arXiv:2601.00253v1 [math.GT] 1 Jan 2026

二分量 L 空间链环的链环手术模

DAREN CHEN、IAN ZEMKE 和 HUGO ZHOU

ABSTRACT. 在我们较早的工作 [CZZ24], 中，我们研究了二分量 L-空间链环的链环手术模。我们计算了这类模的四个幂等元中的两个。本文中，我们使用 Koszul 对偶对这一证明作另一种阐述，并将其推广到计算这类链环的完整链环手术模；但这依赖于一项技术性结果，该结果将在后续论文中证明。

CONTENTS

1. 引言 2 致谢 3 2. 代数背景 4 2.1. Type-D、 A、 DA 和 DD 双模 4 2.2. 扰动引理 5 3. Heegaard Floer 背景 6 3.1. 结与链环 Floer 同调 6 3.2. L-空间纽结与链环 7 3.3. 链环手术复形 8 3.4. 手术代数 $\mathcal{K}$ 10 3.5. Koszul 对偶代数 $\mathcal{K}^!$ 10 4. 阶梯复形 12 5. 候选双模 14 5.1. 每个幂等元处的复形 14 5.2. 长度 1 映射 16 5.3. 长度 2 映射 19 6. 等价的证明 19 6.1. L-空间纽结与阶梯 20 6.2. 每个幂等元处的复形 21 6.3. 长度 1 微分 26 6.4. 长度 2 微分 29 6.5. 命题 6.1 的证明 30 7. 关联完备代数与未完备代数 30 8. 示例 33 8.1. 双模 $^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$(怀特黑德结+) $\mathcal{K}$ 33 8.2. $S^1 \times S^2$ 36 中的怀特黑德结参考文献 38 1

1. Introduction

如果 L是 S^3 中带有整数框架 Λ的链环，则 L的<link surgery complex >链环手术复形（记作 $\mathcal{C}_\Lambda(L)$）是由 Manolescu 和 Ozsv´ath [MO10] 定义的链复形，用于计算$S^3_\Lambda(L)$的 Heegaard Floer 同调。

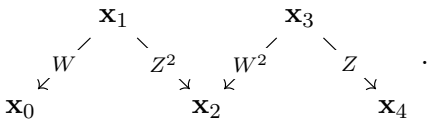
链环 *Floer* 复形 是链环的一个不变量，由 Ozsv´ath 和 Szab´o [OS08] 定义。它是环$\mathbb{F}[W_1, Z_1, \dots, W_n, Z_n]$上的一个自由有限生成链复形 $\mathcal{CFL}(L)$，其中 $n = |L|$。从概念上讲，我们可以将链环手术复形 $\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 视为复形 $\mathcal{CFL}(L)$ 的一种增强，其中纳入了手术公式所需的一些额外代数数据。

在 [Zem21 中，Zem23]，第二作者将链环手术复形重新诠释为带参数化环面边界分量的三维流形（即链环补空间）的一个不变量，并将手术复形重新表述为代数上某些 A_∞-模范畴的形式，这种代数称为手术代数，记作 $\mathcal{K}$。该理论以 Lipshitz、Ozsv´ath 和 Thurston [LOT18]，的边界理论为模型，并具有一个粘合定理，用于描述将两个具有环面边界的三维流形粘合后所得流形的不变量。

对于一个含有 2 个分量的链环 $L \subseteq S^3$，第二作者在 [Zem21] 中定义了一个 A_∞-双模（更准确地说，是一个 DA-双模），记作 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$，它编码了 L 的链环手术复形。这一不变量作为双模（而非仅仅作为链复形）的代数结构，使得可以使用 [Zem21] 中的粘合公式。

本文研究一族称为 *L*-空间链环 的二分量链环的链环手术复形和双模。回顾一下，链环 $L \subseteq S^3$ 是一个 *L*-空间链环，如果对于所有整数手术 $\Lambda \gg 0$，$S^3_\Lambda(L)$ 都是一个 L-空间。（回顾一下，有理同调$\widehat{\ }$3-球面是一个 *L*-空间 ，如果 $\operatorname{rank}^{\mathbb{Z}/2} \mathit{HF}(Y)$ 等于 $H_1(Y)$ 中元素的个数。）

文献中对 L-空间纽结与链环已有深入研究。Ozsv´ath 和 Szab´o 在 [OS05] 中证明，L-空间纽结 K 的结 Floer 复形是一个阶梯复形。例如，(3,4) 环面结的复形由五个元素在 $\mathbb{F}[W, Z]$ 上自由生成，即 $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ 和 $\mathbf{x}_4$, ，其微分如下所示：



(1.1)

在 [CZZ24], 中，我们将这一计算推广到了二分量 L-空间链环。我们证明了，如果 L 是一个二分量 L-空间链环，那么 $\mathcal{CFL}(L)$是形式的，即与其同调的一个自由分解同伦等价。

第二作者与 Borodzik 和 Liu 的工作 [BLZ22]沿着不同方向推广了 Ozsv´ath 和 Szab´o 的结果。其中证明了，如果 L 是 S^3中的一个铅接 L-空间链环，那么 $\mathcal{CFL}(L)$也是形式的。对于具有超过 2 个分量的非铅接 L-空间链环 L，其链环 Floer 复形是否形式，仍是一个开放问题。

借助 Gorsky 和 N´emethi [GN15], Liu [Liu17] 的研究，描述了二分量 L-空间链环的链环手术复形 $\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 的一个约化模型。这一计算足以计算二分量 L-空间链环上的手术所对应的 Heegaard Floer 同调，但不足以理解 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 上的双模结构，而这对于来自 [Zem21] 的粘合公式是必需的。

对于本文中的定理陈述，链环手术双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 还依赖于一种称为弧系的额外数据选择，这一点也很重要。在本引言中，弧系等同于指定 L 的每个分量具有“α-平行弧”或“β-平行弧”。（这一指定的含义对本文并不重要。）

本文研究二分量 L-空间链环在手术代数上的 DA-双模。在 [CZZ24], 中，我们对这些双模进行了部分计算。我们计算了模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 的四个幂等元中的两个。也就是说，在 $\mathcal{K}$ 内有一个子代数 $R_0 := \mathbb{F}[W, Z] \subseteq \mathcal{K}$，我们计算了相应的双模，其输出限制在这个子代数上。本文的主要目标是计算整个复形（除了一些将在后续[Zem]中出现的技术论证之外）。

在陈述定理之前，我们需要以下技术定义：

定义 1.1。 若类型-DA 双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathcal{K}}$ 的结构映射 δ^1_{n+1} 满足以下条件，则称其为 U-等变的

$$\delta^1_{n+1}(a_n, \dots, Ua_i, \dots a_1, \mathbf{x}) = \delta^1_{n+1}(a_n, \dots, a_i, \dots, a_1, \mathbf{x}) \cdot U$$

对所有 $a_n, \dots, a_1 \in \mathcal{K}$ 以及 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 均成立。这里，$\cdot U$ 表示将 $\mathcal{K}$ 因子乘以 U，作用于 δ^1_{n+1} 的输出。

在本文中，我们为二分量 L-空间链环 $L \subseteq S^3$ 定义一个候选双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$。该双模由 L 的 H-函数决定。根据 Gorsky 和 N´emethi 的工作 [GN15], , H-函数由 L 及其子链环的亚历山大多项式决定，因此我们也可以将 $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)$ 视为由 L 及其子链环的亚历山大多项式决定。

定理 1.2. 设 $L \subseteq S^3$ 是一个二分量 L-空间链环。若 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个弧系选择，且双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}$ 有一个结构映射具备 U-等变结构的模型，则存在一个同伦等价

$${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L;\mathscr{A})^{\mathcal{K}} \simeq {}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}.$$

在一篇即将发表的文章 [Zem], 中，第二作者证明了以下结果：

定理 1.3 ([Zem])。 若 $L \subseteq S^3$ 是一个二分量链环，且 $\mathscr{A}$ 是一个弧系，其中 L 的一个分量对应的弧与 ***beta*** 平行，而另一个分量对应的弧与 ***alpha*** 平行，则 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}$ 存在一个 U-等变模型。

特别是，定理 1.3意味着存在一个适用于 L 的弧系，使得定理1.2 可以应用。

注记 1.4。 对于 L-空间链环，存在这样的弧系：其在${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}$ 上的结构映射无法做到 U-等变。例如，在 [Zem21 的第 16,17], 节中，第二作者计算了双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}$ 的一个约化模型，其中 L 是一个霍普夫链环，$\mathscr{A}$ 由两条与阿尔法平行的弧组成，而所得的结构映射不是 U-等变的。事实上，不难看出，这个双模甚至不同伦等价于一个 U-等变双模。

致谢。 第一作者的部分研究经费来自西蒙斯低维拓扑新结构合作基金。第二作者的部分研究经费来自美国国家科学基金会项目 251324 和斯隆奖学金。第三作者的部分研究经费来自 AMS-西蒙斯旅行资助。

2. Algebraic background

2.1. 型-D, A, DA 和 DD 双模。本节回顾 Lipshitz、Osz´ath 和 Thurston 提出的型-D, A 和 DA 双模的代数框架，以及这些概念在曲率 dg-代数上的双模中的自然类比。关于无曲率情形的更多细节，请参阅 [LOT18] [LOT15] ；关于存在曲率时这一框架的更多背景，请参阅 [OS19，第 3] 节。

设$\mathbf{k}$ 是一个特征为2的含幺环。定义在$\mathbf{k}$上的一个弯曲 dg-代数 $(\mathcal{A}, \mu_i)$由一个$(\mathbf{k},\mathbf{k})$-双模 $\mathcal{A}$ 以及配备的$\mathbf{k}$-线性运算构成

$$\mu_2 \colon \mathcal{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \mu_1 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \mu_0 \colon \mathbf{k} \to \mathcal{A}$$

满足以下条件:

(1) $\mathcal{A}$关于 μ_2构成一个结合代数。(2) $\mu_1^2 = 0$，此外 μ_2 关于 μ_1满足莱布尼茨法则: $\mu_1(a\ b) = \mu_1(a) \cdot b + a \cdot \mu_1(b)$。（这里 $a \cdot b$ 表示 $\mu_2(a, b)$）。(3) 元素 $\mu_0 := \mu_0$ (1)是一个圈且为中心元，即

$$\mu_0 \cdot a = a \cdot \mu_0 \quad \text{and} \quad \mu_1(\mu_0) = 0,$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$均成立。

若 $(\mathcal{A}, \mu_i)$ 是一个弯曲的 dg-代数，则其上的右 型D 模 （记作 $\mathcal{X}^{\mathcal{A}}$）由一个右 $\mathbf{k}$-模 $\mathcal{X}$ 及一个 $\mathbf{k}$- 线性映射构成

$$\delta^1 \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{A}$$

它满足

$$(\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \mu_2) \circ (\delta^1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}}) \circ \delta^1 + (\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \mu_1) \circ \delta^1 + \mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \mu_0 = 0.$$

若 $(\mathcal{A}, \mu_i)$ 和 $(\mathcal{B}, \nu_i)$ 分别是定义在 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{j}$ 上的两个弯曲 dg-代数，则 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上的 DA-双模 ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{X}^{\mathcal{B}}$ 由一个 $(\mathbf{k}, \mathbf{j})$-双模 $\mathcal{X}$ 以及一组 $(\mathbf{k},\mathbf{j})$-线性结构映射构成

$$\delta^1_{j+1} \colon \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{A}}_{j} \otimes \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes_{\mathbf{j}} \mathcal{B}$$

它们满足以下相容条件。我们有

$$(\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \mu_2) \circ (\delta^1_1 \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}}) \circ \delta^1_1 + (\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \mu_1) \circ \delta^1_1 + \mathbb{I} \otimes \nu_0 = 0.$$

此外，对于每个 $n \geq 1$ 以及每个 $a_n, \ldots, a_1 \in \mathcal{A}$ 和 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，我们有

$$\begin{aligned} 0 = &\sum (\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \nu_2)(\delta^1_{n-j+1} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})(a_n, \ldots, a_{j+1}, \delta^1_{j+1}(a_j, \ldots, a_1, \mathbf{x})) \\ &+ \sum \delta^1_{n-i+2}(a_n, \ldots, \mu_i(a_{j+i-1}, \ldots, a_j), \ldots, a_1, \mathbf{x}) \\ &+ (\mathbb{I}_{\mathcal{X}} \otimes \nu_1)\left(\delta^1_{n+1}(a_n, \ldots, a_1, \mathbf{x})\right). \end{aligned}$$

最后，我们讨论 DD-双模。若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是定义在 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 上的弯曲 dg-代数，则 DD-双模 ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{X}^{\mathcal{B}}$ 由一个 $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$-双模 $\mathcal{X}$ 以及一个结构映射构成

$$\delta^{1,1} \colon \mathcal{X} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathbf{j}} \mathcal{X} \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{B}.$$

相容条件与将 $\delta^{1,\ 1}$ 视为从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X} \otimes_{\mathbf{j}^{\mathrm{opp}} \otimes \mathbf{k}} (\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B})$ 的映射，并将 $\mathcal{X}$ 视为 $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ 上的类型-D 结构时的情形相同。这里， $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}}$ 表示

底层空间为 $\mathcal{A}$ 的曲弯 dg 代数，但其 $\mu_2^{\mathrm{opp}}(a_1,\ a_2) = \mu_2(a_2,\ a_1)$（且微分和曲率相同）。张量积 $\mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$ 配备曲率 $\mu_0 \otimes 1 + 1 \otimes \mu_0$，以及微分 $\mu_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mu_1$。

2.2. **扰动引理**。本节将证明一个简单的扰动引理，稍后会用到。回顾一下， dg-范畴是指态射集合为阿贝尔群的链复形，且其微分满足关于复合的莱布尼茨法则的范畴。本文只考虑态射集合具有特征2的情形，此时微分满足

$$\partial(g \circ f) = \partial(g) \circ f + g \circ \partial(f).$$

若 $\mathcal{C}$ 是一个 dg-范畴，则 $\mathcal{C}$ 中的一个扭曲复形由一对 $\mathrm{Tw}_\alpha(X) := (X, \alpha)$ 组成，其中 X 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，而 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$是一个满足毛雷尔–卡当关系的态射：

$$\partial(\alpha) + \alpha \circ \alpha = 0.$$

扭曲复形的集合构成一个范畴。若 $\mathrm{Tw}_\alpha(X)$ 和 $\mathrm{Tw}_\beta(Y)$ 是扭曲复形，我们定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Tw}(\mathcal{C})}(\mathrm{Tw}_\alpha(X), \mathrm{Tw}_\beta(Y)) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

其微分为

$$\partial_{\mathrm{Tw}(\mathcal{C})}(f) = \partial_{\mathcal{C}}(f) + \beta \circ f + f \circ \alpha.$$

容易验证，$\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ 是一个 dg-范畴。（参见 [Sei08，第1节。5]）.

我们感兴趣的范畴（链复形、type-D 模、 A_∞-模等）在扭曲运算下都是封闭的，也就是说，存在一个从 $\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ 到 $\mathcal{C}$ 的典范函子。例如，在链复形范畴中，此函子将 $\mathrm{Tw}_\alpha(X, d)$ 映射到 $(X, d + \alpha)$。类似地，对于由 dg-代数上的 type-D 和 type-DA 双模构成的 dg-范畴，扭曲复形 $\mathrm{Tw}_\alpha((X, \delta^1_{j+1}))$ 被映射到 $(X, \alpha^1_{j+1} + \delta^1_{j+1})$。因此，我们通常将 $\mathrm{Tw}_\alpha(X) \in \mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ 与其在 $\mathcal{C}$ 中的像混为一谈。

引理 2.1. 设 X 是某个 dg 范畴中的一个对象，且 $h \in \mathrm{End}(X)$ 是一个自同态，并且 $1 + h$ 可逆。那么 $\alpha = \partial(h)(1 + h)^{-1}$ 是一个毛雷-卡当元素，并且 X 同构于 $\mathrm{Tw}_\alpha(X)$。

证明。 为了说明 α 是一个 Maurer–Cartan 元，我们注意到

$$\partial(\alpha) + \alpha^2 = \partial(h)\partial((1 + h)^{-1}) + \partial(h)(1 + h)^{-1}\partial(h)(1 + h)^{-1}.$$

当且仅当以下表达式为零时，

$$\partial(h)\partial((1 + h)^{-1})(1 + h) + \partial(h)(1 + h)^{-1}\partial(h)$$

该表达式为零。我们注意到 $\partial((1 + h)^{-1})(1 + h) = (1 + h)^{-1}\partial(1 + h) = (1 + h)^{-1}\partial(h)$，因此上面的等式为零。

现在，我们将一个从 X 到 $\mathrm{Tw}_\alpha(X)$ 的态射 f 定义为 $1 + h$。根据定义， f 的扭曲态射微分等于

$$\partial(f) + \alpha \circ f,$$

（其中 $\partial(f)$ 是将 f 视为 X 的自同态时的微分）。根据我们对 α 的选择，可以看出上式等于

$$\partial(h) + \partial(h)(1 + h)^{-1}(1 + h) = 0,$$

因此， f 是扭曲复形态射上的微分所对应的一个圈。同样，我们可以定义一个态射 $g = (1+h)^{-1}$，它从 $\mathrm{Tw}_\alpha(X)$ 映射到 X，并且很容易验证 g 也是一个圈。我们注意到 f 和 g 互为逆，因此命题得证。□

注2.2。我们对上述引理的典型用法如下。考虑一个带有微分 $\delta^{1,1}$ 的 aDD-双模 ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{X}^{\mathcal{B}}$。我们希望通过添加一项 $\partial(h)$ 来扰动结构映射$_{\delta^{1,1}}$，从而简化微分中的某些项。一般来说，这是不可能的，因为 $\partial(h)$ 通常不是 Maurer–Cartan 元。不过， $\partial(h)(1+h)^{-1}$ 是 Maurer–Cartan 元（如前一个引理所示）。此外，在我们感兴趣的情形中，无穷和 $(1+h)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$ 是有意义的，而且我们认为 $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \partial(h) h^n$ 与 $\partial(h)$ 在一阶近似下相同。

3. Heegaard Floer background

3.1. 结与链环 Floer 同调。 我们回顾结与链环 Floer 同调的一些基础知识。结 Floer 同调是一个纽结不变量，由 Ozsv´ath 和 Szab´o [OS04] 以及 Rasmussen [Ras03]分别独立提出。链环 Floer 同调是一个链环不变量，由 Ozsv´ath 和 Szab´o 提出。

