arXiv:2601.00250v1 [math.CO] 1 Jan 2026

广义汉明重量的最优码与弧

Sascha Kurz[1],Ivan Landjev[2],和 Assia Rousseva[3]

[1] 拜罗伊特大学数学研究所，D-95440 拜罗伊特，德国[2] 保加利亚科学院数学与信息学研究所，8 Acad G. Bonchev 街，1113 索非亚，保加利亚 新保加利亚大学，21 Montevideo 街，1618 索非亚，保加利亚[3] 索非亚大学数学与信息学学院，J. Bourchier 大道，1164 索非亚，保加利亚

摘要

本文包含一些关于 Griesmer 界的注记。特别地，我们给出了广义重量 Griesmer 界的几何证明，并表明当最小距离足够大时，Solomon–Stiffler 型构造能够达到该界。我们还确定了维数至多为七的最优二元码的参数，以及维数至多为五的最优三元码。

关键词： 线性码，广义汉明重量，伽罗瓦几何，加性码，Griesmer 界

数学主题分类： 94B65, 94B05,51E22

1 引言

码字的汉明重量等于其支撑的大小，而线性码的最小汉明重量是所有非零码字的最小汉明重量。对于子码，其支撑由子码中至少有一个码字在相应位置取非零值的所有位置组成。因此，线性码的第 r 个广义汉明重量，是一个 r 维子码的最小支撑大小。广义汉明重量可用于描述线性码在 II 型窃听信道上的密码学性能 [29]，并确定该码的格形复杂度 [6, 9, 10, 18]。从几何角度看，线性码的第 r 个广义汉明重量对应于一个余维为 r 的子空间之外的点数，其中这些点是由生成矩阵的列所张成的一维子空间

所对应的点，见例如 [15, 27]。对于参数较小的线性码，虽然很容易找到有关其最小汉明距离参数的已知最佳界表格，但我们未能找到第 r 个广义汉明重量的此类表格。本文旨在整理这些数值，其中主要采用将其几何重述为射影空间中点的多重集的方式。在 [2] 中，作者给出了一种基于线性码及其广义汉明重量的加性码构造。因此，本文研究的构造也能用于构造加性码，而所研究的上界则表明了这一特定构造的局限性。更准确地说，对于所有足够大的距离，加性码的 Griesmer 型界总能达到 [20]。正如我们将看到的，这对线性码和第 r 个广义汉明重量也成立，但所提及的加性码构造仅对部分参数能得到最优码。

本文其余部分的结构如下。第 2 节介绍必要的预备知识。第 3 节分析第 r 个广义汉明距离的 Griesmer 界。事实证明，关于汉明距离的 Griesmer 码也能达到第 r 个广义汉明距离的 Griesmer 界。在第 4 节中，我们确定了对于某些较小参数，具有给定最小第 r 个广义汉明重量 d 的 $[n,k]_q$ 码的最小可能长度。我们以几何形式给出结果，即确定 PG($k-1, q$) 中点的最大数量 $m_q^{(r)}(k, w)$，使得每个维数为 r 的子空间至多包含 w 个点。我们完全确定了对所有 $k \leq 7$ 都成立的 $m_2^{(r)}(k-1, w)$，以及对所有 $k \leq 5$ 都成立的 $m_3^{(r)}(k-1, w)$。

2 预备知识

线性码。线性 $[n,k]_q$ 码 C 是 $\mathbb{F}_q^n$ 的一个 k 维子空间。对于 $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{F}_q^n$，我们称

$$\operatorname{supp}(c) := \{1 \leq i \leq n : c_i \neq 0\} \tag{1}$$

c 的支撑为 c，$\operatorname{wt}(c) = |\operatorname{supp}(c)|$ 称为其重量。更一般地，对于 $\mathbb{F}_q^n$ 中的向量子空间 C，我们将其支撑定义为所有这样的坐标位置的集合：在这些位置上，C 中的向量并非恒等于零。换言之，

$$\operatorname{supp}(C) := \{1 \leq i \leq n : \exists c = (c_1, \ldots, c_n) \in C, c_i \neq 0\}. \tag{2}$$

对于 $\mathbb{F}_q^n$ 上的两个 $\mathbb{F}_q$-向量空间 C、C'，若 C' 是 C 的子空间，则记作 $C' \leq C$。线性码 C [14, 19] 的第 r 个广义汉明重量记为 $d_r(C)$，定义为 C 的 r 维子码的最小支撑大小，即

$$d_r(C) := \min\{|\operatorname{supp}(C')| : C' \leq C, \dim(C') = r\}. \tag{3}$$

特别地，$d_1(C)$ 是该 C 的最小汉明距离。一个长度为 n、维数为 k 且第 r 个广义汉明重量等于 d_r 的线性码将被

称为 $[n,k,d_r]^{(r)}$-码。序列（$d_1(C)\ldots,d_k(C)$）称为线性 $[n,k]_q$ 码 C 的重量层次。显然，$1\le d_1(C)<d_2<\cdots<d_k(C)\le n$（例如参见 [29]）。

PG 中的点的多重集($\mathbf{k-1}$，$\mathbf{q}$)。PG($k-1$，q) 中的一个多重集是一个映射$\mathcal{K}$: $\mathcal{P}\to\mathbb{N}_0$，它将 PG($r$，$q$) 的点集 $\mathcal{P}$映射到非负整数集，为 $\mathcal{P}$中的每个点赋予一个重数。该映射可扩展到 $\mathcal{P}$的任意子集 $\mathcal{Q}$，定义为 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})=\sum_{P\in\mathcal{Q}}\mathcal{K}(P)$。整数 $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$称为 $\mathcal{Q}$的重数。

若对 PG($k-1$，q) 中的每个超平面 H，均有 $\mathcal{K}(\mathcal{P})=n$,$\mathcal{K}(H)\le w$（分别有 $\mathcal{K}(H)\ge u$），且存在一个超平面 H_0 满足 $\mathcal{K}(H_0)=w$（分别满足 $\mathcal{K}(H_0)=u$），则称多重集 $\mathcal{K}$为（n，w）-弧（分别为（n，u）-小超平面）。

设 $\mathcal{K}$ 是 PG($k-1$，q) 中的一个多重集。记 w_r 为相对于 $\mathcal{K}$，PG(r，q) 的一个 r维子空间的最大重数。换言之，

$$w_r:=\max\{\mathcal{K}(S):S\text{ is a subspace of }\mathrm{PG}(k-1,q),\dim(S)=r\}. \tag{4}$$

类似地，我们用 u_r 表示相对于 $\mathcal{K}$，PG(r,q) 中 r 维子空间的最小重数。换言之，

$$u_r:=\min\{\mathcal{K}(S):S\text{ is a subspace of }\mathrm{PG}(k-1,q),\dim(S)=r\}. \tag{5}$$

PG($k-1,q$) 中重数为 n 的多重集称为 $(n,w_r)^{(r)}$-弧（分别称为 $(n,u_r)^{(r)}$-小超平面），如果 PG($k-1,q$) 中每个 r 维子空间的重数至多为 w_r（分别至少为 u_r），且存在一个具有该重数的 r 维子空间。

众所周知，满长度线性 $[n,k]_q$ 码（不存在某个坐标在所有码字中恒为零）的同构类与 PG($k-1,q$) 中射影等价多重集的等价类之间存在一一对应，其中 $k\ge 2$。该对应关系可描述如下。设 C 是参数为 $[n,k,d]_q$ 的满长度线性码，且 $G=(g_1^T\cdots g_n^T)$，$g_i\in\mathbb{F}_q^k$ 是 C 的一个生成矩阵。其列 g_i^T 被视为 PG($k-1,q$) 中各点的齐次坐标。由此，生成矩阵 G 与 PG($k-1,q$) 中的一个有序 n 元点组 $(P_1,\ldots,P_n)$ 相对应。该 n 元组通过 $\mathcal{K}(P):=|\{i|P_i=P\}|$ 定义一个多重集 $\mathcal{K}$。显然，

$$w_r+d_{k-r-1}=n. \tag{6}$$

这意味着 $w_0<w_1<\cdots<w_{k-1}=n$。如果 $s\ge w_0$是整数，那么 $\mathcal{K}'=s-\mathcal{K}$是一个基数为 sv_k-n的多重集，其中有 $u_r=sv_{r+1}-w_r$、$r=0$，1、.....、$k-1$。这里，$v_r=(q^r-1)/(q-1)$，与通常一样。

定义 1. 我们用 $m_q^{(r)}(k,w)$ 表示射影空间 $\mathrm{PG}(k-1,q)$ 中满足每个 r 维子空间的重数至多为w的多重集的最大重数。换言之，$m_q^{(r)}(k,w)$ 定义为使得 $(n,w)^{(r)}$-弧存在于 $\mathrm{PG}(k-1,q)$中的最大 n。

直接进行双重计数可得：

引理 1. $m_q^{(r)}(k,w) \le \begin{matrix} v_k \\ v_{k-r} \end{matrix} - w$

取两个点的多重集的并，得到：

引理 2. $m_q^{(r)}(k, w'_r + w''_r) \ge m_q^{(r)}(k, w'_r) + m_q^{(r)}(k, w''_r)$

下面我们需要由子空间的投影诱导出的多重集。设 $\mathcal{K}$ 是 PG$(k-1,q)$ 中的一个多重集。固定 PG$(k-1,q)$ 中一个 i 维子空间δ，其中 $\mathcal{K}(\delta) = t$。进一步设 π 是 PG$(k-1,q)$ 中一个 j 维子空间，其维数互补，即 $i + j = k - 2$ 且 $\delta \cap \pi = \varnothing$。定义从 δ 到 π 的投影 $\varphi = \varphi_{\delta,\pi}$，如下：

