arXiv:2601.00239v1 [math.ST] 1 Jan 2026

块图上的几何极值图模型与极值依赖系数

Ioannis Papastathopoulos[1] 和 Jennifer L. Wadsworth[2]

[1]爱丁堡大学，英国

[2]兰卡斯特大学，英国

2026年1月5日

摘要

我们引入几何极值图模型这一概念，该模型通过极限集的规范函数定义；该极限集由轻尾边缘分布中经过适当缩放的随机向量得到。对于块图，我们证明了若干结果，阐明各种极值依赖系数沿图传播的规律。我们尤其关注与条件极值理论框架相关的系数；当各变量并非同时达到各自最极端的取值时，这些系数尤其值得关注。我们还讨论了变量确实表现出联合极端行为时的相关结果。近年来，多元极值的几何方法已被引入统计建模框架；几何极值图模型及其相关结果由此为建立能够刻画复杂极端依赖结构的高维极值建模方法铺平了道路。

1 引言

1.1 设定

人们常常需要估计涉及多个变量的稀有事件概率。例如，河网上许多地点发生洪水的概率、多个股票市场持仓同时大幅下跌的概率，或天气系统的不同组成部分（如风、降雨、温度）以具有破坏性的组合达到极端水平的概率。多元极值建模需要

采用适当的分布联合尾部表征方法，构建统计模型，从而能够进一步向尾部进行外推。

在高维极值建模方面，空间极值领域已取得长足进展，如今可以针对数百乃至数千个观测位置定义并拟合模型（Simpson 等人，2023；Shi 等人，2024；Hazra 等人，2025年）。这是因为数据的空间特性使得人们能够构建高度结构化的模型；这类模型基于依赖随距离增大而减弱这一简化假设，与位置数量相比，所涉及的参数相对较少。当数据更具一般意义上的多元特征时，大多数极值建模通常仅限于低维（< 10）情形。原因之一在于，要恰当地刻画任意多元向量的极端依赖结构，复杂程度很高（相关讨论见，例如，Wadsworth and Campbell (2024年)）。尽管如此，即使对极端依赖作出简化假设，候选模型仍可能涉及大量参数，使得估计和解释极为困难。因此，近年来，多元极值建模中的稀疏性概念引起了关注；综述见 Engelke and Ivanovs (2021年)。稀疏性的一种理解是，通过对依赖关系进行图形化刻画，简化高维建模任务。本文聚焦于为这一任务构建一个精确的框架，并将其置于多元极值的几何方法这一背景下进行研究。

1.2 图模型背景

图模型提供了一种简化高维联合分布的概率表达和统计分析的方法。其核心概念是变量之间的条件独立。设 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$，对于某个指标集 $J \subseteq \{1, \ldots, d\}$，记 $\boldsymbol{X}_J = (X_j \colon j \in J)$。假设联合密度存在，则记 $f_J(\boldsymbol{x}_J)$ 为 $\boldsymbol{X}_J$ 的边缘密度；对于互不相交的指标集 I, J，定义联合密度 $f_{I,J}(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{x}_J)$ 为 $\boldsymbol{X}_{I \cup J}$ 的联合密度。条件密度定义为 $f_{I|J}(\boldsymbol{x}_I \mid \boldsymbol{x}_J) = f_{I,J}(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{x}_J)/f_J(\boldsymbol{x}_J)$。对于互不相交的指标集 I, J, K，若 $f_{I,J|K}(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{x}_J \mid \boldsymbol{x}_K) = f_{I|K}(\boldsymbol{x}_I \mid \boldsymbol{x}_K) f_{J|K}(\boldsymbol{x}_J \mid \boldsymbol{x}_K)$，则称 $\boldsymbol{X}_I$ 在给定 $\boldsymbol{X}_K$ 的条件下与 $\boldsymbol{X}_J$ 条件独立，记作 $\boldsymbol{X}_I \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{X}_J \mid \boldsymbol{X}_K$。本文采用的无向图模型提供了一种简洁的方式来编码这些条件独立关系。

无向图 $\mathcal{G}$ 由其顶点集合 $\mathcal{V}$ 和边集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 定义。对于图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，令 X_i 表示与顶点 i 相关联的随机变量。若随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的分布满足相对于条件独立图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 的成对马尔可夫

性质， $\mathcal{G}$即，如果对于所有 $(i,\ j)\ \notin\ \mathcal{E}$均有此性质，则根据 Hammersley–Clifford 定理，当 具有正连续密度时， f这等价于全局马尔可夫性质， $S \subset \mathcal{V}$即在以顶点分隔 i和 j的条件下，条件独立关系成立，意味着从 i 到 j 的所有路径都与 S (Besag，1974；Grimmett，2018)中的一个节点相交。作为示例，在下方图1 的第一个面板中， $X_1 \perp\!\!\!\perp X_9 \mid \boldsymbol{X}_{\{3,4,6\}}$。

本文聚焦于一类简单的无向图模型，称为块图。这类图是可能的可分解图模型的一个子集，可通过称为团和分隔集的指标集合来描述。这里，我们将团定义为一组构成极大完全连通子图的指标，而分隔集则是团的交集（因此也是团的子集）。当 $\boldsymbol{X}$ 服从可分解图模型时， f 按照以下方式分解

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod_{C \in \mathcal{C}} f_C(\boldsymbol{x}_C) / \prod_{D \in \mathcal{D}} f_D(\boldsymbol{x}_D), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{C}$ 是团的集合，而 $\mathcal{D}$ 是分隔集的集合。团通常包含的指标远少于 $\mathcal{V}$，且分隔集是团的子集，因此方程（1）可将f 表示为低维密度的形式。块图是分隔集均为单元素集合的可分解图。

1.3 极值图模型

（无向）极值图模型的概念由 Engelke 和 Hitz （2020年提出。具体而言，研究者为一类称为多元广义帕累托分布的分布建立了极值图模型（Rootz´en 和 Tajvidi，2006；Rootz´en 等人，2018）。由于该分布的支撑集并非乘积空间，因此通常的条件独立概念并不适用。为此，Engelke 和 Hitz（2020年）定义了针对所谓指数测度密度而非概率密度函数的图分解，并证明，当通过条件化将随机向量的支撑集限制在乘积空间内时，这种分解可解释为通常的条件独立关系。然而，采用多元广义帕累托分布意味着这种方法仅适用于完全渐近相关的随机向量；这意味着所有变量的联合极值出现频率与边际极值相近，或者更具体地说，

$$\chi_{\mathcal{V}} = \lim_{u \to 1} \Pr(F_j(X_j) > u, \forall\ j \in \mathcal{V}) / (1-u) > 0. \tag{2}$$

事实上，Engelke 和 Hitz （2020年）的表述要求更严格的假设：没有任何子向量$\boldsymbol{X}_J$， $J \subset \mathcal{V}$ 会同时出现极端值，而 $\boldsymbol{X}_{\mathcal{V}\setminus J}$ 则为低阶。这些要求对于高维情形尤为苛刻，而图模型原本旨在处理高维情形，因此限制了此类模型在实践中的适用性。近期，Engelke 等人（2025年）提出了基于指数测度的图模型，该方法无需假设（2），但尚未发展出可应用的统计方法。

其他相关研究包括 Lee 和 Cooley（2022）以及 Gong 等人（2024），他们同期在与 Engelke 和 Hitz（2020）相同的多元正则变差框架下，提出了偏尾相关的概念，用于推断极值条件独立。Gissibl 和 Kl¨uppelberg （ 2018 ）以及 Gissibl 等人（ 2021 ）研究了有向无环图上的所谓最大线性模型。这类模型通常仅适用于由逐分量最大值构成的多元数据，而且由于缺少密度，难以用于统计分析和解释。为使图模型建模适用于更广泛的极值依赖结构，Casey 和 Papastathopoulos（2023）在条件极值理论的框架下（Heffernan 和 Tawn，2004年；Heffernan 和 Resnick，2007年）发展了图模型建模思路。由此得到的理论形式多样而丰富，具有灵活性，但在实际应用中也面临挑战。Farrell 等人（2024年）采用务实的建模方法，对条件极值模型中所谓的残差施加图结构。Engelke 和 Hitz（2020）的讨论部分也探讨了类似思路（Wadsworth，2020年）。

1.4 几何极值

研究高维随机向量的极值时，可能出现种类繁多的极值依赖情形，其差异体现在哪些变量组能够同时达到极端值。Goix 等人(2017年）和Simpson 等人 (2020年）探讨了如何估计呈现共同极端行为的变量组。Simpson 等人 Simpson 等人 (2020年）为此引入的依赖系数，后来被证明与轻尾边缘分布下随机向量的极限集相关（若该极限集存在）；这一结果由Nolde 和 Wadsworth (2022年）给出。近期，几何多元极值表示被转化为多元尾部的统计模型，相关工作由Wadsworth and Campbell (2024年）和 Papastathopoulos 等人 (2025年）完成。与现有多元极值方法相比，这一新建模框架的一大优势在于能够捕捉各种复杂的多元极值依赖。

本文在几何极值框架下引入图模型的概念，

称为 几何极值图模型，并证明了一系列关于极值依赖系数沿图传播的结果。该定义及这些结果为几何极值图模型的统计推断奠定了基础，所采用的方法见 Wadsworth andCampbell (2024年) 和 Papastathopoulos 等人 (2025年)。具体而言，尽管本文重点探讨几何极值图模型的各种理论性质，但该定义很容易应用于统计推断。

在第 2 节中，我们将进一步介绍多元极值的几何表示，并引入几何极值图模型。在第 3节中，我们将展示，一个与 Heffernan 和 Tawn (2004年) 和Heffernan 和 Resnick (2007年) 的条件极值框架相关的极值依赖关键概括量，可以自然地按照块图的结构进行因子分解。此外，该框架中的第二个系数可通过乘积或最大值运算进行聚合，具体取决于第一个系数是否为零。在第 4节中，我们将给出一些关于联合极值出现情况的结果。第5节总结全文。

2 多元极值的几何表示

2.1 极限集

考虑一个具有共同轻尾边缘分布的随机向量 $\boldsymbol{X}$，并令 $\boldsymbol{X}_k$、 $k = 1, \ldots\ldots, n$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的独立同分布副本。将缩放后的 n 点样本云记为

$$N_n = \left\{ \frac{\boldsymbol{X}_1}{r_n}, \ldots, \frac{\boldsymbol{X}_n}{r_n} \right\},$$

其中，序列 r_n 取决于 $\boldsymbol{X}$边缘分布的具体形式：合适的序列选择是与 $1-1/n$ 分位数渐近等价的序列。我们关注随机集 N_n 依概率收敛到一个包含至少两个点的紧极限集 G 的情形。关于这一点的充要条件见 Balkema 等人 (2010)。Davis 等人 (1988) 和 Kinoshita 和 Resnick(1991) 也在各种假设下考察了向极限集的收敛。

极限集 G 的形状受轻尾边缘分布的具体选择以及 $\boldsymbol{X}$各分量之间的极端依赖结构共同影响。我们特别关注 G 所包含的关于极端依赖结构的信息，因此采用类 copula 方法并考虑标准化边缘分布。两种特别简洁的选择是标准指数分布和拉普拉斯分布

边缘分布，即单个分量 $X_{k,\,i}$、 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ d$ 分别具有密度

$$f^E(x) = \exp(-x)\mathbb{1}(x > 0), \qquad \text{or} \qquad f^L(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

仅出现正值极值关联时，指数边缘分布最便于处理；而当负相关也可能出现时，拉普拉斯边缘分布则能提供更多细节(Nolde 和 Wadsworth，2022年；Papastathopoulos 等人，2025年)。

具体而言，假设随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_i : i \in \mathcal{V})$ 具有标准指数分布或拉普拉斯边缘分布，且其勒贝格联合密度为 $f(\boldsymbol{x})$。使重新缩放后的 n 点样本云

$$N_n = \left\{ \frac{\boldsymbol{X}_1}{\log n}, \ldots, \frac{\boldsymbol{X}_n}{\log n} \right\}$$

收敛到极限集 $G = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}^d : g(\boldsymbol{x}) \leq 1\}$ 当 $n \to \infty$ 时，一个充分条件是密度 f 满足

$$-\log f(t\boldsymbol{x}_t)/t \to g(\boldsymbol{x}), \quad t \to \infty, \quad \boldsymbol{x}_t \to \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}^d, \tag{3}$$

对于连续的 g，其中 $\mathcal{S}^d = \mathcal{S} \times \cdots \times \mathcal{S}$，指数边缘分布对应 $\mathcal{S} = [0, \infty)$，而拉普拉斯边缘分布对应 $(-\infty,\ \infty)$（Balkema 和 Nolde，2010；Nolde 和 Wadsworth，2022年）。极限集 G 是星形的，而描述其边界的 1 次齐次函数 g，称为规范函数。通过以下最小化运算可得到低维边缘规范函数（Nolde 和 Wadsworth，2022年，命题 2.4）：

$$g_J(\boldsymbol{x}_J) = \min_{x_i \in \mathcal{S} : i \notin J} g(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

其中，对于任意指标集 $J \subseteq \{1, \ldots, d\}$， $\boldsymbol{x}_J = (x_j : j \in J)$，而 g_J是变量 J 的边缘规范函数。注意，指数分布/拉普拉斯边缘分布意味着 $g_{\{j\}}(x_j) = |x_j|$，这施加了一般约束 $g(\boldsymbol{x}) \geq \max(|x_i| : i \in \mathcal{V})$。

2.2 几何极值图模型

当 $\boldsymbol{X}$ 遵循可分解图模型，且对于完整联合密度和低维密度，密度收敛（3）均成立时，

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} g_C(\boldsymbol{x}_C) - \sum_{D \in \mathcal{D}} g_D(\boldsymbol{x}_D). \tag{5}$$

请注意，虽然因子分解（1）和收敛（3）可以推出（5），但反过来一般并不成立。方程（5）构成了我们定义几何极值图模型的基础。

定义 1（几何极值图模型）。 随机向量 $\boldsymbol{X}$ 称为相对于图 $\mathcal{G}$ 满足收敛（3）和方程（5）的（可分解）几何极值图模型。无需满足因子分解（1）。

注 1。 极值图模型的定义可以简单地扩展到更复杂类型的图模型。例如，如果 $\mathcal{G}$ 不可分解，则（5）仍然成立，但其中的 $\mathcal{C}$ 需替换为素分量，即 $\mathcal{G}$ 中无法进一步分解的极大子图。

如前所述，本文主要关注块图，这是一种特殊的可分解图模型，其中分隔集为单元素集。由于 $g_{\{j\}}(x_j) = |x_j|$，这对几何极值图模型的形式起到了简化作用。

定义 2。 一个 分块几何极值图模型通过规范函数定义为

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} g_C(\boldsymbol{x}_C) - \sum_{D \in \mathcal{D}} |x_D|. \tag{6}$$

为便于后续使用，我们还定义了分块几何极值图模型的特殊情形：树形和链式几何极值图模型。树是所有团的大小均为二的块图，而链是所有分隔集在 $\mathcal{D}$中仅出现一次的树图。

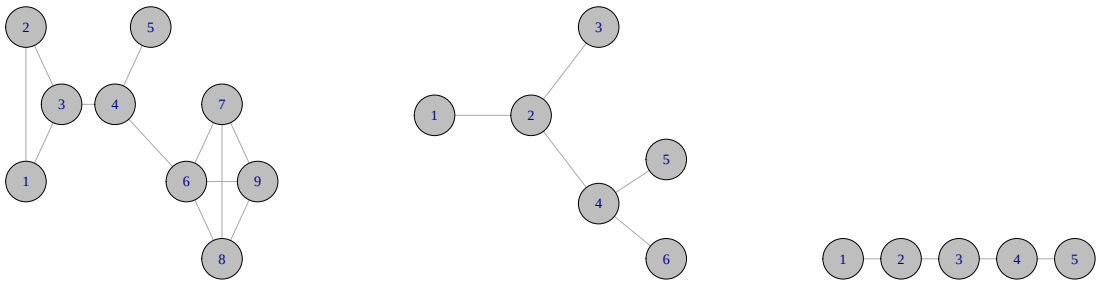
定义 3. 顶点集为 $\mathcal{V}$、边集为 $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ 的树形几何极值图模型 由以下规范函数定义

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} g_{\{i,j\}}(x_i, x_j) - |x_i| - |x_j| + \sum_{k \in \mathcal{V}} |x_k|. \tag{7}$$

定义 4. 顶点集为 $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, d\}$ 的链式几何极值图模型 的边集为$\mathcal{E} = \mathcal{C} = \{$(1、2)、(2、3).....、($d-1$, d)$\}$，由以下规范函数定义

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{d-1} g_{\{k,k+1\}}(x_k, x_{k+1}) - \sum_{k=2}^{d-1} |x_k|. \tag{8}$$

我们指出，对于指数边缘分布的情形，方程（6）和（8）中的绝对值符号并非必需，因为所有 (7) $x_j \geq 0$。



Fi图 1：分别展示块图、树图和链图的示例（参见示例1）

例1. 图1 展示了一般块图、树图和链图的示例。第一个面板中的团和分隔集分别为 $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{6,7,8,9\}\}$ 和 $\mathcal{D} = \{3,4,4,6\}$。第二个面板中的团和分隔集分别为 $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}$、 $\mathcal{D} = \{2,2,4,4\}$。第三个面板中的团和分隔集分别为 $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$、 $\mathcal{D} = \{2,3,4\}$。

3 图上的条件极值依赖系数

本节概述条件极值模型框架（Heffernan 和 Tawn，2004年；Heffernan 和 Resnick，2007年）中产生的依赖系数相关结果。我们首先关注指数边缘分布，随后将结果推广到拉普拉斯边际情形。在指数边缘情形下，这样的处理简化了表述；当变量之间仅呈现正值依赖时，这一点很有用。

3.1 指数边缘分布

3.1.1 条件极值假设与记号

Nolde 和 Wadsworth (2022年) 将几种不同的极值依赖系数与极限集的几何性质联系起来 G，承接了 Nolde(2014年) 的研究。一个重要系数 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}}$，在下文的假设 1中定义，它与Heffernan 和 Tawn (2004年) 和Heffernan 和 Resnick (2007年) 的条件极值框架相联系。

条件极值理论中的基本假设是，对于每个 $i \in \mathcal{V}$，都存在

函数 $\boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{d-1}$ 和 $\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^{d-1}$，使得

$$\mathbb{P}\left(X_i - t > x, \frac{\boldsymbol{X}_{-i} - \boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(X_i)}{\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(X_i)} \leq \boldsymbol{z} \;\middle|\; X_i > t\right) \to \exp(-x)\, K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}), \quad \text{as } t\to\infty, \tag{9}$$

在极限的连续点 $(x,\ \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ 处。量 $K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 是定义在$\mathbb{R}^{d-1}$ 上的分布函数，满足对所有 $j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}$，$\lim_{t\to\infty} K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{t}_j) = 1$，而 $\boldsymbol{t}_j$ 表示一个向量，其第 j个元素等于 t，其余元素均等于无穷大。

当联合密度和相关极限存在时，应用洛必达法则可得，收敛（9）等价于

$$\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{-i} - \boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)}{\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)} \leq \boldsymbol{z} \;\middle|\; X_i = t\right) \to K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}), \quad \text{as } t\to\infty. \tag{10}$$

在下文的假设1中，我们还要求联合密度收敛，并对 $K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z})$的边缘分布的支撑集作出限制。

假设1。对所有 $i \in \mathcal{V}$,

$$\frac{\partial^{d-1}}{\partial \boldsymbol{z}}\mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{-i} - \boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)}{\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)} \leq \boldsymbol{z} \mid X_i = t\right) \to \frac{\partial^{d-1}}{\partial \boldsymbol{z}} K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}) =: k_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}), \quad \text{as } t\to\infty. \tag{11}$$

此外,

(*i*) 对每个 $j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}$，边缘分布 $K_{j|i}$ of $K_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 的支撑集 $\text{supp}(K_{j|i})$ 包含 $(0,\ \infty)$;

(*ii*) $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} := \lim^{t\to\infty} \boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)/t$ 存在于 $[0,1]^{d-1}$。

Nolde 和 Wadsworth (2022年) 表明，在双变量版本的假设 1 和收敛（3）条件下，对于 $j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}$,

$$\alpha_{j|i} = \max\{\widetilde{\alpha}_{j|i} \,:\, g_{\{i,j\}}(1,\widetilde{\alpha}_{j|i}) = 1\}. \tag{12}$$

Nolde 和 Wadsworth (2022年只针对条件极值考虑二元表示，主要原因是，依赖函数 $a_{j|i}$ 和 $b_{j|i}$, $j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}$由（$X_i, X_j$）之间的成对依赖决定。然而，为了建立一般多维情形下 α 系数之间的联系（如下文所述），我们需要联合收敛性质。

3.1.2 α-系数

命题 1 将方程（12）推广至多维情形。下文中，我们将函数$g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(x_i, \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}}) = g(\boldsymbol{x})$ 定义为规范函数，其参数顺序由 $\mathcal{V}$调整为 $\{i, \mathcal{V}\setminus\{i\}\}$。

命题 1. 假设 $\boldsymbol{X} = (X_i : \ i \in \mathcal{V})$ 满足收敛条件 (3) 和假设 1 。那么，

(i) 对所有 $i \in \mathcal{V}$, $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) = 1$ 均成立;

(ii) 对所有 $i \in \mathcal{V}$，如果有多个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$，则其中逐坐标最大的向量 $\boldsymbol{\alpha}^\star$ 也满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}^\star) = 1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} = \boldsymbol{\alpha}^\star$。

注 2. 由于 $g(\boldsymbol{x}) \ \geq \max(x_i : i \in \mathcal{V})$，命题 1 表明 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}}$ 是一个全局最小值点，也就是说，$g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) \leq g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{x})$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{d-1}$ 均成立。

命题 1的证明见附录 A。

我们的主要结果之一见命题 2，该命题讨论了当随机向量 α遵循基于块图的分块几何极值图模型时 $\boldsymbol{X}$ -系数之间的关系。对于任意一对顶点（i, j）$\in \mathcal{V}$，我们发现，$\alpha_{j|i}$ 等于沿着 α与 $\{i\}$ 之间的唯一最短路径上的路径 $\{j\}$-系数之积。