对于一个纽结 $K \subseteq Y$，该不变量是一个在 $\mathbb{F}[W,Z]$ 上的自由有限生成链复形 $\mathcal{CFK}(Y,K)$，其中 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2$。我们主要关注 $Y = S^3$ 的情形，此时我们用 $\mathcal{CFK}(K)$ 表示该不变量。我们关注三个分次，记为 $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$,$\mathrm{gr}_{\mathbf{z}}$ 和 A，它们满足如下关系式

$$A = \frac{1}{2}(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}} - \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}).$$

代数 $\mathbb{F}[W,Z]$ 按以下方式分次

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A)(W) = (-2,0,-1), \quad \text{and} \quad (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A)(Z) = (0,-2,1).$$

写成如下形式会比较方便

$$U := WZ.$$

若 $L \subseteq S^3$ 是一个链环，不变量 $\mathcal{CFL}(L)$ 的形式为环 $\mathbb{F}[W_1,\dots,W_n,Z_1,\dots,Z_n]$ 上自由且有限生成的链复形。这个不变量具有更复杂的一组分次。我们记作

$$\mathbb{H}(L) = \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{Z} + \frac{\mathrm{lk}(K_i, L \setminus K_i)}{2} \right).$$

存在一个亚历山大分次 $A = (A_1, \dots, A_n)$，其取值于 $\mathbb{H}(L)$。这些变量的分次为

$$A_i(Z_j) = -A_i(W_j) = \delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克 δ。

与纽结的情形类似，记作 $U_i = W_i Z_i$ 会更方便。所有 U_i 在同调上诱导的作用均链同伦。例见 [BLZ24，公式 2.8]。

与之前一样，存在马斯洛夫分次 $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$ 和 $\mathrm{gr}_{\mathbf{z}}$，不过实际上还有一组更精细的马斯洛夫分次。若 $\mathfrak{o}$ 是 L上的任意一种定向，则 $\mathcal{CFL}(L)$上存在一个马斯洛夫分次 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}}$。构造 $\mathcal{CFL}(L)$需要选取一个基准

定向，我们将其记作 $\mathfrak{o}_0$。马斯洛夫分次 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}_0}$ 与 gr_w一致；更一般地，$\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}}$ 满足

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}}(W_i) = \begin{cases} -2 & \text{if } \mathfrak{o}|_{K_i} = \mathfrak{o}_0|_{K_i}, \\ 0 & \text{if } \mathfrak{o}|_{K_i} = -\mathfrak{o}_0|_{K_i} \end{cases}.$$

同样

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}}(Z_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathfrak{o}|_{K_i} = \mathfrak{o}_0|_{K_i}, \\ -2 & \text{if } \mathfrak{o}|_{K_i} = -\mathfrak{o}_0|_{K_i} \end{cases}.$$

我们有如下关系：

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{o}_0} - \mathrm{gr}_{\mathfrak{o}} = \left(\sum_{\mathfrak{o}|_{K_i} = -\mathfrak{o}_0|_{K_i}} 2A_i \right) - \mathrm{lk}(L_{\mathfrak{o}}, L \setminus L_{\mathfrak{o}}),$$

其中， $L_{\mathfrak{o}}$ 是 L的分量集合，而 $\mathfrak{o}$ 与 $\mathfrak{o}_0$不同。在计算上述链接数时，我们按照 $\mathfrak{o}_0$中的定向来定向 L 。参见 [Zem21，引理 6.4]。

3.2. L-空间纽结与链环。 一类重要的纽结与链环是L-空间链环。若链环 L 满足对所有整数框架 $\Lambda \gg 0$， $S^3_\Lambda(L)$ 都是 Heegaard Floer L-空间，则称其为L-空间链环 S^3_Λ。（回忆一下，若有理同调三维球面是L-空间 ，则$HF^-(Y)$ 同构于 $\bigoplus_{|H_1(Y)|} \mathbb{F}[U]$，其中 $|H_1(Y)|$是 $H_1(Y)$中的元素个数。）利用 Manolescu 和 Ozsv´ath 的大手术公式 [MO10，定理 12.1], ， L 是 L-空间链环的一个等价条件是，模$\mathcal{HFL}(L)$ 是一个自由的 $\mathbb{F}[U]$ 模，其中 U 由任意一个 $U_i = W_i Z_i$ 作用（所有 U_i 在同调上的作用相同）。等价地， L是 L-空间链环当且仅当

$$\mathcal{HFL}(L) \cong \bigoplus_{\mathbf{s} \in \mathbb{H}(L)} \mathbb{F}[U].$$

当 K 是一个 L-空间纽结时，结 Floer 同调群 $\mathcal{HFL}(L)$ 在每个 $(\mathrm{gr}_w, \mathrm{gr}_z)$-分次中的秩为 0 或 1。此外，不难看出，对于任意非零的齐次分次元素 $\mathbf{x} \in \mathcal{HFL}(L)$，都有 $\mathrm{gr}_w(\mathbf{x}) \leq 0$ 且 $\mathrm{gr}_z(\mathbf{x}) \leq 0$ 。因此，$\mathcal{HFL}(L)$ 可以自然地嵌入 $\mathbb{F}[W, Z]$ 中，作为一个单项式理想（由单项式张成的理想）。图 3.1 展示了 (3, 4)-环面结的链环 Floer 同调，$\mathcal{HFL}(T_{3,4})$。

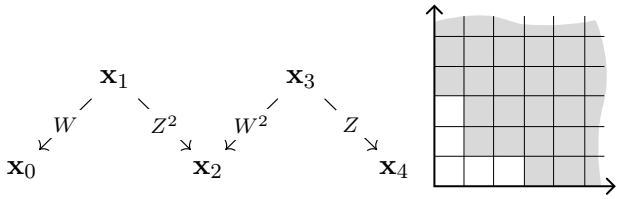


FIGURE 3.1. 链环 Floer 复形 $\mathcal{CFK}(T_{3,4})$（左）及其同调$\mathcal{HFK}(T_{3,4})$（右）。右侧每个阴影方格都表示一个在 $\mathbb{F}$ 上的生成元。乘以 W 会向右平移，乘以 Z 则会向上平移。我们可以将整个右上象限视为 $\mathbb{F}[W, Z]$。

3.3. 链环手术复形。 对于一个带有整数框架 Λ 的链环 $L \subseteq S^3$，Manolescu 和 Ozsv´ath [MO10] 描述了一个链复形 $\mathcal{C}_\Lambda(L)$。该链复形是 $\mathbb{F}[\![U_1, \dots, U_n]\!]$上的模，其中 $n = |L|$。$\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 的同调与相对于 (U) 完备化后的 Heegaard Floer 同调同构：

$$H_*(\mathcal{C}_\Lambda(L)) \cong \boldsymbol{HF}^-(S^3_\Lambda(L)) := HF^-(S^3_\Lambda) \otimes_{\mathbb{F}[U]} \mathbb{F}[\![U]\!].$$

第二作者 [Zem23]将这一理论扩展到了三维流形中的任意 Morse 框架链环。

现在我们概述链环手术复形的一些性质，重点讨论 S^3 中的链环。有关更多细节，请参阅 [MO10] 或 [Zem23] 。链环手术复形$\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 是一个链复形超立方体（参见 [MO10，第 5] 节，了解这一代数形式体系的背景）。更具体地说，$\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 的底层群分解为直和

$$\mathcal{C}_\Lambda(L) \cong \bigoplus_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \mathcal{C}_\varepsilon.$$

此外，D 上的微分 $\mathcal{C}_\Lambda(L)$ 分解为和

$$D = \sum_{\varepsilon \le \varepsilon'} D_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

其中 $D_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$ 映射 $\mathcal{C}_\varepsilon$ 到$\mathcal{C}_{\varepsilon'}$。

复形 $\mathcal{C}_{\vec{0}}$ 同构于 $\mathcal{CFL}(L)$ 的一个完备化。更一般地，存在一个同伦等价

$$\mathcal{C}_\varepsilon \simeq \mathcal{CFL}(L_\varepsilon, \mathbf{p}_\varepsilon) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[T_{i_1}, T_{i_1}^{-1}, \dots, T_{i_k}, T_{i_k}^{-1}]. \tag{3.1}$$

上述中，$L_\varepsilon \subseteq L$ 是由分量 $K_i \subseteq L$ 构成的子链环，其中 $\varepsilon_i = 0$，且 $\{i_1, \dots, t_k\} = \varepsilon^{-1}(1)$。此外，$\mathbf{p}_\varepsilon$ 是一组额外的基点，与 L_ε不相交。

微分 $D_{\varepsilon,\varepsilon'}$ 进一步分解为若干项之和。记

$$M_{\varepsilon,\varepsilon'} := L_\varepsilon \setminus L_{\varepsilon'}.$$

$M_{\varepsilon,\varepsilon'}$ 的分量与 ε' 中从 ε增加的指标集合一一对应。微分按$M_{\varepsilon,\varepsilon'}$的定向集合分解，记为 $\mathfrak{o}(M_{\varepsilon,\varepsilon'})$。若 $\mathfrak{o}$ 是一个定向，则记$M^{\mathfrak{o}}_{\varepsilon,\varepsilon'}$ 为$M_{\varepsilon,\varepsilon'}$赋予该定向后的对象。按照标准约定，对于赋予了某个定向的L的子链环，记作 $M_{\varepsilon,\varepsilon'}$。映射 $D_{\varepsilon,\varepsilon'}$ 分解为若干项之和

$$D_{\varepsilon,\varepsilon'} = \sum_{\mathfrak{o}(M_{\varepsilon,\varepsilon'})} \Phi^{M^{\mathfrak{o}}_{\varepsilon,\varepsilon'}}_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

其中求和遍历 M 上所有定向的集合。当 $\vec{M}$ 是 L 的定向子链环时，我们通常省略下标，直接写作 $\Phi^{\vec{M}}$。

按照标准约定，我们确定 L 的一个基准定向，并称其他定向是相对于此基准定向反转某些分量后得到的。

给定 L上的一个基准定向，我们得到一个 $\mathbb{H}(L)$ 值的亚历山大分次，定义在$\mathcal{CFL}(L)$ 上，进而定义在 $\mathcal{C}_{\vec{0}}$上。若 ε 是任意指标，则方程（3.1）给出一个$\mathbb{H}(L_\varepsilon)$ 值的亚历山大分次，定义在 $\mathcal{C}_\varepsilon$上。我们将其扩展为取值于 $\mathbb{H}(L_\varepsilon) \times \mathbb{Z}^{n-|L_\varepsilon|}$的亚历山大分次，规定 $A_j(T_i^{\pm 1})$ 等于 $\pm\delta_{ij}$(克罗内克 δ)。注意

这些 $\mathbb{Z}^{n-|L_\varepsilon|}$ 分量仅在整体平移意义下才是良定义的，不过，分次的$\mathbb{H}(L_\varepsilon)$ 分量是唯一确定的。稍微滥用一下记号，我们也用 $A=(A_1,\dots,A_n)$ 表示亚历山大分次的这一扩展。类似的讨论见[Zem23，第7节。2]

亚历山大分次还有另一种自然的规范化方式，记作A^σ ，称为 σ规范化的亚历山大分次。该分次取值于$\mathbb{H}(L)$。它由以下性质确定： A^σ 在 $\mathcal{C}_{\vec{0}}\cong \mathcal{CFL}(L)$上与 $A^{\vec{0}}$ 一致，并且当 $\vec{M}\subseteq L$ 仅含正向定向的分量时，映射 $\Phi^{\vec{M}}$ 保持 A^σ 。

若 M 是 L的一个定向子链环，则

$$A_i^\sigma(\Phi^{\vec{M}})=\frac{\mathrm{lk}(K_i,M)-\mathrm{lk}(K_i,\vec{M})}{2}.$$

右侧的量可以重新解释为对 $-\mathrm{lk}(K_i,\ \vec{J})$求和，其中$\vec{}$ $\vec{}$遍历 M 的分量 J；这些分量相对于 L上的基准定向均为负向定向。（参见 [MO10，第 5]页）。

引理 3.1。 上述分次 A的绝对提升有一种选取方式，在 $\mathcal{C}_\varepsilon$ 上由下式给出：

$$A_i=A_i^\sigma+\begin{cases}\mathrm{lk}(K_i,L\setminus L_\varepsilon)/2 & if\ \varepsilon_i=0\\ \mathrm{lk}(K_i,L\setminus K_i)/2 & if\ \varepsilon_i=1.\end{cases}$$

证明。 有两个非平凡的论断。第一个论断是，若 $\varepsilon_i=0$，则 A_i 与 $\mathcal{CFL}(L_\varepsilon)$ 中的绝对亚历山大分次一致。第二个论断是，若 $\varepsilon_i=1$，则 A_i取值于 $\mathbb{Z}$。

第二个论断，即若 $\varepsilon_i=1$ ，则 A_i 取值于 $\mathbb{Z}$ ，这是显然的，因为根据定义，A_i^σ 取值于 $\mathrm{lk}(K_i,\ L\setminus K_i)/2+\mathbb{Z}$ 。因此我们将重点放在第一个论断上。

若 $\varepsilon=\vec{0}$，第一个论断显然成立。我们对 ε 和 i使用归纳法证明该论断。假设对于某个 ε 以及满足 $\varepsilon_i=0$ 和 $\varepsilon'=\varepsilon+e_j$ 的指标 i，该论断成立，其中 $j\neq i$。陈述中的移位变化为

$$\frac{\mathrm{lk}(K_i,L\setminus(L_\varepsilon\cup K_j))}{2}-\frac{\mathrm{lk}(K_i,L\setminus L_\varepsilon)}{2}=-\frac{\mathrm{lk}(K_i,K_j)}{2}.$$

另一方面，这恰好是绝对亚历山大分次 A_i 在由 [Zem21, 引理 6.4 (4)] 给出的映射 Φ^{+K_j} 下的移位。（这里我们隐含地使用了这样一个事实：Φ^{K_j} 可以描述为先取在 Z_j 处的局部化映射，再复合一个令 $U_j=W_jZ_j$ 和 $Z_j=T_j$ 成立的保分次同伦等价。）证明至此完成。□

利用上述移位，很容易验证，如果 $L_{\varepsilon'}=L_\varepsilon\sqcup M$，那么

$$A_i(\Phi^{\vec{M}}_{\varepsilon,\varepsilon'})=\frac{1}{2}\cdot\begin{cases}-\mathrm{lk}(K_i,\vec{M}) & \text{if } \varepsilon_i=\varepsilon_i'=0\\ -\mathrm{lk}(K_i,L_\varepsilon\setminus K_i)+\mathrm{lk}(K_i,M)-\mathrm{lk}(K_i,\vec{M}) & \text{if } \varepsilon_i=0,\varepsilon_i'=1\\ \mathrm{lk}(K_i,M)-\mathrm{lk}(K_i,\vec{M}) & \text{if } \varepsilon_i=\varepsilon_i'=1.\end{cases}\quad(3.2)$$

-注记 3.2. </style>相对于 A^σ 的 Φ^M 分次移位公式，比相对于 A的公式更简单。不过，在 $\mathcal{C}_\varepsilon$上写出 A 分次更为简单，因为它是由 $\mathcal{CFL}$（L_ε）上的绝对亚历山大分次诱导的。

3.4. **手术代数** $\mathcal{K}$。现在我们回顾 Zem21、Zem23] 中的手术代数。我们用 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \oplus \mathbf{I}_1$ 表示由两个幂等元构成的幂等元环，其中每个 $\mathbf{I}_\varepsilon \cong \mathbb{F} = \mathbb{Z}/2$。手术代数 $\mathcal{K}$ 定义如下。我们令

$$\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_0 = \mathbb{F}[W, Z], \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_1 = \mathbb{F}[U, T, T^{-1}], \quad \mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_1 = 0.$$

我们规定

$$\mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_0 = \mathbb{F}[U, T, T^{-1}] \otimes_{\mathbb{F}} \langle \sigma, \tau \rangle.$$

生成元 σ 和 τ 满足

$$\sigma \cdot W^i Z^j = U^i T^{j-i} \cdot \sigma \quad \text{and} \quad \tau \cdot W^i Z^j = U^j T^{j-i} \cdot \tau.$$

有时，描述两个代数态射也会有所帮助

$$\phi^\sigma, \phi^\tau \colon \mathbb{F}[W, Z] \to \mathbb{F}[U, T, T^{-1}] \tag{3.3}$$

它们由以下公式给出

$$\phi^\sigma(W^i Z^j) = U^i T^{j-i} \quad \text{and} \quad \phi^\tau(W^i Z^j) = U^j T^{j-i}.$$

我们可以用这些映射将 ϕ^σ 和 ϕ^τ 的定义重述为

$$\sigma \cdot a = \phi^\sigma(a) \cdot \sigma \quad \text{and} \quad \tau \cdot a = \phi^\tau(a) \cdot \tau.$$

写成如下形式很有帮助

$$\mathcal{R}_0 := \mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_0 \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_1 := \mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{I}_1.$$

3.5. **Koszul 对偶代数** $\mathcal{K}^!$. 现在我们回顾第二作者在 [Zem25] 中描述的 Koszul 对偶代数 $\mathcal{K}^!$。与 $\mathcal{K}$ 类似，这个 $\mathcal{K}^!$ 是定义在幂等元环 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \oplus \mathbf{I}_1$ 上的代数。与 $\mathcal{K}$ 相反， $\mathcal{K}^!$ 是一个带曲率的 dg-代数。

我们定义

$$\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_0 = \frac{\mathbb{F}\langle w, z, \theta \rangle}{w^2 = z^2 = [w, \theta] = [z, \theta] = \theta^2 = 0}.$$

在上述表达式中， $\mathbb{F}\langle w, z, \theta \rangle$ 表示由符号 w、 z 和 θ 生成的自由非交换代数。

我们定义 $\mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_0 = 0$。
接下来，我们设定

$$\mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbb{F}\langle \varphi_+, \varphi_-, \theta \rangle}{\varphi_+^2 = \varphi_-^2 = [\theta, \varphi_\pm] = \theta^2 = 0}.$$

我们将$\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_1$定义为由两个代数元素 s 和 t在$(\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_1)$上生成的双模。我们定义两个单项式的乘积，要么为零，要么是它们的拼接，并满足以下关系：

$$ws = s\varphi_- = 0, \quad zt = t\varphi_+ = 0, \quad s\theta = \theta s, \quad zs = s\varphi_+, \quad t\theta = \theta t, \quad \text{and} \quad wt = t\varphi_-.$$

