arXiv:2601.00234v1 [math.AP] 1 Jan 2026

一维过冷 Stefan 问题极大解的唯一性

KAI HONG CHAU、YOUNG-HEON KIM 和 MATHAV MURUGAN

Abstract. 我们证明了一维过冷 Stefan 问题的极大弱解具有唯一性。这是通过证明一维情形下，相应的自由目标最优传输问题的最优解（见 [3], ）与成本函数的选择无关而得出的。此外，我们证明过冷 Stefan 问题不具备单调性和 L^1-Lipschitz 稳定性，而这些性质在先前论文 [11] 所研究的类似问题中是成立的。不过，在一维情形下，该问题对于测度弱收敛具有稳定性。

Contents

1. 引言 2 2. 符号约定 3 3. 牛顿势 4 4. 一维唯一性 7 4.1. 定理 1.2 和定理 1.3 的证明 11 5. 稳定性 12 5.1. 单调性缺失 12 5.2. Lack of L^1-Lipschitz 稳定性 12 5.3. 一维测度弱收敛下的稳定性 13 6. 附录 14 6.1. 定理 4.1 步骤 1 中 $(-1,1)$ 上唯一驻点的证明 14 参考文献 16

Date：2026年1月5日。MM 的部分研究经费由 NSERC（RGPIN-2024-06125）和加拿大研究讲席计划（CRC-2023-00048）提供。YHK 的部分研究经费由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）提供，包括探索资助 RGPIN-2019-03926 和 RGPIN-2025-06747，以及新前沿研究基金（NFRF）的探索资助（NFRFE-2019-00944）。YHK 还是 Kantorovich Initiative（KI）的成员，该计划由太平洋数学科学研究所（PIMS）的研究网络计划（PRN）提供支持。我们感谢 PIMS 慷慨的支持。本研究的部分工作是在 YHK 访问韩国科学技术院（KAIST）期间完成的，我们感谢该院的热情接待和优越的研究环境。©2026 作者所有。保留所有权利。

1. Introduction

过冷 Stefan 问题是一个用于描述过冷水冻结动力学的自由边界问题。它可以如下描述 [3]:

设 η 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数，且 $-\eta$ 描述过冷水 [14, 15]的温度。设$\chi_{\{\eta>0\}}$为水转化为冰时潜热变化的单位量。过冷 Stefan 问题是如下自由边界偏微分方程:

$$(St) \qquad \begin{cases} (\eta - \chi_{\{\eta>0\}})_t - \dfrac{1}{2} \triangle \eta = 0 \text{ on } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ \eta(\cdot,0) = \eta_0 \in L^1(\mathbb{R}^d), \\ E = \lim\limits_{t\to 0^+} \sup \{\eta(\cdot,t) > 0\}. \end{cases}$$

文献中已讨论了方程（St）解存在与否的条件；例如参见 [3, 7]。方程（St）的解并不具有唯一性；例如参见 [11, 命题 6.3]。与此同时，关于一维中特定类型解的唯一性已有大量研究 $d = 1$: 例如，在区域 $\{x \geq 0\}$上， [12] 通过概率论重构证明了 McKean–Vlasov 问题的局部唯一性，其方法与 [6] 中的方法相同，并且对初始数据 η_0作了局部假设。文献 [1, 6, 13] 分析了自由边界 Λ_t 关于时间 t的良好局部 H¨older 连续性或局部连续可微性，并证明某些物理解的全局存在性。此外， [2] 证明，在 η_0满足良好条件时，双侧 Stefan 问题的特定类型解具有唯一性 η。

在本文中，我们研究式（1.1）中定义的（St）的极大解的唯一性。需要指出的是，不同于 [1, 6, 13], 中的方法，我们仅分析不同原始解之间的次调和序关系，而不分析关于 Λ_t演化的任何性质。

我们的方法基于 [3]的结果。设 $O := \{\eta_0 > 0\}$ 为一个开集。于是， [3] 考虑了如下形式的布朗运动 W_t 随机优化问题:

$$(1.1) \qquad P(\mu,u,O) = \inf \left\{ \int_O u(x)dv(x) \middle| \tau \leq \tau^O, W_\tau \sim v \leq \chi_O \text{ and } W_0 \sim \mu \right\}$$

对于每个给定的严格超调和函数 $u: O \to \mathbb{R}$。这里， τ 是布朗运动的一个停时，而 τ^O 表示相对于域O的退出时。令$\eta_0 \leq_{SH,O} \nu$ 表示次调和序（见第2节）。在 [3, 定理6.5],中证明了，如果 $\mu = \eta_0$ 满足（C_0）:

$$(C_0) \qquad \begin{array}{l} \text{There exists a constant } 0 < \delta < 1, \text{ such that } \eta_0 \leq_{SH,O} \nu \\ \text{关于 } O \text{，对于某个 } \nu \text{，满足 } \nu \leq \delta\chi_O, \end{array}$$

则存在 P 的最优解 ν^*(η_0, u, O)，且该解是一个特征函数

$$(1.2) \qquad \nu^* = \chi_A.$$

然后，由于 [3, 定理 7.4], , 当 $|\{\eta_0 = 1\}| = 0$ 时，存在一个满足初始数据 η_0 和初始区域 $E = O$ （几乎处处）的弱解 η，其对应于与问题 $P(\eta_0, u, O)$ 的最优解 ν^* 相关联的欧拉变量。此外， η 在 [3, 定义 1.3]的意义下是极大的:

定义 1.1 (极大解)。 若对任意具有相同初始数据 η_0 和初始区域 $\{\eta_0 > 0\}$的其他弱解 $\tilde{\eta}$，弱解 η 是 (St) 的极大解，条件是:

$$\chi_{\Sigma(\eta)} \leq_{SH} \chi_{\Sigma(\tilde{\eta})} \; implies \; \eta = \tilde{\eta}.$$

这里，过渡区 $\Sigma(\eta)$ 定义为过冷水转化为冰的区域，即，

$$\Sigma(\eta) = \{x \mid \eta(x,t) = 0 \; for \; some \; 0 < t < \infty\} \bigcap \{\eta_0 > 0\}.$$

注意，事实上，对于 η，由 ν^* [3, 定理7.2]生成的 $\nu^* = \chi_{\Sigma(\eta)}$。

对于每个固定的 u， $P(\mu, u, O)$ 的优化器 ν^* 是唯一确定的（[3, 推论6.6]）。我们关注这样的最优解 ν^* 是否独立于 u，以及（St）的极大解是否唯一。在一维情形下，我们证明答案是肯定的:

定理1.2. 设 $O \subset \mathbb{R}$ 是一个有界开集。给定 $\mu = \eta_0$ 并满足（C_0）。则存在唯一的 ν^*（见下文(4.4) 中的描述），它对于所有光滑超调和函数 u 都是(1.1) 的最优原始解（见(2.3)）。

我们在第 4 节中的证明很大程度上依赖于这样一个事实：一维中的每个开集都可以表示为开区间的可数不交并。根据定理1.2，我们可以推论极大解具有唯一性（一维情形）:

定理 1.3。 在 [3, 定理 7。4], 所述的一维情形下，给定初始数据$(\eta_0, O \overset{a.e.}{=} \{\eta_0 > 0\})$，$(St)$ 的极大解 η 唯一，其中 $\chi_{\Sigma(\eta)} = \nu^*$，且 ν^* 是定理*1.2*中的唯一最优原始解。

还可以证明（见第5节），一维情形下的唯一极大解在弱收敛下是稳定的，但它不具备通常稳定斯特藩问题情形 [11]中由单调性所带来的更强的 L^1-Lipschitz 稳定性。

注 1.4。 我们指出，在撰写本文期间，我们发现 [4]在一维情形下得到了类似结果，并且还在一般维数下获得了其他结果，其中包括维数$\geq$ 2下对 ν^* 所选超调和函数的依赖性。

2. NOTATION

以下定义本文中使用的符号。其中大多数基于[3, 11]:

- O 是 $\mathbb{R}^d$中的一个有界开集，具有局部利普希茨边界。
- u 是满足以下条件的函数：(2.3) $u: O \to \mathbb{R}$， O 上的一个有界光滑函数，使得 $\triangle u < 0$.
- $\Omega = C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^d)$，即连续曲线空间。
- $\mathbb{P}^\zeta$ = Ω上的维纳测度，其初始分布为 ζ；这意味着对于我们的布朗运动 W_t， $W_0 \sim \zeta$。
- $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}^\zeta)$，其中 Ω 上配备了滤过概率空间、滤过的 σ-代数 $\mathcal{F}$ 以及概率测度 $\mathbb{P}^\zeta$。
- τ^A 是 $A \subset \mathbb{R}^d$的退出时，即在设定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}^\zeta)$ 中，对所有$\omega \in \Omega$，$\tau^A(\omega) = \inf\{t > 0 | W_t(\omega) \in A^c\}$。

- $M(\mathbb{R}^+)$ = 是 $\mathbb{R}^+$上的概率测度集合。
- τ 是一种随机化停时，描述如下： $\tau : \Omega \to M(\mathbb{R}^+)$，使得对所有 $t \geq 0$， $\omega \to \tau(\omega)([0,t])$都是 $\mathcal{F}_t$−可测的。
- k = 测度 ζ的质量： $k = \int d\zeta(x) = \zeta(X)$。
- β: 测度 ζ的均值／一阶矩： $\beta = \int x\, d\zeta(x)$。
- $\leq_{SH}$ 表示次调和序关系，描述如下： $\mu \leq_{SH} \nu$ 若存在一个（随机化）停时 τ，使得$W_0 \sim \mu$、 $W_\tau \sim v$、 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$。
- $\leq_{SH,\ O}$: 表示关于 U的次调和序关系，描述如下：$\mu \leq_{SH,\ O} \nu$ 若存在一个（随机化）停时 τ，使得 $\tau \leq \tau^O$、 $W_0 \sim \mu$、 $W_\tau \sim v$、 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$。

3. Newtonian potentials

首先，我们证明一个关于牛顿势和次调和序的引理。本节中的结果适用于一般维数。

$\mathbb{R}^d$上的牛顿势定义为

$$k(y) := \begin{cases} -\frac{1}{2}|y| & d = 1, \\ -2\pi \log |y| & d = 2, \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d}|y|^{2-d} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中， ω_d 是 $\mathbb{R}^d$中单位球的体积。注意，这满足

$$\Delta N(y) = -\delta_0.$$

对于任意有限博雷尔测度 μ，如 [10] 中所示，可以将 μ 的势 U^μ 定义为

$$U^\mu(y) = \int k(y-x)\ d\mu(x).$$

函数 U^μ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是超调和的，因为

$$\Delta U^\mu(y) = -\mu(y) \leq 0 \text{ for all } y \in \mathbb{R}^d.$$

记

$$\mathcal{A}_{\mu,O} = \{\nu : \mu \leq_{SH,O} \nu,\ \nu \leq \chi_O\}$$

配备偏序关系$\leq_{SH,\ O}$。根据 [3, 5, 9], , 若 $\mu \leq_{SH,\ O} \nu$，则存在一个停时 $\tau^* \leq \tau^O$，使得 $\mathbb{E}(\tau^*) < \infty$，并且 $W_0 \sim \mu$和 $W_{\tau^*} \sim \nu$。因此，$\mathcal{A}_{\mu,\ O}$是 $P(\mu,\ u,\ O)$ 的可容许集合，即，

$$\mathcal{A}_{\mu,O} = \{\nu : \nu \leq \chi_O, \exists \text{ stopping time } \tau \leq \tau^O \text{ s.t. } W_0 \sim \mu, W_\tau \sim \nu\}.$$

与此同时， [10] 提出了一种利用牛顿势刻画次调和序的方法。

引理 3.1。 设 O 是一个有界凸开集，使得

(1) μ, ν 具有有界密度、相同的质量和一阶矩，并且紧支撑于 O; *(2)* $W_0 \sim \mu$, $\tau^O = \tau^O$几乎必然。

Then

$$\mu \leq_{SH,O} \nu \ \ (\Longleftrightarrow)\ U^{\mu}(x) \geq U^{\nu}(x) \ \textit{for all}\ x \in \mathbb{R}^d.$$

证明。($\Longrightarrow$)) 这是因为势函数是超调和的，并且 [3, 引理 2.4]。

($\Longleftarrow$) 首先，由于 μ, ν 是 O 上具有有界密度的紧支撑有限测度，根据 [10], U^{μ}, U^{ν} 在 $\mathbb{R}^d$ 上有限且连续。因此，我们需要验证 $\lim_{|x|\to+\infty}[U^{\mu}(x) - U^{\nu}(x)] = 0$。

情形 1. $d \geq 3$: 由 [10] 可知，结论显然成立。

情形 2. $d = 1$: 对于 $|x| \geq \sup_{z\in\overline{O}} |z|$,

$$\begin{aligned} U^{\mu}(x) - U^{\nu}(x) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\int_{\overline{O}}[x-y][\mu(y)-\nu(y)]\ dy \text{ when } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}\int_{\overline{O}}[y-x][\mu(y)-\nu(y)]\ dy \text{ when } x < 0 \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为 μ, ν 具有相同的质量和一阶矩。

情形 3. $d = 2$: 对于较大的 $|x| \gg 1$，当 $\zeta = \mu$ 或 ν 时,

$$\int_{\overline{O}} -2\pi \log\left(|x| + \sup_{z\in\overline{O}}|z|\right)\zeta(y)dy \leq U^{\zeta}(x) \leq \int_{\overline{O}} -2\pi \log\left(|x| - \sup_{z\in\overline{O}}|z|\right)\zeta(y)dy$$