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{P} \setminus \delta & \to \quad \pi \\ Q & \to \quad \pi \cap \langle \delta, Q \rangle. \end{cases} \tag{7}$$

与前面一样，$\mathcal{P}$ 表示 PG$(k-1,q)$ 中所有点构成的集合。注意，φ 将包含 δ 的 $(i+s)$ 子空间映射到 π 中的 $(s-1)$ 子空间。用 $\mathcal{P}'$ 表示 π 中所有点构成的集合。我们定义诱导多重集 $\mathcal{K}^\varphi\colon \mathcal{P}' \to \mathbb{N}_0$ 如下：

$$\mathcal{K}^\varphi(Q) = \sum_{P:\varphi(P)=Q} \mathcal{K}(P).$$

显然，对于 PG$(k-1,q)$ 中包含 δ 的每个子空间 S，都有 $\mathcal{K}^\varphi(\varphi(S)) = \mathcal{K}(S) - t$。特别地，若 $\mathcal{K}$ 是一个 $(n, w_r)^{(r)}$-弧（分别为 $(n, u_r)^{(r)}$-小超平面），则 $\mathcal{K}^\varphi$ 是一个 $(n-t, w_r - t)^{(r)}$-弧（分别为一个 $(n-t, u_r - t)^{(r)}$-小超平面）。

3 Griesmer 界

众所周知，Griesmer 界 [12]:

$$n \ge \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil =: g_q(k,d). \tag{8}$$

当 d 足够大时，具有给定最小汉明距离 d 的 $[n,k]_q$ 码的最小长度达到 Griesmer 界。第 r 个广义汉明距离也有类似的估计。该结果在 [15, 13] 中得到证明。相应的界称为广义 *Griesmer* 界。与经典Griesmer界类似，这一结果具有纯粹的几何性质。

下面，我们给出广义 Griesmer 界的几何证明。

定理1。设 C 是一个 $[n,k,d_r]^{(r)}$-码，其中 $1 \le r \le k$。则

$$n \ge d_r + \sum_{i=1}^{k-r} \left\lceil \frac{d_r}{q^i v_r} \right\rceil. \tag{9}$$

证明。对于 $r = k$，该结果显然成立。只需证明满长度码的情形，即 $n = d_k$。

设 C是一个 $[n, k, d_r]_q^{(r)}$码，并设与其相关联的 PG($k-1, q$) 中的 (n, w_{k-r-1})$^{(k-r-1)}$-弧为 $\mathcal{K}$。考虑一个重数最大的点 w_0。其余点的总重数为 $n - w_0$，因此其中必有一个点的重数至少为 $\left\lceil \frac{n-w_0}{v_k - 1} \right\rceil$。于是

$$w_0 \geq \left\lceil \frac{n - w_0}{q v_{k-1}} \right\rceil .$$

由于 $w_0 = n - d_{k-1}$，这就是 $r = k-1$ 的 Griesmer 不等式。

不失一般性，以下假设 C 不能按如下意义扩充：PG($k-1, q$) 中的每个点都包含在一个维数为 r 的极大子空间中。

固定一个重数最大的 ($k-r-1$) 维子空间 S，即重数为 w_{k-r-1}。PG($k-1, q$) 中存在 $v_{k+1} - v_{k-r}$ 个点位于 S 之外。因此存在一个重数为.....的点 $P \notin S$

$$t \geq \frac{n - w_{k-r-1}}{q^{k-r} v_r} = \frac{d_r}{q^{k-r} v_r}.$$

考虑从 P到某个超平面 $H \cong$ PG($k-2, q$) 的投影 φ，其中$P \notin H$。诱导弧 $\mathcal{K}^{\varphi}$具有参数 ($n-t, w_r - t$)$^{(r)}$。经过 P的每个子空间 T的像都是 H 中的一个维数为 $\dim T - 1$的子空间。此外，

$$\mathcal{K}^{(\varphi)}(\varphi(T)) = \mathcal{K}(T) - t.$$

如果我们设 $w_i' = \max_{T:\dim T = i} \mathcal{K}^{\varphi}(T)$，则有 $w_i' \leq w_{i+1} - t$。如果我们还设 $d_i' = n - t - w_{k-i-2}'$，则得到 $d_r \leq d_r'$。根据归纳假设

$$n' \geq d_{r-1}' + \sum_{i=1}^{k-r-1} \lceil \frac{d_{r-1}'}{q^i v_{r-1}} \rceil .$$

现在使用 $d_r \leq d_r'$，我们得到：

$$\begin{aligned} n' = n - t &= d_r' + \sum_{i=1}^{k-r-1} \left\lceil \frac{d_i'}{q^i v_r} \right\rceil \\ &= d_r + \sum_{i=1}^{k-r-1} \left\lceil \frac{d_i}{q^i v_r} \right\rceil \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} n &\geq d_r + t + \sum_{i=1}^{k-r-1} \left\lceil \frac{d_i}{q^i v_r} \right\rceil \\ &\geq d_r + \left\lceil \frac{d_r}{q^{k-r} v_r} \right\rceil + \sum_{i=1}^{k-r-1} \left\lceil \frac{d_i}{q^i v_r} \right\rceil \\ &= d_r + \sum_{i=1}^{k-r} \left\lceil \frac{d_i}{q^i v_r} \right\rceil . \end{aligned}$$

□

我们将（9）的左边记为 $g_r^{(r)}(k,\ d_r)$。下面的定理是众所周知的（例如参见 [23]）

定理 2. 设 $\mathcal{K}$ 是 $(n, n-d)$弧，位于 $\mathrm{PG}(k-1, q)$ 中，并设 C 是与 $\mathcal{K}$ 相关联的 $[n, k, d]_q$码。若 $n = t + g_q(k, d)$，则

$$w_j = t + \sum_{i=k-1-j}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \tag{10}$$

设 $k \geq 1$，并设 d 为正整数。整数 d可唯一地写成

$$d = \sigma q^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i q^i \tag{11}$$

容易计算得

$$g_q^{(1)}(k, q) = \sigma v_k - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i v_{i+1}. \tag{12}$$

设 C是一个 $[n = g_q(k,\ d)\ k,\ d]_q^{(1)}$-码，并设 $\mathcal{K}$是 $\mathrm{PG}(k-1,\ q)$ 中与 C相关联的 $(n,\ n-d)$-弧。由定理 2,

$$w_{k-1-j} = \sigma v_{k-j} - \sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i v_{i+1-j}. \tag{13}$$

由于相对于 $\mathcal{K}$ 的点的最大重数为 σ，$\mathcal{K}$ 可表示为 $\mathcal{K} = \sigma\chi_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$ 是一个参数为

$$\left(\sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i v_{i+1}, \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i v_i \right) \tag{14}$$

点的最大重数不超过 σ。具有上述参数但不限制点的最大重数的迷你超,

总可以构造为子空间之和： ε_{k-2} 个超平面、ε_{k-3} 个超直线，依此类推， ε_1 条直线和 ε_0 个点。这类迷你超称为典范。

若典范迷你超 $\mathcal{F}$in PG($k-1,q$) 是由 ε_{k-2} 个超平面、 ε_{k-3} 条超直线，依此类推，还有 ε_2 条直线和 ε_1 个点相加而成，则称其类型为 $\sum_{i=1}^{k-2}\varepsilon_i[i-1]$。换句话说， $\mathcal{F}=\sum_i \chi_{S_i}$，其中恰有 ε_j 个子空间 S_i 的（射影）维数为 $j-1$。从 s 个 PG($K-1,q$) 中减去 $\mathcal{F}$ 后得到的弧 $\mathcal{K}$，称为类型 $s[k-1]-\sum_{i=1}^{k-2}[\varepsilon_i]$。

具有参数的迷你超

$$\left(\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i v_{i+1}, \sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i v_{i+1-r}\right)^{(k-1-r)} \tag{15}$$

可以仿照典范迷你超的方式构造，即由 ε_{k-2} 个超平面、 ε_{k-3} 条超直线，依此类推，以及 ε_r 个维数为 r 的子空间相加而成。

定理3. 设 $\mathcal{F}$ 是$\mathrm{PG}(k-1,q)$ 中的一个小超平面，其参数由*(15)*、 $0\le\varepsilon_{\le}q-1$给出，且最大点重数为 w_0。那么对于每个$\sigma\ge w_0$，多重集 $\mathcal{K}=\sigma-\mathcal{F}$都是$\mathrm{PG}(k-1,q)$ 中的一个（多重）弧，其参数为

$$\left(n=\sigma v_k-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i v_{i+1}, w_{k-r-1}=\sigma v_{k-r}-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i v_{i+1-r}\right)^{(k-1-r)}.$$

与 $\mathcal{K}$ 相关联的码是关于第 r个广义汉明重量的 *Griesmer*码。

证明。 $\mathcal{K}$ 的参数显然。此外

$$d_r=n-w_{k-r-1}=v_r(\sigma q^{k-r}-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i q^{i-r+1}).$$