作为一个向量空间，我们有

$$\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(s, s\theta, zs, zs\theta, t, t\theta, wt, wt\theta).$$

此外，代数 $\mathcal{K}^!$ 还有一个微分 μ_1，它仅在幂等元 (0，0) 上非零，其表达式为

$$\mu_1(\theta) = wz + zw,$$

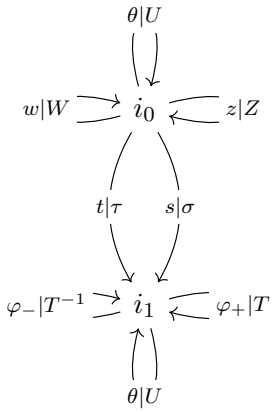
通过莱布尼茨法则扩展到其他单项式。最后， $\mathcal{K}^!$ 有一个曲率项，其支撑在幂等元 (1，1) 上，定义为

$$\mu_0 = \varphi_-\varphi_+ + \varphi_+\varphi_-.$$

写作

$$\mathcal{R}_0^! := \mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_0 \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_1^! := \mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{K}^! \cdot \mathbf{I}_1.$$

在 [Zem25]，中，第二作者构造了秩 1 对偶双模 ${}^{\mathcal{K}^!}[\mathcal{C}o]^{\mathcal{K}}$ 和${}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!}$，它们给出了适当的范畴之间的范畴等价，这些范畴分别是 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^!$ 上的模范畴。双模 ${}^{\mathcal{K}^!}[\mathcal{C}o]^{\mathcal{K}}$ 由下图给出：



双模 ${}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!}$ 更为复杂，更多细节可见 [Zem25]。

我们将 $\mathcal{K}^!$ 中单项式的张量权重（或简称权重）定义为字母的数量。例如

$$\mathrm{wt}(wzw) = 3 \quad \mathrm{wt}(s) = 1 \quad \mathrm{wt}(wzwz\theta) = 5.$$

在权重过滤下完成 $\mathcal{K}^!$ 很方便。就我们的目的而言，仅在此权重过滤下完成 $\mathcal{R}_0^!$ 实际上更方便。我们将$\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$ 记作以这种方式完成的代数，其中 $\mathcal{R}_0^!$ 。我们记

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! := \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}^! \cdot \mathbf{I}_0.$$

注 3.3. 给定一个 type-A 模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}$，可以与余迹双模${}^{\mathcal{K}^!}[\mathcal{C}o]^{\mathcal{K}}$ 张量，得到一个 type-D 模 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}$。读者应将结构映射 δ^1 on ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}$ 理解为编码了以下信息。 w 加权分量 ofδ^1 编码映射 $m_2(W, –)$。 θ-加权分量编码 $m_2(U, –)$。更一般地，若 $a \in \mathcal{K}^!$ 是 $\mathcal{K}^!$ 中的一个单项式，且其张量权重为 n，则 a 分量 ofδ^1 等于 $m_{n+1}(a_1^!, \ldots, a_n^!, –)$之和，求和范围为所有满足 $a_n \cdots a_1 = a$的序列 $a_n, \ldots, a_1 \in \{w, z, \theta, t, \tau, \varphi_-, \varphi_+\}$。这里， $a_i^! \in \mathcal{R}_0$ 表示 $a_i \in \mathcal{R}_0^!$的对偶元素。（例如，如果 $a_i = w$ ，那么 $a_i^! = W$，依此类推。）我们将 type-D结构 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}$ 视为仅编码了 A_∞-模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}$的一小部分作用，而整个模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}$ 都可以由此恢复到同伦等价的意义下。

如引言中所述，以下定义对我们的目的很重要：

定义 3.4。

（1）若 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathcal{K}}$ 是一个 DA-双模，则称 $\mathcal{X}$ 是 U-等变的，如果结构映射满足

$$\delta^1_{n+1}(a_n,\dots,Ua_i,\dots,a_1,\mathbf{x}) = \delta^1_{n+1}(a_n,\dots,a_1,\mathbf{x})\cdot U,$$

其中，$\cdot U$ 表示将 $\delta_{n+1}(a_n、\dots\dots、a_1、\mathbf{x})$ 的 $\mathcal{K}$ 因子乘以 U。DA-双模之间的态射称为 U-等变的，如果满足类似条件。

（2）若 ${}^{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathcal{K}}$ 是一个 DD-双模，则称 $\mathcal{X}$ 是 U-等变的，如果结构映射 $\delta^{1、1}$ 具有形如 $\theta\otimes\mathrm{id}\otimes U$ 的分量（即每个生成元上都有一个由 $\theta|U$ 加权的自身箭头），并且不存在任何由 θ 的倍数加权的其他分量。如果 DD-双模上的态射在 $(\mathcal{K}^!、\mathcal{K})$ 上是 U-等变的，则不存在由 θ 的倍数加权的分量。

显然，如果 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathcal{K}}$ 具有 U-等变结构映射且严格含幺，那么 ${}^{\mathcal{K}^!}[\mathcal{T}r]^{\mathcal{K}}\boxtimes{}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathcal{K}}$ 也具有 U-等变结构映射。同样，如果 f^1_*是 DA-双模之间严格含幺且 U-等变的态射，那么 $\mathbb{I}_{[\mathcal{C}_0]}\boxtimes f^1_*$不含 θ-加权项，因此在上述意义下是 U-等变的。

不那么显然的是，如果 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{Y}^{\mathcal{K}}$ 具有 U-等变结构映射（按上述意义），那么 ${}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!}\boxtimes{}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{Y}^{\mathcal{K}}$是严格含幺的，且具有 U-等变结构映射。参见 [Zem25，推论 5.8]。

4. Staircase complexes

来自 [CZZ24]的证明中，一个重要组成部分是对阶梯复形以及阶梯复形之间态射的分析。

定义 4.1。阶梯复形 $\mathcal{C}$ 是一个以 $\mathbb{F}[W,Z]$ 为系数、生成元为 $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{2n}$的自由链复形，使得 $\partial(\mathbf{x}_{2i}) = 0$ 且

$$\partial(\mathbf{x}_{2i+1}) = \mathbf{x}_{2i}W^{\alpha_i} + \mathbf{x}_{2i+2}Z^{\beta_i},$$

对于某个 $\alpha_i,\beta_i > 0$。

若 $\mathcal{C} = (\partial\colon \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_0)$ 是一个阶梯复形，我们定义 $\mathcal{C}$ 上的代数分次在 $\mathcal{C}_1$ 上为 1，在 $\mathcal{C}_0$ 上为 0。

关于阶梯复形的另一种看法是，它们是其同调的自由分解。也就是说，若 $\mathcal{C} = (\partial\colon \mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_0)$ 是一个阶梯复形，则以下序列是正合的：

$$0\longrightarrow\mathcal{C}_0\xrightarrow{\partial}\mathcal{C}_1\twoheadrightarrow H_*(\mathcal{C})\longrightarrow 0.$$

引理 4.2。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个阶梯复形，且 $F\colon H_*(\mathcal{A})\to H_*(\mathcal{B})$ 是一个齐次分次的 $\mathbb{F}[W,Z]$-等变映射。那么存在一个链映射 $f\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，它在同调上诱导出 F，并保持代数分次。此外，映射 f 在链同伦意义下是唯一的。特别地，如果 $f、g\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是两个保持代数分次的齐次分次映射，且它们在同调上诱导出相同的映射，那么 f 和 g 链同伦。

由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是其同调的自由分解，上述结果由基本的同调代数可得。（参见 [Wei94，定理 2.2。6]）。

我们将用到一些关于阶梯复形的不那么显然的结果：

引理 4.3 ([CZZ24, 引理 5.19])。 若 $\mathcal{S}$ 是一个阶梯复形，且 $f\colon \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 是一个使$(\mathrm{gr_w},\mathrm{gr_z})$分次平移$(-1,-1)$的链映射，则 f 是零伦的。

注 4.4。 若记 $\mathcal{S}=\mathrm{Cone}(\partial\colon \mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_0)$，则 $\mathcal{S}$ 的一个自同态 ϕ，其 $(\mathrm{gr_w},\mathrm{gr_z})(\phi)$ 分次为 $=(-1,-1)$，可以写成和 $\phi=\phi_{10}+\phi_{01}$，其中 ϕ_{ij} 将 $\mathcal{S}_j$ 映射到$\mathcal{S}_i$。若 ϕ 是一个链映射，则容易看出 $\phi_{10}=0$，因为 ∂ 作为从 $\mathcal{S}_1$ 到 $\mathcal{S}_0$的映射是单射的。分量 ϕ_{01} 自然确定 Ext 群$^1_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{S},\mathcal{S})$中的一个元素。上述引理可以解释为，这个 Ext 群中 $(\mathrm{gr_w},\mathrm{gr_z})$-分次为 $(-1,-1)$的子空间消失。

引理 4.3源自一个稍微更一般的结果，我们将不时发现该结果很有用：

引理 4.5。 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是具有绝对 $(\mathrm{gr_w},\ \mathrm{gr_z})$ 分次的阶梯复形，并且存在一个保持分次的链映射 $I\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，其在同调上非零。若 $\phi\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个分次为 $(-1,-1)$ 的链映射，则 ϕ 是零伦的。

证明。 证明与 [CZZ24，引理 5.19] 基本相同。将 $\mathcal{A}$ 写为 $\mathrm{Cone}(\partial_{\mathcal{A}}\colon\ \mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_0)$，将 $\mathcal{B}$ 写为 $\mathrm{Cone}(\partial_{\mathcal{B}}\colon\ \mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_0)$。映射 ϕ 可以写成 $\phi=\phi_{01}+\phi_{10}$，其中ϕ_{ij} 将 $\mathcal{A}_j$ 映射到 $\mathcal{B}_i$。由于 $\partial_{\mathcal{A}}$ 和 $\partial_{\mathcal{B}}$ 是单射，很容易看出 ϕ_{10} 为零，因此只需证明 $\phi=\phi_{01}$ 是零伦的。

设 $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{2n}$ 是 $\mathcal{A}_0$ 的生成元，且 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_{2n-1}$ 是 $\mathcal{A}_1$ 的生成元。设 i 是最小的指标，使得 ϕ 在 $\mathbf{x}_i$ 上非零。证明使用关于 i 的归纳法。

我们考虑两种情况：$\phi(\mathbf{x}_i)$ 在同调中为零，以及 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 在同调中非零。在第一种情况下，如果对于某个 $\mathbf{y}\in\mathcal{B}_1$，有 $\phi(\mathbf{x}_i)=\partial(\mathbf{y})$，那么我们定义一个将 $\mathbf{x}_i$ 映到 $\mathbf{y}$ 的同伦 j。映射 $\phi+\partial(j)$ 在 $\mathbf{x}0,\ldots,\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}$ 上为零（即，我们将 ϕ 非零的最小指标增加了 2）。现在考虑 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 在同调中非零的情况。写作 $\partial(\mathbf{x}_i)=\mathbf{x}_{i-1}W^n+\mathbf{x}_{i+1}Z^m$。现在 $\mathrm{gr_w}(\mathbf{x}_{i+1}Z^m)$ 与 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 的分次相同。我们定义一个映射 $j\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，它将 $\mathbf{x}_{i+1}$ 映到 $I(\mathbf{x}_{i+1})Z^m$。现在 $\phi+\partial(j)$ 在 $\mathbf{x}0,\ldots,\mathbf{x}_{i-1}$ 上为零，并将 $\mathbf{x}_i$ 映到一个边界。根据前面的论证，我们可以通过链同伦修改 ϕ，使其在 $\mathbf{x}0,\ldots,\mathbf{x}_{i+1}$ 上为零。由归纳法，证明得证。□

另一个有用的引理如下：

引理 4.6。 假设 $\mathcal{S}$ 是一个阶梯复形，且 $f\colon\ \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 是一个保分次链同伦等价。那么 $f=\mathrm{id}$。

证明。 记 $\mathcal{S}=(\partial\colon\ \mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_0)$。由于 f 保持马斯洛夫双分次，因此也必须保持代数分次。记 $f_i=f|_{\mathcal{S}_i}$。由于 $H_*(\mathcal{S})$ 在每个 $(\mathrm{gr_w},\ \mathrm{gr_z})$-双分次中的秩为 1 或 0，映射 f 必须在同调上诱导恒等映射。我们观察到，对于代数分次为 0 的每个生成元 $\mathbf{x}_{2i}$，$\mathcal{S}$ 中在相同 $(\mathrm{gr_w},\ \mathrm{gr_z})$-分次下没有其他非零元素。因此 $f(\mathbf{x}_{2i})=\mathbf{x}_{2i}$。由于 f 是链映射，我们知道

$$\partial\circ f_1=f_0\circ\partial.$$

由于 $f_0 = \mathrm{id}$，我们得出

$$\partial \circ (f_1 + \mathrm{id}) = 0.$$

由于 ∂ 作为从 $\mathcal{S}_1$ 到 $\mathcal{S}_0$ 的映射是单射的，我们得到 $f_1 = \mathrm{id}$。 □

我们将使用的另一个结果涉及正次数的阶梯的自同态：

引理 4.7。设 $\mathcal{S}$ 是一个阶梯复形，且 $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是一个具有 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}、\mathrm{gr}_{\mathbf{z}})$-分次 $(n、n)$ 的映射。如果 $n \geq 1$，则 $\phi = 0$。

证明。将 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1、\ldots\ldots、\mathbf{x}_{2n}$ 记为 $\mathcal{S}$ 的生成元，并按以下顺序排列：$\partial(\mathbf{x}_{2i+1}) = \mathbf{x}_{2i} W^{\alpha_i} + \mathbf{x}_{2i+2} Z^{\beta_i}$。我们注意到

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_{i+1}) < \mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) \quad \text{and} \quad \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}_{i+1}) > \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}_i)$$

对所有 i 均成立。假设 $\phi(\mathbf{x}_i)$ 包含 $\mathbf{x}_j W^a Z^b$ 的一个项。假设 $j \geq i$。由于 ϕ 具有 $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$-分次 n，我们有 $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) - 2a = \mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) + n$，或者等价地

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) - \mathrm{gr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) = n + 2a.$$

由于 $j \geq i$，左边非正，而右边为正，因此这是不可能的。若 $j \leq i$，则对 $\mathrm{gr}_{\mathbf{z}}$ 用同样的论证，将其替换为 $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$。证明至此完成。□

5. The candidate bimodule

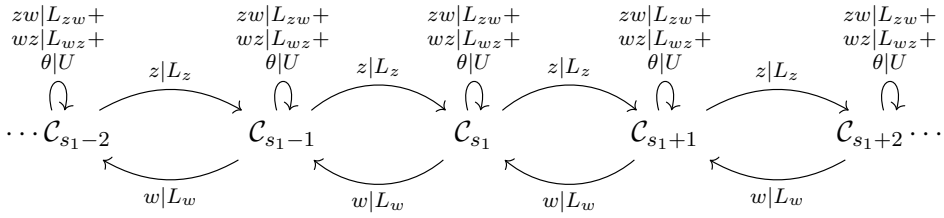
本节中，我们描述一个配备框架 $(0,0)$ 的二分量 L-空间链环的候选双模。我们将此双模记作 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$。候选 DA-双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 可通过与 Koszul 对偶得到的迹双模作张量积而获得（构造见 [Zem25]）：

$${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}} := {}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!} \boxtimes {}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}.$$

5.1. 每个幂等元处的复形。

5.1.1. 幂等元 $(0,0)$. 现在我们描述幂等元 $(0,0)$ 处的候选模 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$。我们将其视为 $(\mathcal{R}_0^!, \mathcal{R}_0)$ 上的 type-DD-模，并记作 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$。

示意地，双模 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 具有如下形式：



(5.1)

上文中的每个复形 $\mathcal{C}_{s_1}$ 都是一个类型为 D 的 $\mathcal{R}_0$模。我们将每个 $\mathcal{C}_{s_1}$定义为模$\bigoplus_{s_2 \in \mathbb{Z}+\mathrm{l}}{}_{\mathrm{k}(K_1,\ K_2)/2}\,\mathcal{HFL}(L,\ s_1,\ s_2$的典范二步消解。根据 L-空间链环的定义，这是一个无挠复形。如第3.2节所述，该复形的自由分解是一个阶梯复形。

在公式 (5.1) 中，我们任取映射 $L_w\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1-1}$ 和 $L_z\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1+1}$，使它们是链映射，且具有 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})$-分次移位，分别为 $(-2,0)$ 和 $(0,-2)$，

并且在同调上非零。对于 L_w，任意两种映射的选择作为类型 D 态射都是链同伦的，由引理 4.2可知； L_z 亦然。

在定义 L_{zw} 和 L_{wz}之前，我们先引入一些记号。若 $f\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1'}$ 是一个类型-D态射，我们将 $\partial_{\mathrm{int}}(f)$ 记作 f 作为类型-D模之间的映射时的态射微分。

我们取任意满足下列条件的映射 L_{zw} 和 L_{wz}：

$$\partial_{\mathrm{int}}(L_{zw}) = L_w \circ L_z + \mathrm{id}\otimes U \quad \text{and} \quad \partial_{\mathrm{int}}(L_{wz}) = L_z \circ L_w + \mathrm{id}\otimes U,$$

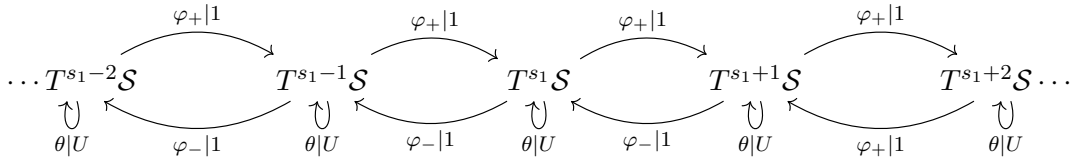
它们的 $(\mathbf{gr_w}, \mathbf{gr_z})$-分次为 $(-1, -1)$，并且使 $\mathcal{C}_{s_1}$ 的代数分次（即阶梯分次）增加 1。

注 5.1。上述构造本质上与 [CZZ24 第 5 节5], 中的构造相同；在本文中，映射 L_w、L_z、L_{wz} 和 L_{zw} 分别与 L_W、L_Z、$h_{Z,\,W}$和 $h_{W,\,Z}$相同，见 [CZZ24]。[CZZ24] 中的观点与上述 DD-双模之间的关系，见 [Zem25 第 5 节3]。

与 [CZZ24，命题 5.9] 中的论证类似，可以证明诱导的双模$\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 在同伦等价意义下是良定义的。