Hence with $\int_{\overline{O}}\mu(y)\ dy = \int_{\overline{O}}\nu(y)\ dy$,

$$\begin{aligned} &\limsup_{|x|\to\infty}[U^{\nu}(x) - U^{\mu}(x)] \\ &\leq \limsup_{|x|\to\infty} -2\pi\left[\log\left(|x| - \sup_{z\in\overline{O}}|z|\right) - \log\left(|x| + \sup_{z\in\overline{O}}|z|\right)\right]\int_{\overline{O}}\mu(y)\ dy \\ &= \limsup_{|x|\to\infty} -2\pi \log\left[1 - \frac{2\sup_{z\in\overline{O}}|z|}{|x| + \sup_{z\in\overline{O}}|z|}\right]\int_{\overline{O}}\mu(y)\ dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

As μ and ν in the argument above can be interchanged,

$$\liminf_{|x|\to\infty}[U^{\nu}(x) - U^{\mu}(x)] \geq 0.$$

Therefore,

$$\lim_{|x|\to+\infty}[U^{\nu}(y) - U^{\mu}(y)] = 0.$$

由此及 [10], , 我们得到 $\mu \leq_{SH} \nu$，即存在一个停时 τ，使得 $W_0 \sim \mu$,$W_{\tau} \sim \nu$ 且 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$。现在我们来处理条件 $\tau \leq \tau^O$。

记 μ_t 为 $W_{\min\{\tau,t\}}$的分布。根据 [11, 注 4.2], , 对于所有 $0 \leq t < +\infty$, $supp(\mu_t)$ 包含于 $supp(\nu)$ 的凸包中。由于根据我们的假设 (2), ν 的支集紧包含于 O 上，并且由 O 的凸性可知 O 是凸的，因此 $supp(\mu_t) \subset O$，这意味着对于所有 $0 \leq t < \infty$, $\min\{\tau, t\} \leq \tau^O$，从而 $\tau \leq \tau^O$几乎必然成立。根据我们的假设 (1), $\tau^O = \tau^O$几乎必然成立，因此 $\tau \leq \tau^O$几乎必然成立。综上，$\mu \leq_{SH,\ O} \nu$。□

注 3.2。注意，对于良好的开域 O，$\tau^O = \tau^{\overline{O}}$ 几乎必然成立，例如具有光滑边界的有界连通开集。

一般而言，假设 $\tau^O = \tau^{\overline{O}}$ 和 $\bar{O}$ 为凸是必要的。例如，取 $O = (-1, 0) \bigcup (0, 1)$、$\mu = \chi_A$ 和 $\nu = \chi_B$，其中 $A = (-0.5, 0) \cup (0, 0.5)$，且 $B = (-1, -0.5) \cup (0, 5, 1)$。事实上，$W_{\tau^O}$ 和 $W_{\tau^{\overline{O}}}$ 的分布并不相同。经计算可知，$U^\mu \geq U^\nu$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立。然而，考虑到 $O = (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ 上的质量和一阶矩守恒，不存在满足 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ 的停时 $\tau \leq \tau^O$，使得 $W_0 \sim \mu$ 和 $W_\tau \sim \nu$ 成立。边界点 0 阻止粒子在 $(-1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 之间流动。此外，O 不是凸集。

由引理 3.1，我们还可以推导出，在该引理的相同假设 (1) 和 (2) 下，有 $\mu = \nu$ 当且仅当 $U^\mu = U^\nu$，因为 $\mu \leq_{SH,\, O} \nu \leq_{SH,\, O} \mu$ 蕴含 $\mu = \nu$。我们还有以下推论：

推论 3.3。给定引理 *3.1* 中关于 O 的条件，以下各项等价：

(1) $(\mathcal{A}_{\mu,\, O}, \leq_{SH,\, O})$ 在偏序 $\leq_{SH,\, O}$ 中有唯一的极大元。*(2)* 满足 *(2.3)* 的 u 所对应的 $P(\mu, u, O)$ 的最优解 ν^* 与 u 无关。*(3)* 对所有 $\nu \in \mathcal{A}_{\mu,\, O}$，$U^\nu(x) \geq U^{\nu^*}(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$。

证明。引理 3.1 表明 (1) 和 (3) 等价。还需证明 (1) 和 (2) 等价。

(1) $\Longrightarrow$ (2)：假设 $(\mathcal{A}_\mu, O, \leq_{SH}, O)$ 有唯一的极大元，即 $\nu^* \in \mathcal{A}_\mu, O$，使得对所有 $\nu \in \mathcal{A}_\mu, O$，都有 $\nu \leq_{SH, O} \nu^*$。根据次调和序的定义以及 u，[3, 的超调和性，引理 2.4] 得出 $\int_O u(x)\, d\nu(x) \geq \int_O u(x)\, d\nu^*(x)$。因此，$P(\mu, u, O) \geq \int_O u(x)\, d\nu^*(x)$。此外，由于 $\nu^* \in \mathcal{A}_\mu, O$，$P(\mu, u, O) \leq \int_O u(x)\, d\nu^*(x)$。因此，对所有满足 (2.3) 的 u，都有 $P(\mu, u, O) = \int_O u(x)\, d\nu^*(x)$，且 ν^* 是 $P(\mu, u, O)$ 的最优解。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：假设 ν^* 对于 $P(\mu, u, O)$ 的最优解与 u 无关。那么，对于所有满足 (2.3) 的 u，$P(\mu, u, O) = \int_O u(x)\nu^*(x)\, dx$。令 $\nu_1 \in \mathcal{A}_{\mu, O}, y \in \mathbb{R}^d$。注意，对于 $k_y(x) = k(y - x)$，当 $k_y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 时，存在一列磨光子 $\{\eta_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$，使得 $k_y * \eta_\epsilon \overset{L^1}{(O)} \to k_y$ 且 $|k_y| * \eta_\epsilon \overset{L^1}{(O)} \to |k_y|$。此外，$k_y$ 在 O 上是超调和的，$k_y * \eta_\epsilon$ 是在 O 上的光滑超调和函数。对于所有 $C > 0$，存在 $D > 0$，使得 $u_{y, \epsilon, C, D} = k_y * \eta_\epsilon - C|x|^2 + D$ 是非负有界光滑函数，且在 O 上有 $\Delta y_{y, \epsilon, C, D} < 0$。根据 $P(\mu, u, O)$ 的最优解定义，我们有 $\int_O u_{y, \epsilon, C, D}(x)\ \nu^*(x)\, dx \leq \int_O u_{y, \epsilon, C, D}(x)\nu_1(x)\ dx$。结合 $\nu^*(\overline{O}) = \nu_1(\overline{O})$，可得

$$\int_{\overline{O}} [k_y * \eta_\epsilon(x) - C|x|^2]\nu^*(x)\ dx \leq \int_{\overline{O}} [k_y * \eta_\epsilon(x) - C|x|^2]\nu_1(x)\ dx.$$

By taking $C \downarrow 0$, $\int_{\overline{O}} k_y * \eta_\epsilon(x)\nu^*(x)\ dx \leq \int_{\overline{O}} k_y * \eta_\epsilon(x)\nu_1(x)\ dx.$