命题 2。 假设 $\boldsymbol{X}$ =$(X_i : \ i \in \mathcal{V})$ 遵循图为 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \ \mathcal{E})$ 的分块几何极值图模型，并且命题 1 中的假设成立。对于 i 和 j中任意两个不同的顶点 $\mathcal{V}$，令 $\{i = v_0, v_1, \ldots, v_{m_{ij}} = j\}$ 为从i到 j的长度为 $m_{ij} \geq 1$ 的唯一最短路径上的顶点。则

$$\alpha_{j|i} = \prod_{k=1}^{m_{ij}} \alpha_{v_k|v_{k-1}}. \tag{13}$$

命题 2 的证明见附录A。本节最后通过一个简单示例说明命题2。从该示例中获得的直观理解构成了一般性证明的基础。

例 2. 考虑方程（7）中定义的树形几何极值图模型，其中$\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$、 $\mathcal{C} = \mathcal{E} = \{(1, 2)$、$(2, 3)$、$(2,4)\}$，且 $\mathcal{D} = \{2, 2\}$。回想一下，对于指数边缘分布，$x_i \geq 0$ 对所有 $i \in \mathcal{V}$，我们有

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_{\{1,2\}}(x_1, x_2) + g_{\{2,3\}}(x_2, x_3) + g_{\{2,4\}}(x_2, x_4) - 2x_2.$$

假设我们希望计算系数 $\alpha_{4|3}$。我们首先注意到

$$g_{\{3,4\}}(x_3, x_4) = \min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} g_{\{1,2\}}(x_1, x_2) + g_{\{2,3\}}(x_2, x_3) + g_{\{2,4\}}(x_2, x_4) - 2x_2. \tag{14}$$

具体考虑 $g_{\{3,4\}}(1, \alpha_{4|3}) = 1$。那么我们可以写成

$$g_{\{3,4\}}(1, \alpha_{4|3}) = g_{\{1,2\}}(x_1^\star, x_2^\star) + g_{\{2,3\}}(x_2^\star, 1) + g_{\{2,4\}}(x_2^\star, \alpha_{4|3}) - 2x_2^\star,$$

其中 $x_1^\star$, $x_2^\star$ 分别表示方程（14）中最小值在 $x_3 = 1$, $x_4 = \alpha_{4|3}$ 处取得时的取值。利用备注 2 中的观察, $x_1^\star = \alpha_{1|3}$ 和 $x_2^\star = \alpha_{2|3}$, 即

$$g_{\{3,4\}}(1, \alpha_{4|3}) = g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, \alpha_{2|3}) + g_{\{2,3\}}(\alpha_{2|3}, 1) + g_{\{2,4\}}(\alpha_{2|3}, \alpha_{4|3}) - 2\alpha_{2|3}.$$

我们将右端拆分为两个部分之和:

$$g_{\{2,3\}}(\alpha_{2|3}, 1) = 1 \qquad \text{and} \tag{15}$$

$$g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, \alpha_{2|3}) + g_{\{2,4\}}(\alpha_{2|3}, \alpha_{4|3}) - 2\alpha_{2|3} \geq 0. \tag{16}$$

方程（15）由方程（12）得出; 方程（16）是因为 $g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, \alpha_{2|3}) \geq \alpha_{2|3}$ 和 $g_{\{2,4\}}(\alpha_{2|3}, \alpha_{4|3}) \geq \alpha_{2|3}$。然而, 由于我们要求 $g_{\{3,4\}}(1, \alpha_{4|3}) = 1$, 因此必须有（16）等于 0。最初假设 $\alpha_{2|3} > 0$, 那么利用 g 的齐次性,

$$\begin{aligned} g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, \alpha_{2|3}) + g_{\{2,4\}}(\alpha_{2|3}, \alpha_{4|3}) - 2\alpha_{2|3} &= \alpha_{2|3} g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}/\alpha_{2|3}, 1) + \alpha_{2|3} g_{\{2,4\}}(1, \alpha_{4|3}/\alpha_{2|3}) - 2\alpha_{2|3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

由此我们推出 $\alpha_{1|3}/\alpha_{2|3} = \alpha_{1|2}$, 并且 $\alpha_{4|3}/\alpha_{2|3} = \alpha_{4|2}$, 即 $\alpha_{4|3} = \alpha_{4|2}\alpha_{2|3}$, 它是逐路径系数的乘积。如果我们有 $\alpha_{2|3} = 0$, 那么

$$g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, \alpha_{2|3}) + g_{\{2,4\}}(\alpha_{2|3}, \alpha_{4|3}) - 2\alpha_{2|3} = g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, 0) + g_{\{2,4\}}(0, \alpha_{4|3}) = 0,$$

这意味着 $g_{\{1,2\}}(\alpha_{1|3}, 0) = g_{\{2,4\}}(0, \alpha_{4|3}) = 0$, 但由于 $g_{\{2,4\}}(0, \alpha_{4|3}) \geq \max(0, \alpha_{4|3})$, 这意味着 $\alpha_{4|3} = 0$ （类似地 $\alpha_{1|3}$）。

3.1.3 β-系数

第 3.1.2 节中描述的 α-系数是条件极值收敛假设 (9) 中位置归一化函数$\boldsymbol{a}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 的关键描述量。尺度归一化函数 $\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$通常通过正则变差假设来刻画，而关键的依赖量是正则变差指数。若 $u:\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是一个在无穷远处正则变差、指数为$\gamma\in\mathbb{R}$的函数，则对于 $x>0$，$\lim_{t\to\infty}u(tx)/u(t)=x^\gamma$。我们记作 $u\in \mathrm{RV}_\gamma^\infty$。在 0^+ 处的正则变差定义类似，记作 $u\in\mathrm{RV}_\gamma^{0^+}$。假设尺度归一化函数向量 $\boldsymbol{b}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 的各分量满足 $b_{j|i}\in \mathrm{RV}_{\beta_{j|i}}^\infty$，其中 $\beta_{j|i}\in[0,1)$。本节重点讨论这些沿图的 β-系数的结构。相关分析比 α-系数的情形复杂得多。我们采用 Nolde和Wadsworth（2022）的一项关键结果；他们证明，在收敛的二元版本 (3) 下，函数$g_{\{i,j\}}$ 能够确定系数 $\beta_{j|i}$，也就是说，如果

$$g_{\{i,j\}}(1,\alpha_{j|i}+\cdot)-1\in \mathrm{RV}_{1/(1-\beta_{j|i})}^{0^+}, \tag{17}$$

那么 $b_{j|i}\in\mathrm{RV}_{\beta_{j|i}}^\infty$。

在命题 3 中，我们证明 $\beta_{j|i}$ 也符合沿着 $\mathcal{G}$中的最短路径呈现的结构，但由于依赖于该路径上的 α-系数，其形式可能复杂得多。这种依赖使 $\beta_{j|i}$ 的结构不再是命题 2 中针对 $\alpha_{j|i}$所确定的简单乘积形式。然而，对 α-系数的分析可以启发我们采用一种策略来处理 β-系数的复杂性，从而得到一种相对简单的递推关系，见命题3的方程（20）。我们通过重新分析 α-系数，简要说明这一策略。

由于图形规范函数的边缘化性质与概率图模型的边缘化性质相呼应（Koster，2002），$\alpha_{j|i}$ 的形式可以正式写成递推关系 $\alpha_{j|i}=\alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi}$ 的解，其初始条件为 $\alpha_{i|i}=1$，其中 π 表示从 i 到 j 的最短路径上的倒数第二个节点，该路径位于 $\mathcal{G}$中。具体而言，在附录 B 的引理2中，我们证明，对于块图，可以将 $g_{\{i,j\}}(x_i,x_j)$ 表示为一个链图，其中的节点位于 i 与 j之间的最短路径上；而在引理 3 中，我们证明，对链图进行边缘化也会得到链图。因此，当 $\mathcal{G}$ 是块图时，对除 (i, π,j) 之外的所有节点进行边缘化，会得到链式图形规范

$$g_{\{i,\pi,j\}}(x_i,x_\pi,x_j)=g_{\{i,\pi\}}(x_i,x_\pi)+g_{\{\pi,j\}}(x_\pi,x_j)-x_\pi, \tag{18}$$

根据命题2，这从形式上说明了为何 $\alpha_{j|i}$ 的形式也会作为上述递推关系的解出现。这些结构性质为构建命题20中的递推关系（3）提供了一种方法。所需的要素包括方程（17）、关系式

$$g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i} + x) = \min_{\varepsilon \in \mathcal{S} - \{\alpha_{\pi|i}\}} g_{\{i,\pi,j\}}(1, \alpha_{\pi|i} + \varepsilon, \alpha_{j|i} + x), \tag{19}$$

其中 $\mathcal{S} - \{\alpha_{k|i}\} = \{x_k - \alpha_{k|i} : \quad x_k \in \mathcal{S}\}$，这由（4）以及下文的假设 2 可得。该假设施加了简单的边级正则性，并为每条边指定一个标度指数。

假设 2。对于每条边 $\{v, v'\} \in \mathcal{E}$，令 $\alpha_{v'|v}$ 为 $y \mapsto g_{\{v,v'\}}(1, y)$ 的最右侧极小值点，则存在 $\beta_{v'|v} \in [0, 1)$，使得 $g_{\{v,v'\}}(1, \alpha_{v'|v} + \cdot) - 1 \in \mathrm{RV}^0_{\sigma_{v'|v}}$，其中 $\sigma_{v'|v} := 1/(1 - \beta_{v'|v}) \geq 1$。此外，$g_{\{v,v'\}}$ 为正值、连续且 1 次齐次，并满足 $g_{\{v,v'\}}(x, y) \geq \max(x, y)$，且恒等式（18）成立。

在单位水平集与上界 $g_{\{v,v'\}}$ 相交的接触点附近，$\{(x, \ y) : \max(x, \ y) = 1\}$ 在 $(1, \ \alpha_{v'|v})$ 处，双变量规范函数以固定的幂律方式增长。这使得每条边都有一个唯一的标度指数 $\beta_{v'|v}$。结合链式恒等式 (18)，这些边的指数沿路径组合，并通过递推关系 (20) 确定成对指数。

命题 3. 假设 $\boldsymbol{X} = (X_i : i \in \mathcal{V})$ 相对于块图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 遵循几何极值图模型，且假设 2 成立。对于 $\mathcal{V}$ 中任意两个不同的顶点 i 和 j，令$\{i = v_0, v_1, \ldots, v_{m_{ij}-1} = \pi, v_{m_{ij}} = j\}$ 为从 i 到 j 的长度为 $m_{ij} \geq 2$ 的唯一最短路径上的顶点。那么，$g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i} + \cdot) - 1 \in \mathrm{RV}^{0+}_{\sigma_{j|i}}$，其中 $\sigma_{j|i} = 1/(1 - \beta_{j|i})$ 满足

$$\beta_{j|i} = \begin{cases} \max(\beta_{\pi|i}, \beta_{j|\pi}) & \text{for } \alpha_{\pi|i} \neq 0 \text{ and } \alpha_{j|\pi} \neq 0, \\ \beta_{\pi|i} & \text{for } \alpha_{\pi|i} = 0 \text{ and } \alpha_{j|\pi} \neq 0, \\ \beta_{j|\pi} & \text{for } \alpha_{\pi|i} \neq 0 \text{ and } \alpha_{j|\pi} = 0, \\ \beta_{\pi|i}\beta_{j|\pi} & \text{for } \alpha_{\pi|i} = 0 \text{ and } \alpha_{j|\pi} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

命题3的证明见附录B。该命题有两个值得特别指出的特例：

$$\beta_{j|i} = \max_{k=1,\ldots,m_{ij}} \beta_{v_k|v_{k-1}}, \qquad \text{when } \min_{k=1,\ldots,m_{ij}} \alpha_{v_k|v_{k-1}} > 0$$

表1：示例中使用的成对规范函数3.

Name	$g(x_1, x_2)$	范围	α	β
逻辑斯蒂	$(x_1 + x_2)/\theta + (1 - 2/\theta)\min(x_1, x_2)$	$\theta \in (0,1)$	1	0
Gaussian	$(x_1 + x_2 - 2\rho(x_1x_2)^{1/2})/(1 - \rho^2)$	$\rho \in [0, 1)$	ρ^2	$1/2$
反向 Logistic	$(x_1^{1/\theta} + x_2^{1/\theta})^{\theta}$	$\theta \in (0, 1]$	0	$1 - \theta$
平方	$\max\{(x_1 - x_2)/\theta, (x_2 - x_1)/\theta, (x_1 + x_2)/(2 - \theta)\}$	$\theta \in (0, 1)$	$1 - \theta$	0

and

$$\beta_{j|i} = \prod_{k=1}^{m_{ij}} \beta_{v_k|v_{k-1}}, \qquad \text{when } \max_{k=1,\ldots,m_{ij}} \alpha_{v_k|v_{k-1}} = 0.$$

我们通过一个例子来说明命题3 。

例3。我们考虑一个含有四个节点的链图，并在三条边 $\mathcal{E} = \{(1, 2)、(2, 3)、(3, 4)\}$ 上使用各种参数化规范函数。根据引理2，这等价于考虑块图中由长度为三的路径分隔的任意节点。通过数值最小化得到的规范函数 $g_{\{1,4\}}(x_1, x_4)$ $g_{\{1,4\}}$ 的单位水平集显示在图 2 中。为了更清楚地展示 β 参数，图 2 的底行针对较小的 $x > 0$ ，绘出了 $\log(g_{\{1,4\}}(1, \alpha_{4|1} + x) - 1)$ 与 $\log(x)$ 的关系，并叠加了斜率为 $1/(1 - \beta_{4|1})$ 的直线。以下每种情形的标题均按顺序给出规范函数：$g_{\{1,2\}}$ – $g_{\{2,3\}}$ – $g_{\{3,4\}}$。所用的成对规范函数列于表1。这些规范函数满足假设 2，其中 α 和 β 的取值列于表1最后两列。表1中的所有成对规范函数对于其自变量均为对称的，这意味着对于 $(k, l) \in \mathcal{E}$, $\alpha_{k|l} = \alpha_{l|k} = \alpha$, $\beta_{k|l} = \beta_{l|k} = \beta$。

（a）：逻辑斯蒂 – Gaussian – 逻辑斯蒂。我们有 $\alpha_{4|1} = \alpha_{4|3}\alpha_{3|2}\alpha_{2|1} = 1 \times \rho_{23}^2 \times 1 = \rho_{23}^2$。取 $\rho_{23} > 0$ 时，所有 α-系数均为正值，从而得到 $\beta_{4|1} = \max\{\beta_{4|3}, \beta_{3|1}\}$，其中 $\beta_{3|1} = \max\{\beta_{3|2}, \beta_{2|1}\} = \max\{1/2, 0\} = 1/2$。因此 $\beta_{4|1} = \max\{0, 1/2\} = 1/2$。

（b）：Gaussian – Gaussian – 反向 Logistic。这里有 $\alpha_{4|1} = \alpha_{4|3}\alpha_{3|2}\alpha_{2|1} = 0 \times \rho_{12}^2 \times \rho_{23}^2 = 0$。由于 $\alpha_{4|3} = 0$， $\beta_{4|1} = \beta_{4|3} = 1 - \theta_{34}$，其中 $\theta_{34} \in (0, 1]$ 是反向 Logistic 依赖参数。

（c）：反向 Logistic – 逻辑斯蒂 – 反向 Logistic。这里 $\alpha_{4|1} = \alpha_{4|3}\alpha_{3|2}\alpha_{2|1} = 0 \times 1 \times 0 = 0$。由于 $\alpha_{4|3} = 0$ 和 $\alpha_{3|1} = \alpha_{3|2}\alpha_{2|1} = 0$， $\beta_{4|1} = \beta_{4|3}\beta_{3|1}$。与（b）中一样， $\beta_{4|3} = 1 - \theta_{34}$，而 $\beta_{3|1} = \beta_{2|1} = 1 - \theta_{12}$，因为 $\alpha_{3|2} > 0$ 和 $\alpha_{2|1} = 0$。因此，总体而言， $\beta_{4|1} = (1 - \theta_{34}) \times (1 - \theta_{12})$。

(d)：逻辑斯蒂–平方–平方。此处 $\alpha_{4|1} = \alpha_{4|3}\alpha_{3|2}\alpha_{2|1} = (1 - \theta_{23}) \times (1 - \theta_{34}) \times 1 > 0$。由于所有$\alpha$-系数均为正值，因此 $\beta_{4|1} = \max\{\beta_{4|3}, \beta_{3|1}\} = \max\{\beta_{4|3}, \max\{\beta_{3|2}, \beta_{3|1}\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$。

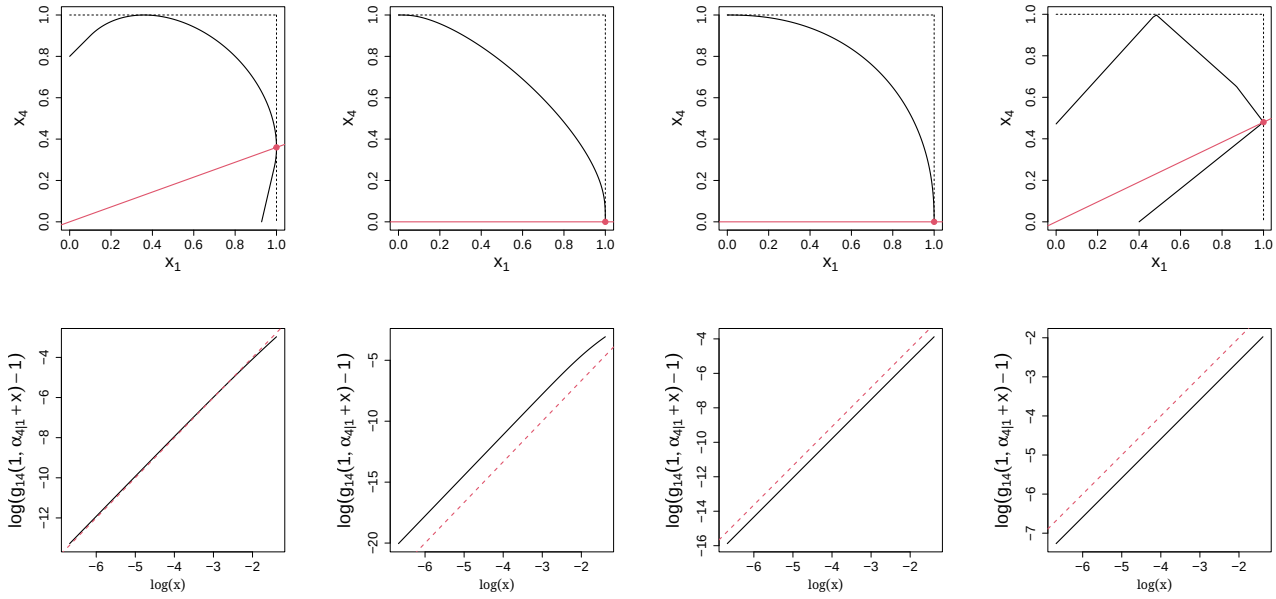


图 2：上排：$g_{\{1,4\}}(x_1, x_4)$单位水平集示意图。红点表示点 $(1, \alpha_{4|1})$。下排：$\log(g_{\{1,4\}}(1, \alpha_{4|1}+x)-1)$（黑色实线）以及斜率为 $1/(1-\beta_{4|1})$ 的直线（红色虚线）示意图。红色虚线的截距始终为 0；对于较小的 x，仅比较其斜率与黑色实线的斜率。由左至右：示例 (a)、(b)、(c)、(d)。(b) 中的相关参数为：$\theta_{34} = 0.3$, $\beta_{4|3} = 0.7$；(c) 中的相关参数为：$\theta_{12} = 0.3$, $\theta_{34} = 0.2$, $\beta_{4|1} = 0.7 \times 0.8 = 0.56$。

3.2 拉普拉斯边缘分布

对于几何极值，当至少一对变量之间存在负相关时，在拉普拉斯边缘分布下进行研究是很自然的。与指数情形类似，也有相应的结果；不过，我们还发现某些变量取值较小时会产生影响，因此需要少量新的定义和记号。

3.2.1 条件极值假设与记号

在本节中，我们将向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ （定义于假设 1 中）记为 $\boldsymbol{\alpha}^{+}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} \in [-1,1]^{d-1}$，并将极限分布记为 $K^{+}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}}$。我们引入类似的假设 3 和命题4，其中包括以每个变量取负向大值为条件。下文中的假设、命题和注记均附有一个替代标题，该标题基于第 3.1 节中的类似陈述。

假设 3 (假设 1±)。令 sgn $= +$ or sgn $= -$。对于所有 $i \in \mathcal{V}$,

$$\frac{\partial^{d-1}}{\partial \boldsymbol{z}} \mathbb{P}\left(\frac{\boldsymbol{X}_{-i} - \boldsymbol{a}^{\text{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)}{\boldsymbol{b}^{\text{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)} \leq \boldsymbol{z} \mid X_i = \text{sgn} \times t \right) \to \frac{\partial^{d-1}}{\partial \boldsymbol{z}} K^{\text{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}) =: k^{\text{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}), \quad \text{as } t \to \infty. \tag{21}$$

此外，

(*i*) 对于 $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$，边缘分布 $K^{\mathrm{sgn}}_{j|i}$ 的定义域 $K^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 包含 $(0, \infty$);

(*ii*) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} := \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{a}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(t)/t$ 在 $[-1,1]^{d-1}$中存在。

如方程 (9) 所示， $K^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 是定义在 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上的分布函数，满足 $\lim_{t\to\infty} K^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{t}_j) = 1$ 对所有 $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$成立。

3.2.2 α-系数

命题 4 (命题 1±)。假设对于 $\boldsymbol{X} = (X_i : \ i \in \mathcal{V})$，收敛 (3) 和假设 3 成立。令 $\mathrm{sgn} = +$ 或 $\mathrm{sgn} = -$。于是，

对所有 $i \in \mathcal{V}$, $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) = 1$;

对所有 $i \in \mathcal{V}$，若有多个向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}$ 满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}) = 1$，则这些向量中逐坐标最大值对应的向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\star\mathrm{sgn}}$ 也满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \ \boldsymbol{\alpha}^{\star\mathrm{sgn}}) = 1$ 且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} = \boldsymbol{\alpha}^{\star\mathrm{sgn}}$。