群 $\bigoplus_{s_2\in\mathbb{Z}+\mathrm{lk}(K_1,K_2)/2}\mathcal{HFL}(L,s_1,s_2)$ 可由 H_L-函数读出，下面我们回顾这一点。每个群 $\mathcal{HFL}(L,s_1,s_2)$ 都同构于 $\mathbb{F}[U]$，因为 L 是一个 L-空间链环。根据定义， $\mathcal{HFL}(L,s_1,s_2)$的生成元的 $\mathbf{gr_w}$ 分次为 $\mathrm{gr}\ -2H_L(s_1,s_2)$，且 $\mathbf{gr_z}$ 分次为 $-2H_L(s_1,s_2) - 2s_1 - 2s_2$。例如，参见 [CZZ25，第 4.1] 节。

5.1.2. 幂等元 (1,0)。现在我们描述幂等元 (1,0) 处出现的复形。令 $\mathcal{S}$ 为阶梯复形 $\mathcal{CFK}(K_2)$，视为在$\mathbb{F}[W,Z]$上的 type-D 模。我们将复形 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$定义为如下对象：



在上述内容中， s_1 取值于 $\mathbb{Z}$。

我们通过将每个$T^{s_1}\mathcal{S}$与 $\mathcal{CFK}(K_2)$等同，为其赋予马斯洛夫分次 $\mathbf{gr_w}$，$\mathbf{gr_z}$。我们定义 A_2 亚历山大分次 $A_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{gr_w} - \mathbf{gr_z})$。我们将 $T^{s_1}\mathcal{S}$视为处于 A_1亚历山大分次 s_1。

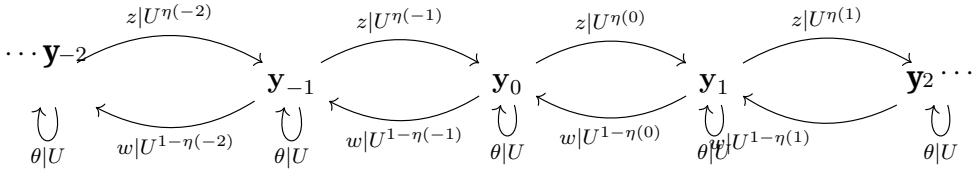
5.1.3. 幂等元(0，1)。现在我们考虑幂等元 (0，1)。我们将复形$\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$抽象地定义为 $\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(K_1)^{\mathbb{F}[U]}\otimes[1]^{\mathbb{F}[T,T^{-1}]}$，其中 $\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$是纽结 K_1 的手术复形的幂等元 0 子空间（将其视为关于$(\mathcal{R}_0^!,\ \mathbb{F}[U])$的 DD-双模）。具体而言， AA-双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$在 [Zem21 第 8]节中有所描述。其中的构造在右侧 U 作用下自然是自由的（左侧 $\mathcal{K}$作用是 U-等变的），因此它自然给出了一个类型-DA-双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$。我们通过限制左侧幂等元并与 $\mathcal{R}_0^![\mathcal{O}]^{\mathcal{R}_0}$张量积，定义 DD-双模 $\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$ 。模 $[1]^{\mathbb{F}[T,T^{-1}]}$ 表示一个仅含一个生成元且微分为零的类型-D结构。

利用 K_1 是一个 L-空间纽结这一事实，我们可以构造以下模型。它更小，也是我们关注的模型。记 $H_{K_1}\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^{\geq 0}$ 为 H-函数

K_1的。我们将设定

$$\eta(s_1) := H_{K_1}(s_1) - H_{K_1}(s_1+1),$$

其取值始终为 $\{0,1\}$。那么 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 由下图给出



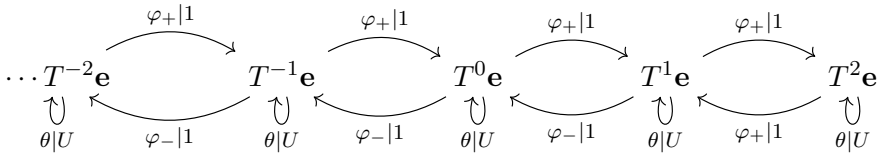
将 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 视为具有双分次 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})$ 很方便，其中

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(\mathbf{y}_{s_1}) = (-2H_{K_1}(s_1), -2H_{K_1}(s_1) - 2s_1).$$

设

$$(A_1, A_2)(\mathbf{y}_{s_1}) = (s_1, 0).$$

5.1.4. 幂等元$(1,1)$。最后，我们描述复形 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$。我们将此复形定义为如下图示：



我们将生成元 $T^{s_1}\mathbf{e}$ 视为具有单一的马斯洛夫分次 gr，其中 $\mathrm{gr}(T^{s_1}\mathbf{e}) = 0$。我们将

$$(A_1, A_2)(T^{s_1}\mathbf{e}) = (s_1, 0).$$

5.2. **长度 1 映射**。现在我们定义手术双模的长度 1 映射。在我们的双模 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 中，这些是只改变一个幂等元的分量。（术语 长度 源于将 [MO10] 的链环手术复形视为超立方体的观点，其中“长度”指对应线段在立方体中的 L^1-长度。）

5.2.1. 幂等元$(0,0)$ 到 $(1,0)$。从幂等元 $(0,0)$ 到幂等元 $(1,0)$ 的映射已在 [CZZ24 第 5.4] 节中有所描述（措辞略有不同）。我们用当前的记号重述这一描述。我们选取映射

$$L_s, L_t \colon \mathcal{C}_{s_1} \to T^{s_1 - \ell/2} \otimes \mathcal{S}$$

它们是链映射，在同调上非零，保持阶梯分次，并具有以下马斯洛夫分次：

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_s) = (0, -2s_1 + \ell) \quad \text{and} \quad (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_t) = (2s_1 + \ell, 0).$$

此外，我们选取映射

$$L_{zs} \colon \mathcal{C}_{s_1} \to T^{s_1 - \ell/2 + 1}\mathcal{S} \quad \text{and} \quad L_{wt} \colon \mathcal{C}_{s_1} \to T^{s_1 - \ell/2 - 1}\mathcal{S}.$$

我们假设这些映射使代数（阶梯）分次增加 1，并且具有分次

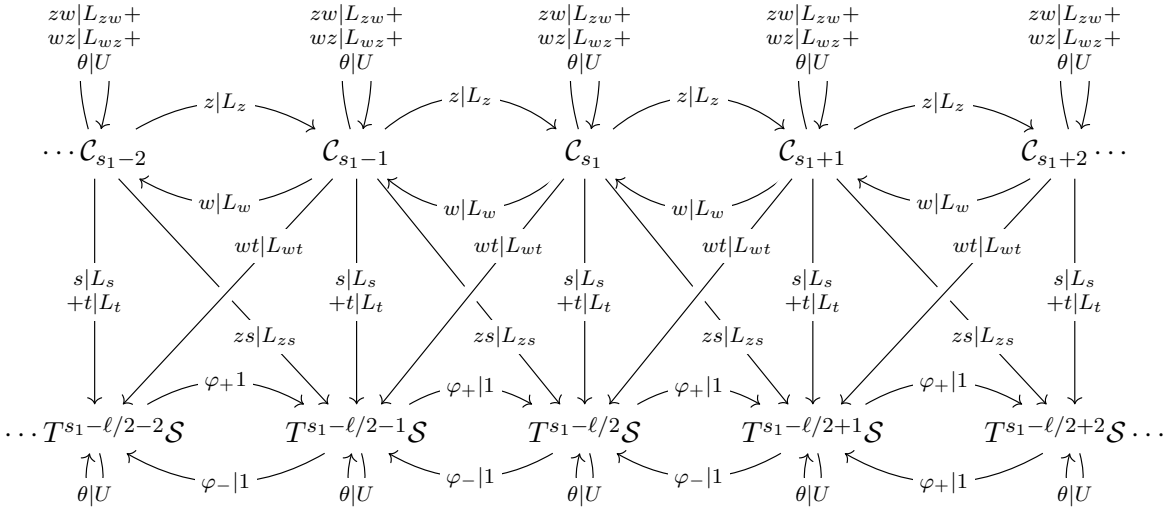
$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_{zs}) = (1, -2s_1 + \ell - 1) \quad \text{and} \quad (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_{wt}) = (2s_1 + \ell - 1, 1).$$

此外，我们要求这些映射满足

$$\partial_{\mathrm{int}}(L_{zs}) = L_s \circ L_z + L_{\varphi_+} \circ L_\sigma \quad \text{and} \quad \partial_{\mathrm{int}}(h_{wt}) = L_t \circ L_w + L_{\varphi_-} \circ L_t.$$

上述内容中，$L_{\varphi_\pm}\colon\ T^{s_1}\mathcal{S} \to T^{s_1\pm 1} \otimes \mathcal{S}$是典范识别。

我们利用上述映射，构造从幂等元 (0，0) 到 (1，0) 的 $\delta^{1,\ 1}$ 分量。映射 L_s 的权重为 s。映射 L_t 的权重为 t。映射 L_{zs}的权重为 zs。映射 L_{wt} 的权重为 wt。我们按下图所示排列这些映射：



对于上述图中权重为 s 的倍数的分量，记作 Ψ^{K_1}；对于上述图中权重为 t 的倍数的分量，记作 Ψ^{-K_1}。

注 5.2。在 [CZZ24 第 5.5]，节中，我们将映射 L_σ、L_τ、$h_{\sigma,\ Z}$ 和 $h_{\tau,\ W}$ 分别记作我们在上文中所记的 L_s、L_t、L_{zs}和 L_{wt}。在 [CZZ24 第 5.5]，节中，我们还选取了同伦 $h_{\sigma,\ W}$ 和 $h_{\tau,\ Z}$；不过，[Zem25 的注 5.3] 中解释了这些同伦包含冗余信息，不会出现在 Koszul 对偶型-DD 双模中。

5.2.2. 幂等元 (0，0) 到 (0，1)。现在我们描述 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}_{\text{代数}}(L)^{\mathcal{K}}$ 上从幂等元 (0，0) 到 (0，1) 的微分分量。记 (σ)，$(\tau) \subseteq \mathcal{K}$ 分别为由 σ 和 τ 生成的理想。我们选取

$$R^\sigma\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathbf{y}_{s_1-\ell/2} \otimes (\sigma) \quad \text{and} \quad R^\tau\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathbf{y}_{s_1+\ell/2} \otimes (\tau)$$

使其满足以下性质的唯一映射

(1) R^σ 和 R^τ 是链映射。(2) R^σ 和 R^τ 在代数分次 1 上为零，在 $\mathcal{C}_s$ 的代数分次 0 中每个单项式生成元上均不为零。(3) 映射 R^σ 和 R^τ 关于亚历山大分次是齐次分次的，并且还满足

$$A_1(R^\sigma) = -\ell/2, \quad A_1(R^\tau) = \ell/2,$$

and

$$A_2(R^\tau) = A_2(R^\sigma) = -\ell/2.$$

（参见方程（3.2）中的分次约定）。

（4）在 $\mathbb{H}(L)$ 的每个亚历山大分次上，R^σ 和 R^τ 关于 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})$ 都是齐次分次的。对于位于亚历山大分次 (s_1, s_2) 中的生成元，它们的分次分别为 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(R^\sigma) = (0, 2s_2 + \ell)$ 和 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(R^\tau) = (-2s_2 + \ell, 0)$。

在定义映射 R^σ 和 R^τ的分次时，我们将元素$\mathbf{y}_s \otimes U^i T^j \sigma$视为具有

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(\mathbf{y}_{s_1} \otimes U^i T^j \sigma) = (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(\mathbf{y}_{s_1}) - (2i, 2i),$$

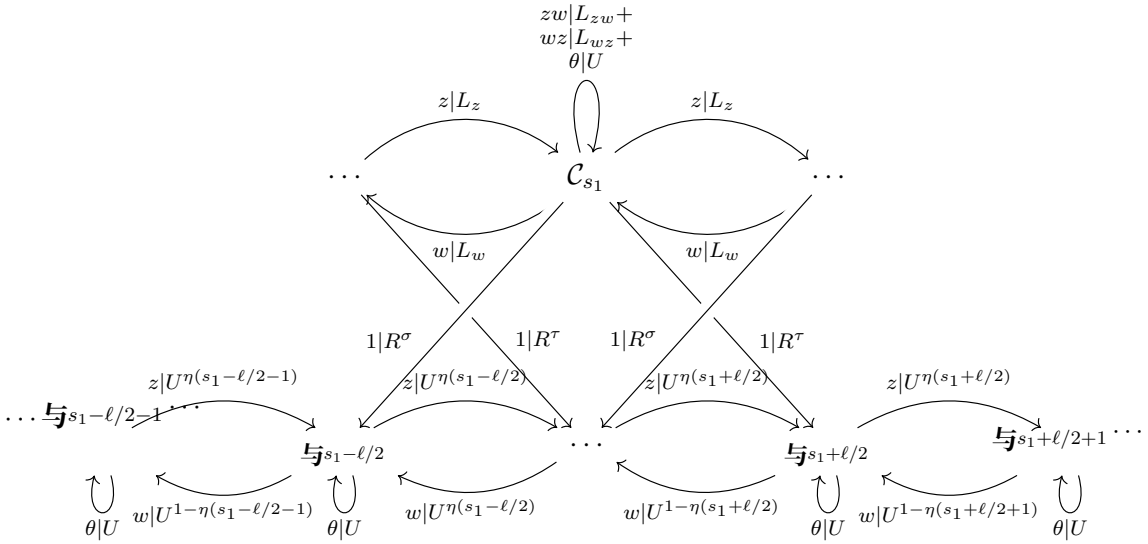
and

$$(A_1, A_2)(\mathbf{y}_{s_1} \otimes U^i T^j \sigma) = (s_1, j),$$

对于 τ-加权元素，同样如此。

我们使用映射 $1|R^\sigma + 1|R^\tau$作为从 $\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$到 $\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$的微分分量。

示意地，我们在下方表示如下：



以下内容显而易见，证明留给读者：

引理 5.3。映射 R^σ 和 R^τ 是从 $\mathcal{R}_0 \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$到 $\mathcal{R}_0 \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$的 DD 型模之间的链映射。

注意，在上文中，当我们说 R^σ 是从 $\mathcal{R}_0 \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 到 $\mathcal{R}_0 \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的链映射时，我们是将 $\mathcal{R}_0$ 和 $\mathcal{R}_1$ 都视为属于 $\mathcal{K}$，因此将两个模都视为 $(\mathcal{R}_0, \mathcal{K})$ 上的 DD 双模。此外，称这些映射为链映射，意味着态射微分在它们上为零。

5.2.3. 幂等元 $(1, 0)$ 到 $(1, 1)$。阶梯复形 $\mathcal{S} = \mathcal{CFK}(K_2)$ 可扩展为一个类型-D 结构 $\mathcal{X}_0(K_2)^{\mathcal{K}}$，并将其归一化，使得 $\mathcal{X}_0(K_2) \cdot \mathbf{I}_1$ 仅由一个生成元构成，且该生成元集中在 $(\mathrm{gr}\ A)$ 分次 0。更多详情请参见 [HMSZ25, 第 5.3] 节。令 δ^σ 和 δ^τ 表示结构映射在 $\mathcal{X}_0(K_2)^{\mathcal{K}}$ 上分别由 σ 和 τ 加权的分量。

我们通过以下公式定义从 $\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 到 $\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的映射 Ψ^{K_2} 和 Ψ^{-K_2}

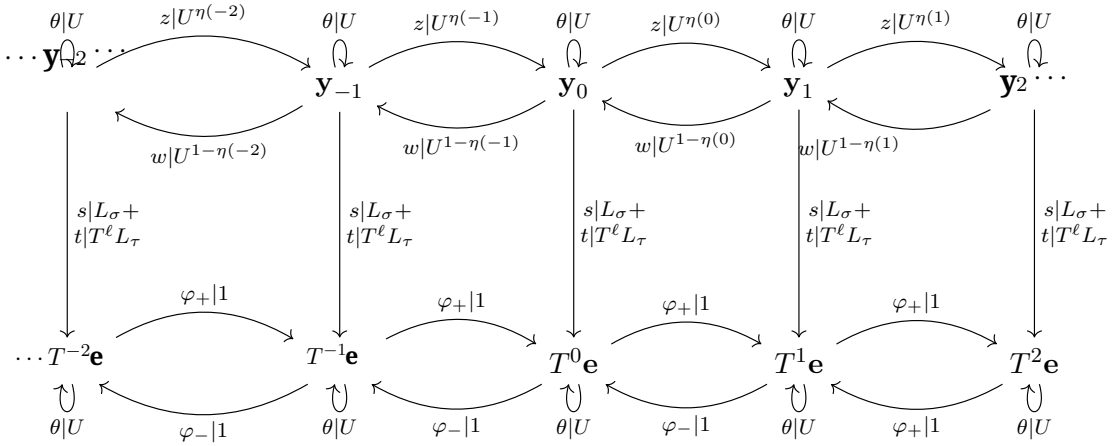
$$\Psi^{K_2} = 1 \otimes L_{T^0} \otimes \delta^\sigma \quad \text{and} \quad \Psi^{-K_2} = 1 \otimes L_{T^\ell} \otimes \delta^\tau.$$

这里， L_{T^i}是 $\mathbb{F}[T,T^{-1}]$的自同态，即乘以 T^i的映射。我们将 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$中从 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}$代数$(L)^{\mathcal{R}_0}$到${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的微分分量 $\delta^{1,\,1}$定义为 Ψ^{K_2} 与 Ψ^{-K_2}之和。

5.2.4. 幂等元 (0,1) 到 (1,1)。 最后，我们定义 $\delta^{1,1}$ 的分量，它从 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 到 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}_{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$。我们回顾一下，${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 和 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的底层向量空间分别与型-D-结构的幂等元 0 和 1 子空间相对应

$$ {}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}_0(K_1)^{\mathbb{F}[U]} = {}^{\mathcal{K}^!}[\mathcal{C}o]^{\mathcal{K}} \boxtimes_{\mathcal{K}} \mathcal{X}_0(K_1)^{\mathbb{F}[U]} $$

（作为向量空间，它们与 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}_0(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$ 的幂等元 0 和 1 子空间相同）。记 $L_\sigma, L_\tau \colon \mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{X}_0(K_1) \to \mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{X}_0(K_1)$ 为结构映射 $\delta_2^1(\sigma,-)$ 和 $\delta_2^1(\tau,-)$。然后，从 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 到 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}_{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的微分由 $s \otimes L_\sigma$ 和 $t \otimes T^\ell L_\tau$ 给出，如下图所示：