此外，由于 $|k_y * \eta_\epsilon(x)\nu^*(x)| \le |k_y| * \eta_\epsilon$ 且 $|k_y| * \eta_\epsilon \xrightarrow{L^1(O)} |k_y|$，根据广义控制收敛定理，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\overline{O}} k_y * \eta_\epsilon(x)\nu^*(x)\,dx = \int_{\overline{O}} k_y(x)\nu^*(x)\,dx = \int_{\overline{O}} k(y-x)\nu^*(x)\,dx = U^{\nu^*}(y).$$

同样，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\overline{O}} k_y * \eta_\epsilon(x)\nu_1(x)\,dx = \int_{\overline{O}} k_y(x)\nu_1(x)\,dx = \int_{\overline{O}} k(y-x)\nu_1(x)\,dx = U^{\nu_1}(y).$$

因此，对于所有 $y \in \mathbb{R}^d$，$U^{\nu^*}(y) \le U^{\nu_1}(y)$，从而由引理 3.1，$\nu_1 \le_{SH,\,O} \nu^*$ ν^* 是 $\mathcal{A}_\mu$ 的唯一极大元，$_O$。□

4. UNIQUENESS IN 1 DIMENSION

本节将证明定理 1.2 和定理 1.3。

我们首先说明其思路：在一维中，任意开集都可以分解为

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n, d_n),$$

$_\infty$其中 $(c_n,\ d_n)$ 两两不交。令 $\mu = \sum \mu_n$，其中 $supp(\mu_n) \subset [c_n, d_n]$ 为$_{n=1}$给定的。注意，对于优化问题 $P(\mu,\ u,\ O)$ 的约束 $\tau \le \tau^O$ 不允许布朗运动在不同区间之间移动，因此 $P(\mu,\ u,\ O)$ 的最优解本身分解为最优解之和 $P(\mu_n,\ u_n,\ (c_n,\ d_n))$，其中 $\mu_n,\ u_n$ 是 μ 和 u 在 $(c_n,\ d_n)$ 上的限制。

我们将证明，$P(\mu,\ u,\ O)$ 的最优解为

$$\nu^* = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^*, \quad \text{where } \nu_n^* = \chi_{A_n} \text{ and } A_n = (c_n, e_n)\bigcup(f_n, d_n) \subset (c_n, d_n). \tag{4.4}$$

such that for each n, μ_n, ν_n^* have same mass and first moment.

这里的关键在于，相同的质量、一阶矩条件以及特定形式 A_n 完全决定了 ν_n 从 μ_n 得出，因此表达式 (4.4) 唯一地决定了 ν^* 从 μ 得出。特别地，当 $O = (-1,\ 1)$ 时，

$$A = \left(-1, -1 + \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}\right)\bigcup\left(1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}, 1\right). \tag{4.5}$$

A 的形状源于以下原因：在 [3], 中已经证明，为了最小化 $\int u(x)\nu(x)\,dx$，我们必须尽可能最大化 τ。在 $\nu^* = \chi_A$ 的条件下，对于每个 n，粒子应在边界点 c_n 和 d_n 周围的区间内达到饱和。ν_n^* 的其他端点源于如下性质：具有 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ 的布朗运动保持质量 k 和一阶矩 β。给定 k 和 β 后，这些端点便唯一确定。

我们首先证明以下定理：

∞**定理 4.1.** 设 $O \subset \mathbb{R}$ 为一个有界开集 $O = \bigcup (c_n, d_n)$。设 μ 为具有如下形式的初始分布 $\mu = \chi_E$，其中 E 为可测集，且 ν^* 由(4.4)给出。则有 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu, O}$。

证明这一点后，我们将在下一小节看到，(1.1) 的最优解由 (4.4) 给出。

定理 *4.1* 的证明。我们按以下步骤进行：

步骤 1。对于 $O = (-1,1)$，证明对于 $\nu^* = \chi_A$，其中 A 由 (4.5) 给出，满足 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,O}$，当 $\mu = \chi_{(a,b)}$ 时成立，其中 $-1 < a < b < 1$。对于一般的 $O = (c, d)$ 和满足 $c < a < b < d$ 的 $\mu = \chi_{(a,b)}$，通过对定义域进行平移和缩放，可以采用类似的证明。

步骤 2。对于 $O = (-1,1)$，证明对于 $\nu^* = \chi_A$，其中 A 由 (4.5) 给出，满足 n $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,O}$，当 $\mu = \sum_{k=1} \chi_{(a_i,b_i)}$ 时成立，其中 $(a_i, b_i) \subset (-1,1)$，$\min_k \ a_k > -1$ 和 $\max_k \ b_k < 1$。

步骤 3。对于 $O = (-1,\ 1)$，证明对于满足 A （见 (4.5)）的 $\nu^* = \chi_A$，其满足$\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\ O}$ 当 $\mu = \chi_E$ 时，其中 E 是有界可测集。

步骤 4。对于有界开集 $O \subset \mathbb{R}$，证明对于由 (4.4) 给出的 ν^*，其满足$\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\ O}$ 当 $\mu = \chi_E$ 时，其中 E 是有界可测集。

下面我们将证明这些步骤。

步骤 1。对于 $O = (-1,\ 1)$，证明对于满足 A （见 (4.5)）的 $\nu^* = \chi_A$，其满足 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\ O}$ 当 $\mu = \chi_{(a,b)}$ 时，其中 $-1 < a < b < 1$。

证明。根据引理 3.1，只需证明 $U^{\nu^*} \leq U^{\mu}$。由于 μ 和 ν^* 具有相同的质量和一阶矩，根据引理 3.1 证明中的情形 2，$U^{\nu^*}(y) = U^{\mu}(y)$ 对所有 $|y| \geq 1$ 均成立。现在我们证明，对于所有 $|y| \leq 1$，$U^{\nu^*}(y) \leq U^{\mu}(y)$。

对于质量为 k 且一阶矩为 β 的 $\mu = \chi_{(a,b)}$，通过求解联立方程，我们得到 $a = \frac{\beta}{k} - \frac{k}{2}$ 和 $b = \frac{\beta}{k} \pm \frac{k}{2}$。为了比较 U^{ν^*} 和 U^{μ}，注意到直接计算可得，

$$[U^{\nu^*}(y)]' = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{for } y \geq 1, \\ -y + 1 - \frac{k}{2} & \text{for } 1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k} \leq y \leq 1, \\ \frac{\beta}{2-k} & \text{for } -1 + \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k} \leq y \leq 1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}, \\ -y - 1 + \frac{k}{2} & \text{for } -1 \leq y \leq -1 + \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}, \\ \frac{k}{2} & \text{for } y \leq -1, \end{cases}$$

and

$$[U^{\mu}(y)]' = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{for } y \geq \frac{\beta}{k} + \frac{k}{2}, \\ -y + \frac{\beta}{k} & \text{for } \frac{\beta}{k} - \frac{k}{2} \leq y \leq \frac{\beta}{k} + \frac{k}{2}, \\ \frac{k}{2} & \text{for } y \leq \frac{\beta}{k} - \frac{k}{2}. \end{cases}$$