注 3（注 2±）。由于 $g(\boldsymbol{x}) \geq \max(|x_i| : i \in \mathcal{V})$，命题4 表明 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}}$ 是全局最小值点，即$g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) \leq g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \ \boldsymbol{x})$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$。

命题4 的证明见附录A。这使我们得以引入命题 5，其证明也见附录A，它是2的拉普拉斯边缘类比。

命题 5 (命题 2±)。假设 $\boldsymbol{X} = (X_i : \ i \in \mathcal{V})$ 遵循以图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \ \mathcal{E})$ 为图的分块几何极值图模型，并且命题 4 中的假设成立。对于 $\mathcal{V}$ 中任意两个不同的顶点 i和 j，设 $\{i = v_0, v_1, \ldots, v_{m_{ij}} = j\}$ 为从 i 到 j 的长度为 $m_{ij} \geq 1$ 的唯一最短路径上的顶点。那么对于 $m_{ij} = 2$, $\alpha^+_{j|i} = |\alpha^+_{v_1|i}|\alpha^{\mathrm{sgn}(\alpha^+_{v_1|i})}_{j|v_1}$。对于 $m_{ij} \geq 3$,

$$\alpha^+_{j|i} = \left|\alpha^+_{v_1|i}\right| \prod_{k=2}^{m_{ij}-1} \left|\alpha^{\mathrm{sgn}(\alpha^+_{v_{k-1}|i})}_{v_k|v_{k-1}}\right| \times \alpha^{\mathrm{sgn}(\alpha^+_{v_{m_{ij}-1}|i})}_{j|v_{m_{ij}-1}}. \tag{22}$$

我们注意到，方程（22）中的相关符号可以通过递推关系推导出

$$\mathrm{sgn}(\alpha^+_{v_k|i}) = \mathrm{sgn}\left(\alpha^{\mathrm{sgn}(\alpha^+_{v_{k-1}|i})}_{v_k|v_{k-1}}\right),$$

并且当所有符号均为正值时，方程（22）可化简为方程（13）。我们通过两个例子说明命题 5 。

例 4. 设 $\mathcal{V} = \{1,2,3,4,5,6\}$ 和 $\mathcal{E} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$。这是一个块图，其团为 $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4,5,6\}\}$，分隔集为 $\mathcal{D} = \{2,3\}$。我们考虑由这种条件独立图定义的、具有拉普拉斯边缘分布的高斯分布。这样的分布具有如下规范函数的极限集

$$g(\boldsymbol{x}) = g_{\{1,2\}}(x_1,x_2) + g_{\{2,3\}}(x_2,x_3) + g_{\{3,4,5,6\}}(x_3,x_4,x_5,x_6) - |x_2| - |x_3|,$$

其中 $g_A(\boldsymbol{x}_A) = \left(\text{sgn}(\boldsymbol{x}_A)|\boldsymbol{x}_A|^{1/2}\right)^\top (\Sigma_{AA})^{-1} \left(\text{sgn}(\boldsymbol{x}_A)|\boldsymbol{x}_A|^{1/2}\right)$，且对于 $A \subset \mathcal{V}$，Σ_{AA} 是由 A 所索引分量子集的高斯相关矩阵。我们考虑 $\alpha^+_{6|1}$。从节点 1 到 6 的最短路径为 $\{v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 6\}$，路径长度为 $m_{16} = 3$。因此，根据命题 5 的结果，我们有 $\alpha^+_{6|1} = |\alpha^+_{2|1}|^{\text{sgn}(\alpha^+_{2|1})} \times |\alpha^{\text{sgn}(\alpha^+_{3|1})}_{3|2}| \times \alpha_{6|3}$。具有此条件独立图的高斯分布可按如下方式构造:

$$\begin{aligned}
Z_1 &\sim N(0,1) \\
Z_2|Z_1 &\sim \rho_{12}Z_1 + (1-\rho_{12}^2)^{1/2}\epsilon_2, && \epsilon_2 \sim N(0,1) \perp\!\!\!\perp Z_1 \\
(Z_3,Z_4,Z_5,Z_6)|Z_2 &\sim \rho_{23}Z_2 + (1-\rho_{23}^2)^{1/2}(\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5,\epsilon_6), && (\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5,\epsilon_6) \sim N_4(\mathbf{0},\Sigma_{3:6,3:6}) \perp\!\!\!\perp Z_2,
\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{3:6,3:6}$ 是一个非对角元素为 ρ_{kl}, $k < l$, $k,l \in \{3,4,5,6\}$的 4×4 相关矩阵。我们对 $\boldsymbol{Z}$ 应用概率积分变换，得到具有拉普拉斯边缘分布的 $\boldsymbol{X}$ 。对于具有拉普拉斯边缘分布的 Gaussian 分布，我们有 $\alpha^+_{i|j} = \alpha^+_{j|i} = \text{sgn}(\rho_{ij})\rho_{ij}^2$，且 $\alpha^-_{i|j} = \alpha^-_{j|i} = -\text{sgn}(\rho_{ij})\rho_{ij}^2$ 在图 3 中，我们用 $\rho_{12} = -0.9$, $\rho_{23} = 0.8$, $\rho_{36} = 0.7$对此进行说明，得到 $\alpha^+_{2|1} = -0.81$, $\alpha^-_{3|2} = -0.64$, $\alpha^+_{3|2} = 0.64$ $\alpha^+_{3|1} = {}_{3|2} = \alpha^-_{3|2} = -\alpha^-_{6|3} = -0.49$, sgn( ) sgn($\alpha^{\text{sgn}(\alpha^+_{2|1})}$) sgn( ) , , 因此

$$\begin{aligned}
\alpha^+_{6|1} &= |\alpha^+_{2|1}| \times |\alpha^{\text{sgn}(\alpha^+_{2|1})}_{3|2}| \times \alpha^{\text{sgn}(\alpha^+_{3|1})}_{6|3} \\
&= 0.81 \times 0.64 \times -0.49 = -0.254.
\end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{Z}$ 的高斯图模型，我们注意到，也可以直接推导出这一结果。假设对 Z_2 进行边缘化，得到一个团为 $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{3,4,5,6\}\}$、分隔符为$\mathcal{D} = \{3\}$的块图。那么 $Z_6 \perp\!\!\!\perp Z_1|Z_3$，因此偏相关 $\rho_{16|3}$ 为零，这意味着 $\rho_{16} = \rho_{13}\rho_{36}$。现在，如果改为恢复 Z_2 ，并考虑 $(Z_1,Z_3)|Z_2$ 之间为零的偏相关，同样可以得到

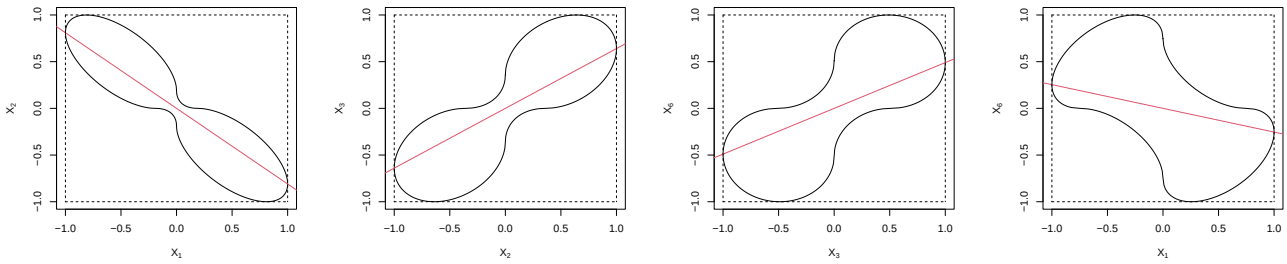


图 3：从左至右：各对 $(X_1,\ X_2)$、$(X_2,\ X_3)$、$(X_3,\ X_6)$ 和 $(X_1,\ X_6)$ 的二维边缘极限集。对于一对 $(k,\ l)$，红线经过原点，斜率为 $\alpha^+_{k|l}$。

$\rho_{13} = \rho_{12}\rho_{23}$。将 th　　将这些合在一起，得到 $\rho_{16} = \rho_{36}\rho_{23}\rho_{12} = -0.504$，而 $\alpha^+_{6|1} = \text{sgn}(\rho_{16})\rho^2_{16} = -0.254$.

例5。考虑一个简单链式图模型，其中包含 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{E} = \{(1,\ 2),\ (2,\ 3)\}$，以及$\mathcal{D} = \{2\}$。其规范函数为

$$g(x_1, x_2, x_3) = g_{\{1,2\}}(x_1, x_2) + g_{\{2,3\}}(x_2, x_3) - |x_2|.$$

我们将 $g_{\{1,2\}}$ 取为具有拉普拉斯边缘分布、参数为 $\rho_{12} = -0.9$ 的高斯规范，从而得到 $\alpha^+_{2|1} = -0.9^2$。对于 $g_{\{1,3\}}$，我们取一个规范函数，使得 $g_{\{2,3\}}(-1, \alpha) = 1$ 有多个解；具体而言，$g_{\{2,3\}}(-1, -1) = g_{\{2,3\}}(-1, -0.5) = 1$，见图4的第二个面板。根据我们涉及取此类解最大值的定义，有 $\alpha^-_{3|2} = -0.5$。图4展示了这两个指定的边缘规范函数，以及由此隐含的边缘$g_{\{1,3\}}$和联合函数 g。将这些结果结合起来并应用命题5，可得

$$\alpha^+_{3|1} = |\alpha^+_{2|1}| \times \alpha_{3|2}^{\text{sgn}(\alpha^+_{2|1})} = 0.81 \times -0.5 = -0.405.$$

3.2.3　β-系数

我们没有明确考虑 β拉普拉斯边际情形下的系数，但我们预计可以结合第3.1.3 节和3.2.2节的论证得出相关结果。也就是说，我们需要同时考虑上尾和下尾，以及相应尾部中的 α值。

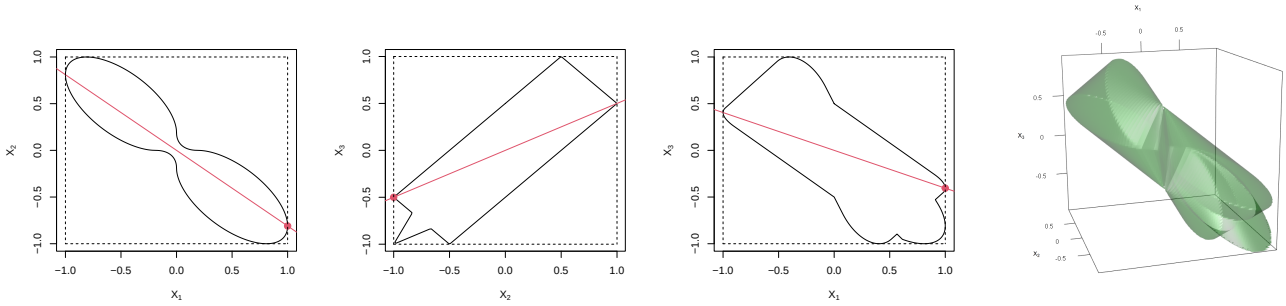


图4：从左到右：成对变量 $(X_1、\ X_2)$、$(X_2、\ X_3)$ 和 $(X_1、\ X_3)$ 的二维边缘极限集；$(X_1、\ X_2、\ X_3)$ 的三维极限集。在前三幅图中，突出显示的点分别为 $(1、\ \alpha^{+}_{2|1})$、$(-1、\ \alpha^{-}_{3|2})$ 和 $(1、\ \alpha^{+}_{3|1})$，并分别绘有与这些点及原点相交的直线。

4 与联合极值相关的结果

当我们有一个几何极值图模型，且 $\alpha_{j|i} = 1$ 对所有 $i \in \mathcal{V}$ 和 $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$均成立时，命题2和5 并未给出特别有趣的结果。这类情形与完全渐近依赖密切相关，此时Engelke 和 Hitz (2020年) 的极值图模型便具有参考意义。尽管如此，我们仍可以构造具有这种渐近依赖的几何极值图模型，并探讨与之相关的结果。

我们首先考察几何设定下联合极值的概念，并概述团内的联合极值如何与跨多个团的联合极值相联系。随后，我们介绍联合极值的定义与第 α节的系数之间的联系3。最后，我们以树形几何极值图模型的一个重要特例结束本节；该模型的组成部分包含渐近依赖变量的双变量规范函数的一个常见实例。

4.1 几何框架中的联合极值

如果存在完全渐近依赖（如第 2 节方程（1）中所定义），并且收敛到极限集 $G = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}^d : \ g(\boldsymbol{x}) \leq 1\}$，那么 $g(\mathbf{1}) = 1$。反之一般不成立。然而，在极限集框架下，最简单的做法是将 d 个变量中的联合极值定义为满足性质 $g(\mathbf{1}) = 1$，而不是满足方程（2）。基于这一观察，并遵循 Campbell 和 Wadsworth (2024年）的做法，我们考虑一个基于规范函数的简单判据，用以定义联合极值组。

定义5。 设 $A \subseteq \mathcal{V}$。如果 $g(\boldsymbol{z}^A) = 1$，其中对于 $j \in A$，$z_j^A = 1$，且对于 $z_j^A = \gamma_j$，$j \notin A$，则我们称由 A 索引的变量是联合极值的，而由 $\mathcal{V} \setminus A$ 索引的变量处于低阶，

$\gamma_j \in [0,1)$ 或 $\gamma_j \in (-1,\ 1)$，分别适用于指数边缘分布和拉普拉斯边缘分布。此类集合的完整集合 A 记为 $\mathcal{A}$，称为几何极端方向。

注4。“几何极端方向这一名称沿用了极端方向一词的用法，见Mourahib 等人 (2025年)。后者依据经典极值理论中出现的所谓谱测度的支撑集来表述；另见Goix 等人(2017年)。对于给定的联合分布，几何极端方向通常与极端方向一致，但并非总是如此。

向量 $\{\boldsymbol{z}^A:\ A \in \mathcal{A}\}$ 表示由 g的单位水平集所描述的极限集 G的边界与其有界框 $[0,1]^d$ 的交点；在指数边缘或拉普拉斯边缘下，分别对应 $[0,1]^d$ 或 $[-1,1]^d$。由于 G 的逐坐标上确界为 $(1,\ldots,1)$，每个指数 $j \in \{1,\ldots,d\}$ 至少出现在一个 $A \in \mathcal{A}$中。请注意，对于给定的 A，可能存在多个向量 $\boldsymbol{z}^A$ 使得 $g(\boldsymbol{z}^A) = 1$；如果 G 的边界在一个正测度区域内与有界框重合，则这类向量可能有不可数多个。此外，尽管几何极端方向集合 $\mathcal{A}$ 概括了极端依赖结构，向量 $\{\boldsymbol{z}^A:\ A \in \mathcal{A}\}$ 则提供了更多细节，因为它们表示实际经历极端值最多的方向。最后还要指出，在拉普拉斯边际情形下，我们将 $\gamma_j = -1$ 排除在定义5之外。原因是，通过对变量取负并交换其下尾与上尾，可以用 $+1$值替代 -1 值。因此，这属于一种“联合极值”，为简便起见予以排除。

例6。我们用一个简单的例子来说明定义5。设 $\mathcal{V} = \{1,2,3\}$ 和 $\mathcal{E} = \{(1,2)、(2,3)\}$表示一个链式几何极值图模型，其边缘分布为指数分布，$g_{\{1,2\}}(x_1,x_2) = (x_1+x_2)/\theta + (1-2/\theta)\min(x_1,x_2)$，$\theta \in (0,1]$ 和 $g_{\{2,3\}}(x_2,x_3) = (x_2+x_3-2\rho(x_2x_3)^{1/2})/(1-\rho^2)$，$\rho \in [0,1)$。由 $g(x_1,x_2,x_3) = g_{\{1,2\}}(x_1,x_2) + g_{\{2,3\}}(x_2,x_3) - x_2$ 定义的极限集如图 5 所示。在此例中 $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{3\}\}$，其中 $\boldsymbol{z}^{\{1,2\}} = (1,1,\rho^2)$，且 $\boldsymbol{z}^{\{3\}} = (\rho^2, \rho^2, 1)$。这意味着，变量 (X_1,X_2) 会同时出现联合极值，而变量 X_3 中的极值仅在 (X_1,X_2) 处于低阶时才会出现。

下面这个简单命题指出，如果我们有一个分块几何极值图模型，其中所有团都呈现联合极值，具体而言是 $g_C(\mathbf{1}_C) = 1$，那么这等价于 $\mathcal{V}$ 中的所有变量都呈现联合极值，具体而言是 $g(\mathbf{1}) = 1$。等价地，$\mathcal{V} \in \mathcal{A}$。

命题 6. 考虑一个由规范函数定义的分块几何极值图模型

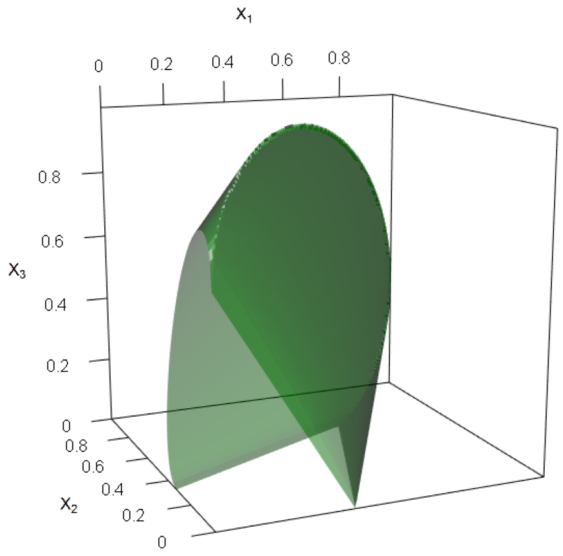


图5：单位水平集的示意图 $g(x_1,\ x_2,\ x_3) = 1$ 例 6，其中 $\theta = 0.4,\ \rho = 0.6$。

在（6）中。若 $g_C(\mathbf{1}_C) = 1$对所有 $C \in \mathcal{C}$均成立，则 $g(\mathbf{1}) = 1$。反之， $g(\mathbf{1}) = 1$意味着 $g_C(\mathbf{1}_C) = 1$对所有$C \in \mathcal{C}$均成立。

证明。 对于第一个方向，我们有

$$g(\mathbf{1}) = \sum_{C\in\mathcal{C}} g_C(\mathbf{1}_C) - \sum_{D\in\mathcal{D}} 1 = |\mathcal{C}|\times 1 - |\mathcal{D}|\times 1 = 1,$$

因为 $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| - 1$。另一方面，

$$1 = g(\mathbf{1}) = \sum_{C\in\mathcal{C}} g_C(\mathbf{1}_C) - \sum_{D\in\mathcal{D}} 1 = \sum_{C\in\mathcal{C}} g_C(\mathbf{1}_C) - (|\mathcal{C}|-1)\times 1,$$

这意味着 $\sum_{C\in\mathcal{C}} g_C(\mathbf{1}_C) = |\mathcal{C}|$。但由于 $g_C(\boldsymbol{x}_C) \geq \max_{j\in C}\{|x_j|\}$，因此对所有 $C \in \mathcal{C}$，都有 $g_C(\mathbf{1}_C) = 1$。

□

本节的下一个结果涉及团之间的共同极端行为。具体而言，根据定义 5，我们证明，跨越不同团的变量组只有在包含分隔变量时才能联合达到极端。命题 7 针对两个团阐述了这一点，并因其证明简短而富有启发性而被列出。命题 8给出了这一结论的一般情形。

命题7。 考虑一个由两个团 C_1、C_2 和一个分隔集 D组成的块图，使得$g(\boldsymbol{x}) = g_{C_1}(\boldsymbol{x}_{C_1}) + g_{C_2}(\boldsymbol{x}_{C_2}) - |x_D|$。令 $B_1 \subseteq C_1 \setminus D$、 $B_2 \subseteq C_2 \setminus D$，并定义 $B = B_1 \cup B_2$，其中 $\boldsymbol{z}^B$ 为

定义 5 中的情形。于是 $g(\boldsymbol{z}^B) > 1$，也就是说， B 不是几何极端方向。

证明。 在 $\boldsymbol{z}^B$ 处取值的规范函数为

$$g(\boldsymbol{z}^B) = g_{B_1,C_1\setminus\{B_1\cup D\},D}(\mathbf{1}_{B_1}, \gamma_{C_1\setminus\{B_1\cup D\}}, \gamma_D) + g_{B_2,C_2\setminus\{B_2\cup D\},D}(\mathbf{1}_{B_2}, \gamma_{C_1\setminus\{B_1\cup D\}}, \gamma_D) - |\gamma_D|.$$

我们有 $g_{B_1,\ C_1\setminus\{B_1\cup D\},\ D}(\mathbf{1}_{B_1},\ \gamma_{C_1\setminus\{B_1\cup D\}},\ \gamma_D) \geq 1$, $g_{B_2,\ C_2\setminus\{B_2\cup D\},\ D}(\mathbf{1}_{B_2},\ \gamma_{C_1\setminus\{B_1\cup D\}},\ \gamma_D) \geq 1$ 和 $|\gamma_D|<1$，这意味着 $g(\boldsymbol{z}^B) > 1$。 □

命题8。 考虑一个块图，其团集为 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_N\}$，分隔集为 $\mathcal{D} = \{D_2, \ldots, D_N\}$。定义 $A \subset \mathcal{V}$，其中 $\boldsymbol{z}^A$ 如定义 5所述。假设 A 中至少有一个元素属于 C_1，且 A 中至少有一个元素属于 C_M，其中 $1 < M \leq N$。那么，对于 $g(\boldsymbol{z}^A) = 1$，最低要求是 $\cup_{i=2}^{M} D_i \subset A$；也就是说，如果不包含这些团之间的分隔变量，就无法在团之间出现联合极值。

命题 8的证明见附录 C。

4.2 α-系数与几何极端方向之间的关系

第 α 节讨论的系数与几何极端方向之间存在密切关系。回顾一下， α-系数满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) = 1$。这意味着存在一个集合 $A \subseteq \{1, \ldots, d\}$，其定义为

$$A = \{i\} \cup \{j \in \mathcal{V} \setminus \{i\} : \alpha_{j|i} = 1\}. \tag{23}$$