备注 5.4。 在上图中，箭头上的 T^ℓ权重 $t|T^\ell L_\tau$是映射$\mathcal{R}_1$ 输出的一部分。这与底行所示的 T次幂不同，后者是模 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$的向量空间的一部分。

5.3. **长度为 2 的映射**。 我们定义复形 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 使其长度为 2 的映射消失。（长度为 2 的映射指的是 $\delta^{1,\,1}$ 中从幂等元 (0，0) 到 (1，1) 的分量。）

在定义了 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 上的结构映射 $\delta^{1,\,1}$ 后，我们陈述如下 ：

命题 5.5。 双模 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 满足类型-DD 结构关系，并且在 U-等变同伦等价意义下良定义。

证明留给读者。参见 [CZZ24，命题 5.10]。

6. Proof of the equivalence

在本节中，我们证明以下定理：

命题 6.1。 若 L 是 S^3中的二分量 L-空间链环，且 $\mathscr{A}$ 是一个弧系，使得 $\boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}(L,\mathscr{A})^{\mathcal{K}}$ 存在一个 U-等变模型，则存在一个同伦等价

$$ \boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}} \simeq \boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}(L,\mathscr{A})^{\mathcal{K}}. $$

回顾一下，$\mathcal{K}^!$ 是通过以下方式得到的：对 $\mathcal{K}^!$ 按幂等元 $(0,0)$上的权重过滤取完备化。也就是说，我们允许幂等元 (0,0)中的单项式构成权重递增的无穷和，例如 $\sum_{i=0}^{\infty}(wz)^i$。在接下来的第 7节中，我们将证明，在未完备化的代数 $\mathcal{K}^!$上，同伦等价同样成立。

备注 6.2。 在命题 6.1 的证明中，我们发现， U-等变假设仅在确定复形的长度为2的映射时才是必要的（即 $\delta^{1,1}$ 的分量，它同时平移两个幂等元）。我们注意到，在 [CZZ24] 中计算 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 时，从未用到 U-等变性。在本文中，即使 U-等变条件并非必要，我们仍作此假设，因为它能简化证明。尽管如此，本文的技巧很容易扩展到处理无需 U-等变条件的情况，例如双模 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$。这些细节留给感兴趣的读者作为练习。

6.1. L- **空间纽结与阶梯**。 本节回顾 [CZZ24，定理 5.14]:

引理 6.3. 设 $\mathcal{C}^{\mathcal{R}_0}$ 是一个 *type-D* 结构，具有一个 $(\mathrm{gr_w},\mathrm{gr_z})$-双分次，其同调模 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$（即仅装备了 m_2非零部分的 $\mathcal{C}^{\mathcal{R}_0}\boxtimes\mathcal{R}_0$ 的同调）的支撑包含于 $2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$中。那么 $\mathcal{C}^{\mathcal{R}_0}$与 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$的一个自由分解同伦等价。

证明。 根据定义，$\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$ 与其自身的一个自由分解拟同构。若 A是域上的代数，则在 A 上的 A_∞-模范畴中，拟同构作为 A_∞ 模映射存在逆（见 [Kel01, 定理，第 14]页），因此 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$ 作为一个 A_∞-模与其自身的一个自由分解同伦等价。

根据同调扰动理论，我们可以在$\sim\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$ 的底层向量空间上赋予一个 A_∞-模结构，记作 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$，使得

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}_0}\simeq\mathcal{C}^{\mathcal{R}_0}\boxtimes{}_{\mathcal{R}_0}[\mathcal{R}_0]_{\mathcal{R}_0}.$$

该双模${}_{\mathcal{R}_0}[\mathcal{R}_0]_{\mathcal{R}_0}$ 是拟可逆的，其拟逆是下方所示的秩为四的 type-DD 双模 ${}^{\mathcal{R}_0}\Lambda^{\mathcal{R}_0}$：

$${}^{\mathcal{R}_0}\Lambda^{\mathcal{R}_0}:=\begin{array}{ccc}1 & \xrightarrow{W\otimes 1+1\otimes W} & \phi\\ \downarrow{\scriptstyle Z\otimes 1+1\otimes Z} & & \downarrow{\scriptstyle Z\otimes 1+1\otimes Z}\\ \psi & \xrightarrow[W\otimes 1+1\otimes W]{} & \phi\psi.\end{array}$$

上述结论众所周知，本质上就是关于 $\mathcal{R}_0$ 上一个模的 Koszul分解；不过，关于如何用本文的记号证明这一点，请读者参见 [CZZ24, 引理 5.11] 。我们~注意到，来自 $\mathcal{H}_{R_0}$ 的作用 $m_3(-,\ a,\ b)$ 会将 $\mathrm{gr_w}$ 和 $\mathrm{gr_z}$ 分次都平移~1（模 2），对任意 $a,\ b\in\mathcal{R}_0$ 均成立。这意味着 $m_3(-,\ a,\ b)$ 在 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$ 上为零，因为$\mathcal{H}$ 仅支撑在偶数 $\mathrm{gr_w}$ 和 $\mathrm{gr_z}$ 分次上。特别地，

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}_0}\boxtimes{}^{\mathcal{R}_0}\Lambda^{\mathcal{R}_0}\simeq\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}\boxtimes{}^{\mathcal{R}_0}\Lambda^{\mathcal{R}_0},$$

~由此我们得出 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}\simeq\mathcal{H}_{\mathcal{R}_0}$. □

注记6.4。上述引理为 Ozsv´ath 和 Szab´o 的结果 [OS05]提供了另一种证明（或至少提供了另一种理解其证明的视角）：L-空间纽结的结 Floer 复形与阶梯复形同伦等价。事实上，若 K 是一个 L-空间

纽结，其同调 $\mathcal{HFK}(K)$ 可自然地视为 $\mathbb{F}[W,Z]$中的一个单项式理想，并且其支撑在偶数 $\mathbf{gr_w}$ 和 $\mathbf{gr_z}$ 分次上。上述引理意味着 $\mathcal{CFK}(K)$ 是 $\mathcal{HFK}(K)$ 的一个自由分解，而后者是一个阶梯复形。

6.2. **每个幂等元处的复形**。 本节中，我们将证明以下结论：

命题 6.5。 设 $L\subseteq S^3$ 是一个二分量 L-空间链环，且 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 是链环 L 的链环手术复形的一个 U-等变模型。记 ${}^{\mathcal{R}_\varepsilon}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_{\varepsilon'}}$ 为幂等元 $(\varepsilon,\varepsilon')$ 处的复形。那么存在一个 U-等变同伦等价

$$ {}^{\mathcal{R}_\varepsilon}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_{\varepsilon'}}\simeq {}^{\mathcal{R}_\varepsilon}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_{\varepsilon'}}.$$

当 $\varepsilon=0$ 时，该等价是在完备环 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!$ 上的。

命题 6.1 由下文的引理 6.7、6.8 和 6.9可得。

6.2.1. 幂等元 $(0,0)$。 对于每个 $s_1\in\mathbb{Z}+\mathrm{lk}(K_1,K_2)/2$，我们将 X_{s_1} 和 $\mathcal{C}_{s_1}$ 记作 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 与 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}_{\text{代数}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 的子空间，它们具有 A_1-亚历山大分次 s_1。我们将 X_{s_1} 和 $\mathcal{C}_{s_1}$ 视为 $\mathcal{R}_0$ 上的类型-D 结构，并赋予它们 $\delta^1{}_{,1}$ 中由 $1\in\mathcal{R}_0^!$ 加权的分量。

引理 6.6. 对于所有的 s_1，都存在一个强形变收缩

$$H\circlearrowright X_{s_1}\underset{I}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}}\mathcal{C}_{s_1}.$$

回顾一下，强形变收缩 是如上所示的一个图表，并且满足

$$\Pi\circ I=\mathbb{I}_{\mathcal{C}_{s_1}},\quad I\circ\Pi=\mathbb{I}_{X_{s_1}}+\partial(H),\quad H\circ H=0,\quad H\circ I=0,\quad \Pi\circ H=0.$$

证明. X_{s_1} 和 $\mathcal{C}_{s_1}$ 的同调均同构于

$$\bigoplus_{s_2\in\mathbb{Z}+\mathrm{lk}(K_1,K_2)/2}\mathcal{HFL}(L,s_1,s_2). \tag{6.1}$$

由于 L 是一个 L-空间链环，方程（6.1）中出现的群仅支撑在偶数（$\mathbf{gr_w}$，$\mathrm{gr_z}$）分次上。由引理 6.3， X_{s_1} 必定与一个阶梯复形同伦等价。因此，我们有如下图表

$$Q\circlearrowright X_{s_1}\underset{I}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}}\mathcal{C}_{s_1}\circlearrowleft J$$

其中 $\Pi\circ I=\mathbb{I}_{X_s}+\partial(J)$ 且 $I\circ\Pi=\mathbb{I}_{\mathcal{C}_s}+\partial(Q)$。首先，我们注意到，由于 $\mathcal{C}_{s_1}$ 是约化的（即微分的像包含于极大理想（W， Z）中），同伦等价 $\Pi\circ I\colon\mathcal{C}_{s_1}\to\mathcal{C}_{s_1}$ 必须是一个可逆的类型-D 模映射（或者，我们也可以使用引理 4.6 ，该引理专用于阶梯）。将Π 与此映射的逆映射复合后，我们可以假设 $\Pi\circ I=\mathbb{I}_{\mathcal{C}_{s_1}}$。

Lambe 和 Stasheff 的以下公式 [LS87，第 2 节1]给出了一个同伦$H\colon X_{s_1}\to X_{s_1}$ 它将上述图表转化为强形变收缩：

$$\begin{aligned}Q'&=(\mathbb{I}+I\circ\Pi)\circ Q\circ(\mathbb{I}+I\circ\Pi)\\ H&=Q'\circ\partial_{X_{s_1}}\circ Q',\end{aligned}$$

完成证明。 □

引理 6.7。若 L 是一个二分量 L-空间链环，且 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 是 U-等变的，则存在一个 U- 等变同伦等价 DD- 双模之间的映射 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$.

证明。我们将结构映射 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 写作

$$\delta^{1,1} = d^{1,1} + \alpha^{1,1},$$

其中 $d^{1,1}$ 仅由以 $1 \in \mathcal{R}_0^!$ 加权的微分组成，而 $\alpha^{1,1}$ 由权重为 1 或更大的 $\mathcal{R}_0^!$ 单项式加权的分量组成。

我们也将 $\delta^{1,1\ \mathrm{alg}}$ 记作 $d^{1,1\ \mathrm{alg}} + \alpha^{1,1\ \mathrm{alg}}$ 其中 $d^{1,1\ \mathrm{alg}}$ 和 $\alpha^{1,1\ \mathrm{alg}}$ 的定义与上文类似。引理 6.6给出了 D 型模在 $\mathcal{R}_0$ 上的强形变收缩

$$H \circlearrowright \left(\bigoplus_{s_1} X_{s_1}, d^{1,1}\right) \underset{I}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} \left(\bigoplus_{s_1} \mathcal{C}_{s_1}, d^{1,1}_{\mathrm{alg}}\right).$$

当我们在 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!$ 上工作时，自同态 $(1 + H \circ \alpha^{1,1})$ 可逆，因为其逆映射为

$$\sum_{i=0}^{\infty} (H \circ \alpha^{1,1})^n.$$

针对 DD 型模的同调扰动引理（参见 [LS87，第 2], 节，其中给出了针对链复形的扰动引理）给出了一个同伦等价（实际上是一个强形变收缩）

$$\left(\bigoplus_{s_1} X_{s_1}, d^{1,1}\right) \simeq \left(\bigoplus_{s_1} \mathcal{C}_{s_1}, d^{1,1}_{\mathrm{alg}} + \beta^{1,1}\right)$$

其中

$$\beta^{1,1} = \sum_{n \geq 0} \Pi \circ \alpha^{1,1} \circ (H \circ \alpha^{1,1})^n \circ I.$$

由于 $H \circ H = 0$，很容易看出 $\beta^{1,\ 1}$ 是 U-等变的（即唯一的自箭头由 $\theta \otimes \mathrm{id} \otimes U$ 构成），上述同伦等价中出现的映射也如此。

将 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 替换为 $(\bigoplus_{s_1} \mathcal{C}_{s_1},\ d^{1,\ 1\ \mathrm{alg}} + \beta^{1,\ 1})$ 后，我们可以将 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 视为具有相同的底层向量空间，以及在 $\mathcal{R}_0$ 上相同的诱导型-D 结构。我们将用 $\mathcal{X}(L)$ 和 $\mathcal{C}_{s_1}$ 表示共同的底层向量空间以及在 $\mathcal{R}_0$ 上的型-D 结构。我们将用 $\delta^{1,\ 1}$ 表示来自 $\mathcal{X}(L)$ 的结构映射，并用 $\delta^{1,\ 1\ \mathrm{alg}}$ 表示来自 $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)$ 的结构映射。

接下来，我们注意到 $\delta^{1,1}$ 的 w 加权项和 z 加权项，与第 5.1 节中定义的映射 L_w 和 L_z 具有相同的 $(\mathrm{gr_w}, \mathrm{gr_z})$ 分次。此外，它们作为从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{C}_{s_1 \pm 1}$ 的链映射，不可能是零伦的，因为根据 Koszul 对偶，$\delta^{1,1}$ 的 w 加权分量对应于 W_1 在 $\mathcal{HFL}(L)$ 上的作用；该作用在同调上非平凡，因为 $W_1 Z_1 = U_1$，而根据定义，$\mathcal{HFL}(L)$ 是一个自由且非零的 $\mathbb{F}[U_1]$-模。对于 z 加权分量也有类似结论。此外，由于 w 加权分量和 z 加权分量模 2 保持 $(\mathrm{gr_w}, \mathrm{gr_z})$ 分次，很容易看出它们必定保持 $\mathcal{C}_{s_1}$ 上的代数（阶梯）分次。

因此，在构造 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 时，我们可以将来自 $\mathcal{X}(L)$ 的 $\delta^{1,1}$ 的 w 分量和 z 分量分别取为 L_w 和 L_z。

接下来，我们考虑 $\delta^{1,1}$ 中由 wz 或 zw 加权的分量。分别将它们记为 L_{wz} 和 L_{zw}。事先看来，L_{wz} 和 L_{zw} 可能含有使代数分次增加 1 或减少 1 的直和项。分别将这些直和项记为 L^{10}_{wz}、L^{10}_{zw} 和 L^{01}_{wz}、L^{01}_{zw}。现在，我们通过一个同伦等价对 $({}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^{1,1})$ 作修改，使得 L_{wz} 和 L_{zw} 增加代数分次，也就是说，使 L^{01}_{wz} 消失。由引理 4.3，映射 L^{01}_{wz} 和 L^{01}_{zw} 是零伦的。将这些零伦同伦记为 h_{wz}, h_{zw}：$\mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1} \otimes \mathcal{R}_0$。我们定义 $({}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^{1,1})$ 的一个自同态 $h = wz \otimes h_{wz} + zw \otimes h_{zw}$。注意，$1 + h$ 在完备环 $\mathrm{R}_0^!$ 上可逆，因此应用引理 2.1 可知，$(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^{1,1})$ 同构于一个 DD-双模，其底层向量空间为 $\mathcal{X}(L)$，且其 w、z、wz 和 zw 加权微分与 $\delta^{1,1\,\mathrm{alg}}$ 的微分一致（但它可能含有由 $\mathrm{R}_0^!$ 中权重大于 2 的代数元素加权的微分）。稍微滥用一下记号，将经过这次扰动后 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 上的新结构映射记为 $\delta^{1,1}$。

现在，我们通过归纳过程消去 $\delta^{1,\,1}$的高权重微分；该过程重复了用于修改 $\delta^{1,\,1}$ 的权重 1 和 2 微分的思路。令L_{wzw} 和 L_{zwz} 分别表示 $\delta^{1,\,1}$ 中由 wzw 和 zwz加权的直和项。我们注意到，L_{zwz} 和 L_{wzw} 的 $(\mathrm{gr_w}, \mathrm{gr_z})$-分次与 L_w 和L_z相同。考虑 $\delta^{1,\,1}$的类型-DD-结构关系中的 wzw 系数，可得

$$\partial_{\mathrm{int}}(L_{wzw}) + L_w \circ L_{wz} + L_{zw} \circ L_z = 0.$$

由于 $\delta^{1,\,1\,\mathrm{alg}}$ 满足类型-DD 结构关系，且 $\delta^{1,\,1\,\mathrm{alg}}$ 没有$\mathcal{R}_0^!$-权重大于 2 的分量，并且 $\delta^{1,\,1\,\mathrm{alg}}$ 在 $\mathcal{R}_0^!$权重不超过 2 的分量上与 $\delta^{1,\,1}$ 一致，因此我们得出 $L_w \circ L_{wz} + L_{zw} \circ L_z = 0$。特别地，将 L_{wzw} 视为从$\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{C}_{s_1-1}$的类型-D 态射时，它是一个链映射。同样的推理表明，L_{zwz} 也是从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{C}_{s_1+1}$的链映射。

当我们考察 $wzwz$ 系数对应于 $\delta^{1,1}$ 的类型-DD 结构关系时，我们看到

$$0 \simeq L_z \circ L_{wzw} + L_{zwz} \circ L_w + L_{wz} \circ L_{wz} = L_z \circ L_{wzw} + L_{zwz} \circ L_w, \tag{6.2}$$

作为类型-D 自同态$\mathcal{C}_{s_1}$。（同伦由 L_{wzwz} 给出，并且我们还用到了这样一个事实：$L_{wz} \circ L_{wz} = 0$ 因为 L_{wz} 使代数分次增加 1）。回想一下，映射 L_w 和 L_z 在链同伦意义下，是从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{C}_{s_1 \pm 1}$ 的、在其分次下同调上非零的唯一链映射。方程（6.2）意味着，对于每个 s_1，映射

$$L_{zwz} \colon \mathcal{C}_{s_1-1} \to \mathcal{C}_{s_1} \quad \text{and} \quad L_{wzw} \colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1-1}$$