现在可以直接验证：

$$\begin{aligned}
g_q^{(r)}(k,r) &= d_r+\lceil\frac{d_r}{qv_r}\rceil+\cdots+\lceil\frac{d_r}{q^{k-r}v_r}\rceil \\
&= v_r(\sigma q^{k-r}-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i q^{i-r+1})+ \\
&\quad \sigma q^{k-r-1}-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i^{i-r}+ \\
&\quad \sigma q^{k-r-2}-\sum_{i=r+1}^{k-2}\varepsilon_i^{i-r-1}+\ldots+\sigma \\
&= \sigma v_k-\sum_{i=r}^{k-2}\varepsilon_i v_{i+1} \\
&= n
\end{aligned}$$

□

如果具有式 (15) 所给参数的 $\mathcal{F}$ 的最大点重数较大，例如至少为 $1+\sum_{i=r}^{k-2} i\varepsilon_i$，则总能构造出这样的迷你超。因此我们得到以下定理，该定理广为人知，且本质上归功于 Solomon 和 Stiffler [25]。

定理 4. 若 d_r 足够大，则存在 *Griesmer* $[n = g_q^{(r)}(k, d_r)]_q^{(r)}$码，对所有 q、k 和 r 均成立。

接下来，我们将证明，若一个码达到经典Griesmer界，则它对所有广义重量也都达到 Griesmer 界。

定理 5. 设 C是一个 $[n = g_q(k, d)\ k, d]_q^{(1)}$码，其中 $d^{(1)} = d$由式 *(11)* 给出。那么

$$d_r(C) = v_r \cdot \left(\sigma q^{k-r} - \sum_{i=r}^{k-1} \varepsilon_{i-1} q^{i-r}\right) - \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_{i-1} v_i,$$

并且 C 达到第 r 个广义汉明重量的 *Griesmer* 界，即$n = g_q^{(r)}(k, d_r)$。

证明。 由式 (13) 和 (6)，并利用显然的 $v_{i+r} - v_i = q^i v_r$，可得

$$\begin{aligned} d_r &= n - w_{k-1-r} \\ &= \left(\sigma v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_{i-1} v_i\right) - \left(\sigma v_{k-r} - \sum_{i=r}^{k-1} \varepsilon_{i-1} v_{i-r}\right) \\ &= \sigma(v_k - v_{k-r}) - \sum_{i=r}^{k-1} \varepsilon_{i-1}(v_i - v_{i-r}) - \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_{i-1} v_i \\ &= v_r \cdot \left(\sigma q^{k-r} - \sum_{i=r}^{k-1} \varepsilon_{i-1} q^{i-r}\right) - \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_{i-1} v_i. \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{i-1} v_i \le (q-1) \sum_{i=1}^{r} v_i < (q-1) v_r + v_r = q v_r.$$

现在可以直接验证

$$g_q^{(r)}(k, d_r) = g^{(1)}(k, d_1).$$

□

4 精确值

本节将解决这样一个问题：对于给定的 k, r, w 和 q，求 $m_q^{(r)}(k-1, w)$ 的精确值。一般来说，确定 $m_q^{(r)}(k-1, w)$ 的值很困难，但有一种简单情形，其结果显而易见：

命题1. 对于每个 $k \geq 1$ 和每个 $s \geq 1$，我们有 $m_q^{(0)}(k-1, s) = sv_k$。

情形 $r = 1$ 尤为重要。这是求广义帽最大规模的问题——广义帽是一个点的（多重）集，使得每条直线上的重数至多为 w。特别是，如果 $w = 2$，这就是著名的最大帽问题。

由线性 $[n, k]_q$ 码与 PG$(k-1, q)$ 中点的多重集之间的联系可知，$m_q^{(r)}(k-1, w)$ 是满足 $n \geq g_q^{(k-r-1)}(k, n-w)$ 的最大整数 n。这个整数称为 $m_q^{(r)}(k-1, w)$ 的*Griesmer*上界。

$m_q^{(r)}(k-1)$ 的另一个上界如下。设 $s_r = w$ 且 $s_{r+i} = m_q^{(r+i-1)}(r+i, s_r)$，$i = 0, \ldots, k-1-r$。则 $m_q^{(r)}(k-1) \leq s_{k-1}$。我们称此上界为 $m_q^{(r)}(k-1, w)$ 的编码上界。换言之，编码上界递归地利用最优多重弧的参数，而这些参数又可由最优线性码的参数得到。

例 1. 对于 $m_2^{(4)}(6,21)$，*Griesmer*上界为 81，因为

$$81 \geq g_2^{(2)}(7, 60) = 60 + \left\lceil \frac{60}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{60}{12} \right\rceil + \left\lceil \frac{60}{24} \right\rceil + \left\lceil \frac{60}{48} \right\rceil + \left\lceil \frac{60}{96} \right\rceil = 81,$$

而

$$82 < g_2^{(2)}(7, 61) = 61 + \left\lceil \frac{61}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{61}{12} \right\rceil + \left\lceil \frac{61}{24} \right\rceil + \left\lceil \frac{61}{48} \right\rceil + \left\lceil \frac{61}{96} \right\rceil = 84.$$

编码上界为 77。这里 $s_4 = 21$，$s_5 = m_2^{(4)}(5,21) = 39$，因为存在一个二元 $[39, 6, 18]$-码，而不存在 $[40, 6, 19]$-码（参见 *Grassl*表 *[11]*）。此外，$s_6 = m_2^{(5)}(6, 39) = 77$，因为存在一个 $[77, 6, 38]_2$- 码，而不存在 $[78, 6, 39]_2$-码。

在第4.1小节中，我们确定了所有$k \leq 7$的 $m_2^{(r)}(k-1, w)$精确值。我们指出，$m_2^{(6)}(7, w)$已完全确定（因为我们知道所有二元8维码的最优长度），而关于 $m_2^{(7)}(8, w)$则只有部分结果。然而，$m_2^{(6)}(7, w)$的确定结果散见于许多论文中，因此我们不在此尝试确定 $m_2^{(r)}(8, w)$。在第4.2小节中，我们确定了所有 $k \leq 5$的 $m_3^{(r)}(k-1, w)$精确值。

4.1 $m_2^{(r)}$ $(k-1,\ w)$ 的精确值

命题2。成立:

(a) $m_2^{(1)}(3, 3t+2) = 15t+8,$

(b) $m_2^{(1)}(3, 3t+3) = 15t+15,$

(c) $m_2^{(1)}(3, 3t+4) = 15t+16,$

对所有 $t \in N$ 均成立。

证明。 上界由 Griesmer上界给出。 $m_2^{(1)}(3,\ 2) \geq 8$、 $m_2^{(1)}(3,\ 3) \geq 15$ 和 $m_2^{(1)}(3,\ 4) \geq 16$ 的构造分别由一个仿射实体、一个实体以及一个实体加一个点给出。根据引理 2，将这些例子与 t 个实体结合，即可得到其余上界。 □

w	$m_2^{(1)}(3,\ w)$	构造	上界
2	8	仿射实体	Griesmer上界
3	15	实体	Griesmer上界
4	16	实体加一个点	Griesmer上界

表1： $m_2^{(1)}$ 的精确值$(3,\ w)$。

推论1. $m_2^{(1)}\ (3,\ w)$ 对于所有 $w \geq 2$，均由*Griesmer*上界给出。

命题2可以推广为:

命题3. 对于每个 $r \geq 2$ 和每个 $t \in \mathbb{N}$，有

(a) $m_2^{(1)}(k-1, 3t+2) = tv_k + 2^{k-1},$

(b) $m_2^{(1)}(k-1, 3t+3) = (t+1)v_k,$

(c) $m_2^{(1)}(k-1, 3t+4) = (t+1)v_k + 1.$

证明. $m_2^{(1)}(k-1,\ 2) \geq 2^{k-1}$、 $m_2^{(1)}(k-1,\ 3) \geq v_k$和 $m_2^{(1)}(k-1,\ 2) \geq v_k + 1$ 的构造分别由一个仿射$(k-1)$空间（类型）、一个$(k-1)$空间和一个加上一个点的$(k-1)$空间给出。将这些例子与 t个$(k-1)$空间副本结合，根据引理 2可得其余上界。

上界由 Griesmer上界给出。更精确地说，将定理1应用于 $d_{k-2} = tv_k + 2^{k-1} - 3t - 2 = (2t+1)\cdot 2v_{k-2}$ 可得$n \geq (2t+1)\cdot 2v_{k-2} + (2t+1) + (t+1) = tv_k + 2^{k-1}$；将定理1应用于$d_{k-2} = (2t+1)\cdot 2v_{k-2} + 1$则可得 $n \geq (2t+1)\cdot 2[r]_2 + (2t+2) + (t+1) = tv_k + 2^{k-1} + 2$。另外两种情形的处理方式类似。 □

推论 2. 对于每个 $k \geq 3$，我们都有 $m_2^{(1)}(k-1, w)$ 对所有 $w \geq 2$ 均由 *Griesmer*上界给出。

引理 3. 对于 $k \geq 5$，有 $m_2^{(k-3)}(k-1, k-2) = k+1$。

证明。一个射影基（或标架）表明 $m_2^{(k-3)}(k-1, k-2) \geq k+1$。由 Griesmer上界可得 $m_2^{(k-3)}(k-2, k-2) \leq k$，因此我们可以假设，一个至少含有 $k+1$ 个点的多重集 $\mathcal{M}$ 包含由 k 个单位向量张成的点。$\mathcal{M}$ 中由 $v \in \mathbb{F}_2^k$ 张成的任何其他点，其汉明重量必须为 $k-1$ 或 k；否则，$k-1$ 个点将包含在一个余维二子空间中。两个不同的、汉明重量为 k 或 $k-1$ 的此类向量之和，其汉明重量严格小于 $k-1$，因此我们可以在一个余维二子空间中找到 $k-1$ 个点。 □

Note that ovoids imply $m_q^{(1)}(3, 2) \geq q^2 + 1$.