相应的 $\boldsymbol{z}^A$ 在第 i 个坐标上的取值为 1，在其他坐标上的取值为 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$。然而，仅凭 α-系数可能无法完整描述几何极端方向。这是因为可能存在多个这样的向量 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$，满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) = 1$，而 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$是所有这些向量的逐坐标最大值。例如，假设 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} = (1, \ldots, 1)$，则 $A = \{1, \ldots, d\} \in \mathcal{A}$。此时可能还存在其他几何极端方向，但我们无法从向量集合 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}, i \in \mathcal{V}$中确定它们。另一方面，如果对于每个 $i \in \mathcal{V}$，都存在唯一一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) = 1$，那么这些向量便可通过关系式 (23) 完全确定几何极端方向。在例6中，这些向量为 $\boldsymbol{\alpha}_{\{2,3\}|1} = (1, \rho^2)$, $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,3\}|2} = (1, \rho^2)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}|3} = (\rho^2, \rho^2)$。前两个给出 $A = \{1, 2\}$，第三个给出 $A = \{3\}$，因此 $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$，正如前面所见。

4.3 用树图构造联合极值

在若干存在极限集的参数化二元渐近相关示例中，指数边缘分布下会出现以下形式的规范函数：

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\theta} + \frac{x_2}{\gamma} + \left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\gamma}\right) \min(x_1, x_2), \qquad \theta, \gamma \in (0, 1). \tag{24}$$

此处我们将讨论范围限定在指数边缘情形，因为渐近依赖与样本在正象限中的行为有关，而样本在其他象限中的行为则可能任意。我们考察采用这种形式的二元分量规范函数构造树图模型所产生的影响。下面的引理为主要命题提供了一个构建模块。

引理1. 考虑一个简单链图，其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$ 和 $\mathcal{E} = \{(1,2),(2,3)\}$，使得 $g(x_1, x_2, x_3) = g_{\{1,2\}}(x_1, x_2) + g_{\{2,3\}}(x_1, x_2) - x_2$。若二元分量规范函数为 $g_{\{i,j\}}(x_i, x_j) = \frac{x_1}{\theta_{ij}} + \frac{x_2}{\gamma_{ij}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{ij}} - \frac{1}{\gamma_{ij}}\right) \min(x_i, x_j)$，$(i, j) = (1,2), (2,3)$，则边缘规范函数 $g_{\{1,3\}}$ 为

$$g_{\{1,3\}}(x_1, x_3) = \frac{x_1}{\max(\theta_{12}, \theta_{23})} + \frac{x_3}{\max(\gamma_{12}, \gamma_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\theta_{12}, \theta_{23})} - \frac{1}{\max(\gamma_{12}, \gamma_{23})}\right) \min(x_1, x_3).$$

关于具有此类规范函数的树极值图模型的主要命题如下。引理1和命题9的证明见附录C。

命题9。 考虑一个具有规范函数的树极值图模型，

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} g_{\{i,j\}}(x_i, x_j) - x_i - x_j + \sum_{k\in\mathcal{V}} x_k,$$

其中所有$g_{\{i,j\}}$ 均具有引理1中的形式。对于任意 $k < l \in \mathcal{V}$，令 $\text{pa}(k, l) \subset \mathcal{E}$ 表示图中连接 k 和 l的最短路径上的边。则边缘规范函数$g_{\{k,l\}}(x_k, x_l)$ 等于

$$\frac{x_k}{\max_{(i,j)\in \text{pa}(k,l)}(\theta_{ij})} + \frac{x_l}{\max_{(i,j)\in \text{pa}(k,l)}(\gamma_{ij})} + \left(1 - \frac{1}{\max_{(i,j)\in \text{pa}(k,l)}(\theta_{ij})} - \frac{1}{\max_{(i,j)\in \text{pa}(k,l)}(\gamma_{ij})}\right) \min(x_k, x_l).$$

我们指出，方程（24）中的规范函数表示，随着系数θ，γ 增大，依赖性会减弱。因此，命题 9 的结果突显了一个直观结论：成对变量之间的依赖强度不会随图上的距离增加而增强。

5 讨论与未来方向

几何极值图模型的定义，为通过 Wadsworth and Campbell (2024年）或 Papastathopoulos 等人(2025年）的框架开展高维统计建模提供了可能。采用块图结构时，团上规范函数的任何有效选取，都必然会导出有效的高维联合规范函数；尤其是，树规范函数仅通过双变量规范函数即可实现高维设定，而双变量规范函数有多种可选形式。这解决了几何框架中的一个关键难题，即如何在高维情形下设定足够灵活的规范函数。

本文提出的理论结果为理解这些模型的性质奠定了有益基础，也为通过估计各种系数进行结构学习提供了可能。我们证明，依赖系数会以多种方式随图上的距离增加而衰减：与条件极值模型相关的 α-系数呈乘积形式，而该模型的 β-系数则呈乘积与最大值的混合形式。当联合极值发生时，沿图向更远处移动，依赖仍会减弱，命题9对此作了说明。未来的工作可以将此类结果推广到具有不同规范函数的一般块图，只要这些规范函数满足 $g_C(\mathbf{1}) = 1$ ，并为这类规范函数定义新的依赖系数。我们还证明，只有纳入分隔变量，联合极值才可能出现在不同的团之间，这为拟合模型提供了重要的解释。

我们的研究聚焦于可分解图，尤其是块图。分隔集为单元素集这一特点降低了分析的复杂性，也有助于构建更简单的统计模型，因为无需考虑模型之间的兼容性准则来确保g_C， $C \in \mathcal{C}$和 g_D， $D \in \mathcal{D}$构成有效的 d–维规范函数 g。尽管如此，我们预计未来的研究将探讨更复杂图的作用。

致谢

JW 衷心感谢英国工程与自然科学研究委员会通过资助项目 EP/X010449/1 提供资助。

免责声明

作者使用爱丁堡大学的 ELM 平台 Edina（https://elm.edina.ac.uk/elm/elm，模型：ChatGPT-5）协助组织、编辑并核验引理 4 的表述。所有数学内容、推导和结论均由作者完成并核实。

参考文献

Balkema, A., Embrechts, P. 和 Nolde, N.（2010）。元密度及其样本云的形状。《多元分析杂志》，101：1738–1754。

Balkema, A. A. 和 Nolde, N.（2010）。单峰密度的渐近独立性。《应用概率进展》，42(2)：411–432。

Besag, J.（1974）。格点系统中的空间相互作用与统计分析。《皇家统计学会杂志：*B*辑（方法论）》，36(2)：192–225。

Bingham, N. H., Goldie, C. M. 和 Teugels, J. L.（1989）。正则变差。剑桥大学出版社。Campbell, R. 和 Wadsworth, J.L.（2024年）。多元几何极值的分段线性建模。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.05195*。

Casey, A. 和 Papastathopoulos, I.（2023）。可分解尾部图模型。*arXiv* 预印本 *arXiv:2302.05182*。

Davis, R. A., Mulrow, E. 和 Resnick, S. I.（1988）。 $\mathbb{R}^d$中随机样本的几乎必然极限集。《应用概率进展》，20(3):573–599。

Engelke, S. 和 Hitz, A. S.（2020）。极值图模型。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》，82(4):871–932。

Engelke, S. 和 Ivanovs, J.（2021年）。多元极值的稀疏结构。《统计学及其应用年度评论》，8(1):241–270。

Engelke, S., Ivanovs, J. 和 Strokorb, K.（2025年）。无限测度的图模型及其在极值中的应用。《应用概率年刊》，35:3490–3542。

Farrell, A., Eastoe, E. F., and Lee, C.（2024年）。图模型中的条件极值。*arXiv* 预印本 *arXiv:2411.17013*。

Gissibl, N. and Kl¨uppelberg, C.（2018）。有向无环图上的最大线性模型。*Bernoulli*，24:2693–2720。Gissibl, N., Kl¨uppelberg, C., and Lauritzen, S.（2021年）。递归最大线性模型的可识别性与估计。斯堪的纳维亚统计学杂志，48(1):188–211。Goix, N., Sabourin, A., and Cl´emen¸con, S.（2017年）。多元极值的稀疏表示及其在异常检测中的应用。《多元分析杂志》，161:12–31。

Gong, Y., Zhong, P., Opitz, T., 和 Huser, R.（2024年）。应用于极值网络学习的部分尾相关系数。*Technometrics*，66(3)：331–346。

Grimmett, G.（2018）。《图上的概率：图与格点上的随机过程》，第 8 卷。剑桥大学出版社，第二版。

Hazra, A., Huser, R., 和 Bolin, D.（2025年）。大范围地理区域上的空间极值高效建模。《计算与图形统计学杂志》，34(3)：795–811。

Heffernan, J. E. 和 Resnick, S. I.（2007年）。具有极值分量的随机向量的极限定律。《应用概率年刊》，17:537–571。Heffernan, J. E. 和 Tawn, J. A.（2004年）。多元极值的条件方法（附讨论）。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》，66(3):497–546。Kinoshita, K. 和 Resnick, S. I.（1991年）。$\mathbb{R}^d$ 中缩放随机样本的收敛。《概率年刊》，19(4):1640–1663。Koster, J. T.（2002年）。图模型中的边缘化与条件化。*Bernoulli*，8:817–840。Lauritzen, S. L.（1996年）。图模型，第17卷。克拉伦登出版社。Lee, J. 和 Cooley, D.（2022年）。极值的偏尾相关。*arXiv*预印本 *arXiv:2210.02048*。Mourahib, A.、Kiriliouk, A. 和 Segers, J.（2025年）。沿极值方向的多元广义帕累托分布。*Extremes*，28(2):239–272。Nolde, N.（2014年）。残余依赖系数的几何解释。《多元分析杂志》，123:85–95。

Nolde, N. 和 Wadsworth, J. L.（2022年）。通过极限集连接多元极值的表示。《应用概率进展》，54:688–717。

Papastathopoulos, I., De Monte, L., Campbell, R., and Rue, H. (2025年). 几何极值中径向广义帕累托分布与回归集的统计推断。*arXiv:2310.06130*.

Rootz´en, H., Segers, J., and Wadsworth, J. L. (2018). 多元超阈值模型。*Extremes*, 21(1):115–145.

Rootz´en, H. and Tajvidi, N. (2006). 多元广义帕累托分布。*Bernoulli*, 12(5):917–930.

Shi, M., Zhang, L., Risser, M. D., and Shaby, B. A. (2024年). 面向高维空间极值的空间尺度感知尾部依赖建模。*arXiv preprint arXiv:2412.07957*.

Simpson, E. S., Opitz, T., and Wadsworth, J. L. (2023). 使用 INLA 和高斯马尔可夫随机场对空间和时空条件极值进行高维建模。*Extremes*, 26(4):669–713.

Simpson, E. S., Wadsworth, J. L. 和 Tawn, J. A.（2020年）。确定多元极值的依赖结构。《生物统计学》，107(3)：513–532。

Wadsworth, J. L.（2020年）。关于极值图模型的讨论。《英国皇家统计学会杂志：*B*辑》，82：908–910。

Wadsworth, J.L. 和 Campbell, R.（2024年）。通过几何方法对多元极值进行统计推断。《英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》，86：1234–1265。

补充材料

A 与 α-系数相关的证明

命题 *1* 的证明（i）该证明是对 Nolde 和 Wadsworth（2022年）中命题 5（i）证明的直接扩展，此处列出以求完整。假定的密度尺度上的条件极值收敛（11）可表示为

$$e^t f_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(t, \boldsymbol{a}_{|i}(t) + \boldsymbol{b}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}) \prod_{j\in\mathcal{V}\setminus\{i\}} \left[b_{j|i}(t)\right] \to k_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i}) = e^{-h_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i})}, \tag{25}$$

在对数尺度上可转化为

$$-\log f_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(t, \boldsymbol{a}_{|i}(t) + \boldsymbol{b}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}) - t - \sum_{j\in\mathcal{V}\setminus\{i\}} \log b_{j|i}(t) \to h_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i}), \tag{26}$$

其中 $h_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i}) < \infty$ 对所有 $\boldsymbol{z}_{|i} \in (0,\infty)^{d-1}$均成立，因为极限分布的支撑集在每个边际上都包含 $(0,\infty)$。令 $\boldsymbol{x}_t = (1, \boldsymbol{a}_{|i}(t)/t + \boldsymbol{b}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}/t) \to \boldsymbol{x}$, $t \to \infty$。利用假设 (3)，可得

$$-\log f_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(t, \boldsymbol{a}_{|i}(t) + \boldsymbol{b}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}) = t g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(\boldsymbol{x}_t)[1 + o(1)] = t g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(\boldsymbol{x})[1 + o(1)]. \tag{27}$$

结合 (26) 和 (27) 可得

$$g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(\boldsymbol{x}_t)[1 + o(1)] = 1 + h_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i})/t + \sum_{j\in\mathcal{V}\setminus\{i\}} \log b_{j|i}(t)/t + o(1/t). \tag{28}$$

假设对于第一个 $j \in \mathcal{V}\setminus\{i\}$, $b_{j|i}(t)/t \to \gamma_j > 0$。那么 $\boldsymbol{x}_t \to \boldsymbol{x} = (1, \alpha_{j|i} + \gamma_j z_{j|i}, \boldsymbol{\alpha}_{\setminus j|i})$，而将$t \to \infty$代入 (28) 得到 $g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(1, \alpha_{j|i} + \gamma_j z_{j|i}, \boldsymbol{\alpha}_{\setminus j|i}) = 1$，对任意 $z_{j|i}$ 均成立。但由于 $g(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_\infty$，这意味着 $z_{j|i} \leq (1 - \alpha_{j|i})/\gamma_j$。此处不适用这样的上界，因此我们得出 $\gamma_j = 0$，即 $b_{j|i}(t) = o(t)$。对于任意指数 j，都可以重复同样的论证。因此，在 (28) 中取极限可得 $g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{|i}) = 1$。

(ii) 假设存在 $m \geq 2$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}^1 \neq \cdots \neq \boldsymbol{\alpha}^m$ 满足 $g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^1) = \cdots = g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^m) =$

1. 考虑边缘规范函数

$$
\begin{aligned}
1 = g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i}) &= g_{\{i,j\}}(1, \alpha^1_{j|i}) \\
&= g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^1) \\
&= \dots \\
&= g_{\{i,j\}}(1, \alpha^m_{j|i}) \\
&= g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^m)
\end{aligned}
$$

按照Nolde 和 Wadsworth(2022年) 的命题 5 (iii) 中的类型收敛论证，我们有 $\alpha_{j|i} = \max(\alpha^1_{j|i}, \dots\dots, \alpha^m_{j|i})$。该论证对任意指数 $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$均成立，因此$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} = \max(\boldsymbol{\alpha}^1, \dots\dots, \boldsymbol{\alpha}^m)$，其中最大值运算按分量进行。注意，这意味着 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i} = \boldsymbol{\alpha}^k$ 对于某个 $k \in \{1, \dots, m\}$。

□

命题的证明 *4*。 该证明与命题 1 的证明非常相似，首先将收敛性（25）替换为（21）的等价形式，即

$$
2e^t f_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(\mathrm{sgn} \times t, \boldsymbol{a}^{\mathrm{sgn}}_{|i}(t) + \boldsymbol{b}^{\mathrm{sgn}}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}) \prod_{j\in\mathcal{V}\setminus\{i\}} \left[b^{\mathrm{sgn}}_{j|i}(t)\right] \to k^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i}) = e^{-h^{\mathrm{sgn}}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}(\boldsymbol{z}_{|i})}. \tag{29}
$$

由方程（27）可知，我们按照之前相同的方式进行，但令 $\boldsymbol{x}_t = (\mathrm{sgn} \times 1, \boldsymbol{a}^{\mathrm{sgn}}_{|i}(t)/t + \boldsymbol{b}^{\mathrm{sgn}}_{|i}(t)\boldsymbol{z}_{|i}/t)) \to \boldsymbol{x} = (\mathrm{sgn} \times 1, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{|i})$，从而得出结论 $g_{\{i\}\cup\mathcal{V}\setminus\{i\}}(\mathrm{sgn} \times 1, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{sgn}}_{|i}) = 1$。第（ii）部分的证明也与命题1的第（ii）部分完全类似。

□

命题的证明 *2*。 首先注意到，由于块图是可分解图，团的集合可以排列为 $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_N\}$，使得对于所有 $i = 2, \dots, N$，

$$
D_i := C_i \cap (\cup_{j=1}^{i-1} C_j) \subset C_k \quad \text{for some } k < i; \tag{30}
$$

参见 Engelke 和 Hitz (2020年，附录 A），或Lauritzen (1996，第 2 章）。这个条件称为运行交性质，而 $\mathcal{D} = (D_2, \dots, D_N)$ 中的元素称为图的分隔集。我们始终假设团集和分隔集集的顺序已排列，使得 (30) 成立。

对于任意 i 和 j，可以对团集排序，使得 $i \subset C_1$ 和 $j \subset C_{m_{ij}}$，其中 $1 \le m_{ij} \le N$ 表示 i 与 j 在 $\mathcal{G}$ 中的最短路径长度。该最短路径可表示为 $\{i, D_2, D_3, \ldots, D_{m_{ij}-1}, D_{m_{ij}}, j\}$，其中 $D_k \subset C_k$，C_{k-1} 对于 $k = 2, \ldots, m_{ij}$。

我们要求 $\alpha_{j|i} =$ 最大值$\{\widetilde{\alpha}_{j|i} \in (0,1] : g_{\{i,j\}}(1, \widetilde{\alpha}_{j|i}) = 1\}$。利用命题 1的结果，向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}$ 是一个全局最小值点，

$$\begin{aligned} 1 = g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i}) &= \min_{x_s \ge 0\,:\, s \notin \{i,j\}} g_{i,\mathcal{V}\setminus\{i,j\},j}(1, \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}\setminus\{i,j\}}, \alpha_{j|i}) \\ &= g_{\{i\}\cup\{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) \\ &= g_{\{i\}\cup\{C_1\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{C_1\setminus\{i\}|i}) + \sum_{k=2}^{N} g_{D_k\cup\{C_k\setminus D_k\}}(\alpha_{D_k|i}, \boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|i}) - \alpha_{D_k|i}. \end{aligned}$$

由于我们要求 $g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i}) = 1$，因此必有

$$g_{\{i\}\cup\{C_1\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{C_1\setminus\{i\}|i}) = 1 \tag{31}$$

and

$$g_{D_k\cup\{C_k\setminus D_k\}}(\alpha_{D_k|i}, \boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|i}) - \alpha_{D_k|i} = 0, \qquad k = 2, \ldots, N. \tag{32}$$

首先假设 $\alpha_{D_k|i} > 0$ 对所有 $k = 2, \ldots, m_{ij}$成立。将 $\alpha_{D_k|i}$ 从方程 (32) 中提出，得到

$$g_{D_k\cup\{C_k\setminus D_k\}}(1, \boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|i}/\alpha_{D_k|i}) = 1, \qquad k = 2, \ldots, m_{ij}. \tag{33}$$

注意到这定义了向量 $\boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|D_k}$，我们有

$$\boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|D_k} = \boldsymbol{\alpha}_{C_k\setminus D_k|i}/\alpha_{D_k|i}, \qquad k = 2, \ldots, m_{ij}. \tag{34}$$

现在 $j \subset C_{m_{ij}}$，因此方程（34）得出 $\alpha_{j|i} = \alpha_{D_{m_{ij}}|i}\alpha_{j|D_{m_{ij}}}$。若 $m_{ij} = 2$，则 $\alpha_{j|i} = \alpha_{D_2|i}\alpha_{j|D_2}$。否则，对于 $k \ge 3$，方程组（34）给出了关于 $\alpha_{D_{m_{ij}}|i}$ 的递推关系。具体而言，由于$D_k \subset C_k$，C_{k-1}，

$$\alpha_{D_k|i} = \alpha_{D_{k-1}|i}\alpha_{D_k|D_{k-1}}, \qquad k = 3, \ldots, m_{ij}, \tag{35}$$

因此

$$\alpha_{j|i} = \alpha_{D_2|i} \left[\prod_{k=3}^{m_{ij}} \alpha_{D_k|D_{k-1}} \right] \alpha_{j|D_{m_{ij}}}. \tag{36}$$

现在考 虑至少存在一个 $k = 2, \ldots, m_{ij}$ 使得 $\alpha_{D_k|i} = 0$ 的情况。如果 $\alpha_{D_k|i} = 0$ 且

$$g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}}(\alpha_{D_k|i}, \boldsymbol{\alpha}_{C_k \setminus D_k|i}) - \alpha_{D_k|i} = 0, \tag{37}$$

那么 $g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}}(0, \boldsymbol{\alpha}_{C_k \setminus D_k|i}) = 0$，这意味着 $\boldsymbol{\alpha}_{C_k \setminus D_k|i} = \mathbf{0}$，因为 $g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}}(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_\infty$。由于 $D_{k+1} \subset C_k$，因此我们也有 $\alpha_{D_{k+1}|i} = 0$。由此迭代可得，$\alpha_{D_k|i} = \alpha_{D_{k+1}|i} = \cdots = \alpha_{D_{m_{ij}}|i} = 0$。利用方程（37）以及 $k = m_{ij}$ 和 $\alpha_{D_{m_{ij}}|i} = 0$，可得 $\alpha_{j|i} = 0$。

假设 $k^\star = \min_{k \in 2,\ldots,m_{ij}} \{k : \alpha_{D_k|i} = 0\}$。取 $j = D_{k^\star - 1}$，可以看出 $\alpha_{D_{k^\star-1}|i}$ 可表示为乘积（36），而方程（35）给出 $\alpha_{D_k^\star|i} = \alpha_{D_k^\star|D_{k^\star-1}} \alpha_{D_{k^\star-1}|i}$，这意味着$\alpha_{D_{k^\star}|D_{k^\star-1}} = 0$。因此 $\alpha_{j|i} = 0$ 也可以通过乘积（36）表示。

□

命题 5的证明。 同样，我们采用与命题 2类似的论证，其中 $\alpha^+_{j|i} =$ 最大值$\{\widetilde{\alpha}_{j|i} \in [-1, 1] : g_{\{i,j\}}(1, \widetilde{\alpha}_{j|i}) = 1\}$，并且

$$\begin{aligned}
1 = g_{\{i,j\}}(1, \alpha^+_{j|i}) &= \min_{x_s \in \mathbb{R}^{d-2} : s \notin \{i,j\}} g_{i,\mathcal{V}\setminus\{i,j\},j}(1, \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}\setminus\{i,j\}}, \alpha^+_{j|i}) \\
&= g_{\{i\} \cup \{\mathcal{V}\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^+_{\mathcal{V}\setminus\{i\}|i}) \\
&= g_{\{i\} \cup \{C_1\setminus\{i\}\}}(1, \boldsymbol{\alpha}^+_{C_1\setminus\{i\}|i}) + \sum_{k=2}^{N} g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}}(\alpha^+_{D_k|i}, \boldsymbol{\alpha}^+_{C_k\setminus D_k|i}) - |\alpha^+_{D_k|i}|,
\end{aligned}$$