要么在同调上都非零，要么在同调上都为零（尽管是否为零可能取决于 s_1）。定义一个函数

$$\epsilon \colon \mathbb{Z} + \mathrm{lk}(K_1, K_2)/2 \to \mathbb{Z}/2$$

如下定义。我们设 $\epsilon(s_1) = 1$ 当且仅当 $L_{zwz} \colon \mathcal{C}_{s_1-1} \to \mathcal{C}_{s_1}$ 和 $L_{wzw} \colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1-1}$ 在同调上均非零。然后我们定义一个映射

$$h \colon \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$$

它将 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{s_1}$ 映射为 $\epsilon(s_1)wz \otimes \mathbf{x}$。注意，$1+h$ 在完备代数 $\mathbf{R}_0^!$ 上可逆，因此我们可以利用上述函数 h 应用引理 2.1，将 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)\ \delta^1,1)$ 修改为一个同构的 type-DD 结构，其中 wzw 项变为 $L_{wzw}+\epsilon(s_1)L_w$，而 zwz 项变为 $L_{zwz}+\epsilon(s_1+1)L_z$。由权重小于 3 的 $\mathcal{R}_0^!$ 元素加权的分量保持不变。经过这次修改，所有映射 h_{zwz} 和 h_{wzw} 仍然是链映射（将其视为从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{C}_{s_1\pm1}$ 的映射时），但它们全都是零伦的。为简便起见，我们用 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^1,1)$ 表示具有此修改后结构映射的复形。

我们令 $j_{zwz}\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1+1}$ 和 $j_{wzw}\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1-1}$ 为适当分次的零伦同伦。我们定义一个映射

$$h'\colon \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$$

将 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{s_1}$ 映到 $wzw \otimes j_{zwz}(\mathbf{x}) + zwz \otimes j_{wzw}(\mathbf{x})$。利用引理 2.1 中的函数 h' 对 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^1,1)$ 进行修改后，我们得到了一个同伦等价模型，其微分在 $\mathcal{R}_0^!$ 的单项式上、至 $\mathcal{R}_0^!$-权重 3 为止，与候选模型 $\delta^1,1\ \mathrm{alg}$ 相同。此外，很容易看出，该模型及其同伦等价是 U-等变的。我们仍将这个新的复形记作 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0 \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}, \delta^1,1)$。

类似的论证可以消去由 $wzwz$ 或 $zwzw$ 加权的 $\delta^1,1$ 的分量。记

$$L_{wzwz}, L_{zwzw}\colon \mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{C}_{s_1}$$

分别对应于由 $wzwz$ 和 $zwzw$加权的 δ^1的分量。与之前类似，不难看出 L_{wzwz} 和 L_{zwzw} 是链映射。此外，我们观察到它们的（$\mathbf{gr_w}$, $\mathbf{gr_z}$）次数均为（$-1,-1$）。记作 $\mathcal{C}_{s_1} = (\partial_{s_1}\colon \mathcal{C}_{s_1}^1 \to \mathcal{C}_{s_1}^0)$。映射 L_{wzwz} 可分解为和 $L_{wzwz}^{10} + L_{zwzw}^{01}$，其中 L_{wzwz}^{ij}将代数分次 j 映射到代数分次 i。由于 ∂_{s_1} 是单射，我们可知L_{wzwz}^{10} 必为零。根据引理 4.3，映射 L_{zwzw}^{01} 是零伦的。类似地，L_{wzwz} 也是零伦的。因此，我们可以应用引理 2.1，消去由 $wzwz$ 和 $zwzw$ 加权的微分。

归纳地，如果我们构造出一个 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0},\ \delta^1,\ 1)$ 的模型，使得 $\delta^1,\ 1$ 与$\delta^1,\ 1\ \mathrm{alg}$ 在某个 $n \geq 4$ 下相差至多 $\mathcal{R}_0^!$-权重 n，那么现在我们利用引理 2.1 修改 $(\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0},\ \delta^1,\ 1)$，使得 $\delta^1,\ 1$ 与 $\delta^1,\ 1\ \mathrm{alg}$ 在 $\mathcal{R}_0^!$-权重为 $n+1$ 的单项式范围内一致。如果 $n+1$ 是偶数，我们可以使用与消去 $wzwz$ 和 $zwzw$ 加权项相同的论证。如果 $n+1$ 是奇数，我们可以使用与消去 wzw 和 zwz 加权项相同的论证。

这产生了一个映射的无限序列

$$f_n\colon \mathcal{X}(L) \to \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \otimes \mathcal{X}(L) \otimes \mathcal{R}_0$$

它们是 DD-模的同构（对于合适的结构映射 $\delta^1,\ 1$）。映射f_n均等于 $\mathrm{id} + f_n'$，其中 f_n'只涉及长度至少为n的 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!$ 的单项式。因此，无限复合 $\cdots f_3 \circ f_2 \circ f_1$ 是良定义的，并给出了我们的原始 type-D 结构 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 与 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}_{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 之间的同伦等价。如前所述，所有这些映射都是 U-等变的，而且很容易看出它们的逆映射也如此。□

6.2.2. 幂等元 (1，0)。现在我们考察幂等元 (1，0)，即 $\mathbf{I}_1 \cdot \mathcal{X}(L) \cdot \mathbf{I}_0$。

引理 6.8。 假设 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 具有 U-等变结构映射。那么存在一个 U-等变同伦等价 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \simeq \mathcal{R}_1^!\mathcal{X}_{\text{代数}}(L)^{\mathcal{R}_0}$。

证明。证明与引理 6.7 的证明类似。记 X_{s_1} 和 $T^{s_1}\otimes\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 和 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}\mathrm{alg}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 中 A_1-亚历山大分次为 s_1 的子空间。只使用结构映射 $\delta^{1,1}$ 中由 $1\in\mathcal{R}_1^!$ 加权的分量，我们可以将 X_{s_1} 和 $T^{s_1}\otimes\mathcal{S}$ 视为 $\mathcal{R}_0$ 上的类型-D 模。记 $\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 为所有 X_{s_1} 的直和。根据 [Zem23 第 3]，节中的构造，我们看到 $\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 与 K_2 的结 Floer 复形同伦等价，其扭系数由同调类 $[K_1]\in H_1(S^3)$ 诱导。由于 $H_1(S^3)=0$，按 $[K_1]$ 的同调类进行扭曲，恰好得到 $\mathcal{CFK}(K_2)\cong\mathcal{S}$ 与 $\mathbb{F}[T,T^{-1}]$ 的张量积。因此，$\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 与 $\mathbb{F}[T,T^{-1}]\otimes_{\mathbb{F}}\mathcal{S}$ 同伦等价。由于每个 $T^{s_1}\otimes\mathcal{S}$ 都处于不同的 A_1-亚历山大分次中，参照引理 6.7 证明中的类似推理，我们得出存在从 X_{s_1} 到 $T^{s_1}\otimes\mathcal{S}$ 的类型-D 结构的强形变收缩。此外，如引理 6.7 的证明所示，该同伦等价可以取为 U-等变的。

与引理 6.7 的证明中一样，利用上面构造的强变形收缩，我们将把 $\mathcal{X}(L)$ 和 $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)$ 视为具有相同的底层向量空间，并记作 $\mathcal{X}(L)$。我们用 $\delta^{1,1}$ 和 $\delta^{1,1}{}_{\mathrm{alg}}$ 表示这两个结构映射。

现在考虑由 $\mathcal{R}_1^!$ 的非单位元加权的微分分量。记由φ_+ 和 φ_-加权的 $\delta^{1,1}$ 的分量分别为L_{φ_+} 和 L_{φ_-}。结构关系

$$(\delta^{1,1})^2+\mu_0\otimes\mathrm{id}\otimes 1$$

(其中 $\mu_0=\varphi_+\varphi_-+\varphi_-\varphi_+$) 蕴含 $L_{\varphi_+}\circ L_{\varphi_-}\simeq\mathrm{id}$ 和 $L_{\varphi_-}\circ L_{\varphi_+}\simeq\mathrm{id}$ 作为D 的类型 X_{s_1}自同态。因此，L_{φ_+} 给出了从$T^s\otimes\mathcal{S}$到 $T^{s+1}\otimes\mathcal{S}$的同伦等价，$L_{\varphi_-}$也类似。由于 L_{φ_+}和 L_{φ_-} 都保持 $\mathbf{w}$,$\mathrm{gr}_{\mathbf{z}}$)-双分次 $\mathcal{S}$，由引理 4.6 可知，它们必等于恒等映射。

由于假设 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 是 U-等变的，因此 $\delta^{1,1}$ 中出现的其他权重为一的单项式，只包括分量 $\theta\otimes\mathrm{id}\otimes U$，它出现在每个生成元上。

现在我们声称，$\delta^{1,1}$ 中不存在由任何权重大于 1 的单项式 $a\in\mathcal{R}_1^!$ 加权的分量。若 $a\in\mathcal{R}_1^!$ 是由 φ_+ 和 φ_- 的乘积，且其中含有 n 个因子，则记 $\delta^{1,1}$ 中由 a 加权的分量为 L_a。我们注意到，L_a 将 $(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}},\mathrm{gr}_{\mathbf{z}})$-分次平移 $(n-1,n-1)$。（它与 $\mathcal{K}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 上的 $\delta^1_{n+1}(T^{\pm1},T^{\pm1},\dots,T^{\pm},-)$ 具有相同的分次。）我们假设根据归纳法，$\delta^{1,1}$ 对于 $2\le j\le n-1$ 不含权重为 j 的项。若 a 的权重为 n，则容易验证 L_a 是一个链映射（将其视为从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 的映射时）。引理 4.7 蕴含 $L_a=0$。继续归纳，我们得到一个 U-等变的同伦等价 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}\simeq\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}\mathrm{alg}(L)^{\mathcal{R}_0}$，从而完成证明。□

6.2.3. 幂等元 (0，1) 和 (1，1)。 我们陈述如下结果：

引理 6.9。 如果 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 是 U-等变的，那么存在一个 U-等变的同伦等价 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}\simeq\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}_{\text{代数}}(L)^{\mathcal{R}_1}$。对于 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$，同样的结论也成立。

上述陈述的证明与引理6.7 和 6.8的证明并无实质区别，因此留给读者完成。

6.3. **长度为 1 的微分**。 根据引理 6.7、6.8 和 6.9中证明的每个幂等元处的复形的同构，我们知道 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 与一个复形 U在同伦意义下 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$等变同伦等价；该复形由对每个幂等元处的 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$复形求和后，再加入一些幂等元移位微分得到。

我们用 $\Phi^{\pm K_1}$、 $\Phi^{\pm K_2}$和 $\Phi^{\pm K_1,\ \pm K_2}$ 表示来自$\mathcal{X}(L)$的幂等元移位微分。这里， Φ^{K_1} 表示 $\delta^{1,\ 1}$ 中左侧权重为s的倍数、但右侧权重不是 σ 或 τ 的倍数的分量。类似地， Φ^{-K_1} 表示 $\delta^{1,\ 1}$ 中左侧权重为 t 的倍数、但右侧权重不是 σ 或 τ 的倍数的分量。映射 Φ^{K_2} 表示 $\delta^{1,\ 1}$ 中右侧权重为 σ 的倍数、但左侧权重不是 s或 t 的分量。映射 Φ^{-K_2} 类似。映射 $\Phi^{K_1,\ K_2}$ 是 $\delta^{1,\ 1}$ 中左侧权重为s 的倍数且右侧权重为 σ 的倍数的分量。其他 $\Phi^{\pm K_1,\ \pm K_2}$ 的定义类似。

我们用 $\Phi^{\pm K_1\text{代数}}$、 $\Phi^{\pm K_2\text{代数}}$和 $\Phi^{\pm K_1,\ \pm K_2\text{代数}}$表示来自 $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)$ 的类似幂等元移位微分。

我们回顾一下，如命题 6.5中所述，我们采用的是 U-等变的 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$模型。此假设简化了若干论证，但只有从幂等元 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的映射才必需这一假设。

6.3.1. 从幂等元 $(0、0)$ 到 $(1、0)$的微分。

引理 6.10。 映射 $\Phi^{K_1}, \Phi^{K_1\text{代数}}: \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to {}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 是 U-等变链同伦的。类似地， Φ^{-K_1} 和 $\Phi^{-K_1\text{代数}}$ 是 U-等变链同伦的。

备注 6.11。 在此陈述中，我们将 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!$ 和 $\mathcal{R}_1^!$ 视为$\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$的子代数，因此可以将 $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 和 ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$ 都视为 $\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$ 和 $\mathcal{R}_0$ 上的 type-DD 模。此处的断言是，以这种方式来看， Φ^{K_1} 和 $\Phi^{K_1\text{代数}}$ 作为 type-DD 模的态射是链同伦的。

证明。 记 L_s 和 L_t 为 Φ^{K_1} 和 Φ^{-K_1} 中分别由 s和 t加权的分量。记 L_s^{alg}和 L_t^{alg} 为 $\Phi^{K_1\text{代数}}$ 和$\Phi^{-K_1\text{代数}}$ 中对应的分量。我们可以将它们视为从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{S}$的类型-D 态射。根据 $\delta^{1,1}$ 和 $\delta^{1,1\text{代数}}$的结构关系，可以直接验证 L_s、 L_t、 L_s^{alg}和 L_t^{alg} 都是链映射。

映射 L_s 和 L_s^{alg}是从 $\mathcal{C}_{s_1}$ 到 $\mathcal{S}$ 的链映射，并且保持模 2 意义下的 $(\mathrm{gr_w},\mathrm{gr_z})$ 分次。由于 Φ^{K_1} 对 $s_1 \gg 0$ 诱导一个拟同构 $\mathcal{C}_{s_1} \to \mathcal{S}$（比较 MO10，引理 10.1]），因此对于任意 s_1，它在同调上的作用都不可能为零。根据假设， $\Phi^{K_1\text{代数}}$具有这一性质，且与 Φ^{K_1}的分次相同。由引理 4.2，我们得出$L_s \simeq L_s^{\mathrm{alg}}$。取 h_{s_1} 为一个同伦。我们定义一个 DD-双模态射h: $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to {}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$， 令$\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{s_1}$映为 $s \otimes h_{s_1}(\mathbf{x})$。将 Φ^{K_1} 替换为$\Phi^{K_1} + \partial(h)$ 是一个具有相同性质的链映射，因此我们不妨假设 $L_s = L_s^{\mathrm{alg}}$。（此处，我们用 $\partial(h)$表示作用于 h上的类型-DD 态射微分。）

现在考虑由 zs 加权的 Φ^{K_1} 分量。我们将此映射记为 L_{zs} 。我们可以将其分解为和 $L_{zs}^{01}+L_{zs}^{10}$，其中 L_{zs}^{ij} 将代数分次 j 映射到代数分次 i。在定义 $\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}$（$L$）时，我们可以令微分的 zs 分量为 L_{zs}^{10}。

现在我们说明如何通过链同伦消去 Φ^{K_1} 中的 L_{zs}^{01} 项。

对于固定的值 $s_1 \in \mathrm{lk}(K_1,\ K_2)/2+\mathbb{Z}$，我们将上述映射记为 $L^{01}_{zs;s_1}\colon \mathcal{C}_{s_1}\to\mathcal{S}$。首先，对于所有充分大的 s_1，我们知道 $L_s\colon \mathcal{C}_{s_1}\to\mathcal{S}$ 是一个同构，并且 $L_z\colon \mathcal{C}_{s_1}\to\mathcal{C}_{s_1+1}$ 也是一个同构。我们有

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}},\mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_{zs;s_1})=(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}},\mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_s)+(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}},\mathrm{gr}_{\mathbf{z}})(L_z)+(1,1).$$

将 $\mathcal{C}_{s_1}$ 和 $\mathcal{S}$ 通过 $L_s\circ L_z$相识别后，我们可以将 $L^{01}_{zs;s_1}$ 视为 $\mathcal{S}$ 上的一个自同态，它使（$\mathbf{gr_w}$,$\mathbf{gr_z}$）分次增加 $\mathbf{(1,1)}$。不难看出 $L^{01}_{zs;s_1}$是一个链映射，因此引理 4.7 推出 $L^{01}_{zs;s_1}=0$ 对于 $s_1\gg 0$。

为了消去其他 s_1 值对应的 $L^{01}_{zs;s_1}$，我们现在定义一个映射 $j\colon {}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}\to{}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}$。在 $\mathcal{C}_{s_1}$ 上，我们令 j 为

$$\sum_{t_1\geq s_1} zs\otimes T^{s_1-\ell/2}\otimes L^{01}_{zs,t_1}\circ(L_z)^{t_1-s_1}.$$

具体而言，这将 $\mathcal{C}_{s_1}$ 映射到 $T^{s_1-\ell/2}\mathcal{S}$。该和是有限的，因为我们已经令 L^{01}_{zs,t_1} 在 $t_1\gg 0$ 时为零。此外，j 将 $\mathcal{C}_{s_1}$ 映射到与映射 L_s相同的 $\mathcal{S}$ 副本。显然，

$$\partial(j)=L^{01}_{zs}.$$

将此同伦加到 Φ^{K_1}上，因此我们可以假设 Φ^{K_1}的 s 和 zs 系数与 Φ^{K_1}代数中的相同。由于我们假设 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$是一个 U-等变模型，因此不可能存在任何 θs 或 $\theta s\varphi_+$ 加权项，由此可知，原始的 Φ^{K_1} 与 Φ^{K_1}代数链同伦。

关于 Φ^{-K_1} 的证明完全相同，因此证明完毕。 □

6.3.2. 从幂等元 (0,0) 到 (0, 1)的微分。

引理 6.12. 映射 Φ^{K_2},Φ^{K_2}代数 $:\boldsymbol{\mathcal{R}}^!_0\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}\to\boldsymbol{\mathcal{R}}^!_0\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 是 U-等变链同伦。类似地，Φ^{-K_2} 和 Φ^{-K_2}代数 是 U-等变链同伦。

证明。 我们着重构造链同伦 $\Phi^{K_2}\simeq\Phi^{K_2}$代数。

我们可以将映射 Φ^{K_2} 视为由一个映射诱导而来

$$\Phi^{K_2}\colon \boldsymbol{\mathcal{R}}^!_0\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0}\boxtimes_{\mathcal{R}_0}[\phi^\sigma]^{\mathcal{R}_1}\to\boldsymbol{\mathcal{R}}^!_0\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$$

其中 $\phi^\sigma\colon \mathcal{R}_0\to\mathcal{R}_1$ 是方程（3.3）中所述的自然代数态射，而$_{\mathcal{R}_0}[\phi^\sigma]^{\mathcal{R}_1}$ 表示诱导的 DA-双模。 ϕ^{K_2} 与Φ^{K_2}之间的对应关系如下。若存在生成元 $\mathbf{x}$ 以及 $\Phi^{K_2}(\mathbf{x})$ 中含有一个 $a\otimes\mathbf{y}\otimes U^iT^j\sigma$项，则我们将 $\phi^{K_2}(\mathbf{x})$ 视为含有一个分量 $a\otimes\mathbf{y}\otimes U^iT^j$。