下面证明对于所有 $|y| \leq 1$, $U^{\nu^*}(y) \leq U^{\mu}(y)$:

证明。注意到 $U^{\nu^*} - U^{\mu} \in C^1([-1,1])$。此外，由 $U^{\nu^*}(-1) - U^{\mu}(-1) = U^{\nu^*}(1) - U^{\mu}(1) = 0$，且存在 $d = \min\{-1 + \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}, \frac{\beta}{k} - \frac{k}{2}\} > -1$使得 $[U^{\nu^*}]'(s) - [U^{\mu}]'(s) < 0$在 $(-1,d)$ 上成立，我们有

$$\arg\min_{y\in[-1,1]}\{U^{\nu^*}(y) - U^{\mu}(y)\} \subset (-1,1) \text{ and } \min_{y\in[-1,1]}\{U^{\nu^*}(y) - U^{\mu}(y)\} < 0.$$

因此，极小点是一个临界点 $s_0 \in (-1,1)$，且 $[U^{\nu^*}]'(s_0) - [U^{\mu}]'(s_0) = 0$。通过计算可验证，在 $(-1,1)$ 上存在唯一的临界点；详情请参见附录 6.1。

因此，

$$s_0 = \arg\min_{y\in[-1,1]}\{U^{\nu^*}(y) - U^{\mu}(y)\},$$

and

$$\max_{y\in[-1,1]}\{U^{\nu^*}(y) - U^{\mu}(y)\} = U^{\nu^*}(1) - U^{\mu}(1) = 0.$$

总之，对所有 $|y| \leq 1$, $U^{\nu^*}(y) \leq U^{\mu}(y)$。 □

□

步骤 2. 对于 $O = (-1,1)$，证明对于满足 (4.5) 中给定 A 的 $\nu^* = \chi_A$，它满足n $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,O}$，当 $\mu = \sum_{k=1} \chi_{(a_i,b_i)}$时，其中 $(a_i,b_i) \subset (-1,1)$，$\min_k a_k > -1$ 和 $\max_k b_k < 1$。

证明. 首先考虑 $\mu = \mu_1 + \mu_2$ 的情形，其中 $\mu_1 = \chi_{(a,b)}$, $\mu_2 = \chi_{(c,d)}$ 和 $-1 < a < b < c < d < 1$，其余情形可用归纳法证明。

考虑由步骤 1 得到的 $\nu_1^* = \chi_{(-1,a')\cup(b',c)}$，其区间为 $O = (-1,c)$，初始测度为 μ_1。接着，将步骤 1 应用于 μ_1, ν_1^*，可得一个停时 $\tau_1 \leq \tau^{(-1,c)} \leq \tau^{(-1,1)}$，满足 $\mathbb{E}(\tau_1) < \infty$，使得 $W_0 \sim \mu_1$ 和 $W_{\tau_1} \sim \nu_1^*$。现在考虑 $I' = (b',d)$，并令 $\mu_2' = \chi_{I'}$。将步骤 1 应用于底层域 $O = (a',1)$，得到具有 (4.4) 所述形式的结果 ν_2^*；见图 1。接着，根据步骤 1，存在一个停时 $\tau_2 \leq \tau^{(a',1)} \leq \tau^{(-1,1)}$，满足 $\mathbb{E}(\tau_2) < \infty$，使得 $W_0 \sim \mu_2'$和 $W_\tau \sim \nu_2^*$。

注意到 $\nu^* = \chi_{(-1,a')} + \nu_2^*$具有形式 (4.4)，因为 $\nu^* = \chi_{(-1,a'')}$ 和 ν^*,μ 具有相同的质量和一阶矩。令 τ 为停时，$\tau = \tau_1 \oplus \tau_2 \leq \tau^{(-1,1)}$，其中直和 $\oplus$ 的含义如下：首先，对初始分布 μ_1 应用停时 τ_1，并对另一个分布 μ_2应用零停时 0。然后，对分布 $\chi_{(-1,a')}$ 应用零停时，并对 μ_2'应用 τ_2。注意，对于 τ, $W_0 \sim \mu$和 $W_\tau \sim \nu^*$ 以及 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$。因此 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,O}$。

$_n$现在考虑一般情形 $\mu = \sum \chi_{(a_i,b_i)}$，我们可以从最左侧的三个子区间 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 开始，归纳地应用上述论证；对 $O = (-1, a_3)$ 和 $\mu_1 = \chi_{(a_1,b_2)}$、 $\mu_2 = \chi_{(a_2,b_2)}$应用前几段中的步骤。经过这一过程，我们得到如下形式的新分布：

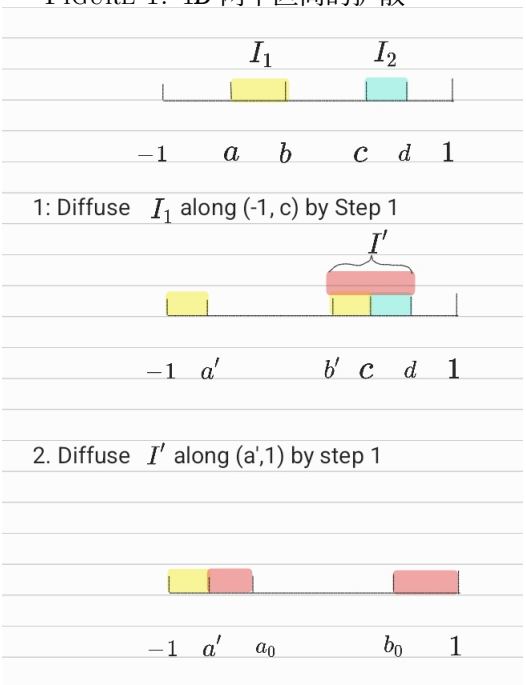
$$\mu' = \chi_{(-1,a_2')} + \chi_{(a_3',b_3)} + \chi_{(a_4,b_4)} + \cdots .$$

然后我们再次应用前述过程，并持续进行，直到得到如下形式的最终测度

$$\chi_{(-1,\bar{a})} + \chi_{(\bar{b},1)}.$$

在此过程中，总质量和一阶矩保持不变，这一最终形式由 (4.4) 给出。

FIGURE 1. 1D 两个区间的扩散



□

步骤 3. 对于 $O = (-1, 1)$，证明对于满足 (4.5) 中给定 A 的 $\nu^* = \chi_A$ ，它满足 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\ O}$ ，当 $\mu = \chi_E$ 时，其中 E 是一个有界可测集。

证明。 根据勒贝格测度的外正则性 m [8, 定理 1.18]，并且由于一维中每个有界开集都是有界开区间的可数不交并$_{N_n}$，存在一列集合 $\{\bigcup(c_{n_k}, d_{n_k})\}_{n=1}^{\infty}{}_{k=1}$，使得

- $E_n = \bigcup_{k=1}^{N_n} (c_{n_k}, d_{n_k})$ is a finite union of disjoint open intervals and $-1 < c_{n_k} < d_{n_k} < c_{n_{k+1}} < 1$ for all n, n_k, and
- $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$.