其中 $g_{\{i\} \cup \{C_1\setminus\{i\}\}}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}^+_{C_1\setminus\{i\}|i}) = 1$ 以及 $\sum_{k=2}^{N} g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}}(\alpha^+_{D_k|i}, \boldsymbol{\alpha}^+_{C_k\setminus D_k|i}) - |\alpha^+_{D_k|i}| = 0$。

与之前一样，先考虑 $|\alpha^+_{D_k|i}| > 0$, $k = 2$, ..., m_{ij} 的情形，因此

$$|\alpha^+_{D_k|i}| \left[g_{D_k \cup \{C_k \setminus D_k\}} \left(\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_k|i}) \times 1, \boldsymbol{\alpha}^+_{C_k\setminus D_k|i} / |\alpha^+_{D_k|i}| \right) - 1 \right] = 0, \qquad k = 2, \ldots, m_{ij},$$

给出

$$\boldsymbol{\alpha}^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_k|i})}_{C_k\setminus D_k|D_k} = \boldsymbol{\alpha}^+_{C_k\setminus D_k|i} / |\alpha^+_{D_k|i}|. \tag{38}$$

对于 $m_{ij} = 2$，可得 $\alpha^+_{j|i} = |\alpha^+_{D_2|i}| \alpha^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_2|i})}_{j|D_2}$。对于 $m_{ij} \geq 3$，方程 (38) 得出以下关系

$\alpha^+_{D_k|i} = \alpha^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_{k-1}|i})\, D_k|D_{k-1}} \quad |\alpha^+_{D_{k-1}|i}|$, $k = 3, \ldots\ldots, m_{ij}$。综上，我们得到

$$\alpha^+_{j|i} = \left|\alpha^+_{D_2|i}\right| \prod_{k=3}^{m_{ij}} \left|\alpha^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_{k-1}|i})}_{D_k|D_{k-1}}\right| \times \alpha^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_{m_{ij}}|i})}_{j|D_{m_{ij}}}. \tag{39}$$

当 $|\alpha^+_{D_k|i}| = 0$ 对于某个 k时，采用命题2中的类似论证可得出结论：$\alpha^+_{j|i} = 0$。类似地，可以证明，若 $\alpha^+_{D_{k^\star}|i} = 0$ 且 $|\alpha^+_{D_{k^\star-1}|i}| \neq 0$，则 $\alpha^{\operatorname{sgn}(\alpha^+_{D_{k-1}|i})}_{D_k|D_{k-1}} = 0$，因此结果 $\alpha^+_{j|i} = 0$ 可表示为乘积形式（39）。

□

B 与 β-系数相关的证明

B.1 规范函数的边缘化性质

引理2. 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$为一个分块几何极值图模型。对于任意两个指标（$i, j$）$\in \mathcal{V}$，边缘规范函数$g_{\{i,j\}}(x_i, x_j)$仅通过考察节点 $\mathcal{V}' = \{i, D_2, D_3, \ldots, D_{m_{ij}-1}, D_{m_{ij}}, j\}$ 位于 i 与 j之间的唯一最短路径上的链图即可得到。

引理 2 的证明。 与命题 2 的证明一样，我们对极大团进行排序 C_1，C_2，……，C_N使得 $i \subset C_1$ 且 $j \subset C_{m_{ij}}$ 其中 $1 \leq m_{ij} \leq N$ 表示 i 与j在 $\mathcal{G}$ 中的最短路径长度。回忆一下，这条最短路径可以表示为 $\{i, D_2, D_3, \ldots, D_{m_{ij}-1}, D_{m_{ij}}, j\} =: \mathcal{V}'$，其中$D_k \subset C_k$，$C_{k-1}$对于 $k = 2$，……，m_{ij}。我们有

$$\begin{aligned} g_{\{i,j\}}(x_i, x_j) &= \min_{x_s \geq 0, s \neq i,j} g_{C_1}(\boldsymbol{x}_{C_1}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] + \sum_{k=m_{ij}+1}^{N} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] \\ &= \min_{x_s : s = D_2, \ldots, D_{m_{ij}}} \min_{x_s : s \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'} g_{C_1}(\boldsymbol{x}_{C_1}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] + \sum_{k=m_{ij}+1}^{N} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] \end{aligned}$$

将指标集 $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$ 划分为两个互不相交的集合。令 $(\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}')_1$ 表示仅属于一个团的指标，令 $(\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}')_2$ 表示属于两个团的指标（即分隔集 $D_{m_{ij}+1}$、……、D_N，或$D_{m_{ij}+2}$、……、D_N，如果 $j = D_{m_{ij}+1}$）。如果 $j = D_{m_{ij}+1}$是一个分隔符，那么

$$
\begin{aligned}
g_{\{i,j\}}(x_i,x_j) &= \min_{x_s:s=D_2,\ldots,D_{m_{ij}}} \min_{x_s:s\in(\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}')_2} \min_{x_s:s\in(\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}')_1} \Bigg\{ g_{C_1}(\boldsymbol{x}_{C_1}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=m_{ij}+1}^{N} [g_{C_k}(\boldsymbol{x}_{C_k}) - x_{D_k}] \Bigg\} \\
&= \min_{x_s:s=D_2,\ldots,D_{m_{ij}}} \min_{x_s:s\in(\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}')_2} \Bigg\{ g_{\{i,D_2\}}(x_i,x_{D_2}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}] \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=m_{ij}+1}^{N-1} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}] \Bigg\} \\
&= \min_{x_s:s=D_2,\ldots,D_{m_{ij}}} g_{\{i,D_2\}}(x_i,x_{D_2}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}].
\end{aligned} \tag{40}
$$

如果 j 不是一个分隔符，同样的思路仍然适用，但记法会更复杂。特别是，中间一行（40）变为

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_s:s=D_2,\ldots,D_{m_{ij}}} \min_{x_s:s\in(\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}')_2} \Bigg\{ g_{\{i,D_2\}}(x_i,x_{D_2}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}-1} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}] \\
&+ g_{\{D_{m_{ij}},j,D_{m_{ij}+1}\}}(x_{D_{m_{ij}}},x_j,x_{D_{m_{ij}+1}}) - x_{D_{m_{ij}}} + \sum_{k=m_{ij}+1}^{N-1} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}] \Bigg\},
\end{aligned}
$$

取内部最小值后得到

$$
\min_{x_s:s=D_2,\ldots,D_{m_{ij}}} g_{i,D_2}(x_i,x_{D_2}) + \sum_{k=2}^{m_{ij}-1} [g_{\{D_k,D_{k+1}\}}(x_{D_k},x_{D_{k+1}}) - x_{D_k}] + g_{\{D_{m_{ij}},j\}}(x_{D_{m_{ij}}},x_j) - x_{D_{m_{ij}}}.
$$

证明至此完成。 □

引理 3. 设 $\mathcal{V}=\{i_1,\ldots,i_m\}$ 和 $\mathcal{E}=\{(i_1,\ i_2),\ (i_2,\ i_3)\ldots,(i_{m-1},\ i_m)\}$，使得 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ 是一个链式几何极值图模型。那么，对任意指数 $i_k\in\mathcal{V}$ 进行边缘化也会得到一个链式几何极值图模型 $\mathcal{G}_{-k}=(\mathcal{V}_{-k},\ \mathcal{E}_{-k})$，其中 $\mathcal{V}_{-k}=\{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_m\}$ 和 $\mathcal{E}_{-k}=\{(i_1,\ i_2)\ldots,(i_{k-1},\ i_{k+1})\ldots,(i_{m-1},\ i_m)\}$。

引理 *3* 的证明。 我们有

$$g_{\mathcal{V}_{-k}}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{-k}}) = \min_{x_k} \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} g_{\{i_l, i_{l+1}\}}(x_{i_l}, x_{i_{l+1}}) - \sum_{l=2}^{m-1} x_{i_l} \right\}$$

如果 $k=1$，那么包含 i_k 的唯一项是 $g_{i_1,\ i_2}(x_{i_1},\ x_{i_2})$。将其最小化可得 x_{i_2}，因此

$$g_{\mathcal{V}_{-1}}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{-1}}) = \sum_{l=2}^{m-1} g_{\{i_l, i_{l+1}\}}(x_{i_l}, x_{i_{l+1}}) - \sum_{l=3}^{m-1} x_{i_l}.$$

同理，如果 $k=m$，那么

$$g_{\mathcal{V}_{-m}}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{-m}}) = \sum_{l=1}^{m-2} g_{\{i_l, i_{l+1}\}}(x_{i_l}, x_{i_{l+1}}) - \sum_{l=2}^{m-2} x_{i_l}.$$

否则，包含 x_k 的项为 $g_{\{i_{k-1},i_k\}}(x_{i_{k-1}},\ x_{i_k}) + g_{\{i_k,i_{k+1}\}}(x_{i_k},\ x_{i_{k+1}}) - x_{i_k}$，将其最小化可得 $g_{\{i_{k-1},i_{k+1}\}}(x_{k-1},\ x_{k+1})$，因此

$$g_{\mathcal{V}_{-k}}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{-k}}) = \sum_{(a,b)\in\mathcal{E}_{-k}} g_{\{a,b\}}(x_a, x_b) - \sum_{l=2, l\neq k}^{m-1} x_{i_l}.$$

这些都具有链式几何极值图模型 $\mathcal{G}_{-k}$的形式。 □

B.2 命题3的证明

命题 3 的证明分为两部分。证明的关键在于第 4节 B.3中的技术性引理，我们将在其中证明目标函数具有所声称指数的正则变差。给定这一技术性引理后，证明的其余部分通过归纳法展开，说明假设 2中关于边的正则变差假设会导致未被边直接分隔开的成对规范具有正则变差。

我们通过对以下最短路径长度进行归纳法，证明命题3 ： m_{ij} 与 i 和 j之间。根据路径约化和边缘化（引理2 和3），我们只需考虑唯一最短路径 $i = v_0, \ldots, ^{v_{m_{ij}}} = j$，并且根据命题2 ，可得 $\alpha_{v_t|v_0} = \alpha_{v_{t-1}|v_0}\alpha_{v_t|v_{t-1}}$。

命题 *3* 的证明。 固定 i，j并令 $i = v_0$，……，$v_m = j$为它们的唯一最短路径，其中 $m = m_{ij}$。对于 $t=1$，……，m令 $f_t\ (x)\ = g_{\{v_0,v_t\}}\ (\mathbf{1},\ \alpha_{v_t|v_0} + x)\ - 1$。定义 $\sigma^{(1)} = 1/\ (1 - \beta_{v_1|v_0})$ 。对于每个 $t=1$，……，$m-1$

定义 $\sigma^{(t+1)} = 1/(1-\beta_{v_{t+1}|v_0})$，其中 $\beta_{v_{t+1}|v_0}$ 是将递推关系（20）应用于 $\beta_{v_t|v_0}$和 $\beta_{v_{t+1}|v_t}$ 时得到的值，参数为 $\alpha_{v_t|v_0}$ 和 $\alpha_{v_{t+1}|v_t}$，使用 $\alpha_{v_{t+1}|v_0} = \alpha_{v_t|v_0}\alpha_{v_{t+1}|v_t}$。

我们对 t 进行归纳法，证明 $f_t \in \mathrm{RV}^{0+}_{\sigma^{(t)}}$。由于 $\{v_0, v_1\} \in \mathcal{E}$，假设2 给出 $f_1 \in \mathrm{RV}^{0+}_{\sigma^{(1)}}$。假设 $f_t \in \mathrm{RV}^{0+}_{\sigma^{(t)}}$ 对某个 $t < m$成立。令（i，π，j）=（v_0，v_t，v_{t+1}），并定义

$$A_t^+(y) = g_{\{i,\pi\}}(1, \alpha_{\pi|i} + y) - 1 = f_t(y), \qquad B_t^+(z) = g_{\{\pi,j\}}(1, \alpha_{j|\pi} + z) - 1,$$

and

$$f_{t+1}(x) = g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i} + x) - 1.$$

根据归纳假设，$A_t^+ \in \mathrm{RV}^{0+}_{\sigma^{(t)}}$。根据假设 2 $B_t^+ \in \mathrm{RV}^{0+}_{1/(1-\beta_{v_{t+1}|v_t})}$。由命题2 可得$\alpha_{j|i} = \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi}$。将引理4 应用于三元组（$i$，$\pi$，$j$），其中 $A^+ = A_t^+$，$B^+ = B_t^+$且 $f = f_{t+1}$，得到

$$f_{t+1} \in \mathrm{RV}^{0+}_{\tilde{\sigma}},$$

其中，$\tilde{\sigma}$ 是由20式中的递推关系根据 $\sigma^{(t)}$ 和 $1/(1-\beta_{v_{t+1}|v_t})$ 及参数$\alpha_{\pi|i}$和$\alpha_{j|\pi}$规定的指数。根据上面的定义，我们有 $\tilde{\sigma} = \sigma^{(t+1)}$。归纳法至此完成。 □

注 5。定义 18）和（19）的链最小复合 $g_{\{v_0,v_{t+1}\}}$ 由$g_{\{v_0,v_t\}}$ 和$g_{\{v_t,v_{t+1}\}}$ 定义，保持基本规范结构。它是 1 次齐次的，满足界 $g_{\{v_0,v_{t+1}\}} \geq$max，并且是连续的（根据贝尔热最大值定理）。在每一步中，我们将引理 4 应用于（i、π、j）=（v_0、v_t、v_{t+1}），其中 $A^+ = A_t^+ = f_t$，$B^+ = B_t^+$（来自边 $g_{\{v_t,v_{t+1}\}}$），以及 $f = f_{t+1}$；假设 2仅针对该边和链最小恒等式调用。

B.3 β递推关系的归纳法

固定互不相同的节点（i、π、j），并对 $y \geq -\alpha_{\pi|i}$ 和 $z \geq -\alpha_{j|\pi}$ 定义：

$$A^+(y) := g_{\{i,\pi\}}(1, \alpha_{\pi|i} + y) - 1 \quad \text{and} \quad B^+(z) := g_{\{\pi,j\}}(1, \alpha_{j|\pi} + z) - 1,$$

且，对于 $x \geq 0$，$f(x) := g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i} + x) - 1$。由命题 2 可知 $\alpha_{j|i} = \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi}$。

集合 $\varepsilon_0(x) := x/\alpha_{j|\pi}$ 对于 $\alpha_{j|\pi} > 0$,

$$\ell(\varepsilon, x) := \frac{x - \alpha_{j|\pi}\varepsilon}{\alpha_{\pi|i} + \varepsilon}, \qquad \text{objective}(\varepsilon, x) = A^+(\varepsilon) + (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)B^+(\ell(\varepsilon, x)),$$

并注意 $f(x) = \min_{\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}}\{\text{目标函数}(\varepsilon, x)\}$。

引理 4（ β递推关系的归纳法步骤）。设 $A^+(y) \in \mathrm{RV}_{\sigma_a}^{0+}$ 且 $B^+(z) \in \mathrm{RV}_{\sigma_b}^{0+}$，其中 $\sigma_a = 1/(1-\beta_{\pi|i})$、$\sigma_b = 1/(1-\beta_{j|\pi})$ 以及 $\alpha_{j|i} = \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi}$。定义 $f(x) := g_{\{i,j\}}(1, \alpha_{j|i} + x) - 1, \quad x \geq 0$。则 $f \in \mathrm{RV}_{\sigma_{j|i}}^{0+}$，且 $\sigma_{j|i} = 1/(1-\beta_{j|i})$，其中 $\beta_{j|i}$ 由递推关系 (20) 给出。

注 6。对于每个 $x > 0$，我们最小化链目标函数 $\varepsilon \mapsto A^+(\varepsilon) + (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)\, B^+(\ell(\varepsilon, x))$。在边界 $\varepsilon = -\alpha_{\pi|i}$ 处，或取趋近于该边界的极限时，我们避免使用商形式 $\ell(\varepsilon, x)$，而是通过 $(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)\ B^+(\ell(\varepsilon, x)) = g_{\{\pi,j\}}(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon,\ \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi} + x) - (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)$ 直接使用规范函数，因此目标函数可连续延拓到边界，并且在边界处的所有比较都在规范函数层面进行。函数 $A^+(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 处取得最小值，而 $B^+(\ell(\varepsilon, x))$ 在 $\varepsilon_0(x)$ 处取得最小值。我们将 A分支称为选择 $\varepsilon = \varepsilon_0(x)$、代价为 $A^+(\varepsilon_0(x))$ 的情形，将 B分支称为选择 $\varepsilon = 0$、代价为 $\alpha_{\pi|i}B^+(x/\alpha_{\pi|i})$ 的情形。所谓主导分支，是指当 $x \to 0^+$ 时具有渐近较小代价的分支；等价地，若 $R(x) := A^+(\varepsilon_0(x))/(\alpha_{\pi|i}B^+(x/\alpha_{\pi|i}))$，则当 $R(x) \to 0$ 时， A 占主导；当 $R(x) \to \infty$ 时， B 占主导；而平局情形为 $R(x) \to c \in (0, \infty)$。

引理4 的证明采用了以下共同结构 g

1. 将 ε 局部化到一个较小的区间，使 A^+ 和 B^+ 的两个自变量都落在固定紧集乘子范围内。通过连续性、下界$g_{a、b}(x, y) \geq \max(x, y)$以及 1 次齐次性所给出的固定正值常数排除远尾区域；必要时，利用引理 5 （波特界）排除乘子 $\varepsilon/\varepsilon_0(x)$可能发生漂移的中间区域。

2. 在局部化区间上，根据引理 6，可在固定紧集乘子范围内得到 A^+ 和 B^+的一致双侧比值界。

3. 在带中心处计算目标函数，此处情形 A–C 中的一个函数为零；在整个带上对另一个函数作一致界，由此得出 $f(x)$ 与主导分支渐近等价；或者，在仅声称指数时，得出 f 具有所需的正则变化指数。

不同情形之间的差异在于中心的位置和性质。在情形 A ($\alpha_{\pi|i} > 0,\ \alpha_{j|\pi} > 0$) 和情形 C ($\alpha_{\pi|i} = 0,\ \alpha_{j|\pi} > 0$) 中，存在一个移动中心 $\varepsilon_0(x) = x/\alpha_{j|\pi}$，它会使 $B^+ \circ \ell$ 函数消失。我们将讨论范围局限在 $\varepsilon_0(x)$ 周围的一个带状区域，利用 6 关于 $[1-\eta, 1+\eta]$ 的引理处理 A^+，并仅在排除中间右侧区域 $\varepsilon \geq (1+\eta)\varepsilon_0(x)$ 时调用 Potter。

在情形 B（$\alpha_{\pi|i} > 0, \ \alpha_{j|\pi} = 0$）中，中心固定在 $\varepsilon = 0$，这使 A^+ 函数消失，因此所有乘子都保持在 1 附近的一个固定紧集内，引理 6 便足够了。在情形 C 中， $\sigma_a > 1$ 一个粗略的 x无关界

排除了整个左侧块。对于 $\sigma_a = 1$，我们不强求严格比较，只通过缩放夹逼 $f(\lambda x) \sim \lambda f(x)$ 证明指数$f \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，如 $x \to 0^+$ 所示。

情形 D（$\alpha_{\pi|i} = \alpha_{j|\pi} = 0$）有所不同，尤其是在 $\sigma_a, \sigma_b > 1$ 时，因为此处没有有用的中心。虽然 $A^+(0) = 0$，但在 $\varepsilon = 0$，第二项为 $g_{\{\pi,j\}}(0, x) \geq x$，而对于 $0 \leq \varepsilon \leq x/2$，有$\varepsilon\, B^+(x/\varepsilon) \geq x/2$。这意味着边界是次优的，因为对 ε 采用不同的选择，会在 0^+ 处得到指数大于一的正则变差。相反，我们选择平衡尺度 $\varepsilon = x^\gamma u$，使得 $\gamma = \sigma_b/(\sigma_a + \sigma_b - 1)$，从而令两项贡献相当。引理 5 将 u 限定在一个固定窗口内，而在该窗口上，引理 6 将缓变因子“展平”，把问题简化为对 u 中一个简单代理函数的最小化。由此，当 $x \to 0^+$ 时可得 $f(x) = x^\rho L(x)(1 + o(1))$，其中 L 在 0^+ 处缓慢变化，且 $\rho = \sigma_a\sigma_b/(\sigma_a + \sigma_b - 1) > 1$。当 $\min\{\sigma_a, \sigma_b\} = 1$ 时，代理函数不再具有严格曲率，边界$\varepsilon = 0$ 可能具有竞争力，因此我们将这些情形分开处理。

引理 *4* 的**情形 A**：$\alpha_{\pi|i} > 0$ 和 $\alpha_{j|\pi} > 0$。在 $\varepsilon = 0$ 和$\varepsilon = \varepsilon_0(x)$ 处计算目标函数，得到以下界

$$f(x) \leq \alpha_{\pi|i} B^+\Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\Big) \quad \text{and} \quad f(x) \leq A^+\Big(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}}\Big). \tag{41}$$

因此，

$$f(x) \leq M(x), \quad \text{where} \quad M(x) = \min\left\{A^+\left(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}}\right), \alpha_{\pi|i} B^+\left(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\right)\right\}. \tag{42}$$

任取 $\varepsilon' \in (0, \alpha_{\pi|i}/2)$。由于 A^+ 连续，且 0 是 $A^+(\varepsilon)$ 的最右侧 ε-极小化元，并且$A^+(0) = 0$，我们有 $m_R := \inf\{A^+(\varepsilon) : \varepsilon \geq \varepsilon'\} > 0$。因此，对于所有 $\varepsilon \geq \varepsilon'$，均有 $A^+(\varepsilon) \geq m_R$。

由一阶齐次性，

$$(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+(\ell(\varepsilon, x)) = g_{\{\pi,j\}}(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon, \alpha_{j|\pi}\alpha_{\pi|i} + x) - (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon).$$

