月夜天空及其在水面的倒影形成一对近似对称的曲线，令人联想到关于水平轴对称的几何概念。绵延的云带宛如平滑的波形，暗示着可由 $\mathbb{R}$上的连续函数建模的振荡行为。沿海岸线排列的人物和物体遵循一种宽松的递归间距，呼应着一个增量逐渐减小的非均匀数列 $\{x_n\}$ 的结构，营造出一种朝远方地平线收缩的视觉韵律。通过这些元素，绘画运用对称、振荡与递归等数学暗示，深化了其在无垠长夜中内省而神秘的氛围。



图 5.3《梦之几何中的孤独》作者：Shankhadeep Mondal。

5. 立体主义、高维数学与分形几何

从历史上看，早期立体主义者通过 Esprit Jouffret 的重要著作接触到了高维几何。他在1903年 关于四维多胞体的论著中，明确给出了超立方体、超单纯形和多胞体展开图的图示投影。Jouffret 的图示又植根于高斯、黎曼和庞加莱在微分几何领域的发展；他们质疑欧几里得空间的公理，并引入了曲率、高维流形和非欧结构。立体主义的数学家 Maurice Princet（所谓的“立体主义的数学家”）将这些思想传达给毕加索、布拉克及其同时代艺术家，促使他们放弃单一中心投影，转而采用多重投影、多维映射。

5.1. 立体主义、高等数学与分形几何结构

20世纪初立体主义的发展，与几何学和分析学领域的重大进展同步发生，尤其是黎曼、庞加莱和 Jouffret 关于非欧流形、高维嵌入和投影理论的研究。通过 Maurice Princet，毕加索和布拉克接触到了 Jouffret 绘制的四维多胞体图示，这些图示展示了超立方体及其他多维物体的平面投影。从数学角度而言，立体主义表示可以建模为一个多重投影算子系统

$$C(X) = \sum_{\theta \in \Theta} w(\theta)\, P_\theta(X),$$

其中每个 $P_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 表示一个独特的几何视角。这种方式取代了经典的单点线性投影，将多个不相容的方向叠加起来，从而有效模拟嵌入物体 $X \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ 在平面上的投影。

将视觉对象分解为平面面片，这与希尔伯特空间 $H = L^2(\Omega)$ 中的框架展开相对应，其中图像 f 表示为

$$f = \sum_k \langle f, g_k \rangle \phi_k,$$

以 $\{\phi_k\}$ 作为三角形、四边形或曲面片等几何原子，构成一个冗余稳定框架。这种冗余预示着擦除鲁棒性，这是现代调和分析和框架理论的一项关键特征。

此外，许多立体主义曲面呈现出层级自仿射细分，与分形迭代函数系统（IFS）类似。对于仿射压缩映射 $T_i(x) = A_i x + b_i$，分形集F 满足

$$F = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(F),$$

其豪斯多夫维数d 由 Moran 方程 $\sum^{N}{}_{i=1} r_i^d = 1$决定，其中$r_i$ 为缩放比。立体主义构图常常模拟这种自仿射结构，形成多尺度几何重复和视觉复杂性。

因此，立体主义可以被严格地解读为高维投影几何、分形自相似性与算子论分解的交汇，将艺术抽象嵌入统一且深具数学意味的框架之中。

5.1.1. 立体主义与框架理论分解

立体主义中将物体分解为重叠几何面的做法，与希尔伯特空间$H = L^2(\Omega)$中的框架展开相对应。若 $\{\phi_k\}$ 表示立体主义构图中出现的平面片段集合，则图像可表示为

$$f = \sum_k \langle f, g_k \rangle \phi_k,$$

其中 $\{g_k\}$是一个对偶框架。框架固有的冗余性映照出立体主义多个同时视点的原则，即使视觉信息部分丢失，也能实现稳定重建。

5.1.2. 立体主义作为多投影算子系统

立体主义的一种核心数学解释，是用多个投影的叠加取代经典单视点投影P ：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 。给定一族视点相关算子 $\{P_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\}_{\theta \in \Theta}$ 以及权重$w(\theta) \geq 0$，其中$\sum_{\theta \in \Theta} w(\theta) = 1$，物体$X \subset \mathbb{R}^3$ 的立体主义表示可建模为