此外，由于 $\mu_n = \chi_{E_n}$ 在 $L^1((-1,1))$ 中收敛于 $\mu = \chi_E$，且函数 $1, x, -\frac{1}{2}|x-y|$ 对所有 $y \in \mathbb{R}$ 都在 $(-1,1)$ 上有界，由控制收敛定理可知，可以得到 μ_n 的质量、一阶矩和势的收敛，即 $\lim_{n\to\infty} k_n = k$、$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$、$\lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(y) = U^{\mu}(y)$。此外，对于

$$\nu_n^* = \chi_{(-1,\bar{a}_n)} + \chi_{(\bar{b}_n,1)}$$

由步骤 2 得到的 $O = (-1,1)$ 和初始测度 μ_n，我们看到 ν_n^* 在 $L^1((-1,1))$ 中收敛到 ν^*。这是因为这些测度ν_n^* 和 ν^* 分别由 k_n, β_n, k, β 按照 (4.4) 的形式确定。因此，对所有 $y \in \mathbb{R}$，$\lim_{n\to\infty} U^{\nu_n}(y) = U^{\nu}(y)$。由步骤 2 和引理 3.1，

$U^{\nu_n^*} \le U^{\mu_n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上。因此，

$$U^{\nu^*}(y) = \lim_{n\to\infty} U^{\nu_n^*}(y) \le \lim_{n\to\infty} U^{\mu_n}(y) = U^{\mu}(y),$$

以及 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\, O}$。 □

步骤 4。对于有界开集 $O \subset \mathbb{R}$，证明由 (4.4) 给出的 ν^* 满足$\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\, O}$，其中 $\mu = \chi_E$，且 E 是有界可测集。

证明。注意到 $O = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)$，其中有若干两两不相交的开集$\{(a_i,\ b_i)\}_{i=1}^{\infty}$。

For $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ with $\mu_i = \mu\big|_{(a_i,b_i)}$ we apply Step 3, with $O = (a_i, b_i)$, 那么，对于每个 μ_i 以及 (4.4) 中所述的相应 ν_i^*，根据步骤 3，存在一个停时 $\tau_i \le \tau^{(a_i,b_i)} \le \tau^O$，满足 $\mathbb{E}(\tau_i) < \infty$，使得$W_0 \sim \mu_i$ 且 $W_{\tau_i} \sim \nu_i^*$。

取 $\tau = \bigoplus \tau_i$，其中这里的 $\oplus$ 是指：将其应用于初始分布 μ的每个部分 μ_i 时，得到的 $\tau = \tau_i$。注意，$\tau \le \tau^O$（因此 $\mathbb{E}(\tau) < \infty$），并且由于 $(a_i,\ b_i)$ 彼此不相交，我们有 $W_0 \sim \mu$,$W_\tau \sim \sum \nu_i^* = \nu^*$。因此 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\, O}$。 $i=1$

□

□

4.1. 定理 1.2 和定理 1.3 的证明。给定满足 (C_0) 的 μ，注意到如 (1.2) 中所述，$P(\mu,\ u,\ O)$ 的任一最优解 γ都具有 $\gamma = \chi_E$ 这种形式。考虑定理 4.1 中给出的 ν^*（取其中的 $\mu = \gamma$）；于是$\gamma \le_{SH,\, O} \nu^*$；由于$\mu \le_{SH,\, O} \gamma$，这也意味着 $\nu^* \in \mathcal{A}_{\mu,\, O}$。

由于 $P(\mu,\ u,\ O) = \int u d\gamma \ge \int u d\nu^*$，且对于固定的 u，$P(\mu,\ u,\ O)$ 的优化器 γ 是唯一的（[3, 推论 6.6]），这意味着 $\nu^* = \gamma$。这证明推论 3.3 的（2）成立。因此，定理1.2成立。此外，$(\mathcal{A}_{\mu,\, O},\ \le_{SH,\, O})$ 有唯一的极大元 ν^*。我们的证明表明，最优解具有 (4.4) 的形式，因为它来自定理 4.1。

定理 *1.3* 的证明。设 η $\mu =$ $\eta_0\ O = \{\eta_0 > 0\}$ $\nu = \chi_{\Sigma(\eta)}$ $\nu \in \mathcal{A}_{\mu\ O}$ [3, 7 2] η^* 是具有初始数据 (, 几乎处处) 的 (*St*) 的一个极大解。然后. 由于定理。。令 为由 ν^* 生成的 (*St*) 的（弱）解，如 [3, 定理 7.4], 所示，且具有相同的初始条件；则有 $\nu^* = \chi_{\Sigma(\eta^*)}$。由定理 **4.1**， $\chi_{\Sigma(\eta)} = \nu \leq_{SH} \nu^* = \chi_{\Sigma(\eta^*)}$，因此 $\eta = \eta^*$ 由 η 的极大性可知。由此， η^* 是 (*St*) 的唯一极大弱解。□

5. STABILITY

在 [11, 第 7], 节中，我们证明，对于初始分布 $\mu_1 \leq \mu_2$，若 ν_1，ν_2在各自的设定下都求解最优自由目标问题，则 $\nu_1 \leq \nu_2$。由此得到的单调性进而导出 L^1 收缩原理： $\|(\nu_1-\nu_2)_+\|_{L^1} \leq \|(\mu_1-\mu_2)_+\|_{L^1}$。这种单调性源于以下特征: 在他们的设定中， [11] 优化器 ν会尽可能地使相应的停时 τ 最小。相反，由于 u 的超调和性，方程 **(1.1)** 的解会使停时最大化。事实上，我们将在下文看到，在我们的设定中，第 [11, 节 7] 的单调性和 L^1-收缩性质并不成立。

5.1. **单调性缺失**。 我们给出一维反例，但很容易将它们推广为 d 维结果。

例 5.1。 一个简单的例子是 $\mu_1 = \chi_{(-0.9,0)}$ 和$\mu_2 = \chi_{(-1,0)}$ 位于 $O = (-1,1)$上。这里 $\mu_1 \leq \mu_2$，但是， $\nu_1 \not\leq \nu_2$。为了解释这一点，注意到对于以 μ_2 为初始分布的情形，所有限制在 $O = (-1,1)$ 内的布朗粒子，已经在边界点 -1附近达到密度上界约束。为了满足$\tau \leq \tau^{(-1,1)}$，这些粒子在该点附近无法扩散。于是，在任意靠近 -1 的点 $y > -1$ 处，质量也无法从 μ_2扩散过来，因为否则会增加 y左侧的质量，而那里已经达到密度上界约束。然后，可以关于y连续地归纳应用这一论证，从而得出没有质量能从 μ_2扩散过来。因此 $\nu_2 = \mu_2$。然而，对于 μ_1，粒子可以向左和向右扩散，并且 ν_1 在$(0,1)$上具有正质量。因此 $\nu_1 \not\leq \nu_2$。