命题 4. 我们有

(a) $m_2^{(2)}(4, 7t+4) = 31t + 16$,

(b) $m_2^{(2)}(4, 7t+5) = 31t + 17$,

(c) $m_2^{(2)}(4, 7t+6) = 31t + 24$,

(d) $m_2^{(2)}(4, 7t+7) = 31t + 31$,

(e) $m_2^{(2)}(4, 7t+8) = 31t + 32$,

(f) $m_2^{(2)}(4, 7t+9) = 31t + 33$,

(g) $m_2^{(2)}(4, 7t+10) = 31t + 40$

对所有 $t \in N$ 均成立。此外，我们有 $m_2^{(2)}(4; 3) = 6$。

证明。由引理 3 可得 $m_2^{(2)}(4,3) = 6$。$4 \leq s \leq 10$ 的构造分别由类型为 $[4]-[3]$、$[4]-[3]+[0]$、$[4]-[2]$、$[4]$、$[4]+[0]$、$[4]+2[0]$ 和 $2[4]-[3]-[2]$ 的点的多重集给出。根据引理 2，将这些例子与 t 个 4 维空间副本结合，即可得到其余构造。对于所有 $w \geq 4$，$m_2^{(2)}(4, w)$ 的上界由 Griesmer上界给出。 □

推论 3. $m_2^{(2)}(4, w)$ 对所有 $w \geq 4$ 均由 *Griesmer*上界给出。

我们可以将命题 4 推广如下:

命题 5。 对于每个 $k \geq 4$ 以及所有 $w \geq 4$，我们有 $m_2^{(2)}$（$k-1$、w）由 *Griesmer*上界给出。

w	$m_2^{(2)}(4,\ w)$	构造	上界
3	6	射影基	引理 3
4	16	$[4]-[3]$	Griesmer上界
5	17	加点	Griesmer上界
6	24	$[4]-[2]$	Griesmer上界
7	31	$[4]$	Griesmer上界
8	32	加点	Griesmer上界
9	33	加点	Griesmer上界
10	40	$2[4]-[3]-[2]$	Griesmer上界

表2： $m_2^{(2)}(4,w)$的精确值。

证明。Solomon–Stiffler构造对于 $[k-1]-[k-2]$、$[k-1]-[k-3]$、$[k-1]$ 和 $2[k-1]-[k-2]-[k-3]$ 给出 $m_2^{(k-4)}(k-1,\ 4)\geq 2^{k-2}$、$m_2^{(k-4)}(k-1,\ 6)\geq 3\cdot 2^{k-3}$、$m_2^{(2)}(k-1,\ 7)\geq v_k$ 以及 $m_2^{(2)}(k-1,\ 10)\geq 5\cdot 2^{k-3}$。添加点后得到 $m_2^{(2)}(k-1,\ 5)\geq m_2^{(2)}(k-1,\ 4)+1$、$m_2^{(2)}(k-1,\ 8)\geq m_2^{(k-4)}(k-1,\ 7)+1$ 以及 $m_2^{(2)}(k-1,\ 9)\geq m_2^{(2)}(k-1,\ 7)+2$。对于 $w>10$，下界为 2，由 $m_2^{(2)}(k-1、\ w)\geq m_2^{(2)}(k-1、\ w-7)+m_2^{(2)}(k-1,\ 7)$ 给出。

上界由Griesmer上界给出。更确切地说，将定理1应用于 $d_{k-3}=(4t+2)\cdot 2v_{k-3}$，可得 $n\geq(4t+2)\cdot 2v_{k-3}+(4t+2)+(2t+1)+(t+1)=t\cdot v_+2^{k-1}$；将定理1应用于 $d_r=(4t+3)\cdot 2v_{k-3}$，可得 $n\geq(4t+3)\cdot 2v_{k-3}+(4t+3)+(2t+2)+(t+1)=t\cdot v_k+3\cdot 2^{k-2}$；将定理1应用于 $d_r=(4t+4)\cdot 2v_{k-3}$，可得 $n\geq(4t+4)\cdot 2v_{k-3}+(4t+4)+(2t+2)+t=t\cdot v_k+v_k$；将定理1应用于 $d_r=(4t+5)\cdot 2v_{k-3}$，可得$n\geq(4t+5)\cdot 2v_{k-3}+(4t+5)+(2t+3)+(t+2)=t\cdot v_k+5\cdot 2^{k-2}$。

因此，尚未确定的唯一非平凡值是 $m_2^{(2)}(k-1,\ 3)$。前几个值为 $m_2^{(2)}(3,\ 3)=5$ 和 $m_2^{(2)}(4,\ 3)=6$。

w	$m_2^{(2)}(5,\ w)$	构造	上界
3	8	引理4	引理4
4	32	$[5]-[4]$	Griesmer上界
5	33	加点	Griesmer上界
6	48	$[5]-[3]$	Griesmer上界
7	63	$[5]$	Griesmer上界
8	64	加点	Griesmer上界
9	65	加点	Griesmer上界
10	80	$2[5]-[4]-[3]$	Griesmer上界

表3： $m_2^{(2)}(5,\ w)$的精确值。

引理4。我们有 $n_2^{(2)}(5,3)=8$。

证明。一个可行的例子如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设 $\mathcal{M}$ 是 PG(5, 2) 中由 $n \geq 9$ 个点构成的多重集，且每个平面至多包含三个点。由于 $m_2^{(2)}$ (5, 3) $= 6$，不妨设 $\mathcal{M}$ 包含由六个单位向量张成的六个点。显然，最大点重数为一，并且每个额外的点都由一个汉明重量至少为 4 的向量 x 张成。由于 $m_2^{(3)}$ (5, 2; 4) $= 7$，不妨设 $\mathcal{M}$ 还包含由 $x =$ (1, 1, 1, 1, 0, 0)$^\top$ 张成的点。设另外两个点分别由 y、$z \in \mathbb{F}_2^6$ 张成。由于每个平面至多包含三个点，我们有 wt(y)、wt(z) ≥ 4，且 $d_H(x, z)$ $d_H(x, y)$ $d_H(y, z)$ ≥ 4。若 wt(y) $= 4$，则不存在这样的向量 z，因此 wt(y)、wt(z) ≥ 5，这与 $d_H(y, z)$ $\geq$4 矛盾。

□

引理 5。有 $m_2^2(6,\ 3) = 11$ 和 $m_2^{(2)}(7,\ 3) = 17$。

证明。一个展示 $m_2^{(2)}$ (6，3) ≥ 11 的例子如下：

$$\begin{pmatrix} 1000000 & 11 & 10 \\ 0100000 & 11 & 01 \\ 0010000 & 10 & 10 \\ 0001000 & 10 & 01 \\ 0000100 & 01 & 10 \\ 0000010 & 01 & 01 \\ 0000001 & 00 & 11 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{M}$ 是 PG(6,2) 中由 $n \geq 12$ 个点组成的多重集，其中每个平面至多包含三个点。由于 $m_2^{(2)}$ (5,3) $= 8$，不失一般性，我们假设 $\mathcal{M}$ 包含由七个单位向量张成的七个点。显然，最大点重数为一，且每个额外的点都由一个 x汉明重量至少为 4 的向量张成。通过一次小规模的整数线性规划计算，我们排除了 $n \geq 12$。展示 $m_2^{(2)}$ (7,3) ≥ 17 的一个例子如下：

$$\begin{pmatrix} 10000000 & 1110 & 01111 \\ 01000000 & 1101 & 11101 \\ 00100000 & 1010 & 10011 \\ 00010000 & 1001 & 01110 \\ 00001000 & 0110 & 10101 \\ 00000100 & 0101 & 01011 \\ 00000010 & 0011 & 00111 \\ 00000001 & 0000 & 11111 \end{pmatrix}.$$

同样，我们可以预先指定由单位向量张成的八个点，因此任何其他点都由一个 $x \in \mathbb{F}_2^8$ 汉明重量至少为 4 的向量张成。如果不存在由汉明重量为 4 的向量张成的点，那么一次小规模的整数线性规划计算表明，最大基数为 16。因此，我们还可以额外预先指定一个由汉明重量为 4 的向量张成的任意点。随后另一次整数线性规划计算表明，最大基数为 17。

□

w	$m_2^{(2)}(6, w)$	构造	上界
3	11	引理 5	引理 5
4	64	$[6]-[5]$	Griesmer上界
5	65	加点	Griesmer上界
6	96	$[6]-[4]$	Griesmer上界
7	127	$[6]$	Griesmer上界
8	128	加点	Griesmer上界
9	129	加点	Griesmer上界
10	160	$2[6]-[5]-[4]$	Griesmer上界