$$C(X) = \sum_{\theta \in \Theta} w(\theta)\, P_\theta(X).$$

这种多重投影算子捕捉了不相容视点同时呈现的效果，实际上模拟了先进行高维嵌入、再作复合平面投影的过程。

5.1.3. 立体主义与分形几何：自相似性与迭代算子

许多立体主义作品中平面的递归细分，与自相似和自仿射迭代函数系统（IFS）的作用相似。设 $\{T_i\}^{N}{}_{i=1}$ 为 $\mathbb{R}^2$上的仿射映射，$T_i(x) = A_i x + b_i$，其中每个A_i 都是压缩映射。相应的分形集F 是 Hutchinson 算子的定点，

$$F = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(F),$$

映照出分析立体主义中反复切面化与几何细化的过程。这类结构呈现出非整数维数，其豪斯多夫维数 d 由 Moran 方程$\sum^{N}{}_{i=1} r_i^d = 1$确定，其中 r_i 表示压缩比。因此，立体主义分解可以被视为分形自相似性与迭代算子动力学的视觉类比。

5.1.4. 立体主义与分形测度

构图中的几何分解可以使用自相似分形测度进行建模。设 μ 为满足不变关系的概率测度

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} p_i \, \mu \circ T_i^{-1},$$

其中， $\{T_i\}$ 是仿射压缩映射， $\{p_i\}$ 是权重。这类测度出现在对自相似集上的分形框架和小波的分析中，而立体主义作品中平面面片的分布则与 μ 的支撑集相似。这种对应关系将立体主义的多尺度视觉密度与分形测度的调和性质和几何性质联系起来。

5.2. 立体主义作为高维嵌入问题

立体主义的同时性可以从数学角度解释为高维物体向平面的投影。设 $E : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 4,$ 是一个视觉对象的嵌入，并设$P_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ 表示依赖视点的投影。那么，立体主义图像可通过以下复合映射建模：

$$C(X) = \sum_{\theta \in \Theta} w(\theta) \, P_\theta(E(X)),$$

其中$w(\theta)$是非负权重。这个框架将立体主义几何解释为多个n维投影的叠加，体现了高维结构向平面表示坍缩的过程。

5.3. 示例：一幅立体主义—分形几何构图



图6.1形状交响曲 作者：Shankhadeep Mondal。

图 6.1 中的绘画展示了一种立体主义构图，由相互重叠的三角形、四边形和曲线段构成，每个元素都代表一个底层三维物体的不同投影。视觉场可以建模为函数 $f \in L^2(\Omega)$, 并将其分解为几何原子 $\{\phi_k\}$，从而得到框架展开 $f = \sum_k \langle f, \ g_k \rangle \phi_k$。递归细分

将画布划分为更小的自仿射区域，这与迭代函数系统 $\{T_i\}$ 相呼应；该系统的不变集为 $F = \bigcup_i T_i(F)$，由此产生让人联想到分形测度的多尺度结构。曲线弧对应于高维嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{R}^4$的投影，而平面面片则代表由多重视点产生的投影 $P_\theta(X)$。因此，这幅图像是一个具体例子，展示了立体主义几何如何在单一数学表示中融合多投影算子、分形自相似性和框架理论冗余。



图6.2《生命与战争》——Shankhadeep Mondal 的一幅立体主义构图。

《生命与战争》运用立体主义几何，通过数学式碎片化来表现情感张力。构图由相交多边形、仿射变换和平面细分构成，反映了冲突之下形式的瓦解。人物和建筑块被分解为三角形和四边形面片，每个面片都对应形状空间中基础形状的局部线性变换。马和跪姿人物的变形源于非均匀缩放与旋转，而周围的面则通过相邻平面间的对称性破缺形成。这种几何解构是立体主义的标志，它营造出一种视觉拓扑，使多重透视同时并存，揭示战争如何以非线性扰动打破生活原有的度量结构。

6. 在绘画中运用斐波那契数列的技巧

艺术家常借助黄金矩形和黄金螺旋等几何工具，将斐波那契数列融入作品。一种常见技法是构造斐波那契铺砌——由一系列相邻正方形组成，其边长依次为 1、1、2、3、5、8……——然后在相对的角之间画出圆弧，形成黄金螺旋。这种螺旋常用于安排构图、确立焦点，并自然地引导观者的视线在艺术作品中移动。

案例研究

列奥纳多·达·芬奇的 《维特鲁威人》展示了人体中的黄金比例；Dalí 的 《最后的晚餐圣事》运用黄金矩形塑造空间几何；许多当代艺术家则采用斐波那契网格和数字渲染，创作出数学上均衡的设计。