由 $g_{\{\pi,j\}}(x, y) \geq \max(x, y)$，可得

$$\inf\Big\{\lim_{\varepsilon \to -\alpha_{\pi|i}^+} (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+(\ell(\varepsilon, x)) : x \geq 0\Big\} = \inf\{g_{\{\pi,j\}}(0, \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi} + x) : x \geq 0\} \geq \alpha_{\pi|i}\alpha_{j|\pi} > 0.$$

此外，对于任意 $\varepsilon \in (-\alpha_{\pi|i} + \zeta, -\varepsilon']$ 满足 $\zeta \in (0, \varepsilon' - (\alpha_{\pi|i}/2))$ 的情形，$\ell(\varepsilon, x) \geq (\alpha_{j|\pi}\varepsilon')/(\alpha_{\pi|i} - \varepsilon') > 0$，我们有

$$m_L(\zeta) := \inf\{(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+(\ell(\varepsilon, x)) : \varepsilon \in (-\alpha_{\pi|i} + \zeta, -\varepsilon'], x \in [0, 1]\} > 0.$$

由于映射 $(\varepsilon,\ x) \mapsto (\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)B^+(\ell(\varepsilon,\ x))$ 在 $[-\alpha_{\pi|i}, \varepsilon'] \times [0,1]$ 上连续，$\varepsilon_0(x)$ 是 $B^+(\ell(\varepsilon,\ x))$ 的最右侧 ε-极小化元，且满足 $B^+(\ell(\varepsilon_0(x)\ x)) = 0$，并且 $g_{\{\pi,j\}}(x,\ y) \geq \max(x,\ y)$，由此可得

$$m_L := \inf\{(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)B^+(\ell(\varepsilon,x)) : \varepsilon \in [-\alpha_{\pi|i}, -\varepsilon'], x \in [0,1]\} > 0.$$

由于当 $x \to 0^+$ 时 $A^+(x/\alpha_{j|\pi}) \to 0$ 且 $\alpha_{\pi|i}B^+(x/\alpha_{\pi|i}) \to 0$，因此对于所有充分小的 x，极小化点必然位于 $(-\varepsilon',\ \varepsilon')$ 内，其中 $\alpha_{\pi|i}+\varepsilon \in (\alpha_{\pi|i}/2,\ \alpha_{\pi|i}+\varepsilon')$。

(*i*) $\sigma_a > \sigma_b$。固定 $\eta \in (0,1)$，并取充分小的 x，使得 $(1+\eta)\varepsilon_0(x) < \varepsilon'$。令 $\varepsilon \geq (1+\eta)\varepsilon_0(x)$，并固定$\delta \in (0, \sigma_a)$ 和 $c > 1$，使得 $c^{-1}(1+\eta)^{\sigma_a-\delta} > 1$。根据引理 5，存在 $\varepsilon_0(\delta, c) > 0$，使得对于所有$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0(\delta,c))$，

$$c^{-1}\min\left\{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\sigma_a+\delta},\ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\sigma_a-\delta}\right\} \leq \frac{A^+(\varepsilon_1)}{A^+(\varepsilon_2)} \leq c\max\left\{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\sigma_a+\delta},\ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\sigma_a-\delta}\right\}.$$

取充分小的 x，使得 $(1+\eta)\varepsilon_0(x) < \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,c)\}$。那么，由于 $A^+(\varepsilon) = A^+((\varepsilon/\varepsilon_0(x))\varepsilon_0(x))$，且对于任意满足 $(1+\eta)\varepsilon_0(x) \leq \varepsilon < \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,c)\}$ 的 ε，都有$\varepsilon/\varepsilon_0(x) \geq 1+\eta$，引理 5 给出

$$A^+(\varepsilon) \geq\ c^{-1}\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0(x)}\Big)^{\sigma_a-\delta}A^+(\varepsilon_0(x))\ \geq\ c^{-1}(1+\eta)^{\sigma_a-\delta}A^+(\varepsilon_0(x)) > A^+(\varepsilon_0(x)),$$

对于所有 $(1+\eta)\varepsilon_0(x) \leq \varepsilon < \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\}$。对于 $\varepsilon \geq \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\}$，令

$$m^*_{A^+} := \inf\{A^+(\varepsilon)\ :\ \varepsilon \geq \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,c)\}\} > 0.$$

由于 $A^+(\varepsilon_0(x)) \to 0$，当 x 足够小时，我们有 $m^*_{A^+} > A^+(\varepsilon_0(x))$。因此，对于所有 $\varepsilon \geq (1+\eta)\varepsilon_0(x)$，

$$\text{objective}(\varepsilon, x)\ \geq\ A^+(\varepsilon)\ >\ A^+(\varepsilon_0(x))\ =\ \text{objective}(\varepsilon_0(x), x),$$

因此，相对于 $\varepsilon_0(x)$，这些 ε是次优的。

如果 $-\varepsilon' \leq \varepsilon \leq (1-\eta)\varepsilon_0(x)$，那么

$$(0,1) \ni \eta/\{1+(\varepsilon'/\alpha_{\pi|i})\} =: \kappa(\eta,\varepsilon') \leq \frac{\ell(\varepsilon,x)}{x/\alpha_{\pi|i}} \leq \lambda(\varepsilon') := \alpha_{\pi|i}/(\alpha_{\pi|i}-\varepsilon') \in (1,2). \tag{43}$$

因此，根据引理6对于 $F = B^+$ 在 $[\kappa(\eta,\varepsilon')\ \lambda(\varepsilon')]$ 以及不等式 $\alpha_{\pi|i}+\varepsilon \geq \alpha_{\pi|i}/2$ 在 $[-\varepsilon', \varepsilon']$上，

存在 $x_0 > 0$ 和 $c_B(\eta, \varepsilon') > 0$，使得对所有 $0 < x < x_0$ 以及所有 $\varepsilon \in [-\varepsilon', (1-\eta)\varepsilon_0(x)]$,

$$(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+ (\ell(\varepsilon, x)) = (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+ \left(\frac{\ell(\varepsilon, x)}{x/\alpha_{\pi|i}} x/\alpha_{\pi|i} \right) \geq c_B(\eta, \varepsilon') \alpha_{\pi|i} B^+(x/\alpha_{\pi|i}),$$

由于 $\sigma_a > \sigma_b$, $A^+ \in \mathrm{RV}^{0^+}_{\sigma_a}$ 且 $B^+ \in \mathrm{RV}^{0^+}_{\sigma_b}$，因此

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha_{\pi|i} B^+(x/\alpha_{\pi|i})}{A^+(\varepsilon_0(x))} = \infty,$$

因此存在 $x_1 \in (0, x_0]$，使得对所有 $0 < x < x_1$, $c_B(\eta, \varepsilon')\alpha_{\pi|i} B^+(x/\alpha_{\pi|i}) > A^+(\varepsilon_0(x))$ 均成立。因此，对于所有这样的 x 以及所有 $\varepsilon \in (-\varepsilon', (1-\eta)\varepsilon_0(x)]$,

$$\mathrm{objective}(\varepsilon, x) \geq c_B(\eta, \varepsilon') \alpha_{\pi|i} B^+ \Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}} \Big) > A^+(\varepsilon_0(x)) = \mathrm{objective}(\varepsilon_0(x), x),$$

因此这些 ε 相对于 $\varepsilon_0(x$ 是次优的。因此，极小化点位于 $[(1-\eta)\varepsilon_0(x), (1+\eta)\varepsilon_0(x)]$ 上。在此区间上，关于 6 的引理 $F = A^+$ 在 $[1-\eta, 1+\eta]$ 上给出，当 x 较小时，

$$(1 - \omega_A(\eta)) A^+(\varepsilon_0(x)) \leq A^+(\varepsilon) \leq (1 + \omega_A(\eta)) A^+(\varepsilon_0(x)),$$

其中 $\omega_A(\eta) \to 0$ 为 $\eta \to 0$。在该区间的极小化元处以及在 $\varepsilon = \varepsilon_0(x)$（其中 $B^+(0) = 0$）处求值，

$$(1 - \omega_A(\eta)) A^+ \Big(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}} \Big) \leq f(x) \leq A^+ \Big(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}} \Big).$$

因此，$f(x)/A^+(x/\alpha_{j|\pi}) \to 1$。于是，$f \in \mathrm{RV}^0_{\sigma_a}$ 且 $\beta_{j|i} = \beta_{\pi|i}$。

(ii) $\sigma_b > \sigma_a$ 取定 $\eta \in (0,1)$, $\delta \in (0, \sigma_a)$ 和 $c > 1$。根据引理 5，存在 $\varepsilon_0(\delta, c) > 0$ 使得对所有$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0(\delta, c))$,

$$c^{-1} \min \left\{ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\sigma_a - \delta}, \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\sigma_a + \delta} \right\} \leq \frac{A^+(\varepsilon_1)}{A^+(\varepsilon_2)} \leq c \max \left\{ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\sigma_a - \delta}, \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\sigma_a + \delta} \right\}.$$

取 x 足够小，使得 $(1+\eta)\varepsilon_0(x) < \min\{\varepsilon_0(\delta, c)\ \varepsilon'\}$，因此，$\varepsilon_0(x) < \min\{\varepsilon_0(\delta, c)\ \varepsilon'\}$，且$\eta\varepsilon_0(x) < \min\{\varepsilon_0(\delta, c)\ \varepsilon'\}$。然后，由于 $A^+(\varepsilon) = A^+((\varepsilon/\varepsilon_0(x))\varepsilon_0(x))$，其中 $\varepsilon/\varepsilon_0(x) \geq \eta$，且 $\eta \in (0,1)$,

我们有

$$A^+(\varepsilon) \geq c^{-1} \min\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0(x)}\right)^{\sigma_a-\delta}, \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0(x)}\right)^{\sigma_a+\delta} \right\} A^+(\varepsilon_0(x)) \geq c^{-1}\,\eta^{\sigma_a+\delta} A^+(\varepsilon_0(x))$$
$$=: c_A(\eta,\delta,c) A^+(\varepsilon_0(x)),$$

对所有 $\eta\,\varepsilon_0(x) \leq \varepsilon < \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\}$。

此外，由于 $\min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\} > 0$ 和 0 是 ε-极小化元 $A^+(\varepsilon)$ 中最右侧的极小化元，因此可得 $A^+(\varepsilon) \geq m_{A^+} := \inf\{A^+(\varepsilon) :\ \varepsilon \geq \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\} > 0$ ，对所有 $\varepsilon \geq \min\{\varepsilon', \varepsilon_0(\delta,\ c)\}$ 均成立。因此，对所有$\varepsilon \geq \eta\varepsilon_0(x)$,

$$\text{objective}(\varepsilon, x) \ \geq A^+(\varepsilon) \geq \min\{c_A(\eta,\delta,c) A^+(\varepsilon_0(x)),\ m_{A^+}\}.$$

由于 $\sigma_a < \sigma_b$, $A^+ \in \text{RV}^{0+}_{\sigma_a}$ 且 $B^+ \in \text{RV}^{0+}_{\sigma_b}$ ，因此

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha_{\pi|i} B^+(x/\alpha_{\pi|i})}{A^+(\varepsilon_0(x))} = 0,$$

因此，当 x 足够小时,

$$\min\{c_A(\eta,\delta,c) A^+(\varepsilon_0(x)),\ m_{A^+}\} \ > \ \alpha_{\pi|i} B^+\Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\Big) \ = \ \text{objective}(0, x),$$

并且每个 $\varepsilon \geq \eta\varepsilon_0(x)$ 相对于 $\varepsilon = 0$ 都严格次优。

如果 $-\varepsilon' < \varepsilon < 0$，那么 $\alpha_{\pi|i} + \varepsilon \geq \alpha_{\pi|i}/2$ 和

$$1 \leq \frac{\ell(\varepsilon, x)}{x/\alpha_{\pi|i}} \leq \lambda(\varepsilon') \in (1, 2),$$

其中 $\lambda(\varepsilon')$ 在表达式 (43) 中定义。因此，根据引理 6 对于 $F = B^+$ 在 $[1, \lambda(\varepsilon')]$, 以及不等式 $\alpha_{\pi|i} + \varepsilon \geq \alpha_{\pi|i}/2$ 在 $[-\varepsilon', 0)$ 上，存在 $x_0 > 0$ 和 $c_B(\varepsilon')$, > 0 使得对于所有 $0 < x < x_0$ 以及所有 $\varepsilon \in [-\varepsilon', 0)$,

$$(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+(\ell(\varepsilon, x)) = (\alpha_{\pi|i} + \varepsilon) B^+\Big(\frac{\ell(\varepsilon, x)}{x/\alpha_{\pi|i}} x/\alpha_{\pi|i}\Big) \geq c_B(\varepsilon')\alpha_{\pi|i} B^+\Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\Big),$$

这样的 ε 相对于 $\varepsilon = 0$ 是次优的。因此，极小化元位于 $[0, \eta\varepsilon_0(x)]$ 中。

在此区间上,

$$\kappa(\eta, \varepsilon') \leq \frac{\ell(\varepsilon, x)}{x/\alpha_{\pi|i}} \leq 1,$$

其中 $\kappa(\eta,\ \varepsilon')$ 在表达式 (43) 中定义，而 $\alpha_{\pi|i} \le \alpha_{\pi|i} + \varepsilon \le \alpha_{\pi|i} + \eta\varepsilon_0(x)$。引理 6 对于 $F = B^+$ 在$[\kappa(\eta,\ \varepsilon'), 1]$ 于是给出，当 x 足够小时，

$$(1 - \omega_B(\eta))\alpha_{\pi|i} B^+\Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\Big) \le f(x) \le \alpha_{\pi|i} B^+\Big(\frac{x}{\alpha_{\pi|i}}\Big),$$

其中 $\omega_B(\eta) \to 0$ 为 $\eta \to 0$。因此，$f(x)/(\alpha_{\pi|i}B^+(x/\alpha_{\pi|i})) \to 1$。由此 $f \in \mathrm{RV}_{\sigma_b}^{0^+}$ 且 $\beta_{j|i} = \beta_{j|\pi}$。

(iii) $\sigma_a = \sigma_b =: \sigma$。固定 $\lambda > 0$。由于 $f(x) \le A^+(x/\alpha_{j|\pi}) \to 0^+$ 且 $f(x) \le \alpha_{\pi|i}B^+(x/\alpha_{\pi|i}) \to 0^+$当 $x \to 0^+$时，任意极小化元 $\varepsilon^\star(x) \in \arg\min^{\varepsilon > -\alpha_{\pi|i}} \mathrm{objective}(\varepsilon,\ x)$ 都满足 $A^+(\varepsilon^\star(x)) \le f(x) \to 0^+$。由 A^+ 在 0 处的连续性以及 0 是其最右侧极小值点可知，$\varepsilon^\star(x) \to 0$ 当 $x \to 0^+$ 时。因此

$$t^\star(x) := \ell(\varepsilon^\star(x), x) = \frac{x - \alpha_{j|\pi}\,\varepsilon^\star(x)}{\alpha_{\pi|i} + \varepsilon^\star(x)} \ \to\ 0, \quad \text{as } x \to 0^+.$$

对于所有 $\varepsilon > -\alpha_{\pi|i}$ 和 $x > 0$,

$$\ell(\lambda\,\varepsilon, \lambda x) = \frac{\lambda\,(x - \alpha_{j|\pi}\,\varepsilon)}{\alpha_{\pi|i} + \lambda\,\varepsilon} = \lambda\,\frac{\alpha_{\pi|i} + \varepsilon}{\alpha_{\pi|i} + \lambda\,\varepsilon}\,\ell(\varepsilon, x). \tag{44}$$

在 $\varepsilon = \varepsilon^\star(x)$ 处，写作

$$\ell(\lambda\varepsilon^\star(x), \lambda x) = \lambda\,\theta(x) t^\star(x), \qquad \theta(x) := \frac{\alpha_{\pi|i} + \varepsilon^\star(x)}{\alpha_{\pi|i} + \lambda\varepsilon^\star(x)}$$

并注意到 $\theta(x) \to 1$，因为 $x \to 0^+$。

固定 $\zeta \in (0,1)$，并注意到 $\varepsilon^\star(x)\ t^\star(x) \to 0^+$，因为 $x \to 0^+$。由紧乘子集 $\{\lambda\}$ 和 $\{\lambda\theta(x)\}$ 上的引理 6 可知，这两个集合对于充分小的 x 都位于 λ 周围的某个固定紧集内，因此存在 $x_0 = x_0(\zeta) > 0$，使得对所有 $0 < x < x_0$，以下界均由同一个 ζ 满足，

$$A^+(\lambda\varepsilon^\star(x)) \le (1+\zeta)^{1/3}\lambda^\sigma A^+(\varepsilon^\star(x)), \tag{45}$$

$$B^+(\lambda\theta(x)t^\star(x)) \le (1+\zeta)^{1/3}(\lambda\theta(x))^\sigma B^+(t^\star(x)), \tag{46}$$

并且，由于 $\varepsilon^\star(x) \to 0$,

$$\frac{\alpha_{\pi|i} + \lambda\varepsilon^\star(x)}{\alpha_{\pi|i} + \varepsilon^\star(x)} \le (1+\zeta)^{1/3}, \qquad \theta(x) \in [(1+\zeta)^{-1/3},\ (1+\zeta)^{1/3}]. \tag{47}$$

将 ζ 缩小到某个 $\zeta' \in (0, \zeta)$，使得 $(1+\zeta')^{(1+\sigma)/3} \le 1 + \zeta$。又由于 $\theta(x) \in [(1+\zeta')^{-1/3},\ (1+\zeta')^{1/3}]$，因此有 $(\lambda\theta(x))^\sigma \le (1+\zeta')^{\sigma/3}\lambda^\sigma$。结合式（46）中的前因子界 $(1+\zeta')^{1/3}$

可得

$$B^+(\lambda\theta(x)t^\star(x)) \;\le\; (1+\zeta')^{(1+\sigma)/3}\,\lambda^\sigma\,B^+(t^\star(x)) \;\le\; (1+\zeta)\,\lambda^\sigma\,B^+(t^\star(x)). \tag{48}$$

现在令 $\varepsilon^\star(\lambda x)$为 $f(\lambda x)$的一个极小化元，并令 $s^\star(x)\colon=\ell(\varepsilon^\star(\lambda x)\ \lambda x)\to 0^+$ 当 $x\to 0^+$时。利用(44)，可写为

$$\ell(\varepsilon^\star(\lambda x),x)=\frac{s^\star(x)}{\lambda\,\vartheta(x)},\qquad \vartheta(x):=\frac{\alpha_{\pi|i}+\varepsilon^\star(\lambda x)}{\alpha_{\pi|i}+\lambda\,\varepsilon^\star(\lambda x)}\;\to\;1\quad(x\to 0^+).$$

由引理6，在$(\lambda x,\varepsilon^\star(\lambda x))$处应用于关于 A^+ 和 $\{1/(\lambda\,\vartheta(x))\}$ 的 $\{1/\lambda\}$ 紧乘子集B^+ (当 x 充分小时，这两者都包含在 $1/\lambda$ 附近的一个固定紧集内)，存在 $x_1=x_1(\zeta)>0$ ，使得对所有 $0<x<x_1$,

$$A^+(\varepsilon^\star(\lambda x))\le\frac{1}{1-\zeta}\lambda^{-\sigma}A^+(\lambda\varepsilon^\star(\lambda x)), \tag{49}$$

$$B^+\Big(\frac{s^\star(x)}{\lambda\vartheta(x)}\Big)\le\frac{1}{1-\zeta}(\lambda\vartheta(x))^{-\sigma}B^+(s^\star(x)), \tag{50}$$

并且，由于 $\varepsilon^\star(\lambda x)\to 0$,

$$\frac{\alpha_{\pi|i}+\varepsilon^\star(\lambda x)}{\alpha_{\pi|i}+\lambda\varepsilon^\star(\lambda x)}\le(1+\zeta)^{1/2},\qquad \vartheta(x)\;\in\;[(1+\zeta)^{-1/2},\;(1+\zeta)^{1/2}]. \tag{51}$$

由(50)和(51)，有$(\lambda\vartheta(x))^{-\sigma}\le(1+\zeta)^{1/2}\lambda^{-\sigma}$ 对于 $0<x<x_1$。

令 $x^\star=\min\{x_0,x_1\}$。在 $\varepsilon=\varepsilon^\star(x)$处利用(44)，则对所有 $0<x<x^\star$，有(45)、(48)和(47)。

$$\begin{aligned}
f(\lambda x)\le\;&\text{objective}(\lambda\,\varepsilon^\star(x),\lambda x)\\
=\;&A^+(\lambda\,\varepsilon^\star(x))+(\alpha_{\pi|i}+\lambda\,\varepsilon^\star(x))\,B^+(\lambda\,\theta(x)\,t^\star(x))\\
\le\;&(1+\zeta)^{1/3}\,\lambda^\sigma\,A^+(\varepsilon^\star(x))\;+\;(1+\zeta)^{1/3}\,(1+\zeta)^{2/3}\,\lambda^\sigma\,(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon^\star(x))\,B^+(t^\star(x))\\
\le\;&(1+\zeta)\,\lambda^\sigma\,[A^+(\varepsilon^\star(x))+(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon^\star(x))\,B^+(t^\star(x))]\\
=\;&(1+\zeta)\,\lambda^\sigma\,f(x),
\end{aligned}$$

因此

$$f(\lambda x)\;\le\;(1+\zeta)\,\lambda^\sigma\,f(x). \tag{52}$$

接下来，我们将（52）中的（x，λ）替换为（λx，$1/\lambda$）。对于充分小的 x，可得

$$f(\lambda x)\ge\frac{\lambda^\sigma}{1+\zeta}\,f(x). \tag{53}$$

结合（52）和（53），对于所有充分小的 $x > 0$,

$$\frac{\lambda^\sigma}{1+\zeta} \;\le\; \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \;\le\; (1+\zeta)\,\lambda^\sigma.$$

令 $x \to 0^+$，然后令 $\zeta \to 0^+$，得到 $f(\lambda x)/f(x) \to \lambda^\sigma$，对每个固定的 $\lambda > 0$ 都成立，即 $f \in \mathrm{RV}_\sigma^{0^+}$。