表4： $m_2^{(2)}(6, w)$的精确值。

引理6。我们有 $m_2^{(3)}(5, 11) = 38$。

证明。 下界由唯一的 $[38, 6, 18]_2$ 码 $[5]$, 给出，它是一个 Griesmer码。一个生成矩阵例如可以写为

$$\begin{pmatrix} 00000100000000000000001111111111111111 & 00001000000001111111110000000111111111 & 00010000011110000111110001111000001111 \\ 00100001101110011000110110011001110011 & & \\ 01000010110111101011011010101010010101 & & \\ 10000011111010110101011101001100110110 & & \end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{M}$ 为 PG(5，2) 中的点多重集，且每个实体中至多包含 11 个点。考虑过一点的投影，且 $m_2^{2)}(4, 9) = 33$ 意味着，对于每个点 P，都有 $\mathcal{M}(P) \leq 1$。由于 $m_2^{(3)}(4, 11) = 21$，所以对于每个超平面 H，都有 $\mathcal{M}(H) \leq 21$。由于 $m_2^{(4)}(5, 20) = 38$，我们可以假设存在一个超平面 $H^\star$，满足 $\mathcal{M}(H^\star) = 21$。恰好存在两个 $[21, 5, 10]_2$ 码，参见例如 [1,定理 6]。将这两种可能性规定为 $H^\star$，一次简短的整数线性规划计算很快就表明 $\#\mathcal{M} \leq 38$。

□

我们指出，Griesmer上界给出 $m_2^{(3)}(5,11) \leq 41$，而编码上界通过 $m_2^{(4)}(5,21) = 39$ 得到 $m_2^{(3)}(5,11) \leq 39$。注意，假设存在一个由 39 个点组成的点集，位于 PG(5,2) 中，且每个实体中至多有 11 个点；其补集是一个基数为 24 的点多重集，并且每个实体至少被阻挡四次。一个实体与一个平面的并集（再加上两个任意点）给出了这样一个多重集的例子，但不是点集。

命题 6. 如果 $w \geq 12$ 或 $w \in \{6, 8, 9, 10\}$，那么 $m_2^{(3)}(5, w)$ 由 *Griesmer*上界给出。此外，我们有 $m_2^{3)}(5{,}4) = 7$, $m_2^{(3)}(5{,}5) = 11$,$m_2^{(3)}(5{,}7) = 19$，以及 $m_2^{(3)}(5, 11) = 38$。

证明。利用引理 3 和引理6，我们得出 $m_2^{(3)}(5{,}4) = 7$ 和 $m_2^{(3)}(5{,}11) =38$，分别如此。我们考虑以下构造

- 类型 $t[5], t[5] + [0], t[5] + 2[0], t[5] + 3[0], t[5] - [4], t[5] - [4] + [0], t[5] - [4] + 2[0], t[5] - [3], t[5] - [3] + [0]$，以及 $t[5] - [2]$，其中 $t \geq 1$;
- 类型 $t[5] - [4] - [3], t[5] - [4] - [2]$，以及 $t[5] - [3] - [2]$，其中 $t \geq 2$；并且
- 针对 $t \geq 3$ 的 $t[5] - [4] - [3] - [2]$ 类型。

因此，我们还需要为 $w \in \{5, \ldots, 7, 19\}$ 给出构造。对于 $w = 7$，我们在 $w = 6$ 的一个例子中添加一个任意的点。对于 $w \in \{5, 6, 19\}$，我们给出显式例子:

$$\begin{pmatrix} 00000100111000010111100010001011 \\ \\ 00100011100 \\ 01000011001 \\ 10000011010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0000001000011111 \\ 0000110001100011 \\ 0001000011101100 \\ 0010000110100111 \\ 0100000111010001 \\ 1000000101111 \end{pmatrix}, \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} 00010000000000001111111111111100000000000111111111000000000011111111 \\ 00000011100001110011100000111101001100111000111001101001100111000110011 \\ \\ 00000101101110001100100011001111011000011100011111001011000011100011111100 \\ 01001110110010010110100101011000101010110100101010001010101101100101 \\ 10001100110100111001001001100010011100011010110010011100011010111001 \end{pmatrix}.$$

对于 $w \in \{4, 5, 7, 11\}$，Griesmer上界无法达到，而其他所有情况 $w > 3$ 均可达到。对于 $w \in \{5, 7\}$，编码上界可以达到。 □

Magma 中已知最优线性码 (BKLC)数据库里存储的 $[m_2^{(3)}(5, w), 6]_2$ 码的生成矩阵给出了 $w \in \{5, 6, 11, 19\}$ 的最优示例。注意，对于 $w = 6$，我们可以取任意 $[18, 6, 8]_2$ Griesmer码；对于 $w = 19$，我们可以取任意 $[73, 6, 36]_2$ Griesmer码。

引理 7. 我们有 $m_2^{(4)}(6{,}9) = 27$ 和 $m_2^{(4)}(6{,}10) = 28$。

证明。 *</style}*给出一个说明 $(6{,}9) \geq 27$ 的例子:

$$\begin{pmatrix} 000000100000000011111111111 \\ 000001000001111100000111111 \\ 000010001110111100011000011 \\ 000100010111000101111000101 \\ 001000011001001110101011100 \\ 010000001011011010110101010 \\ 100000010100111011101011000 1 \end{pmatrix},$$

因此，添加任意一个点即可得到 $m_2^{(4)}(6{,}10) \geq 28$。对于 $w = 9$，编码上界是紧的。接下来，我们考虑 PG(6,2) 中的点的多重集 $\mathcal{M}$，使得每个余维二子空间至多包含十个点。从 $m_2^{(5)}(6{,}10) = 18$ 出发，我们使用 LinCode [4] 枚举了两个不同构的 $[18, 6, 8]_2$ 码。指定两种可能的构型，并且一个

w	$m_2^{(3)}(5,\ w)$	构造	上界
4	7	射影基	引理 3
5	11	BKLC/ILP	编码上界
6	18	BKLC/ILP	Griesmer上界
7	19	加点	编码上界
8	32	$[5]-[4]$	Griesmer上界
9	33	加点	Griesmer上界
10	34	加点	Griesmer上界
11	38	BKLC/ILP	引理6
12	48	$[5]-[3]$	Griesmer上界
13	49	加点	Griesmer上界
14	56	$[5]-[2]$	Griesmer上界
15	63	$[5]$	Griesmer上界
16	64	加点	Griesmer上界
17	65	加点	Griesmer上界
18	66	加点	Griesmer上界
19	73	BKLC/ILP	Griesmer上界
20	80	$2[5]-[4]-[3]$	Griesmer上界
21	81	加点	Griesmer上界
22	88	$2[5]-[4]-[2]$	Griesmer上界
23	95	和构造	Griesmer上界
24	96	加点	Griesmer上界
25	97	加点	Griesmer上界
26	104	$2[5]-[3]-[2]$	Griesmer上界
27	111	和构造	Griesmer上界
28	112	加点	Griesmer上界
29	119	和构造	Griesmer上界
30	126	和构造	Griesmer上界
31	127	加点	Griesmer上界
32	128	加点	Griesmer上界
33	129	加点	Griesmer上界
34	136	$3[5]-[4]-[3]-[2]$	Griesmer上界

表 5： $m_2^{(3)}(5,\ w)$ 的精确值。

任取一个使张成空间维数为 7 的点，我们使用整数线性规划计算得出 #$\mathcal{M} \leq 28$。以下假设对每个超平面都有 $\mathcal{M}(H) \leq 17$ 。由于 $m_2^{(3)}$(5，7) $= 19$，我们也假设对每个点 P 都有 $\mathcal{M}(P) \leq 2$。若存在一个实体 S 满足 $\mathcal{M}(S) \geq 7$，则有 #$\mathcal{M} \leq 7 \cdot 3 + 7 = 28$，因此我们假设对每个实体 S 都有 $\mathcal{M}(S) \leq 6$ 。我们使用 LinCode $[4]$ 枚举了四个非同构的 $[10, 5, 4]_2$ 码。指定四种可能的构型和两个使张成空间维数为 7 的点后，我们使用整数线性规划计算得出 #$\mathcal{M} \leq 28$。 □

引理 8. 我们有 $m_2^{(4)}$ (6，20) $= 71$。

证明。 一个展示 $m_2^{(4)}$ (6，20) ≥ 71 的例子如下：

$$\begin{pmatrix} 0000001000000000000000000000000000000011111111111111111111111111111111 & 0000010000000000000000011111111111111111000000000000000000011111111111111111 \\ 0000100000001111111110000000001111111100000000111111110000000001111111 & \\ 0001000011110000111110000011110000111100001111000011110000011110000111 & \\ 0010000100110111000110001100110011001100110011001100110011001100110011 & \\ 0100000101011011001010110101010101010111010101010101010110101010101 & \\ 1000000111101101010011011010011001011001101001100101101000101100110 1001 & \end{pmatrix}.$$

接下来我们考虑 PG(6，2) 中的一个点的多重集 $\mathcal{M}$ ，使得每个余维二子空间至多包含 20 个点。从 $m_2^{(4)}$ (5，20) $= 38$出发，我们使用 LinCode $[4]$ 构造了唯一的 $[38, 6, 18]_2$ 码 $[5]$。指定相应的唯一构型以及使张成空间为 7 维的另一个点后，我们使用整数线性规划计算得出 #$\mathcal{M} \leq 71$。观察到 $m_2^{(5)}$ (6，37) $= 71$ ，证明即告完成。 □