根据链环手术公式的构造，映射 ϕ^{K_2} 是一个同伦等价。因此， Φ^{K_2} 和 Φ^{K_2}代数 至多相差一个与保分次同伦自同构复合的后映射，该自同构作用于$\boldsymbol{\mathcal{R}}^!_0\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$。因此，只需证明 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}_{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的所有保分次、 U-等变同伦自同构在链同伦意义下均与恒等映射相同。设 F 是这样一个同伦自同构。若 $a\in\mathcal{R}_0^!$，我们记 F_a 为 F 中权重为 a的分量。

在每个亚历山大分次 $s_1\in\mathbb{Z}$，${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}_{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 中都包含一个生成元，我们将其记作 $\mathbf{y}^{s_1}$。

若 F 是保持分次的同伦自同构，则 F_1 必为同构，因为不存在权重为 $\mathcal{R}_0^!$ 的、从 $\delta^1,_1$ 指向$\mathbf{y}_{s_1}$或从$\mathbf{y}_{s_1}$指向 $\delta^1,_1$ 的分量。因此， F_1 对所有 s_1 都将 $\mathbf{y}_{s_1}$ 映到 $\mathbf{y}_{s_1} \otimes 1$ 。

接下来，我们注意到 F_z 和 F_w 使 $\mathrm{gr_w}$-分次平移 ± 1 ，因此必定为零，因为 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 只支撑在偶数 $\mathrm{gr_w}$-分次上。

现在考虑 F_{wz} 和 F_{zw}。考察关系$\partial(\Phi^K) = 0$的 wzw 系数，我们得到

$$F_{wz} \circ L_z + L_z \circ F_{zw} = \partial(F_{zwz}).$$

特别地，映射 F_{zw} 在$\mathbf{y}_{s_1}$ 上非零，当且仅当 F_{wz} 在 $\mathbf{y}_{s_1+1}$上非零。注意，由于 $L_z \circ L_w = \mathrm{id} \otimes U$， $L_z(\mathbf{y}_{s_1})$ 和 $L_w(\mathbf{y}_{s_1+1})$ 中一个的权重必为 1，另一个的权重必为 U。对于每个 $s_1 \in \mathbb{Z}$，我们将如下定义 $E(s_1) \subseteq \{-1, 1\}$。

(1) 当且仅当 $F_{wz}(\mathbf{y}_{s_1})$非零且 $L_Z(\mathbf{y}_{s_1-1})$的权重为 1 时，我们定义 $-1 \in E(s_1)$。

(2) 当且仅当 $F_{zw}(\mathbf{y}_{s_1})$非零且 $L_W(\mathbf{y}_{s_1+1})$的权重为 1 时，我们定义 $1 \in E(s_1)$。

注意，由于 F 保持 $(\mathrm{gr_w}, \mathrm{gr_z})$ 双分次以及 Alexander 双分次，因此映射 F_{wz} 和 F_{zw} 只能具有 $\mathcal{R}_1$ 因子为 $1 \in \mathcal{R}_1$ 的分量。

现在我们如下定义 j 的一个同伦。若 $-1 \in E(s_1)$，则规定 $j(\mathbf{y}_{s_1})$ 中含有一项 $w \otimes \mathbf{y}_{s_1-1} \otimes 1$。若 $1 \in E(s_1)$，则规定 $j(\mathbf{y}_{s_1})$ 中含有一项 $z \otimes \mathbf{y}_{s_1+1} \otimes 1$。（若 $E(s_1) = \{-1, 1\}$，则规定 $j(\mathbf{y}_s)$ 等于上述两个元素之和。）

容易验证

$$\partial(j) = wz \otimes F_{wz} + zw \otimes F_{zw}.$$

因此，经过链同伦后，我们可以假设 F_{wz} 和 F_{zw} 均为零。我们在图6.1 中示意 $E(s_1) = \{1, -1\}$ 的情形。

接下来，我们通过归纳法消去由长度较大的单项式加权的 F 中的各项。根据上文相同的分次论证，不可能存在由形如 $wz \cdots w$ 或 $zw \cdots z$ 的单项式加权的项（即长度为奇数的单项式）。上文用于消去由 wz 或 zw 加权的项的论证，无需实质性修改即可用于消去由长度大于 2 的偶数长度单项式加权的项（即 $wz \cdots z$ 和 $zw \cdots w$）。由于假设 F 是 U-等变的，因此不存在由 θ 的倍数加权的分量。由此我们证明了 F 与恒等映射链同伦，证明完毕。□

6.3.3. 从幂等元 (1，0) 到 (1，1)以及从 (0，1) 到 (1，1)的微分。 现在陈述以下引理:

引理 6.13。

(1) 映射 $\Phi^{K_2}, \Phi^{K_2\text{代数}}$： ${}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to {}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 是 U-等变链同伦的。同样，Φ^{-K_2} 和 $\Phi^{-K_2\text{代数}}$ 是 U-等变链同伦的。*(2)* 映射 $\Phi^{K_1}, \Phi^{K_1\text{代数}}$： ${}^{\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1} \to {}^{\mathcal{R}_1^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 是 U-等变链同伦的。同样， Φ^{-K_1} 和 $\Phi^{-K_1\text{代数}}$ 是 U-等变链同伦的。

上述引理的证明与引理6.10 和6.12的证明完全相同，因此细节留给读者。

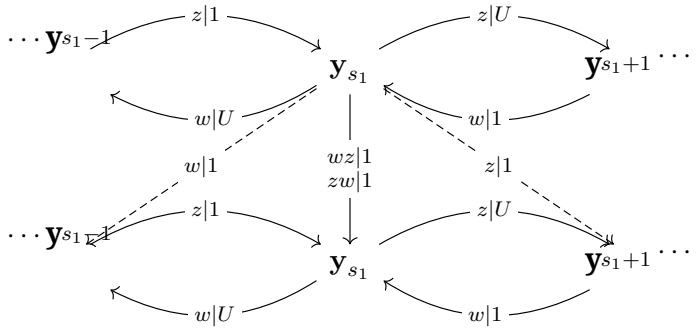


FIGURE 6.1. 消去 F（实线箭头）中的 wz 和zw 带权箭头的同伦 j（虚线箭头），当 $E(s_1) = \{-1, 1\}$。

6.4. 长度 2 微分。现在我们分析长度 2 微分。手术复形的长度 2 微分可分解为四个映射，每个映射对应 L 上的一种定向。映射 $\Phi^{K_1 \cup K_2}$（两个分量均取正定向）使 $\mathbf{gr}_{\mathbf{w}}$ 分次增加 1。对于 L 上的任意定向，记为 L，若我们令$\mathbf{p} \subseteq \{w_1, w_2, z_1, z_2\}$ 包含来自 K_1 和 K_2 各一个基点，并且当且仅当 K_i 上的 $\mathfrak{o}$ 取正定向时包含 z_i（否则包含 z_i），则映射 Φ^L 使 $\mathrm{gr}_{\mathbf{p}}$ 增加 1（参见 [Zem21，引理 6.4 (1)]）。

引理 6.14. 设 L 是一个二分量 L-空间链环，并假设 ${}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 是链环手术复形 L的一个U-等变模型。若 $F\colon \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$是一个 U-等变链映射，其权重是 s 和 σ的倍数，且具有 $+1$ $\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$-分次以及与 $\Phi^{K_1 \cup K_2}$相同的亚历山大分次移位，那么 F 是零同伦的。对于 $K_1 \cup K_2$的其他定向，只要将$\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}$ 分次替换为$\mathrm{gr}_{\mathbf{p}}$ 分次，同样的结论也成立，其中 $\mathbf{p} \subseteq \{w_1, z_1, w_2, z_2\}$ 如上所述。

证明。 如同引理 6.12的证明中一样，我们可以将陈述中的映射 F 解释为一个从

$$\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} \boxtimes_{\mathcal{R}_0[\phi^\sigma]} \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}.$$

左边与 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$（在 U-等变意义下）同伦等价，因此我们可以将映射 F 改为视作一个映射

$$F\colon {}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1} \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}.$$

记 ${}_{s_1}\mathbf{y}$ 为 ${}^{\mathcal{R}_0^!}\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的生成元，并记 $T^{s_1}\mathbf{e}$ 为 $\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 的生成元。映射 F 唯一可能的分量是将 $\mathbf{y}_{s_1}$ 发送到 $zs \otimes T^{s_1+\delta+1}\mathbf{e} \otimes_{U^{H_{K_1}(s_1)-1}}$，其中 δ 是某个固定的亚历山大分次移位。（由 s 加权的分量不可能存在，因为马斯洛夫分次移位 $+1$ 不可能实现——所有生成元的 $\mathbf{gr}_{\mathbf{w}}$ 分次都是偶数；由 θs 或 $\theta s \varphi_+$ 加权的分量不可能存在，因为我们假设 F 是 U-等变的。）由于 δ 固定，而且模 $\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1}$ 具有平移作用，该作用使这个亚历山大分次移动 1，但保持马斯洛夫分次不变，因此为方便起见，我们可以假设 $\delta = 0$。

记 $\epsilon(s_1) \in \mathbb{Z}/2$ 为该分量在 F 中的系数。（即，当且仅当 $F(\mathbf{y}_{s_1})$ 非零时，令 $\epsilon(s_1) = 1$。）也就是说，

$$F(\mathbf{y}_{s_1}) = \epsilon(s_1) \cdot zs \otimes T^{s_1+1}\mathbf{e} \otimes U^{H_{K_1}(s_1)-1}. \tag{6.3}$$

首先，我们观察到，对于 $s_1 \gg 0$，$\epsilon(s_1) = 0$。这是因为，对于 $s_1 \gg 0$，$H_{K_1}(s_1) = 0$，因此上述方程会涉及 U 的负次幂，这是不允许的。事实上，我们看到，若 $H_{K_1}(s_1) = 0$，则 $\epsilon(s_1) = 0$。

现在我们通过下式定义同伦：

$$j(\mathbf{y}_{s_1}) = \left(\sum_{t_1 \geq s_1} \epsilon(t_1)\right) s \otimes T^{s_1}\mathbf{e} \otimes U^{H_{K_1}(s_1)-1}.$$

不难看出，这个同伦满足 $\partial(j) = F$。

关于 L 上其他定向的证明也同样成立*mutatis mutandis*。 □

备注 6.15。如果从陈述中省略“U-等变”，上述引理便不成立。例如，我们可以取 $\Phi^{K_1} \circ \Phi^{K_2}$，并将 $\mathcal{K}^!$ 项乘以 θ。

6.5. **命题的证明 6.1**。我们现在总结关于 $\boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}} \simeq \boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 的证明。

命题的证明 *6.1*。复形 $\boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 分解为一个由 type-DD 双模构成的超立方体：

$$\boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}} = \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} & \xrightarrow{\Phi^{K_2}+\Phi^{-K_2}} & \boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1} \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi^{K_1}+\Phi^{-K_1}} & \searrow{\scriptstyle \Phi^{\pm K_1,\pm K_2}} & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{K_1}+\Phi^{-K_1}} \\ \mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_0} & \xrightarrow{\Phi^{K_2}+\Phi^{-K_2}} & \mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_1} \end{array} \tag{6.4}$$

根据假设，所有这些复形和映射都是 U-等变的。复形$\boldsymbol{\kappa}^!\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 可类似地分解。

命题 6.5 表明，$\mathrm{K}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 同伦等价于一个与方程 (6.4) 中的复形类似的复形，但用 $\mathcal{R}_\varepsilon^!\mathcal{X}\mathrm{alg}(L)^{\mathcal{R}_\nu}$ 替换每个 $\mathcal{R}_\varepsilon^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{R}_\nu}$。由于这些同伦等价是 U- 等变的，所得超立方体的结构映射也是 U-等变的。应用引理 6.10、6.12 和 6.13，我们得出 $\Phi^{\pm K_i} \simeq \Phi^{\pm K_i}$ alg，因此 $\mathrm{K}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 同伦等价于一个与 $\mathrm{K}^!\mathcal{X}(L)^{\mathcal{K}}$ 一致的复形，可能仅在其对角（长度为 2）映射上有所不同。引理 6.14 表明，对角映射的任意两种选取都是同伦的，这意味着这两个超立方体是同伦等价的，从而完成证明。 □

7. Relating the completed and uncompleted algebras

我们可以通过几种自然的方式来完成 $\mathcal{K}^!$：

(1) 代数 $\mathcal{K}^!$ 上不进行完备化。(2) 关于 $\mathcal{R}_0^!$ 上的张量权重滤子对 $\mathcal{K}^!$ 进行完备化。

(3) 关于 $\mathcal{R}_0^!$ 和 $\mathcal{R}_1^!$ 上的张量权重滤子对 $\mathcal{K}^!$ 进行完备化。(4) 关于 $\mathcal{R}_1^!$. 上的张量权重滤子对 $\mathcal{K}^!$ 进行完备化

我们关注代数完备化的第一种和第二种方式。我们将这两种代数完备化方式记为 $\mathcal{K}^!$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$。第三种和第四种方式目前没有应用，因此本文不予讨论。

命题 7.1. $\mathcal{K}^!$模 与 $\boldsymbol{\kappa}^!$模之间存在一个 A_∞-等价的范畴等价。

注 7.2。 从概念上说，证明与这样一个事实有关：$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^!$ 和 $\mathcal{R}_0^!$ 的同调都等于由两个生成元生成的外代数。事实上，存在一个 A_∞-代数$\mathcal{K}_\infty^!$，它与 $\mathcal{K}^!$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$都拟等价。代数 $\mathcal{K}_\infty^!$ 的幂等元 (0,0) 中包含由两个生成元生成的外代数，而非 $\mathcal{R}_0^!$。参见 [Zem25, 引理 3.3]。

证明。 我们将定义 A_∞-代数态射 ϕ 和 ι，并考虑由此诱导的双模 ${}^{\mathcal{K}^!}[\phi]_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^!{}_{\mathcal{K}^!}[\iota]$（参见 [LOT15，定义 2.2.48]）。我们将证明 $[\phi]\boxtimes[\iota]$和 $[\iota]\boxtimes[\phi]$都与恒等函子同伦等价。此外，这些双模以及它们之间的态射作为 DA-双模都是有界的（也就是说，若 $n\gg 0$，则有 $\delta_n^1=0$ ）。

态射 ι 由包含映射 $\iota\colon \mathcal{K}^!\to\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$给出。也就是说，我们有 ι_1 是包含映射，且对 $j>1$有 $\iota_j=0$。

态射 ϕ 更为复杂。我们先定义映射 $\phi_1\colon \boldsymbol{\mathcal{K}}^!\to\mathcal{K}^!$。我们选取一个整数 $N\geq 4$。（对于我们的证明， N 的选择并不重要，因此我们可以取 $N=4$。）

若 $a\in \mathbf{I}_0\cdot\mathcal{K}^1\cdot\mathbf{I}_0$ 是一个单项式，我们将 $\mathrm{wt}_\theta(a)\in\{0,1\}$ 定义为：若 a 不是 θ的倍数，则其值为 0；否则为 1。我们用 $\mathrm{wt}(a)$ 表示 a的因子个数。（例如，$\mathrm{wt}(wz)=2$，$\mathrm{wt}(\theta wzwz)=5$。）我们记 $\mathrm{wt}_+(a)=\mathrm{wt}(a)+\mathrm{wt}_\theta(a)$。注意，$\mathrm{wt}_+$ 在 μ_1 和 μ_2作用下保持不变。我们定义

$$\phi_1(a)=\begin{cases} a & \text{if } \mathrm{wt}_+(a)\leq N\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们将 ϕ_1 定义为在所有幂等元为 (0,1) 或 (1,1) 的单项式上的恒等映射。若 a和 b 是幂等元为 (0,0) 的单项式，则定义

$$\phi_2(a,b)=\begin{cases}(ab)'\theta & \text{if } \mathrm{wt}_+(ab)>N, \mathrm{wt}_+(a)\leq N, \mathrm{wt}_+(b)\leq N\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在上文中，$(ab)'$ 表示由 ab 得到的单项式：将 wt 减少 2（从 ab中删去最后两个非-θ 符号），同时保持 wt_θ不变。例如，$(wzwzwz)'=wzwz$ 和 $(zwzw\theta)'=zw\theta$。若 a 或 b 的幂等元不是 (0,0)，则我们将 $\phi_2(a,b)$定义为零。

相容条件的证明如下。只有一个输入时，相容条件相当于断言 ϕ_1 是一个链映射，这很容易验证。对于两个输入 a和 b，相容条件的证明如下。相容条件相当于断言

$$\phi_1(ab)+\phi_1(a)\phi_1(b)+\mu_1\phi_2(a,b)+\phi_2(\mu_1 a,b)+\phi_2(a,\mu_1 b)=0.$$

注意，只有当 $ab\neq 0$ 时，该结论才是非平凡的。这个关系的证明分为几种情况：

(1) ($\mathsf{wt}_+(a) \leq N, \mathsf{wt}_+(b) \leq N$ 且 $\mathsf{wt}_+(ab) \leq N$) 在这种情况下，$\phi_2(a,b) = \phi_2(\mu_1 a, b) = \phi_2(a, \mu_1 b) = 0$，相容条件显然成立。(2) ($\mathsf{wt}_+(a) > N$ 或 $\mathsf{wt}_+(b) > N$) 在这种情况下，$\phi_1(ab) + \phi_1(a)\phi_1(b) = 0$，并且$\phi_2(a,b) = \phi_2(\mu_1 a, b) = \phi_2(a, \mu_1 b) = 0$，因此相容条件成立。(3) ($\mathsf{wt}_+(a) \leq N, \mathsf{wt}_+(b) \leq N$ 且 $\mathsf{wt}_+(ab) > N$) 在这种情况下，$\phi_1(a)\phi_1(b) + \phi_1(ab) = ab$。若 $\mathsf{wt}_\theta(a) = \mathsf{wt}_\theta(b) = 0$，则 $\mu_1\phi_2(a,b) = ab$，而 $\phi_2(\mu_1 a, b) = \phi_2(a, \mu_1 b) = 0$，因此相容条件成立。若 $\mathsf{wt}_\theta(a) = 1$ 而 $\mathsf{wt}_\theta(b) = 0$，则 $\mu_1\phi_2(a,b) = \phi_2(a, \mu_1 b) = 0$，而 $\phi_2(\mu_1 a, b) = ab$，因此相容条件成立。$\mathsf{wt}_\theta(a) = 0$ 而 $\mathsf{wt}_\theta(b) = 1$ 的情况类似。最后，若 $\mathsf{wt}_\theta(a) = \mathsf{wt}_\theta(b) = 1$，则 $ab = \mu_1\phi_2(a, b) = \phi_2(\mu_1 a, b) = \phi_2(a, \mu_1 b) = 0$，因此相容条件成立。