情形 B： $\alpha_{\pi|i} > 0$ 和 $\alpha_{j|\pi} = 0$。在 $\varepsilon = 0$ 处计算目标函数，得到 $f(x) \le \alpha_{\pi|i}\, B^+(x/\alpha_{\pi|i})$。此外，对所有 $\varepsilon > -\alpha_{\pi|i}$，都有 $A^+(\varepsilon) = g_{\{i,\pi\}}(1, \alpha_{\pi|i}+\varepsilon) - 1 \ge 0$。固定 $\varepsilon' \in (0, \alpha_{\pi|i}/2)$。由于 A^+ 连续，且 $A^+(0) = 0$ 是最右侧极小值点，因此 $m_R := \inf\{A^+(\varepsilon) : \varepsilon \ge \varepsilon'\} > 0$；于是，当 x 足够小时，任意 $\varepsilon \ge \varepsilon'$ 都是次优的，因为 $f(x) \le \alpha_{\pi|i} B^+(x/\alpha_{\pi|i}) \to 0$。

接下来，考虑 $\varepsilon \le -\varepsilon'$。固定 $\delta \in (0,\ \alpha_{\pi|i} - \varepsilon')$。对于 $\varepsilon \in [-\alpha_{\pi|i}+\delta, -\varepsilon']$，乘子 $u(\varepsilon) := \alpha_{\pi|i}/(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)$ 的取值范围包含于固定紧集 $[u_{\min}, u_{\max}]$，其中 $u_{\min} := \alpha_{\pi|i}/(\alpha_{\pi|i} - \varepsilon') > 1$ 且 $u_{\max} := \alpha_{\pi|i}/\delta$。根据 $[u_{\min}, u_{\max}]$ 上关于 $F = B^+$ 的引理6，存在 $c_{B,\,1}(\delta,\ \varepsilon') \in (0,\ 1)$ 以及 $x_0 > 0$，使得对所有 $0 < x < x_0$ 和所有 $\varepsilon \in [-\alpha_{\pi|i} + \delta, -\varepsilon']$,

$$B^+(x/(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)) = B^+(u(\varepsilon)\,x/\alpha_{\pi|i}) \ge c_{B,1}(\delta, \varepsilon')\, B^+(x/\alpha_{\pi|i}).$$

因此，利用 $A^+(\varepsilon) \ge 0$,

$$\mathrm{objective}(\varepsilon, x) \ge (\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)\, B^+(x/(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)) \ge c_{B,1}(\delta, \varepsilon')\, \alpha_{\pi|i}\, B^+(x/\alpha_{\pi|i}).$$

对于 $\varepsilon \in (-\alpha_{\pi|i},\ -\alpha_{\pi|i} + \delta)$，乘子 $u(\varepsilon) = \alpha_{\pi|i}/(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon) \ge \alpha_{\pi|i}/\delta$ 随着 $\varepsilon \downarrow -\alpha_{\pi|i}$ 增大而无界。根据 0^+ 处关于指数为 $\sigma_b \ge 1$ 的 B^+ 的波特界，对于任意 $\eta \in (0,\ 1)$，存在 $C(\eta) > 1$ 和 $x_1 > 0$，使得对所有 $0 < x < x_1$ 以及所有满足 $\alpha_{\pi|i} + \varepsilon \in (0,\ \delta]$ 的 ε，

$$B^+(u(\varepsilon)\,x/\alpha_{\pi|i}) \ge C(\eta)^{-1}\, u(\varepsilon)^{\sigma_b - \eta}\, B^+(x/\alpha_{\pi|i}).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{objective}(\varepsilon, x) \ge (\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)\, B^+(x/(\alpha_{\pi|i}+\varepsilon)) &= \alpha_{\pi|i}\, u(\varepsilon)^{-1}\, B^+(u(\varepsilon)\,x/\alpha_{\pi|i}) \\ &\ge C(\eta)^{-1}\, \alpha_{\pi|i}\, u(\varepsilon)^{\sigma_b - \eta - 1}\, B^+(x/\alpha_{\pi|i}).\end{aligned}$$

下文中，我们分情况讨论 $\sigma_b > 1$ 和 $\sigma_b = 1$。

若 $\sigma_b > 1$，则选择 $\eta \in (0, \sigma_b - 1)$。于是 $\sigma_b - \eta - 1 > 0$，因此带状区域上的最小值出现在

最小的乘子 $u(\varepsilon) = \alpha_{\pi|i}/\delta$。因此

$$\text{objective}(\varepsilon, x) \geq c_{B,2}(\delta,\eta)\,\alpha_{\pi|i}\,B^{+}(x/\alpha_{\pi|i}), \qquad c_{B,2}(\delta,\eta) := C(\eta)^{-1}\,(\alpha_{\pi|i}/\delta)^{\sigma_b-\eta-1}.$$

综合可得，存在 $c_B(\varepsilon',\delta,\eta) \in (0,1)$ 和 $x^* > 0$，使得对所有 $0 < x < x^*$ 和所有 $\varepsilon \leq -\varepsilon'$，

$$\text{objective}(\varepsilon, x) \geq c_B(\varepsilon',\delta,\eta)\,\alpha_{\pi|i}\,B^{+}(x/\alpha_{\pi|i}).$$

对于 $\varepsilon \in (-\varepsilon', \varepsilon')$，有 $\alpha_{\pi|i} + \varepsilon \in [\alpha_{\pi|i}/2, \alpha_{\pi|i} + \varepsilon']$，且 $u(\varepsilon) \in [\,\alpha_{\pi|i}/(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon'),\, 1\,]$。由引理 6 可知，对于$F = B^{+}$ 在该紧集上以及 $A^{+}(\varepsilon) \geq 0$，当 x 足够小时

$$(1 - \omega_B(\varepsilon'))\,\alpha_{\pi|i}\,B^{+}(x/\alpha_{\pi|i}) \leq f(x) \leq \alpha_{\pi|i}\,B^{+}(x/\alpha_{\pi|i}),$$

因此 $f(x)/(\alpha_{\pi|i}B^{+}(x/\alpha_{\pi|i})) \to 1$，即 $f \in \mathrm{RV}_{\sigma_b}^{0^+}$ 和 $\beta_{j|i} = \beta_{j|\pi}$。

若 $\sigma_b = 1$，我们只断言指数，而不要求极小化元处的任何局部化。固定 $\lambda > 0$ 和$\delta > 0$。由引理 6 可知，对于 B^{+} 在乘子固定为 λ 和 $1/\lambda$ 时，存在 x_3，$x_4 > 0$ 使得对所有$0 < x <$ 最小 $\{x_3, x_4\}$ 以及所有充分小的 t，

$$B^{+}(\lambda t) \leq (1+\delta)\,\lambda\,B^{+}(t), \qquad B^{+}(t/\lambda) \leq (1+\delta)\,(1/\lambda)\,B^{+}(t).$$

对于上界，注意对任意 $\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}/2$，

$$\text{objective}(\varepsilon, \lambda x) \leq A^{+}(\varepsilon) + (1+\delta)\,\lambda\,(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)\,B^{+}(x/(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)) \leq (1+\delta)\,\lambda\,\text{objective}(\varepsilon, x),$$

因此，对 $\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}/2$ 取下确界可得 $f(\lambda x) \leq (1+\delta)\ \lambda \inf^{\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}/2} \text{objective}(\varepsilon, x) \leq (1+\delta)\ \lambda\, f(x)$。

对于下界，注意对任意 $\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}/2$，

$$\text{objective}(\varepsilon, x) \leq A^{+}(\varepsilon) + (1+\delta)\,(1/\lambda)\,(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)\,B^{+}(\lambda x/(\alpha_{\pi|i} + \varepsilon)) \leq (1+\delta)\,(1/\lambda)\,\text{objective}(\varepsilon, \lambda x),$$

因此，对 $\varepsilon \geq -\alpha_{\pi|i}/2$ 取下确界可得 $f(x) \leq (1+\delta)\,(1/\lambda)\ f(\lambda x)$，即 $f(\lambda x) \geq \lambda\,(1+\delta)^{-1}\,f(x)$。综上，

$$\lambda\,(1+\delta)^{-1} \leq \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq (1+\delta)\,\lambda \qquad (0 < x < \min\{x_3, x_4\}),$$

并令 $x \to 0^{+}$，则 $\delta \downarrow 0$ 得到 $f(\lambda x)/f(x) \to \lambda$，即 $f \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$。

情形 C： $\alpha_{\pi|i}=0$ 和 $\alpha_{j|\pi}>0$。这里

$$f(x)=\min_{\varepsilon\ge 0}\{A^{+}(\varepsilon)+\varepsilon(g_{\{\pi,j\}}(1,x/\varepsilon)-1)\},\qquad \varepsilon_0(x):=x/\alpha_{j|\pi}.$$

在 $\varepsilon=\varepsilon_0(x)$ 处计算目标函数，得到 $f(x)\le A^{+}(x/\alpha_{j|\pi})$ 和 $\ell(\varepsilon_0(x)\ x)=0$。

固定 $\varepsilon'\in(0,1)$ 和 $\eta\in(0,1)$。如情形 A（i）所示，排除整个右区间 $\{\varepsilon:\ \varepsilon\ge(1+\eta)\varepsilon_0(x)\}$。在固定截断值 ε' 以下，我们应用引理 5，得到一个大于 1 的一致常数，对所有 $(1+\eta)\varepsilon_0(x)\le\varepsilon<\varepsilon'$，比较 $A^{+}(\varepsilon)$ 与 $A^{+}(\varepsilon_0(x))$；对于 $\varepsilon\ge\varepsilon'$，我们使用固定尾部常数 $m_{A^{+}}:=\inf\{A^{+}(\varepsilon)>0:\ \varepsilon\ge\varepsilon'\}$，而 $A^{+}(\varepsilon_0(x))\to 0$。因此，当 x 足够小时，

$$\text{objective}(\varepsilon,x)>\text{objective}(\varepsilon_0(x),x)=A^{+}(\varepsilon_0(x)),\qquad \text{for all } \varepsilon\ge(1+\eta)\varepsilon_0(x).$$

在区间 $\varepsilon\in[(1-\eta)\varepsilon_0(x),\ (1+\eta)\varepsilon_0(x)]$, 如情形 A（$i$）我们应用引理 6 针对 $F=A^{+}$ 在 $[1-\eta,1+\eta]$上，并得到

$$(1-\omega_A(\eta))\,A^{+}(\varepsilon_0(x))\le A^{+}(\varepsilon)\le(1+\omega_A(\eta))\,A^{+}(\varepsilon_0(x)),\tag{54}$$

其中 $\omega_A(\eta)\to 0$ 为 $\eta\to 0$。由于 $B^{+}(\ell(\varepsilon,\ x))$ 在 $\varepsilon=\varepsilon_0(x)$ 处为零，在该处计算目标函数可得相应的上界 $f(x)\le A^{+}(x/\alpha_{j|\pi})$。

对于左区间 $\varepsilon<(1-\eta)\varepsilon_0(x)$，我们按 σ_a 分类。假设 $\sigma_a>1$。在 $\varepsilon=\varepsilon_0(x)$ 处计算目标函数可得 $f(x)\le A^{+}(x/\alpha_{j|\pi})$。固定 $\eta\in(1-\alpha_{j|\pi},1)$。那么，对每个 $\varepsilon\in[0,(1-\eta)\varepsilon_0(x)]$，我们有 $x/\varepsilon\ge x/\{(1-\eta)\varepsilon_0(x)\}=\alpha_{j|\pi}/(1-\eta)>1$，因此，$\varepsilon(g_{\{\pi,j\}}(1,x/\varepsilon)-1)\ge\varepsilon((x/\varepsilon)-1)=x-\varepsilon\ge x-(1-\eta)\,\varepsilon_0(x)=(1-(1-\eta)/\alpha_{j|\pi})\ x=:\ c(\eta)\ x$，其中 $c(\eta)>0$。此外，$A^{+}(\varepsilon)\ge 0$，因此

$$\text{objective}(\varepsilon,x)=A^{+}(\varepsilon)+\varepsilon(g_{\{\pi,j\}}(1,x/\varepsilon)-1)\ge c(\eta)x,\quad \text{for all } \varepsilon\in[0,(1-\eta)\varepsilon_0(x)].$$

这就一致地排除了整个左区间 $[0,(1-\eta)\varepsilon_0(x)]$。特别是，由于 $\sigma_a>1$，因此 $\text{objective}(\varepsilon_0(x)\ x)=A^{+}(x/\alpha_{j|\pi})=o(x)$，所以该区间内的每个 ε 相对于 $\varepsilon_0(x)$ 都是严格次优的。

Com将左区间排除与右区间排除以及（54）结合起来可得 s

$$(1-\omega_A(\eta))\,A^{+}\Big(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}}\Big)\le f(x)\le A^{+}\Big(\frac{x}{\alpha_{j|\pi}}\Big),$$

对于所有充分小的 $x>0$。因此，当 $x\to 0^{+}$ 时，$f(x)\sim A^{+}(x/\alpha_{j|\pi})$，即 $f\in\mathrm{RV}^{0^{+}}_{\sigma_a}$ 以及 $\beta_{j|i}=\beta_{\pi|i}$。

接下来，假设 $\sigma_a = 1$。上述右区间排除和（54）对 $\sigma_a = 1$逐字适用。为得出 $f \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，我们使用以下缩放论证。

固定 $\lambda > 0$，并令 $\varepsilon^\star(x)$ 为 $f(x)$ 的极小化元，满足 $\varepsilon^\star(x) \to 0$ 如 $x \to 0^+$。由于 $A^+ \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，由引理 6 可知，在固定 $\lambda > 0$ 时，对任意 $\delta > 0$，存在 $x_0 > 0$ 使得 $A^+(\lambda\,\varepsilon^\star(x)) \le (1+\delta)\,\lambda\,A^+(\varepsilon^\star(x))$，对所有 $0 < x < x_0$ 均成立。因此，对任意 $\delta > 0$，我们得到

$$f(\lambda x) \le \mathrm{objective}(\lambda\varepsilon^\star(x), \lambda x) = A^+(\lambda\,\varepsilon^\star(x)) + \lambda\,\varepsilon^\star(x)(g_{\{\pi,j\}}(1, x/\varepsilon^\star(x)) - 1) \le (1+\delta)\,\lambda\,f(x)$$

因此 $\limsup_{x\to 0^+} f(\lambda x)/f(x) \le \lambda$.

反过来，令 $\varepsilon^\star(\lambda x)$ 为 $f(\lambda x)$ 的极小化元。由于 $A^+ \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，由引理 6 可知，在固定 $1/\lambda > 0$ 时，对任意 $\delta > 0$，存在 $x_1 > 0$ 使得 $A^+(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda) \le (1+\delta)\,A^+(\varepsilon^\star(\lambda x))/\lambda$ 对所有 $0 < x < x_1$ 均成立。因此，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{objective}(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda, x) = A^+(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda) \;+\; (\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda)\Big(g_{\{\pi,j\}}(1, x/(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda)) - 1\Big) \\
&= A^+(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda) \;+\; (1/\lambda)\,\varepsilon^\star(\lambda x)\Big(g_{\{\pi,j\}}(1, (\lambda x)/\varepsilon^\star(\lambda x)) - 1\Big) \\
&\le (1+\delta)\,A^+(\varepsilon^\star(\lambda x))/\lambda \;+\; (1/\lambda)\,\varepsilon^\star(\lambda x)\Big(g_{\{\pi,j\}}(1, (\lambda x)/\varepsilon^\star(\lambda x)) - 1\Big) \\
&\le (1+\delta)\,f(\lambda x)/\lambda,
\end{aligned}$$

对所有 $0 < x < x_1$，因此 $\liminf_{x\to 0^+} f(\lambda x)/f(x) \ge \lambda$。于是，$\lim_{x\to 0^+} f(\lambda x)/f(x) = \lambda$且 $\beta_{j|i} = \beta_{\pi|i}$。**情形 D：** $\alpha_{\pi|i} = 0$ 且 $\alpha_{j|\pi} = 0$。

子情形 ***D.1***：$\sigma_a > 1$ 且 $\sigma_b > 1$。我们有 $f(x) = \min_{\varepsilon\ge 0}\{A^+(\varepsilon) + \varepsilon\,B^+(x/\varepsilon)\}$ 其中

$$A^+(\varepsilon) = \varepsilon^{\sigma_a} L_a(\varepsilon), \quad B^+(\varepsilon) = \varepsilon^{\sigma_b} L_b(\varepsilon),$$

其中 L_a，L_b 在 0^+ 处慢变。设

$$\gamma := \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b - 1}, \qquad \rho := \frac{\sigma_a\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b - 1}, \qquad r(x) := \frac{L_b(x^{1-\gamma})}{L_a(x^\gamma)}.$$

作变量代换 $\varepsilon = x^\gamma u$。然后

$$A^+(x^\gamma u) = x^\rho\,u^{\sigma_a} L_a(x^\gamma u), \qquad x^\gamma u\,B^+(x/(x^\gamma u)) = x^\rho\,u^{1-\sigma_b} L_b(x^{1-\gamma}/u),$$

so

$$f(x) = x^{\rho} \inf_{u>0} F_x(u), \text{ with } F_x(u) := u^{\sigma_a} L_a(x^{\gamma} u) + u^{1-\sigma_b} L_b(x^{1-\gamma}/u).$$

固定 $\varepsilon \in (0,1)$，并定义平衡点 $\bar{u}(x) := r(x)^{1/(\sigma_a+\sigma_b-1)}$。记 $u = \bar{u}(x)\, v$，其中 $v > 0$。然后

$$F_x(\bar{u}\, v) = \bar{u}(x)^{\sigma_a}\, v^{\sigma_a}\, L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x)\, v) + \bar{u}(x)^{\,1-\sigma_b}\, v^{1-\sigma_b}\, L_b(x^{1-\gamma}/(\bar{u}(x)\, v)).$$

固定 $C \geq 1$。根据引理 6 ，存在 $x_0 = x_0(C,\ \varepsilon) > 0$ 使得，对于所有 $0 < x < x_0$ 以及所有 $v \in [1/C, C\,]$,

$$(1-\varepsilon)\, L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x)) \ \leq\ L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x)\, v) \ \leq\ (1+\varepsilon)\, L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x)),$$

$$(1-\varepsilon)\, L_b(x^{1-\gamma}/\bar{u}(x)) \ \leq\ L_b(x^{1-\gamma}/(\bar{u}(x)\, v)) \ \leq\ (1+\varepsilon)\, L_b(x^{1-\gamma}/\bar{u}(x)).$$

因此，对于 $v \in [1/C, C]$ 和 $0 < x < x_0$ 一致地,

$$(1-\varepsilon)\, G_x(v) \ \leq\ F_x(\bar{u}(x)\, v) \ \leq\ (1+\varepsilon)\, G_x(v),$$

其中

$$G_x(v) := \bar{u}(x)^{\sigma_a}\, v^{\sigma_a}\, L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x)) \ +\ \bar{u}(x)^{\,1-\sigma_b}\, v^{1-\sigma_b}\, L_b(x^{1-\gamma}/\bar{u}(x))$$

$$=\ \bar{u}(x)^{\sigma_a}\, L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x))\, [v^{\sigma_a} + \tilde{r}(x)\, v^{1-\sigma_b}],$$

with

$$\tilde{r}(x) := \bar{u}(x)^{1-\sigma_b-\sigma_a}\, \frac{L_b(x^{1-\gamma}/\bar{u}(x))}{L_a(x^{\gamma}\bar{u}(x))}.$$

对于尾部 $v \geq C$ 和 $v \leq 1/C$，我们将引理 5 应用于正则变差函数 $A^{+}(\cdot)$ 和 $B^{+}(\cdot)$。固定 $\delta \in (0, \min\{\sigma_a - 1, \sigma_b - 1, 1\})$，并令 $c := c(C,\delta) \geq 1$ 和 $x_1 = x_1(C,\delta) > 0$ 为引理 5 所给出的函数。对于所有 $0 < x < x_1$ 和所有 $v \geq C$,

$$\frac{A^{+}(x^{\gamma}\bar{u}\, v)}{A^{+}(x^{\gamma}\bar{u})} \ \geq\ c^{-1}\, v^{\sigma_a-\delta}, \qquad \frac{B^{+}(x^{1-\gamma}/(\bar{u}\, v))}{B^{+}(x^{1-\gamma}/\bar{u})} \ \leq\ c\, v^{-(\sigma_b-\delta)}.$$

利用 $A^+(t) = t^{\sigma_a} L_a(t)$ 和 $B^+(t) = t^{\sigma_b} L_b(t)$，我们可以改写为

$$F_x(\bar{u}\, v) \;=\; x^{-\gamma\sigma_a}\, A^+(x^\gamma \bar{u}\, v) \;+\; x^{-(1-\gamma)\sigma_b}\, (\bar{u}v)\, B^+(x^{1-\gamma}/(\bar{u}v)).$$

因此，根据引理 5，对所有 $v \geq C$,

$$A^+(x^\gamma \bar{u}\, v) \;\geq\; c^{-1}\, v^{\sigma_a - \delta}\, A^+(x^\gamma \bar{u}),$$

因此

$$F_x(\bar{u}\, v) \;\geq\; x^{-\gamma\sigma_a}\, c^{-1}\, v^{\sigma_a-\delta}\, A^+(x^\gamma \bar{u}) \;=\; c^{-1}\, \bar{u}^{\sigma_a}\, v^{\sigma_a-\delta}\, L_a(x^\gamma \bar{u}). \tag{55}$$

类似地，对所有 $v \leq 1/C$,

$$B^+(x^{1-\gamma}/(\bar{u}v)) \;\geq\; c^{-1}\, v^{-(\sigma_b-\delta)}\, B^+(x^{1-\gamma}/\bar{u}),$$

so

$$F_x(\bar{u}\, v) \;\geq\; x^{-(1-\gamma)\sigma_b}\, (\bar{u}v)\, c^{-1}\, v^{-(\sigma_b-\delta)}\, B^+(x^{1-\gamma}/\bar{u}) \;=\; c^{-1}\, \bar{u}^{1-\sigma_b}\, v^{\,1-\sigma_b+\delta}\, L_b(x^{1-\gamma}/\bar{u}). \tag{56}$$