引理 9. 我们有 $m_2^{(4)}$ *<style id='4>(6，22)* $= 82$ 以及 $m_2^{(4)}$ (6，23) $= 83$。

证明。 每个 11 $[82, 7, 40]_2$Griesmer 码 $[5]$都给出了一个说明 $m_2^{(4)}$ (6，22) ≥ 82 的例子。一个生成矩阵例如为

$$\begin{pmatrix} 0000001000000000000000000000000000000000000011111111111111111111111111111111111111 \\ 0000010000000000000000000111111111111111111100000000000000000000111111111111111111111 \\ 0000100000001111111111111000000011111111111100000000111111111111000000001111111111100 \\ 0001000011100000011111110001111000001111111000111100000000111110000111100000111110 0 \\ 0010000101100011100011110110011000110000111011001100011110011100110011001100011000 1100 \\ 0100000110101100101100111010101001010011001101010101100110101101010101010110010100 \\ 1000000111010101010101011101001010010101010110100110101010110110010110011010100100 \end{pmatrix},$$

因此，添加任意一个点即可得到 $m_2^{(4)}$ (6，23) ≥ 83。对于 $s = 22$ ，达到了 Griesmer上界。接下来，我们考虑 PG(6，2) 中的一个点多重集 $\mathcal{M}$，使得每个余维二子空间至多包含 23 个点。从 $m_2^{(4)}$ (5，23) $= 34$ 出发，我们使用 LinCode $[4]$ 构造了唯一的 $[45, 6, 22]_2$ 码 $[5]$。指定相应的构型以及一个使张成空间维数为 7 的任意点后，我们通过整数线性规划计算得出 #$\mathcal{M} \leq 83$。下文假设每个超平面都满足 $\mathcal{M}(H) \leq 44$。由于 $m_2^{(3)}$(5， 20) $= 80$，我们还假设每个点 P都满足 $\mathcal{M}(P) \leq 1$。我们使用 LinCode $[4]$ 枚举了最大列重数为一的唯一 $[44, 6, 21]_2$码。指定相应的构型以及一个使张成空间维数为 7 的任意点后，我们通过整数线性规划计算得出 #$\mathcal{M} \leq 83$。下文假设

$\mathcal{M}(H) \leq 43$ 对每个超平面均成立。如果存在一个实体 S 满足 $\mathcal{M}(S) \geq 13$，那么我们有 $\#\mathcal{M} \leq 7 \cdot 10 + 13 = 83$，因此假设每个实体 S都满足 $\mathcal{M}(S) \leq 12$。我们使用 LinCode [4] 构造了唯一的 $[23, 11, 5]_2$ 码 [24]。指定相应的构型以及两个使张成空间维数为 7 的点后，我们通过整数线性规划计算得出 $\#\mathcal{M} \leq 83$。□

命题 *7.* 若 $w \geq 24$ 或 $w \in \{7, 11, 14, 16, \ldots, 19, 22\}$，则 $m_2^{(4)}$ *(6, s)* 由 *Griesmer*上界 给出。此外，我们有 $m_2^{(4)}$ *(6, 5)* $= 8$,$m_2^{(4)}$ *(6,6)* $= 12$, $m_2^{(4)}$ *(6,8)* $= 20$, $m_2^{(4)}$ *(6, 9)* $= 27$, $m_2^{(4)}$ *(6, 10)* $= 28$, $m_2^{(4)}$ *(6, 12)* *=36, (4) 2 (6,13)* $= 43$, $m_2^{(4)}$ *(6,15)* $= 51$, $m_2^{(4)}$ *(6, 20)* $= 71$, $m_2^{(4)}$ *(6, 21)* $= 75$，以及$m_2^{(4)}$ *(6,23)* $= 83$。

证明。 对于 $m_2^{(4)}$(6，9) $= 27$和 $m_2^{(4)}$(6， 10) $= 28$，参见引理 7。对于 $m_2^{(4)}$(6，20) $= 71$，参见引理 8。对于 $m_2^{(4)}$(6， 22) $= 82$和 $m_2^{(4)}$(6， 23) $= 83$，参见引理 9。我们考虑以下构造

- 类型 $t[6]$、 $t[6]-[5]$、 $t[6]-[4]$、 $t[6]-[3]$，以及 $t[6]-[2]$ 对于 $t \geq 1$;
- 类型 $t[6]-[5]-[4]$、 $t[6]-[5]-[3]$、 $t[6]-[5]-[2]$、 $t[6]-[4]-[3]$、 $t[6]-[4]-[2]$，以及 $t[6]-[3]-[2]$ 对于 $t \geq 2$;
- 种类 $t[6]-[5]-[4]-[3]$、 $t[6]-[5]-[4]-[2]$、 $t[6]-[5]-[3]-[2]$和 $t[6]-[4]-[3]-[2]$，对于 $t \geq 3$；以及
- 种类 $t[6]-[5]-[4]-[3]-[2]$，对于 $t \geq 4$,

以及在这些构造中最多再添加四个点。通过比链式方法更仔细地选择删除的子空间，我们还可以为 $[6]-[3]-[2]$、 $2[6]-[5]-[3]-[2]$、 $2[6]-[4]-[3]-[2]$和 $3[6]-[5]-[4]-[3]-[2]$构造例子，即为 $w \in \{27, 43, 51, 67\}$构造达到 Griesmer上界的例子。 $w = 5$ 的情形在引理 3 中讨论。对于 $w \in \{8, 12, 15, 38\}$，目前已知的最佳构造可以通过在一个针对 $w-1$的构造中添加任意一个点得到。对于 $w \in \{6, 7, 11, 13, 14, 21\}$，我们给出通过整数线性规划搜索找到的显式例子。

$$\begin{pmatrix} 000000100111000001001011000010010011 \\ 000100011100 \\ 001000011111 \\ 010000001101 \\ 100000011001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0000001000001111111 \\ 0000010001110001111 \\ 0000100110010010111 \\ 0001000011100110011 \\ 0010000010111100101 \\ 0100000101101101001 \\ 1000000011011011001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 000000100000000000001111111111111111 \\ 000001000001100001111100111000001111 \\ 0001000111100110011101011000110000 1 \\ 0010000010111010001101101001010111 0 \\ 0100000101101111100110010010100011 0 \\ 1000000011001110101010011100011101 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 000000100000000000001111111111111111111111 \\ 000001000001100001111100001111100000001111111 \\ 0001000110101110011100110111100011110001111 \\ 0010000011010110001111001001100100110010111 \\ 0100000111011000100101010010101001010111011 \\ 1000000100101011100110111000110100010011101 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 000000100000000000000000011111111111111111111111100 \\ 000001001111111000000011110000000111100001111111100 \\ 0001000000011100001110111001111100010001000111111 \\ 0010000001100100110011011010001101110111001000111 \\ 0100000010101001111100001110110100101011010001011 1 \\ 1000000101001010010101101011010010111101100010011 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}
00000010000000000000000000000000000000011111111111111111111111111111111111\\
00000100000000000000011111111111111111000000000000000000011111111111111111\\
00001000000000011111110000000011111111100000000011111111110000000001111111\\
00010000011111000111100011111000011111000011111000011111000011111000011111\\
00100000100111011001101100011001100110011001100110011100111001100111001111\\
01000001111001101010110101101010101101110101101010100101101011010101010001\\
10000001101010110100111010101100100110011010101100101110110001011001101011
\end{pmatrix},$$

对于 $w \in \{36, 37, 39\}$，我们可以取 $[138, 7, 68]_2$, $[145, 7, 72]_2$, 和 $[153, 7, 76]_2$ Griesmer 码 [28]。对于 $w \in \{6, 8, 12, 13, 15, 21\}$，编码上界可以达到。所有其他上界均由 Griesmer上界给出。 □

Magma 中已知最优线性码 (BKLC) 数据库所存储的 $[m_2^{(4)}(6, w), 7]_2$ 码的生成矩阵，为以下情形给出了最优示例：

$$w \in \{6, 7, 9, 11, 13, 14, 20, 21, 22, 36, 37, 39\}.$$

引理 10。 我们有 $m_2^{(3)}(6,4) = 9$ 以及 $m_2^{(3)}(6,5) = 19$。

证明。 展示 $m_2^{(3)}(6,4) \geq 9$ 和 $m_2^{(3)}(6,5) \geq 19$ 的示例如下：

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix}
10000000000111101101\\
01000001010101110001\\
00100001111100010011\\
00010001101110001100\\
00001000110111000011\\
00000101001001111100\\
00000010100100111111
\end{pmatrix},$$