为了给出一个更不平凡的反例，我们考虑 μ_1， μ_2 具有相同的一阶矩 β的情形。

例5.2. 取 $\mu_1 = 0.99\chi_{(0,\sqrt{0.75})}$、 $\mu_2 = 0.99\chi_{(-0.5,1)}$ 和 $O = (-1、1)$。那么μ_1、 μ_2 满足， $\mu_1 \leq \mu_2$和 $\beta_1 = \beta_2 = 0.37125$。然后，正如定理*1.2*的证明中所示，*(1.1)*的最优解 ν_i由(4.4) 给出，因此可以将它们确定为

- $\nu_1 = \chi_{A_1}$, *where* $A_1 = (-1, -0.896224371) \bigcup (0.246410478, 1)$.
- $\nu_2 = \chi_{A_2}$, *where* $A_2 = (-1, -0.978373786) \bigcup (-0.463373786, 1)$.

这里 $\mu_1 \leq \mu_2$ ， 但 $\nu_1 \not\leq \nu_2$。

5.2. **缺乏 L^1-Lipschitz 稳定性**。 我们证明，在一维中， μ与 ν 之间不存在 L^1- Lipschitz关系。

引理5.3。 不存在这样的 $C > 0$ ， 使得对于每个 ν_i，具有初始分布 μ_i, $i = 1,2$, $\|(\nu_1 - \nu_2)_+\|_{L^1} \leq C\|(\mu_1 - \mu_2)_+\|_{L^1}$.的（1.1） 的优化器

证明。 正如我们在第4.1节中定理1.2的证明里所看到的， ν_i由(4.4)描述。令 $0 < x < 1$, $0 < y \ll 1$, $0 < r < 1$, $c \approx 1$ 满足$-c + ry < -x$，并取$\mu_1 = r\chi_{(-x,x)}$ 和 $\mu_2 = \chi_{(-c,-c+ry)} + r\chi_{(-x,x-y)}$。 那么根据(4.4)，可以计算出 $\nu_i = \chi_{A_i}$， 其中

- $A_1 = (-1, -1 + rx) \bigcup (1 - rx, 1)$ and
- $A_2 = (-1, -1 + rx + \frac{2rxy+2cry-ry^2-r^2y^2}{2(2-2rx)}) \cup (1 - rx + \frac{2rxy+2cry-ry^2-r^2y^2}{2(2-2rx)}, 1)$.

当 $y \approx 0, c \approx 1$时，我们将得到如下图形:

FIGURE 2. μ_1的形状， μ_2

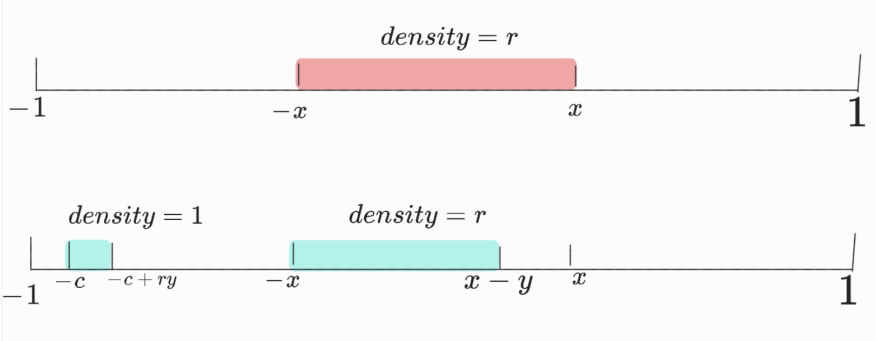
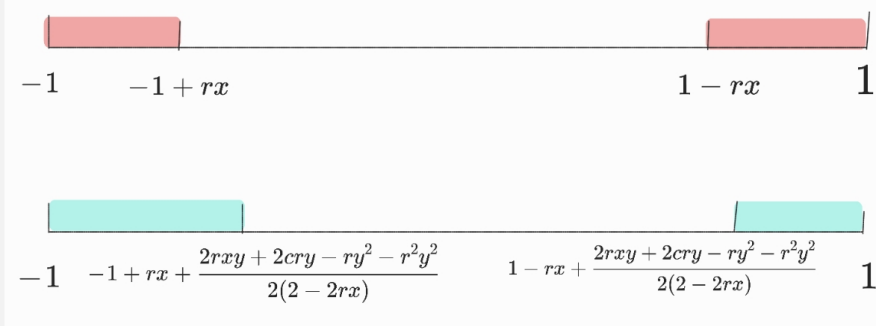


FIGURE 3. ν_1的形状， ν_2



于是 $\int |(\mu_1 - \mu_2)_+| = ry$ 和 $\int |(\nu_1 - \nu_2)_+| = \frac{2rxy + 2cry - ry^2 - r^2y^2}{2(2-2rx)}$ ( )。

假设 C 是一个 Lipschitz常数，我们有

$$C \geq \frac{2x + 2c - y - ry}{4(1 - rx)} \xrightarrow{y \downarrow 0} \frac{x + c}{2(1 - rx)} \xrightarrow{c,x,r \uparrow 1} +\infty.$$

总之，这样的 C 不存在。 □

5.3. **一维测度弱收敛的稳定性**。 与此同时，我们仍需验证优化器在初始分布变化时满足弱收敛。

引理5.4。 在一维中，如果 $\mu_l \rightharpoonup \mu$ 弱收敛，那么相应的（*1.1*）式优化器的 ν_l 密度在 $L^1(O)$中收敛到 ν 的密度。

证明。 不失一般性，可令底层域 O 为 O =(−1,1)。由定理1.2的证明可知，(1.1) 的最优解由 (4.4) 给出，因此由质量和一阶矩确定。由弱收敛可得:

$$\lim_{l\to\infty} k_l = \lim_{l\to\infty} \int_{-1}^{1} 1\mu_l(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 1\mu(x)\, dx = k, \text{ and}$$
$$\lim_{l\to\infty} \beta_l = \lim_{l\to\infty} \int_{-1}^{1} x\mu_l(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x\mu(x)\, dx = \beta.$$

此外，$\nu_l = \chi_{A_l}$，其中

$$A_l = \left(-1, -1 + \frac{k_l}{2} - \frac{\beta_l}{2-k_l}\right) \bigcup \left(1 - \frac{k_l}{2} - \frac{\beta_l}{2-k_l}, 1\right),$$

并且 $\nu = \chi_A$，其中 $A = \left(-1, -1 + \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}\right) \bigcup \left(1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k}, 1\right)$。结合上述极限， ν_l 的密度收敛到 ν 在 $L^1(O)$ 中的密度。□