令 $\phi(r) := \inf_{v>0} [v^{\sigma_a} + r\, v^{1-\sigma_b}]$， $\phi_{[C]}(r) := \inf_{v\in[1/C,C]} [v^{\sigma_a} + r\, v^{1-\sigma_b}]$。注意， $v \mapsto v^{\sigma_a} + r\, v^{\,1-\sigma_b}$在 $(0,\infty)$ 上有唯一的极小化元，位于

$$v_\star(r) := ((\sigma_b - 1)r/\sigma_a)^{1/(\sigma_a+\sigma_b-1)},$$

由于 $\tilde{r}$ 在 0^+ 处慢变，存在 $x_* > 0$ 和常数 $0 < \tilde{r}_{\min} \leq \tilde{r}(x) \leq \tilde{r}_{\max} < \infty$ ，使得对所有$0 < x < x_*$均成立。映射 $v \mapsto v^{\sigma_a} + \tilde{r}\, v^{1-\sigma_b}$ 有唯一的极小化元 $v_\star(\tilde{r})$，它关于 $\tilde{r}$ 连续且递增。因此，对 $0 < x < x_*$, 有 $v_\star(\tilde{r}(x)) \in [\, v_\star(\tilde{r}_{\min})\;\; v_\star(\tilde{r}_{\max})\,]$。取

$$C \;\geq\; \max\{\, v_\star(\tilde{r}_{\max}),\; 1/v_\star(\tilde{r}_{\min})\,\}$$

确保对于所有充分小的 x， $v_\star(\tilde{r}(x)) \in [1/C,\, C]$。

如上所述，取 C ，使得对于所有充分小的 x， $v_\star(\tilde{r}(x)) \in [1/C,\, C]$ ，于是对于 $0 < x <$min $\{x_0, x_1\}$，我们得到:

$$\inf_{v\in[1/C,C]} F_x(\bar{u}(x)\, v) \;\asymp\; G_x(v_\star(\tilde{r}(x))),$$

其双侧比较因子均由 $(1\pm\varepsilon)$ 界定，且关于 $v\in[1/C,C]$ 一致。此处，我们将 $U(x)\asymp V(x)$ 记作 $x\to 0^+$，意指存在与 x 无关的常数 $0<c_1\le c_2<\infty$ 和 $x_1>0$，使得对于所有 $0<x<x_1$，$c_1V(x)\le U(x)\le c_2V(x)$。此外，根据尾部界 (55) 和 (56)，并且由于 $v\mapsto v^{\sigma_a-\delta}$ 和 $v\mapsto v^{1-\sigma_b+\delta}$ 分别在 $(1,\infty)$ 和 $(0,1)$ 上单调，我们可以选取充分大的 C（仅依赖于 ε、δ、σ_a、σ_b），使得两个尾部下确界

$$c^{-1}C^{\sigma_a-\delta}\,\bar u(x)^{\sigma_a}L_a(x^\gamma\bar u)\qquad\text{and}\qquad c^{-1}C^{\sigma_b-1-\delta}\,\bar u(x)^{1-\sigma_b}L_b(x^{1-\gamma}/\bar u)$$

超过 $(1+\varepsilon)$ $G_x(v_\star(\tilde r(x)))$。因此，对所有 $0<x<\min\{x_0,x_1\}$，

$$\inf_{v\notin[1/C,C]}F_x(\bar u\,v)\;\ge\;\inf_{v\in[1/C,C]}F_x(\bar u\,v),$$

$F_x(u)$ 在 $u>0$ 上的全局下确界等于其在 $u\in[\bar u(x)/C,\ \bar u(x)\ C]$ 上的下确界。因此，

$$f(x)=x^\rho\inf_{v\in[1/C,C]}F_x(\bar u(x)\,v)\;\asymp\;x^\rho\,\bar u(x)^{\sigma_a}\,L_a(x^\gamma\bar u(x))\,\phi_{[C]}(\tilde r(x)).$$

剩下要证明的是，$L(x):=\bar u(x)^{\sigma_a}L_a(x^\gamma\bar u(x))\ \phi_{[C]}(\tilde r(x))$ 在 0^+ 处是慢变的。对每个固定的$\lambda>0$，定义 $y(x):=x^\gamma\bar u(x)$。由于 $r(x)=L_b(x^{1-\gamma})/L_a(x^\gamma)$ 以及 L_a、L_b 在 0^+ 处是慢变的，我们有$r(\lambda x)/r(x)\to 1$，因此 $\bar u(\lambda x)/\bar u(x)=(r(\lambda x)/r(x))^{1/(\sigma_a+\sigma_b-1)}\to 1$。因此，

$$\frac{y(\lambda x)}{y(x)}=\frac{(\lambda x)^\gamma\,\bar u(\lambda x)}{x^\gamma\,\bar u(x)}\;\to\;\lambda^\gamma\qquad(x\to 0^+).$$

固定 $\lambda>0$ 并选择 $\kappa>1$，使得对于所有充分小的 $x>0$，$y(\lambda x)/y(x)\in[\lambda^\gamma/\kappa,\kappa\lambda^\gamma]\subset(0,\infty)$。根据 0^+ 处缓慢变化的一致收敛定理，可得 $L_a(y(\lambda x))/L_a(y(x))\to 1$ 当$x\to 0^+$时。此外，$r(\lambda x)/r(x)\to 1$，且 $r\mapsto\phi_{[C]}(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上是利普希茨的，因此

$$\frac{\phi_{[C]}(\tilde r(\lambda x))}{\phi_{[C]}(\tilde r(x))}\;\to\;1,\qquad(x\to 0^+).$$

结合这两个表达式，对于每个固定的 $\lambda>0$，

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)}\;=\;\frac{L_a(y(\lambda x))}{L_a(y(x))}\cdot\frac{\phi_{[C]}(r(\lambda x))}{\phi_{[C]}(r(x))}\;\to\;1\qquad(x\to 0^+),$$

即， L 在 0^+ 处是慢变的。因此，

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho}\,\frac{L(\lambda x)}{L(x)}\cdot(1+o(1)) \;\to\; \lambda^{\rho} \qquad (x\to 0^+),$$

这表明 $f \in \mathrm{RV}_{\rho}^{0^+}$，其中 $\rho = \sigma_a\sigma_b/(\sigma_a+\sigma_b-1)$ 且 $\beta_{j|i} = \beta_{\pi|i}\,\beta_{j|\pi}$。

子情形 D.2：$\min(\sigma_a,\sigma_b) = 1$。我们仅依据引理 6，通过缩放夹逼证明 $f \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，无需像子情形 D.1 那样进行尾部截断。不失一般性，假设 $\sigma_b = 1$（对于 $\sigma_a = 1$ 的情形，在下文论证中对 A^+ 应用引理 6，可作类似处理）。固定 $\lambda > 0$ 和 $\zeta \in (0,1)$。将引理 6 应用于固定乘子 λ 和 $1/\lambda$ 处的 $B^+ \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$，则存在 $x_0 > 0$，使得对所有 $0 < x < x_0$ 以及所有充分小的 $t > 0$，

$$B^+(\lambda t) \;\le\; (1+\zeta)\,\lambda\,B^+(t), \qquad B^+(t/\lambda) \;\le\; (1+\zeta)\,(1/\lambda)\,B^+(t).$$

令 $\varepsilon^\star(x) \in \arg\min_{\varepsilon>0} \mathrm{objective}(\varepsilon, x)$。那么，对所有 $0 < x < x_0$，

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &\le \mathrm{objective}(\varepsilon^\star(x), \lambda x) \\ &= A^+(\varepsilon^\star(x)) + \varepsilon^\star(x)\,B^+(\lambda x/\varepsilon^\star(x)) \\ &\le A^+(\varepsilon^\star(x)) + (1+\zeta)\,\lambda\,\varepsilon^\star(x)\,B^+(x/\varepsilon^\star(x)) \\ &\le (1+\zeta)\,\lambda\,f(x). \end{aligned}$$

若 $\lambda \ge 1$，令 $\varepsilon^\star(\lambda x) \in \arg\min_{\varepsilon>0} \mathrm{objective}(\varepsilon, \lambda x)$，并设 $\tilde{\varepsilon}(x) := \varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda$。那么，对所有 $0 < x < x_0$，

$$\begin{aligned} f(x) &\le \mathrm{objective}(\tilde{\varepsilon}(x), x) \\ &= A^+(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda) + (\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda)\,B^+\Big(\frac{x}{\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda}\Big) \\ &= A^+(\varepsilon^\star(\lambda x)/\lambda) + (1/\lambda)\,\varepsilon^\star(\lambda x)\,B^+(\lambda x/\varepsilon^\star(\lambda x)). \end{aligned}$$

利用 $A^+(\cdot) \ge 0$ 以及不等式 $B^+(t/\lambda) \le (1+\zeta)\,(1/\lambda)\,B^+(t)$，其中 $t = \lambda x/\varepsilon^\star(\lambda x)$，可得

$$f(x) \;\le\; (1/\lambda)\,f(\lambda x) \qquad (\lambda \ge 1).$$

对于 $\lambda \in (0,1)$，将前一个不等式中的 $1/\lambda > 1$ 和 x 替换为 λx，得到

$$f(\lambda x) \;\ge\; \lambda\,f(x).$$

结合这两个界，对所有 $0 < x < x_0$，

$$\frac{\lambda}{1+\zeta} \;\le\; \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \;\le\; (1+\zeta)\,\lambda.$$

令 $x \to 0^+$，然后令 $\zeta \to 0^+$，可得 $f(\lambda x)/f(x) \to \lambda$，对每个固定的 $\lambda > 0$ 均成立，即 $f \in \mathrm{RV}_1^{0^+}$。 □

B.4 辅助引理

我们记录正则变差理论中贯穿全文使用的两个基本工具：一致收敛定理和波特界。标准表述见 Bingham 等人（定理 1.5.2 和 1.5.6，1989）。为完整起见——并且由于我们在贝塔递推的证明中会反复使用它们——我们陈述其 0^+ 版本，这些版本通过取逆由 ∞-结果得到 $x \mapsto 1/x$。

引理 5（波特界）。设 $F \in \mathrm{RV}_\sigma^{0^+}$，且 $\sigma \ge 1$。则对于任意 $\delta > 0$ 以及任意 $c > 1$，存在 $x_0 = x_0(\delta, c) > 0$，使得对所有 $x_1,\ x_2 \in (0,\ x_0)$，

$$c^{-1}\min\left\{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\sigma+\delta},\ \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\sigma-\delta}\right\} \le \frac{F(x_2)}{F(x_1)} \le c\max\left\{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\sigma+\delta},\ \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\sigma-\delta}\right\}.$$

等价地，对于所有 $x \in (0,\ x_0)$ 以及所有满足 $\lambda x \in (0,\ x_0)$ 的 $\lambda > 0$，

$$c^{-1}\min\{\lambda^{\sigma+\delta},\ \lambda^{\sigma-\delta}\} \le \frac{F(\lambda x)}{F(x)} \le c\max\{\lambda^{\sigma+\delta},\ \lambda^{\sigma-\delta}\}.$$

引理 6（一致收敛定理）。如果 $F \in \mathrm{RV}_\sigma^{0^+}$ 满足 $\sigma \ge 1$，那么对于每个紧集 $[\lambda_1, \lambda_2] \subset (0,\ \infty)$，

$$\sup_{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} \left| \frac{F(\lambda x)}{F(x)} - \lambda^\sigma \right| \to 0, \quad \text{as } x \to 0^+.$$

特别地，对于任意 $\eta \in (0,\ 1)$，存在 $x_0(\eta) \in (0,\ 1)$ 和 $\omega_F(\eta) \to 0^+$，使得 $\eta \to 0^+$，对于所有$x \in (0,\ x_0(\eta))$ 和 $\lambda \in [1-\eta, 1+\eta]$，

$$\frac{F(\lambda x)}{F(x)} \in [1 - \omega_F(\eta),\, 1 + \omega_F(\eta)].$$

C 与联合极值相关的证明

命题*8*的证明。我们有

$$g(\boldsymbol{z}^A) = g_{C_1}(\boldsymbol{z}^A_{C_1}) + \sum_{k=2}^{M}[g_{C_k}(\boldsymbol{z}^A_{C_k}) - |z^A_{D_k}|] + \sum_{k=M+1}^{N}[g_{C_k}(\boldsymbol{z}^A_{C_k}) - |z^A_{D_k}|]$$

由于 $\boldsymbol{z}^A_{C_1}$ 和 $\boldsymbol{z}^A_{C_M}$ 中各至少有一个元素为 1，因此 $g_{C_1}(\boldsymbol{z}^A_{C_1}) \geq 1$ 和 $g_{C_M}(\boldsymbol{z}^A_{C_M}) \geq 1$。此外，由于 $D_k \subset C_k$，每一项 $g_{C_k}(\boldsymbol{z}^A_{C_k}) - |z^A_{D_k}| \geq 0$。综合以上结果，我们得出：若 $|z^A_{D_M}| < 1$，则有 $g_{C_1}(\boldsymbol{z}^A_{C_1}) \geq 1$，$g_{C_M}(\boldsymbol{z}^A_{C_M}) - |z^A_{D_M}| > 0$，且其他所有项均非负，因此 $g(\boldsymbol{z}^A) > 1$。

现在假设 $z^A_{D_M} = 1$。通过类似的论证，我们得出：若 $|z^A_{D_{M-1}}| < 1$，则有 $g_{C_1}(\boldsymbol{z}^A_{C_1}) \geq 1$，$g_{C_{M-1}}(\boldsymbol{z}^A_{C_{M-1}}) - |z^A_{D_{M-1}}| > 0$，且其他所有项均非负，因此 $g(\boldsymbol{z}^A) > 1$。重复这一论证可知，使 $g(\boldsymbol{z}^A) = 1$ 成立的最低要求是 $z^A_{D_M} = z^A_{D_{M-1}} = \cdots = z^A_{D_2} = 1$，即 $\cup_{i=1}^{M} D_i \subset A$。

□

引理 *1* 的证明。为了得到边缘规范函数，我们对 x_2 取最小值。为此，我们根据 x_1、x_2、x_3 的相对顺序，考虑规范函数的不同线性表示。具体而言，共有六种情况：

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_2 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_2 - x_2, & x_2 \leq x_1 \leq x_3, \\ \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_2 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_2 - x_2, & x_2 \leq x_3 \leq x_1, \\ \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_1 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_2 - x_2, & x_1 \leq x_2 \leq x_3, \\ \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_2 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_3 - x_2, & x_3 \leq x_2 \leq x_1, \\ \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_1 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_3 - x_2, & x_1 \leq x_3 \leq x_2, \\ \frac{x_1}{\theta_{12}} + \frac{x_2}{\gamma_{12}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}} - \frac{1}{\gamma_{12}}\right) x_1 + \frac{x_2}{\theta_{23}} + \frac{x_3}{\gamma_{23}} + \left(1 - \frac{1}{\theta_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}}\right) x_3 - x_2, & x_2 \leq x_3 \leq x_1. \end{cases}$$

关于 x_2 的相应导数，以及后续的极小化点 $x_2^\star$，如下所示：

$$\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}=\begin{cases}1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{23}}<0, & x_2\le x_1\le x_3\Rightarrow x_2^\star=x_1=\min(x_1,x_3),\\ 1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{23}}<0, & x_2\le x_3\le x_1\Rightarrow x_2^\star=x_3=\min(x_1,x_3),\\ \frac{1}{\gamma_{12}}-\frac{1}{\gamma_{23}}, & x_1\le x_2\le x_3\Rightarrow x_2^\star=\begin{cases}x_3=\max(x_1,x_3), & \gamma_{23}<\gamma_{12}\\ x_1=\min(x_1,x_3), & \gamma_{23}>\gamma_{12}\end{cases},\\ \frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\theta_{23}}, & x_3\le x_2\le x_1\Rightarrow x_2^\star=\begin{cases}x_3=\min(x_1,x_3), & \theta_{23}<\theta_{12}\\ x_1=\max(x_1,x_3), & \theta_{23}>\theta_{12}\end{cases},\\ \frac{1}{\gamma_{12}}+\frac{1}{\theta_{23}}-1>0, & x_1\le x_3\le x_2\Rightarrow x_2^\star=x_3=\max(x_1,x_3),\\ \frac{1}{\gamma_{12}}+\frac{1}{\theta_{23}}-1>0, & x_2\le x_3\le x_1\Rightarrow x_2^\star=x_1=\max(x_1,x_3).\end{cases}$$

在情形 3 中，若 $\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma$，则 $g(x_1,x_2,x_3)=x_3/\gamma+(1-1/\gamma)x_1=\max(x_1,x_3)/\gamma+(1-1/\gamma)\min(x_1,x_3)$ 在区域 $x_1\le x_2\le x_3$ 内不依赖于 x_2。类似地，在情形 4 中，若 $\theta_{12}=\theta_{23}=\theta$，则 $g(x_1,x_2,x_3)=x_1/\theta+(1-1/\theta)x_3=\max(x_1,x_3)/\theta+(1-1/\theta)\min(x_1,x_3)$ 在区域 $x_3\le x_2\le x_1$ 内不依赖于 x_2。

代入这些极小化点，并结合对 $\gamma_{12}=\gamma_{23}$ 在 $x_1\le x_2\le x_3$ 和 $\theta_{12}=\theta_{23}$ 在 $x_3\le x_2\le x_1$ 所作的观察，可得

$$g(x_1,x_2^\star,x_3)$$
$$=\begin{cases}\frac{x_1}{\theta_{23}}+\frac{x_3}{\gamma_{23}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{23}}-\frac{1}{\gamma_{23}}\right)x_1=\frac{\max(x_1,x_3)}{\gamma_{23}}+\left(1-\frac{1}{\gamma_{23}}\right)\min(x_1,x_3), & [x_1\le x_3]\\ \frac{x_1}{\theta_{12}}+\frac{x_3}{\gamma_{12}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{12}}\right)x_3=\frac{\max(x_1,x_3)}{\theta_{12}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{12}}\right)\min(x_1,x_3), & [x_3\le x_1]\\ \frac{x_1}{\theta_{12}}+\frac{x_3}{\gamma_{12}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{12}}\right)x_1=\frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}+\left(1-\frac{1}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & [x_1\le x_3;\gamma_{23}\le\gamma_{12}]\\ \frac{x_1}{\theta_{23}}+\frac{x_3}{\gamma_{23}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{23}}-\frac{1}{\gamma_{23}}\right)x_1=\frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}+\left(1-\frac{1}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & [x_1\le x_3;\gamma_{23}\ge\gamma_{12}]\\ \frac{x_1}{\theta_{12}}+\frac{x_3}{\gamma_{12}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{12}}\right)x_3=\frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}+\left(1-\frac{1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & [x_3\le x_1;\theta_{23}\le\theta_{12}]\\ \frac{x_1}{\theta_{23}}+\frac{x_3}{\gamma_{23}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{23}}-\frac{1}{\gamma_{23}}\right)x_3=\frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}+\left(1-\frac{1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & [x_3\le x_1;\theta_{23}\ge\theta_{12}]\\ \frac{x_1}{\theta_{12}}+\frac{x_3}{\gamma_{12}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{12}}-\frac{1}{\gamma_{12}}\right)x_1=\frac{\max(x_1,x_3)}{\gamma_{12}}+\left(1-\frac{1}{\gamma_{12}}\right)\min(x_1,x_3), & [x_1\le x_3]\\ \frac{x_1}{\theta_{23}}+\frac{x_3}{\gamma_{23}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{23}}-\frac{1}{\gamma_{23}}\right)x_3=\frac{\max(x_1,x_3)}{\theta_{23}}+\left(1-\frac{1}{\theta_{23}}\right)\min(x_1,x_3), & [x_3\le x_1].\end{cases}$$

现在注意，在 $x_1 \le x_3$ 种情形下，出现的参数只有 γ_{12} 和 γ_{23}。一般而言，对于 $x, y \ge 0$，函数 $\max(x,y)/\alpha + (1-1/\alpha)\min(x,y)$ 关于 α 是非增的，因此考虑 $x_1 \le x_3$时，它在 $\max(x_1,x_3)\max(\gamma_{12},\gamma_{23}) + \left(1 - \frac{1}{\gamma_{12}\max(\gamma_{23})}\right)\min(x_1,x_3)$ 处取最小值。类似地，考虑 $x_3 \le x_1$情形时，它在 $\max(x_1,x_3)\max(\theta_{12},\theta_{23}) + \left(1 - \frac{1}{\theta_{12}\max(\theta_{23})}\right)\min(x_1,x_3)$ 处取最小值。换言之，$g_{\{1,3\}}(x_1,x_3) = \min_{x_2 \ge 0} g(x_1,x_2,x_3)$ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
& g_{\{1,3\}}(x_1,x_3) \\
&= \begin{cases} \frac{x_3}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}\right) x_1 = \frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & x_1 \le x_3 \\ \frac{x_1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}\right) x_3 = \frac{\max(x_1,x_3)}{\max(\theta_{12},\theta_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})}\right)\min(x_1,x_3), & x_3 \le x_1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{57}
$$

等价地，方程 (57) 可表示为

$$
g_{\{1,3\}}(x_1,x_3) = \frac{x_1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})} + \frac{x_3}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})} + \left(1 - \frac{1}{\max(\theta_{12},\theta_{23})} - \frac{1}{\max(\gamma_{12},\gamma_{23})}\right)\min(x_1,x_3).
$$

□

命题 *9* 的证明。考虑指标 $k < l \in \mathcal{V}$，并令 $\mathcal{V}' = \{k = i_1, \ldots, i_m = l\}$ 为从 k 到 l的最短路径。树图模型是块图模型，根据引理 2，$g_{\{k,l\}}$ 可通过由以下内容定义的链图表示 $\mathcal{V}'$。

首先，假设 $k = i_1$，$l = i_3$。那么引理 1 给出了 $g_{\{k,l\}} = g_{\{i_1,i_3\}}$的形式，它正是所声称的类型。现在令 $l = i_4$。那么 $g_{\{k,l\}} = g_{\{i_1,i_4\}}$，其中

$$
g_{\{i_1,i_4\}}(x_{i_1},x_{i_4}) = g_{\{i_1,i_3\}}(x_{i_1},x_{i_3}) + g_{\{i_3,i_4\}}(x_{i_3},x_{i_4}) - x_{i_3}.
$$

再次将引理 1 用于 $\{i'_1,i'_2,i'_3\} = \{i_1,i_3,i_4\}$，即可得到 $g_{\{k,l\}}$所声称的形式。因此，对于任意 $m \ge 4$，我们都可以用归纳法继续证明。

□