分别。上界是通过整数线性规划计算获得的，其中规定了由 $\mathbb{F}_2^7$ 中的单位向量生成的七个点。 □

引理 11. 我们有 $m_2^{(3)}(6,6) = 28$。

证明。 *</style}*一个展示 $(6,6) \geq 28$ 的例子如下：

$$\begin{pmatrix}
00000000000011111110000111111\\
00000000011100011101110001111\\
00011111100000011100010010111\\
11100011100000000000011011101\\
00011100000011111111110000000\\
01101101101101101100000000000\\
11011011011011011000000000000
\end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{M}$ 是 PG(6,2) 中由 n 个点组成的多重集，使得每个实体至多包含六个点。我们使用 LinCode [4] 枚举了两个非同构的 $[18, 6, 8]_2$ 码。规定这两种可能的构型以及任意一个

w	$m_2^{(4)}(6,\ w)$	构造	上界
5	8	射影基	引理 3
6	12	BKLC/ILP	编码上界
7	19	BKLC/ILP	Griesmer上界
8	20	加点	编码上界
9	27	BKLC/ILP	编码上界
10	28	加点	引理 7
11	35	BKLC/ILP	Griesmer上界
12	36	加点	编码上界
13	43	BKLC/ILP	编码上界
14	50	BKLC/ILP	Griesmer上界
15	51	加点	编码上界
16	64	$[6]-[5]$	Griesmer上界
17	65	加点	Griesmer上界
18	66	加点	Griesmer上界
19	67	加点	Griesmer上界
20	71	BKLC/ILP	引理 8
21	75	BKLC/ILP	编码上界
22	82	BKLC/ILP	Griesmer上界
23	83	加点	引理 9
24	96	$[6]-[4]$	Griesmer上界
25	97	加点	Griesmer上界
26	98	加点	Griesmer上界
27	105	$[6]-[3]-[2]$	Griesmer上界
28	112	$[6]-[3]$	Griesmer上界
29	113	加点	Griesmer上界
30	120	$[6]-[2]$	Griesmer上界
31	127	$[6]$	Griesmer上界
32	128	加点	Griesmer上界
33	129	加点	Griesmer上界
34	130	加点	Griesmer上界
35	131	加点	Griesmer上界
36	138	BKLC/ILP	Griesmer上界
37	145	BKLC/ILP	Griesmer上界
38	146	加点	Griesmer上界
39	153	BKLC/ILP	Griesmer上界
40	160	$2[6]-[5]-[4]$	Griesmer上界
41	161	加点	Griesmer上界
42	162	加点	Griesmer上界
43	169	$2[6]-[5]-[3]-[2]$	Griesmer上界
44	176	$2[6]-[5]-[3]$	Griesmer上界
45	177	加点	Griesmer上界

表6： $m_2^{(4)}(6,w)$ 的精确值——第1部分。

w	$m_2^{(4)}(6,\ w)$	构造	上界
46	184	$2[6]-[5]-[2]$	Griesmer上界
47	191	和构造	Griesmer上界
48	192	加点	Griesmer上界
49	193	加点	Griesmer上界
50	194	加点	Griesmer上界
51	201	$2[6]-[4]-[3]-[2]$	Griesmer上界
52	208	$2[6]-[4]-[3]$	Griesmer上界
53	209	加点	Griesmer上界
54	216	$2[6]-[4]-[2]$	Griesmer上界
55	223	和构造	Griesmer上界
56	224	加点	Griesmer上界
57	225	加点	Griesmer上界
58	232	和构造	Griesmer上界
59	239	和构造	Griesmer上界
60	240	加点	Griesmer上界
61	247	和构造	Griesmer上界
62	254	和构造	Griesmer上界
63	255	加点	Griesmer上界
64	256	加点	Griesmer上界
65	257	加点	Griesmer上界
66	258	加点	Griesmer上界
67	265	$3[6]-[5]-[4]-[3]-[2]$	Griesmer上界
68	272	$3[6]-[5]-[4]-[3]$	Griesmer上界
69	273	加点	Griesmer上界
70	280	$3[6]-[5]-[4]-[2]$	

表7: $m_2^{(4)}(6,\ w)$ 的精确值——第2部分。

使张成空间为 7 维的点，我们使用整数线性规划计算得出 $\#\mathcal{M} \leq 25$。以下我们假设对每个超平面都有 $\mathcal{M}(H) \leq 17$ 。我们使用 LinCode [4] 枚举了三个两两不同构的$[17,6,7]_2$码。指定三种可能的构型以及一个使张成空间为 6 维的任意点后，我们使用整数线性规划计算得出 $\#\mathcal{M} \leq 28$。以下我们假设对每个超平面都有 $\mathcal{M}(H) \leq 16$ 。我们使用 LinCode [4] 枚举了四个两两不同构的 $[10,5,4]_2$码。指定四种可能的构型以及两个使张成空间为 6 维的点后，我们使用整数线性规划计算得出 $\#\mathcal{M} \leq 28$。

□

引理 12。 我们有 $m_2^{(3)}(6,11) = 72$。

证明。 *</style}*一个表明 $(6,11) \geq 72$ 的例子如下:

$$\begin{pmatrix}
10000001101110001110100111000011001110101101000101011100100101111111100\\
01000001011001001001110100100010101001111011100111110010110111001000010\\
00100000111101100111011100011000011011110100101000111010100101110010000010\\
00010000010001101000111101110010110111101001010100111001101111000100010\\
00001000000011011111011100011000011001111001101011010100010111100010010\\
00000100000100101000111111001110100111011010011000111011010101110000101 0\\
00000011111010011101101001000101011111010010001011101001001111000000011 0
\end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{M}$ 是 PG(6,2) 中由 n 个点组成的多重集，且每个实体至多包含十一个点。对于每个超平面H，都有 $\mathcal{M}(H) \leq m_2^{(3)}(5,11) = 38$ ，因此 $\#\mathcal{M} \leq m_2^{(5)}(6,38) \leq 72$。

□

命题 8。 若 $w \geq 12$ 或 $w \in \{8,9,10\}$，则 $m_2^{(3)}(6,w)$ 由 *Griesmer*上界给出。此外，我们有 $m_2^{(4)}(6,4) = 9$, $m_2^{(4)}(6,5) = 19$,$m_2^{(4)}(6,6) = 28$, $m_2^{(4)}(6,7) = 35$，以及 $m_2^{(4)}(6,11) = 72$。

证明。 对于 $m_2^{(3)}(6,4) = 9$和 $m_2^{(3)}(6,5) = 19$，参见引理 10。对于$m_2^{(3)}(6,6) = 28$，参见引理 11。对于 $m_2^{(3)}(6,11) = 72$，参见引理 12。我们考虑以下构造

- 类型 $t[6]$、 $t[6]-[5]$、 $t[6]-[4]$和 $t[6]-[3]$，对应于 $t \geq 1$;
- 类型 $t[6]-[5]-[4]$、 $t[6]-[5]-[3]$、 $t[6]-[5]$、 $t[6]-[4]-[3]$和 $t[6]-[4]$, 对应于 $t \geq 2$,

以及在这些构造中再添加最多四个点。展示 $m_2^{(3)}(6,7) \geq 35$ 的示例如下

$$\begin{pmatrix}
10010101101010110101110101100001111\\
01010001011011000111000010101110100\\
00110100001001000011000111010011111\\
00001100111000100001001011101101101\\
00000011111000010000100111110110110\\
00000000000011111000001111111000111\\
00000000000000000111111111111111000
\end{pmatrix}.$$

对于 $m_2^{(3)}(6,19) \geq 145$，我们可以使用一个 $[145,7,72]_2$ Griesmer码 [28]。上界 $m_2^{(3)}(6,7) \leq 35$ 由编码上界给出。所有其他上界均由 Griesmer上界得到。

□

Magma 中 已知最优线性码 (BKLC) 数据库所存储的 $[m_2^{(3)}(6,w),7]_2$ 码的生成矩阵，为 $w \in \{5,7,19\}$ 提供了最优实例。

w	$m_2^{(3)}(6,w)$	构造	上界
4	9	ILP	引理 10
5	19	BKLC/ILP	引理 10
6	28	ILP	引理 11
7	35	BKLC/ILP	编码上界
8	64	$[6]-[5]$	Griesmer上界
9	65	加点	Griesmer上界
10	66	加点	Griesmer上界
11	72	引理 12	引理 12
12	96	$[6]-[4]$	Griesmer上界
13	97	加点	Griesmer上界
14	112	$[6]-[3]$	Griesmer上界
15	127	$[6]$	Griesmer上界
16	128	加点	Griesmer上界
17	129	加点	Griesmer上界
18	130	加点	Griesmer上界
19	145	BKLC/ILP	Griesmer上界
20	160	$2[6]-[5]-[4]$	Griesmer上界
21	161	加点	Griesmer上界
22	176	$2[6]-[5]-[3]$	Griesmer上界
23	191	和构造	Griesmer上界
24	192	和构造	Griesmer上界
25	193	和构造	Griesmer上界
26	208	$2[6]-[4]-[3]$	Griesmer上界

表 8: $m_2^{(3)}(6, w)$的精确值。

4.2 $m_3^{(r)}$ $(k-1,\ w)$的精确值

命题 9. 若 $w \geq 3$ ，则 $m_3^{(1)}(3,\ w)$ 由 *Griesmer*上界给出。此外，我们有 $m_3^{(1)}(3,\ 2) = 10$。

证明。 上界 $m_3^{(1)}(3,\ 2) \leq 10$ 可由编码上界推出，其他所有上界均由 Griesmer上界推出。在 PG(3，3) 中存在卵形体，这给出 $m_3^{(1)}(3,\ 2) \geq 10$。一个 $[27,4,18]_3$ Griesmer码给出 $m_3^{(1)}(3,\ 3) \geq 27$。注意，对于所有$d \geq 16$, 都存在 Griesmer $[n,4,d]_3$ 码。

□

我们注意到，对于所有 $q > 2$ [3, 22]，都有 $m_q^{(1)}(3,\ 2) = q^2 + 1$ 。此外，我们有 $m_4^{(1)}(3,\ 3) = 31$ ，以及 $m_5^{(1)}(3,\ 3) = 44$ [8]。

引理 13。我们有 $m_3^{(2)}(4,\ 4) = 20$。

证明。 $m_3^{(2)}(4,\ 4) \geq 20$ 的一个示例为

$$\begin{pmatrix} 10000220001102111221 \\ 01000002221001121111 \\ 00100212202022200211 \\ 00010202111222011010 \\ 00001111021120010111 \end{pmatrix}.$$