算法 1生成斐波那契引导的绘画布局

1：选择一个边长为 1 的初始正方形。2：在第一个正方形旁边拼接另一个边长为 1 的正方形。3：**对于**$n = 3$到 N **执行**4：构造一个边长为 $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ 的新正方形，按照逆时针模式将其连接到现有矩形上。5：**结束循环**6：在每个正方形内绘制四分之一圆弧，形成黄金螺旋。7：将主要焦点元素（人物、物体、光源）放置在螺旋上曲率较高的点附近。8：使次要结构（山脉、树木、建筑物）与斐波那契矩形的边缘对齐。9：调整色彩渐变和阴影线，使其遵循螺旋方向，以增强视觉流动感。10：在保留斐波那契网格所定义的整体结构的同时，渲染最终细节。

构建基于斐波那契数列的构图算法

7. 立体主义结构与斐波那契比例的收敛

立体主义、斐波那契数列与黄金比例之间的关系，展现出几何抽象与数学比例引人入胜的融合。尽管早期立体主义画家并未明确宣称具有数学意图，但这一时期的许多作品都呈现出与 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 以及递归几何划分相契合的空间和谐。立体主义特有的破碎平面、变化的视角和仿射变换，自然适用于源自黄金矩形和斐波那契铺砌的比例系统。

这一融合的一个引人注目的历史范例是马塞尔·杜尚的《下楼梯的裸女（第二号）》（1912年）。其连续的碎片化形成了富有节奏的递进，让人联想到斐波那契递推$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$，而其中几个边界区域与黄金比例细分高度吻合。同样，毕加索的《曼陀林琴女郎》（1910年）和布拉克的《小提琴与烛台》（1910年）中，底层平面布局对应的比例网格呼应着黄金比例分割，展现出立体主义构图即便未被明确承认，也往往蕴含着数学平衡。

现代和当代艺术家拓展了这种对话。例如，马里奥·梅尔茨将明确的斐波那契数和螺旋融入结构上支离破碎的作品，展现了递归增长模式如何与立体主义几何并存。数字艺术和算法艺术进一步拓展了这些可能性：如今，计算工具能够生成由斐波那契螺旋、黄金网格和递归细分算法主导的立体主义构图，揭示出立体主义与数学比例之间的联系既有深厚的历史根源，也在创意实践中不断演变。

这些例子共同表明，斐波那契结构与黄金比例几何学为理解立体主义形式提供了有力的视角。数学增长规律与比例和谐能够与碎片化的视觉逻辑无缝融合，创作出兼具分析性、审美性和概念性的艺术作品。

8. 讨论

在绘画中运用斐波那契数列和黄金比例，展现了数学结构与艺术创造力之间引人入胜的交汇。历史上，艺术家常运用基于斐波那契数列的比例——例如黄金矩形和螺旋——来实现视觉平衡、富有节奏的间距以及连贯的构图流动性。这些构造往往与自然界中出现的图案相呼应，强化一种观者可能会直觉感受到的和谐感。尽管心理学研究对于黄金比例是否具有普遍的审美吸引力仍有争议，但可以明确的是，这类数学框架能够微妙地影响观者对秩序和视觉舒适感的感知。

在当代艺术中，数字工具和算法方法拓展了融入斐波那契结构的可能性。借助计算几何，艺术家如今能够生成复杂的递归图案和精确的比例网格，而这些图案和网格若靠手工构建则难度很大。这些现代技法凸显了斐波那契数列如何持续激发视觉设计的创新方法。归根结底，数学结构虽有助于提升构图的清晰度并引发审美共鸣，但其影响因个人感知而异，这表明斐波那契数列发挥的是灵活的指导原则，而非僵化的艺术规则。

9. 结论与未来展望

斐波那契数列和黄金比例持续深刻影响着绘画的理论与实践，从文艺复兴时期的比例研究到当代算法艺术，塑造着视觉结构。它们的递归与比例特性为艺术家实现平衡、和谐与视觉流动提供了数学基础，同时也连接起自然生长模式与艺术直觉。正如本文所述，斐波那契数列不仅影响几何布局和构图网格，也影响象征性诠释、审美共鸣与心理参与。

展望未来，有几个颇具前景的研究方向值得探索。其中一个方向是通过实证研究考察观者如何感知基于斐波那契数列的构图：心理物理实验、眼动追踪和神经美学方法或可阐明黄金比例结构是否确实能引导注意力，或引发独特的情绪反应。另一个方向是计算方法，包括用于生成斐波那契数列引导的艺术作品的递归细分算法、参数化设计工具和机器学习模型。将斐波那契几何融入虚拟现实和增强现实环境，也为打造由递归缩放塑造的沉浸式三维视觉体验开辟了更多可能。