6. APPENDIX

6.1. 定理 4.1 的步骤 1 中关于 (−1,1) 上唯一驻点的证明。我们在此证明， $[U^{\nu^*}]'(s) - [U^{\mu}]'(s) = 0$ 在 (−1,1) 上只有一个解，即 $s = \frac{2\beta}{(1-k)\, k(2-k)}$。

证明。 通过计算即可证明。由于我们假设 $-1 < a < b < 1$,$0 < k < 2$ 且

$$\int_{-1}^{-1+k} x\, dx < \beta < \int_{1-k}^{1} x\, dx,$$
$$\frac{k^2}{2} - k < \beta < k - \frac{k^2}{2}.$$

驻点 $s \in (-1,1)$ 的位置有九种可能。

情形 1. $1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k} \le s \le 1$ 和 $s \ge \frac{\beta}{k} + \frac{k}{2}$。那么 $[U^{\nu^*}(s)]' - [U^{\mu}(s)]' = 0$ 意味着 $s = 1$。但我们只假设 $s \in (-1,1)$，因此可以忽略这种情形。**情形 2.** $1 - \frac{k}{2} - \frac{\beta}{2-k} \le s \le 1$ 和 $\frac{\beta}{k} - \frac{k}{2} \le s \le \frac{\beta}{k} + \frac{k}{2}$。那么 $[U^{\nu^*}(s)]' - [U^{\mu}(s)]' = 0$ 意味着 $\beta = k - \frac{k^2}{2}$。但 $\beta < k - \frac{k^2}{2}$，因此这是不可能的。

情形 3. $1-\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}\le s\le 1$ 和 $s\le \frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}$。那么

$$0\ge 1-\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}-\left[\frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}\right]=1-\frac{2\beta}{k(2-k)}$$
$$>1-\frac{2\left(k-\frac{k^2}{2}\right)}{k(2-k)}=0$$

由此产生矛盾。因此可以忽略这种情况。

情况 4. $-1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}\le s\le 1-\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ 且 $s\ge \frac{\beta}{k}+\frac{k}{2}$。

那么 $[U^{\nu^*}(s)]'-[U^{\mu}(s)]'=0$ 意味着 $\beta=\frac{k^2}{2}-k$。但 $\beta>\frac{k^2}{2}-k$, 因此这是不可能的。

情形 5. $-1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}\le s\le 1-\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ 和 $\frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}\le s\le \frac{\beta}{k}+\frac{k}{2}$。

Then $[U^{\nu^*}(s)]'-[U^{\mu}(s)]'=0$ implies $s=\frac{2\beta(1-k)}{k(2-k)}$.

情形 6. $-1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}\le s\le 1-\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ 和 $s\le \frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}$。于是 $[U^{\nu^*}(s)]'-[U^{\mu}(s)]'=0$ 推出 $\beta=k-\frac{k^2}{2}$。但 $\beta<k-\frac{k^2}{2}$，因此这是不可能的。

情形 7. $-1\le s\le -1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ 和 $s\ge \frac{\beta}{k}+\frac{k}{2}$。于是

$$0\le -1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}-\left[\frac{\beta}{k}+\frac{k}{2}\right]=-1-\frac{2\beta}{k(2-k)}$$
$$<-1+\frac{2\left(k-\frac{k^2}{2}\right)}{k(2-k)}=0$$

由此产生矛盾。因此可以忽略这种情况。

情形 8. $-1\le s\le -1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ and $\frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}\le s\le \frac{\beta}{k}+\frac{k}{2}$.

于是 $[U^{\nu^*}(s)]'-[U^{\mu}(s)]'=0$ 推出 $\beta=\frac{k^2}{2}-k$。但是 $\beta>\frac{k^2}{2}-k$, 因此这是不可能的。

情形 9. $-1\le s\le -1+\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2-k}$ 且 $s\le \frac{\beta}{k}-\frac{k}{2}$.

于是 $[U^{\nu^*}(s)]'-[U^{\mu}(s)]'=0$ 推出 $s=-1$。但是我们只假设 $s\in(-1,\ 1)$, 因此这是不可能的。

由此可得, $[U^{\nu^*}]'(s)-[U^{\mu}]'(s)=0$ 在 $(-1,\ 1)$ 上只有一个解, 即 $s=\frac{2\beta(1-k)}{k(2-k)}$。□

References

[1] G. Baker 和 M. Shkolnikov。过冷 Stefan 问题中的零动能过冷极限。 *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probabilites et statistiques* 58 2 861 871, , ( ): – 2022。[2] L. Chayes 和 I.C. Kim。一维过冷 Stefan 问题。 *CPAA*, 11(2):845–859, 2012。[3] S. Choi 、I.C. Kim 和 Y-H. Kim。一般维数下过冷 Stefan 问题的存在性。 *arXiv:2402.17154*, 2024。[4] R. Chu、I.C. Kim 和 S. Munoz。过冷 Stefan 问题：分形冻结与极大解的精细结构。 *arXiv:2512.10138*, 2025。[5] A. Cox、M. Beiglboeck 和 M. Huesmann。最优传输与 Skorokhod 嵌入。 *Inventiones Mathematicae*, 208(2):327–400, 2017。[6] F. Delarue、S. Nadtochiy 和 M. Shkolnikov。具有爆破的过冷 Stefan 问题的全局解：正则性与唯一性。 *Probability Mathematical Physics* 3 2 171 213, , ( ): – 2022。[7] A. Fasano 和 M. Primicero。关于若干经典抛物型自由边界问题的新结果。 *Quarterly of Applied Mathematics*, 38(4):439–460, 1981。[8] Gerald B. Folland。 *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*。Wiley，1999。[9] N. Ghoussoub、Y-H. Kim 和 A. Palmer。最优 Skorokhod 嵌入的偏微分方程方法。 *Cal. Var. PDE*, 58(3):113, 2019。[10] J.R.Baxter 和 R.V.Chacon。停止分布的势。 *Illinois Journal of Mathematics* 18 4 649 656, 1975 , ( ): –。[11] I.C. Kim 和 Y-H. Kim。Stefan 问题与布朗鞅传输的自由目标。 *Ann. Appl. Probab*, 34(2):2364–2414, 2024。[12] S. Ledger 和 A. Søjmark。弱反馈机制下传染性 McKean-Vlasov 系统的唯一性。 *Bull. Lond. Math. Soc.*, 52(3):448–463, 2020。[13] S. Munoz。过冷 Stefan 问题物理解的自由边界正则性与适定性。 *arXiv:1902.05174*, 2025。[14] J. Stefan。 ¨关于结冰理论。 *Monatsh. Math. Phys*, 1(1):1–6, 1890。[15] J. Stefan。 ¨关于结冰理论，特别是 ¨极地海洋中的结冰。 *Ann. Physik Chemie*, 42:269–286, 1891。

Kai Hong Chau, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

Email address: 1415jameschau@math.ubc.ca

Young-Heon Kim, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

Email address: yhkim@math.ubc.ca

Mathav Murugan, Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada

Email address: mathav@math.ubc.ca