在指定唯一的 $[10,4;6]_3$ 码后，通过一次小型整数线性规划计算验证了$m_3^{(2)}(4,\ 4) \leq 20$。 □

引理 14。我们有 $m_3^{(2)}(4,\ 6) = 38$。

证明。 $m_3^{(2)}(4,\ 6) \geq 38$ 的一个示例为

$$\begin{pmatrix} 10000012010111221202110002001212201211 \\ 01000212122122010222212210101011010111 \\ 00100201200121120102201121120200101221 \\ 00010120120101221221201022020122110002 \\ 00001222222222222222201011122210222120 2] \end{pmatrix}.$$

在指定三个不等价的 $[15,4;9]_3$ 码后，通过小型整数线性规划计算验证了 $m_3^{(2)}(4,\ 6) \leq 38$。 □

引理 15。我们有 $m_3^{(2)}(4,11) = 91$。

证明。 一个展示 $m_3^{(2)}(4,6) \geq 38$ 的例子来自 Magma 中已知最优线性码 (BKLC) 数据库里的 $[91,5,60]_3$ 码。指定唯一的非等价 $[32,4;\ 21]_3$ 码之后，整数线性规划计算验证了 $m_3^{(2)}(4,11) \leq 91$。

□

命题 10。 如果 $w \geq 18$ 或 $s \in \{7,9,10,12,13,14,15,16\}$，那么 $m_3^{(2)}(4,w)$由 *Griesmer* 上界给出。此外，我们有 $m_3^{(2)}(4,3) = 11$,$m_3^{(2)}(4,\ 4) = 20$, $m_3^{(2)}(4,\ 5) = 29$, $m_3^{(2)}(4,\ 6) = 38$, $m_3^{(2)}(4,\ 8) = 56$, $m_3^{(2)}(4,\ 11) = 91$，以及 $m_3^{(2)}(4,\ 17) \in \{143,\ldots,146\}$。

证明。关于 $m_3^{(2)}(4,4) = 20$，请参见引理 13；关于 $m_3^{(2)}(4,6) = 38$，请参见引理 14。关于 $m_3^{(2)}(4,11) = 91$，请参见引理 15。对于 $w \in \{7,9,12,13,16\}$，$[55,5,36]_3$, $[81,5,54]_3$, $[108,5,72]_3$, $[121,5,81]_3$,和 $[136,5,90]_3$ Griesmer 码的存在性给出了下界。对于 $w \in \{10,14,15\}$，通过添加任意点可达到该下界。此外，$m_3^{(2)}(4,8) \geq 56$ 可通过添加一个点得到。由于对所有 $d \geq 100$都存在 Griesmer $[n,5,d]_3$码，因此对所有 $w \geq 18$，$m_3^{(2)}(4,w)$ 由 Griesmer上界给出。对于 $w \in \{3,4,5,6,11\}$，Magma 中最佳已知线性码数据库（BKLC）所存储的 $[n,5]_3$ 码的生成矩阵分别给出 $m_3^{(2)}(4,3) \geq 11$、$m_3^{(2)}(4,4) \geq 20$、$m_3^{(2)}(4,5) \geq 29$、$m_3^{(2)}(4,6) \geq 38$以及 $m_3^{(2)}(4,11) \geq 91$。

编码上界给出 $m_3^{(2)}(4,3) \leq 11$, $m_3^{(2)}(4,5) \leq 29$, $m_3^{(2)}(4,8) \leq 56$，以及 $m_3^{(2)}(4,17) \leq 146$。所有其他上界均由 Griesmer上界给出。

□

命题 11。如果 $w \geq 3$，那么 $m_3^{(1)}(4,w)$ 由 *Griesmer*上界给出。此外，我们有 $m_3^{(1)}(4,2) = 20$。

证明。关于 $m_3^{(1)}(4,2) = 20$，例如可参见 $[21,\ 17]$.[1] $[81,5,54]_3$ 和 $[121,5,81]_3$ Griesmer 码分别给出了 $m_3^{(1)}(4,3) \geq 81$ 和 $m_3^{(1)}(4,4) \geq 121$ 的实例。$m_3^{(1)}(4,5) \geq 122$ 可通过添加任意一个点得到。其他下界由以下事实得出：对于所有 $d \geq 100$，都存在 Griesmer $[n,5,d]_3$ 码。除 $w = 2$ 外，其余上界均由 Griesmer上界给出。

□

We have $m_4^{(1)}(4,2) = 41$ $[26,\ 7]^2$ and $m_3^{(1)}(5,2) = 56$ $[16]^3$.

致谢

第二作者获得了保加利亚国家科学研究基金项目 KP-06-N72/6-2023 的资助。
第三作者获得了索非亚大学研究基金合同 80-10-14/21.05.2025 的资助。

参考文献

[1] M. L. Aggarwal、A. Klein 和 L. Storme。PG(n，2) 中最小的二重阻挡集的刻画。*Designs, Codes and Cryptography*，63(2)：149–157，2012。

[2] S. Ball 和 T. Popatia。由线性码构造加性码。*arXiv* 预印本 *2506.03805*，2025。

[1]在射影等价意义下，恰有九个不同的例子。[2]在对称性意义下，PG(4，4) 中存在两个 41帽。[3]在对称性意义下，PG(5，3) 中存在唯一一个 56帽。

[3] R. C. Bose。对称析因设计的数学理论。Sankhy ¯a：印度统计学杂志，第 107–166 页，1947。[4] I. Bouyukliev、S. Bouyuklieva 和 S. Kurz。线性码的计算机分类。IEEE 信息论汇刊，67(12)：7807–7814，2021。[5] I. Bouyukliev 和 D. B. Jaffe。维数至多为七的最优二元线性码。离散数学，226(1-3)：51–70，2001。[6] H. Chen 和 J. T. Coffey。极值自对偶码的格形结构与高阶重量。Designs, Codes and Cryptography，24(1)：15–36，2001。[7] Y. Edel 和 J. Bierbrauer。PG(4, 4) 中弧的最大大小为 41。Des. Codes Cryptogr.，16(2)：151–160，1999。[8] Y. Edel 和 I. Landjev。有限射影空间中的多重弧。De- signs, Codes and Cryptography，56(2)：163–175，2010。[9] G. D. Forney Jr.。格的密度/长度谱与格形复杂度。IEEE 信息论汇刊，40(6)：1753–1772，1994。[10] G. D. Forney Jr.。线性分组码的维数/长度谱与格形复杂度。IEEE 信息论汇刊，40(6)：1741–1752，1994。[11] M. Grassl，线性码最小距离的界，在线表格，https://www.codetables.de/BKLC/index.html[12] J. H. Griesmer，纠错码的一个界。IBM Journal of Res. and Dev.，4(5)：532–542，1960。[13] T. Helleseth、T. Klove、V. Levenshtein 和 Ø. Ytrehus。最小支撑重量的界。IEEE 信息论汇刊，41(2)：432–440，1995。[14] T. Helleseth、T. Kløve 和 J. Mykkeltveit。分组长度为 $n_1\big((q^l-1)n\big)$ 的不可约循环码的重量分布。离散数学，18(2)：179–211，1977。[15] T. Helleseth、T. Klove 和 Ø. Ytrehus。线性码的广义汉明重量。IEEE 信息论汇刊，38(3)：1133–1140，1992。[16] R. Hill。关于 S_5,3 中弧的最大大小。Accademia Nazionale dei Lincei 纪要，54(3)：378–384，1973。[17] R. Hill。关于 S_4,3 中 Pellegrino 的 20 弧。North-Holland Mathematics Stud- ies，78：433–447，1983。

[18] T. Kasami、T. Takata、T. Fujiwara 和 S. Lin. 关于二元线性码格形图状态复杂度的最优比特顺序。*IEEE* 信息论汇刊, 39(1):242–245, 1993.[19] T. Kløve. 具有 GF(q^l) 上生成矩阵（矩阵元素属于 GF(q)）的线性码的重量分布。离散数学, 23(2):159–168, 1978.[20] S. Kurz. 达到 Griesmer 界的加性码。*arXiv preprint2412.14615*, 2024.[21] G. Pellegrino, 《关于帽的最大阶》, $S_{4,3}$. *Mathematiche*(Catania), 25: 149–157, 1971.[22] B. Qvist. 关于有限平面中二次曲线的若干备注。*Ann. Acad. Sci. Finn. A*, 134:1–27, 1952.[23] A. Rousseva 和 I. Landjev. 接近 Griesmer 界的线性码及相关几何结构。*Designs, Codes and Cryptography*, 87(4):841–854, 2019.[24] J. Simonis. [23, 14, 5] Wagner码是唯一的。离散数学, 213(1-3):269–282, 2000.[25] G. Solomon 和 J. J. Stiffler, 《代数删余循环码》。*Infor-mation and Control*, 8(2): 170–179, 1965.[26] G. Tallini. 含有两条椭圆二次曲线作为超平面截面的完全帽。$_{,q}$ *Rend. Mat. e Appl*, 23(5):108–123, 1964.[27] M. A. Tsfasman 和 S. G. Vl˘adut,. 高阶重量的几何方法。*IEEE* 信息论汇刊, 41(6):1564–1588, 2002.[28] C. A. van Tilborg Henk. 具有指定最小距离的二元七维线性码的最小长度。离散数学, 33(2):197–207, 1981.[29] V. K. Wei. 线性码的广义汉明重量。*IEEE Transac-tions on Information Theory*, 37(5):1412–1418, 1992.