跨学科研究还可以探索斐波那契几何与其他艺术体系之间的联系，例如立体主义、分形艺术或动力图案生成。在这一背景下，罗杰·彭罗斯爵士的非周期镶嵌提供了一个尤为丰富的研究框架。彭罗斯铺砌由遵循黄金比例的非周期排列构成，为创作一种在不发生平移重复的情况下仍呈现整体秩序的构图，提供了数学上精确而视觉上富有诗意的方法，因而为混合视觉系统提供了肥沃的探索空间。

除斐波那契结构外，卢卡斯数列由相同的递推关系定义，但初始条件不同，因此提供了一种密切相关却又独具特色的几何框架，其在绘画中的应用仍鲜有探索。虽然卢卡斯数也渐近趋近于黄金比例，但其组合性质和尺度性质各不相同，因此可能形成别具一格的比例系统、镶嵌和生长模式。目前，尚无系统理论或成熟的艺术实践

将卢卡斯数列几何融入视觉构图，使其成为未来研究中一个尚待探索且前景广阔的方向。

总之，递归数列为艺术构图提供了一套强大的数学语法。斐波那契数列不仅是数学美的历史象征，也是当代艺术探索的活跃源泉。持续探索它及卢卡斯数列等相关数列，有望拓展人们对数学启发的视觉艺术的理论认识与创作可能性。

10. 致谢

作者感谢莫哈帕特拉家族基金会以及中佛罗里达大学研究生院在本研究期间给予的支持。

参考文献

[1] Livio, M. (2002). 黄金比例：关于 *Phi* 这一世界上最令人惊叹的数字的故事, Broadway Books.[2] Dunlap, R. A. (1997). 黄金比例与斐波那契数, 世界科学出版社.[3] Huntley, H. E. (1972). 神圣比例：数学美研究, 多佛出版社.[4] Ghyka, M. (1977). 艺术与生活的几何学, 多佛出版社.[5] H J Jensen, (2002). 数学与绘画, 《跨学科科学评论》.[6] P. R. Halmos, 作为创造性艺术的数学, 科学研究荣誉学会, 1968年冬, 第56卷, 第4期（1968年冬）, 第375-389页[7] Doczi, G. (1994). 极限的力量：自然、艺术与建筑中的比例和谐. Shambhala.[8] Field, J. V. (1997). 无穷的发明：文艺复兴时期的数学与艺术, 牛津大学出版社.[9] Henderson, L. D. (1983). 现代艺术中的第四维与非欧几何, 普林斯顿大学出版社.[10] Lenoir, T. (1988). “复杂性美学：杜尚、未来主义与第四维

;”

《构形》，1(2)，201–243。[11] Bradley, J. J., Bradley, J. (2015).《数学与立体主义：毕加索与布拉克作品中的比例与结构》，《数学与艺术杂志》，9(3)，113–129。[12] Kaplan, C. S. (2013).《数学艺术中的算法美学》，列奥纳多，46(1)，12–22。[13] Penrose, R. (1974).《美学在纯数学与应用数学研究中的作用》，《数学及其应用研究所公报》，10，266–271。[14] Penrose, R. (1974).《镶嵌之谜》，《科学美国人》，236(1)，112–123。 18

[15] Merz, M. (1980). 斐波那契与当代艺术中的螺旋，贫穷艺术出版社。[16] Zeki, S. (1999).《内在视觉：艺术与大脑探索》，牛津大学出版社。[17] Zeki, S. (2013).《数学美的生物学基础线索》，《人类神经科学前沿》，7，1–12。[18] Weyl, H. (1952).《对称》，普林斯顿大学出版社。[19] Stewart, I. (2007).《美即真理：对称性史》，基础书籍出版社。[20] Arnheim, R. (1974).《艺术与视觉感知：创造性视觉心理学》，Universit

y

加利福尼亚大学出版社。[21] Ostwald, M. J., Vaughan, J.（2016）。“斐波那契数、比例系统与建筑构图”，*Nexus Network Journal*，18(2)，225–247。

11. 传记信息

Shankhadeep Mondal 博士在蒂鲁文南特布勒姆印度科学教育与研究学院获得数学理学硕士和哲学博士学位。他的研究聚焦于调和分析、抗擦除框架和谱优化。他还探索数学与视觉艺术的交汇，创作了 2500 多幅绘画作品。目前，他是中佛罗里达大学的博士后研究员。

Ram Narayan Mohapatra 教授是中佛罗里达大学的一位数学家，曾在加拿大和黎巴嫩任职。他已发表 250 多篇研究论文、出版两本书，并编辑了八部会议论文集。他目前的研究兴趣包括逼近论、平衡问题、张量以及 HilbertC^*模上的框架。