现在考虑三个或更多输入时的相容条件。我们聚焦于三个输入，因为多于三个输入的情形可由类似的推理得出。与前面的情形类似，只有当所有输入都属于$\mathbf{I}_0 \cdot \mathcal{R}_0^! \cdot \mathbf{I}_0$时，该条件才是非平凡的。令 $F\colon R_0^! \otimes R_0^! \otimes R_0^! \to R_0^!$ 为映射

$$F(a,b,c) = \mu_2(\phi_2(a,b), \phi_1(c)) + \mu_2(\phi_1(a), \phi_2(b,c)) + \phi_2(\mu_2(a,b), c) + \phi_2(a, \mu_2(b,c)).$$

由于 $\phi_3 = 0$，这就是相容条件中所有项的和。对于一个和两个输入的相容条件表明，F 是一个链映射（其中我们在定义域上赋予微分 $\mu_1 \otimes \mathbb{I}^2 + \mathbb{I} \otimes \mu_1 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I}^2 \otimes \mu_1$）。此外，$\mathsf{wt}_\theta$ 在 F 的定义域和陪域上都给出了一个分次，而 F 会将其提高 1。示意地，若将 $(C_3 \to C_2 \to C_1 \to C_0)$ 记作 F 的定义域（其中下标表示 wt_θ-分次），并将 $(E_1 \to E_0)$ 记作陪域，则 F诱导出一个从 C_1 到 E_0的映射，并且 F 在 C_3、C_2 和 C_1上为零。由于 F 是链映射，且微分在 E_0上为零，因此 $\mu_1 \circ F$为零。然而，$R_0^!$ 在 wt_θ- 分次 1 上的同调是平凡的，所以 $\mu_1\colon E_1 \to E_0$ 是单射，从而 $F = 0$。因此，相容条件成立。类似的论证表明，所有涉及更多输入的相容条件也都成立。

我们现在构造双模态射

$$\mathcal{K}^!\langle\phi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!} \boxtimes \boldsymbol{\mathcal{K}}^!\langle\iota\rangle_{\mathcal{K}^!} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}^!\mathbb{I}_{\mathcal{K}^!}$$

它们满足 $g \circ f = \mathbb{I}$ 和 $f \circ g = \mathbb{I}$。

我们如下定义 f。令 $f_1^1(1) = 1 \otimes 1$。令 f_2^1除幂等元 $(0,0)$ 外均为零。令 $f_2^1(1,a)$ 在 $\phi_1(a) = 0$（即 $\mathsf{wt}_+(a) > N$）且 $\mathsf{wt}_\theta(a) = 0$ 时才可能非零。在这种情况下，令 $f_2^1(1,a) = a'\theta \otimes 1$，其中 a' 仍表示将 $\mathsf{wt}(a)$ 减少 2、同时保持 $\mathsf{wt}_\theta(a)$ 不变后得到的单项式。

容易验证 f 是一个双模态射。我们使用与 f相同的公式定义映射 g。容易验证 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都等于恒等映射。

接下来，我们构造$\boldsymbol{\kappa}^!\langle\iota\rangle_{\mathcal{K}^!} \boxtimes \mathcal{K}^!\langle\phi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$ 与$\boldsymbol{\kappa}^!\mathbb{I}_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$之间的同构。我们注意到，$\boldsymbol{\kappa}^!\langle\iota\rangle_{\mathcal{K}^!} \boxtimes \mathcal{K}^!\langle\phi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$ 的结构映射与$\mathcal{K}^!\langle\phi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!} \boxtimes \boldsymbol{\mathcal{K}}^!\langle\iota\rangle_{\mathcal{K}^!}$中的结构映射公式相同。此外，我们上面定义的双模映射 f 和 g 至多将权重过滤降低1，因此它们在完备代数$\boldsymbol{\mathcal{K}}^!$上诱导出良定义的映射。特别地，我们还得出$\boldsymbol{\kappa}^!\langle\iota\rangle_{\mathcal{K}^!} \boxtimes \mathcal{K}^!\langle\phi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$ 与$\boldsymbol{\kappa}^!\mathbb{I}_{\boldsymbol{\mathcal{K}}^!}$同构，从而完成证明。□

例 7.3。 复形$\mathbf{x}$ $\mathbf{y}^{1+wz}$ 在$\boldsymbol{\pi}^{!}_{0}$Mod中是可缩的，因为我们可以定义恒等映射的零伦 H 如下： $H(\mathbf{y})$ $=\sum_{n=0}^{\infty}(wz)^{n}\otimes\mathbf{x}$。我们注意到，该复形在 $\mathcal{R}^{!}_{0}$Mod中也是可缩的，因为我们可以改为取 $H(\mathbf{y})$ $=(1+wz)\otimes\mathbf{x}+wz\theta\otimes\mathbf{y}$， $H(\mathbf{x})$ $=wz\theta\otimes\mathbf{x}$。

因此，我们得到了主要定理：

定理 7.4. 若 $\mathscr{A}$是一个弧系，使得 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}$是 U-等变的，则存在一个 DD 型双模 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}(L;\ \mathscr{A})^{\mathcal{K}}\simeq{}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}_{\text{代数}}(L)^{\mathcal{K}}$之间的同伦等价。

证明。 命题 6.1说明，在完备代数 $\boldsymbol{\mathcal{K}}^{!}$上存在一个等价。命题 7.1 进而说明，这个等价在未完备代数 $\mathcal{K}^{!}$上同样成立。 □

将上述等价与对偶化双模 ${}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^{!}}$作张量积，即得到定理 1.2中的结论。

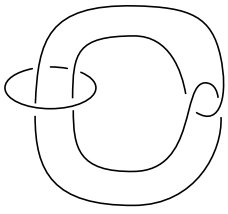
8. Examples

本节中，我们以正交缠的怀特海德链环 $\mathrm{Wh}_{+}=K_1\cup K_2$ 为例，说明双模 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(L)^{\mathcal{K}}$ 的构造，其中 L 配备的框架为（λ_1， λ_2）$=(0,\ 0)$。我们先描述双模 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Wh}_{+})^{\mathcal{K}}$，然后计算对 Wh_{+} 的一个分量进行 0-手术后得到的纽结 $W\subseteq S^1\times S^2$ 的手术复形。

8.1. 双模 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Wh}_{+})^{\mathcal{K}}$。

本节中，我们计算双模 ${}^{\mathcal{K}^{!}}\mathcal{X}_{\text{代数}}(\mathrm{Wh}_{+})^{\mathcal{K}}$。 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Wh}_{+})^{\mathcal{K}}$ 的 (0，0) 和 (1，0) 幂等元见 [CZZ24，第 6 节。2]（另见 [CZZ25，第 4 节。1]）。如 [Zem25，第 5 节所述， DD-双模在（$\mathcal{K}^{!}$， $\mathcal{R}_0$）上的描述与这一观点基本等价。

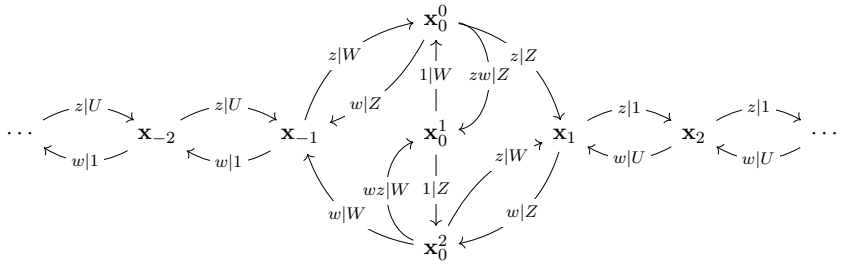
在图8.1中，我们展示了 H-函数 Wh_{+}。方框中的项表示（0,0）幂等元中代数分次为 0 的生成元。



s_2 \ s_1	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\vdots$	$\ddots$	2	1	0	0	0	
1	$\cdots$	2	1	**0**	0	0	$\cdots$
0	$\cdots$	**2**	**1**	1	**0**	**0**	$\cdots$
-1	$\cdots$	3	2	**1**	1	1	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

FIGURE 8.1. 正交缠的怀特海德链环 Wh_{+} 的 H-函数。

双模 $\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}(\mathbf{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0}$ 具有以下形式：



这里，$\mathbf{x}_{s_1}^j$ 表示阶梯复形 $\mathcal{C}_{s_1}$ 中首个亚历山大分次为 $A_1 = s_1$ 的第 j 个生成元；如果$\mathcal{C}_{s_1}$中只有一个生成元，我们将$\mathbf{x}_{s_1}^0$ 记为$\mathbf{x}_{s_1}$ 。箭头表示 $\delta^{1,\,1}$ 微分。根据 U-等变条件，每个生成元都有一条指向自身的 θ加权箭头$\theta|U$ ，图中省略了这条箭头。（为使图示简洁，对于其他幂等元，我们也将省略此类箭头。）

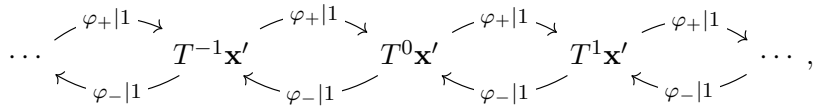
生成元的分次如下：

$$\begin{aligned}(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(\mathbf{x}_0^0) &= (0, -2, 0, 1)\\ (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(\mathbf{x}_0^1) &= (-1, -1, 0, 0),\\ (\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(\mathbf{x}_0^2) &= (-2, 0, 0, -1),\end{aligned}$$

对于 $s_1 \neq 0$,

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(\mathbf{x}_{s_1}) = \begin{cases}(0, -2s_1, s_1, 0) & \text{if } s_1 > 0,\\ (2s_1, 0, s_1, 0) & \text{if } s_1 < 0.\end{cases}$$

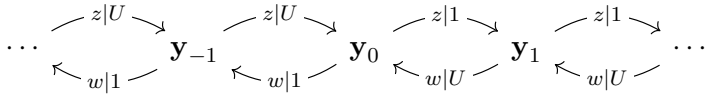
由于删除 K_1 后， K_2 是一个平凡结，因此复形 $\mathcal{S} = \mathcal{CFK}(K_2)$ 由单个生成元张成，我们将其记为$\mathbf{x}'$。因此，双模 $\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(\mathbf{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0}$ 具有以下形式：



其中 $\mathbf{x}'$ 是 $\mathcal{CFK}(K_2)$ 的生成元，而 K_2 是平凡结。我们令

$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(T^i\mathbf{x}') = (0, 0, i, 0).$$

（0，1）幂等元 $\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}(\mathbf{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$ 具有以下形式：



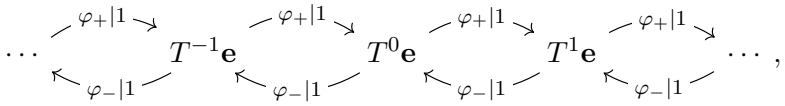
由于 K_1 是平凡结，我们计算得

$$\eta(s_1) = H_{K_1}(s_1) - H_{K_1}(s_1 + 1) = \max\{0, -s_1\}.$$

$\mathbf{y}_{s_1}$ 的分次为

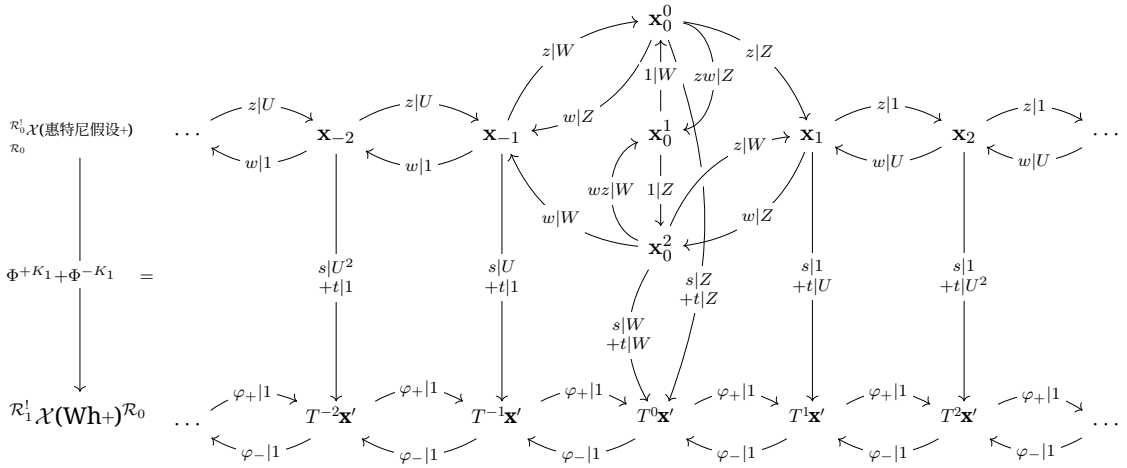
$$(\mathrm{gr}_{\mathbf{w}}, \mathrm{gr}_{\mathbf{z}}, A_1, A_2)(\mathbf{y}_{s_1}) = \begin{cases}(0, -2s_1, s_1, 0) & \text{if } s_1 \geq 0,\\ (2s_1, 0, s_1, 0) & \text{if } s_1 < 0.\end{cases}$$

$(1,1)$ 幂等元 $\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$ 具有以下形式：

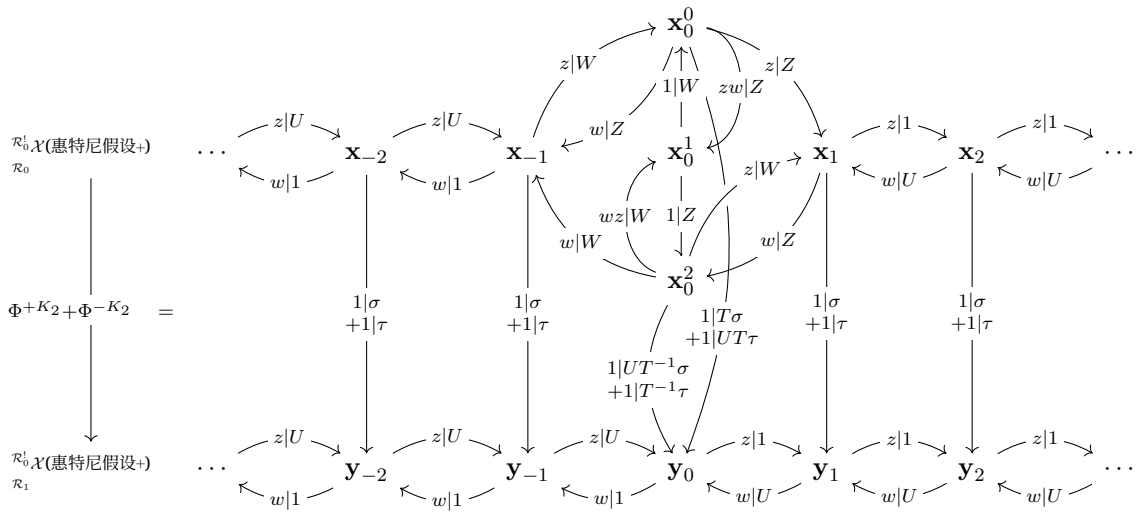


这对俄勒冈州中的每个二分量 L-空间链环都相同。每个生成元 $T^i\mathbf{e}$ 的马斯洛夫分次均为 0，其亚历山大分次为 $(A_1,A_2)(T^i\mathbf{e})=(i,0)$。

长度为 1 的映射 $\Phi^{+K_1}+\Phi^{-K_1}\colon \mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0}\to\mathcal{R}_1^!\mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0}$ 如下所示（此计算也见于 [CZZ24 第 6.2] 节）



接下来，我们根据第 $\Phi^{+K_2}+\Phi^{-K_2}$ 节 $\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0}\to\mathcal{R}_0^!\mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$ 中的描述计算长度为 1 的映射。5.2.2结果绘制如下图所示。



例如，我们有

$$\mathrm{gr}(R^\sigma(\mathbf{x}_0^0))=\mathrm{gr}(\mathbf{x}_0^0)+\mathrm{gr}(R^\sigma)=(0,-2,0,1)+(0,2,0,0)=(0,0,0,1),$$

其中 $\mathrm{gr}=(\mathrm{gr_w},\ \mathrm{gr_z},\ A_1,\ A_2)$，且 $\mathbf{y}_0$ 的分次为 $\mathrm{gr}=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$。因此，

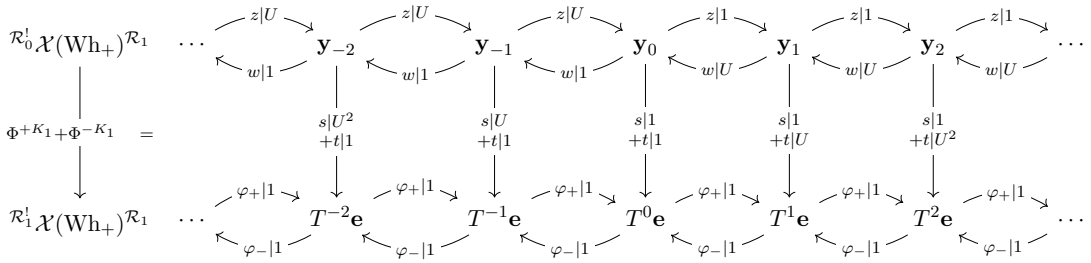
$$R^\sigma(\mathbf{x}_0^0)=\mathbf{y}_0\otimes T,$$

其中 T 中的系数携带分次 $A_2 = 1$。这对应于从$\mathbf{x}_0^0$ 指向$\mathbf{y}_0$的箭头$1|T\sigma$ 。其余分量可以用相同的方法计算。

接下来，我们计算长度为 1 的映射 $\Phi^{+K_1} + \Phi^{-K_1}$：$\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1} \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$。由于 K_1 是平凡结，0-框架结手术复形 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}_0(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$ 具有如下作用

$$L_\sigma(\mathbf{y}) = L_\tau(\mathbf{y}) = \mathbf{e},$$

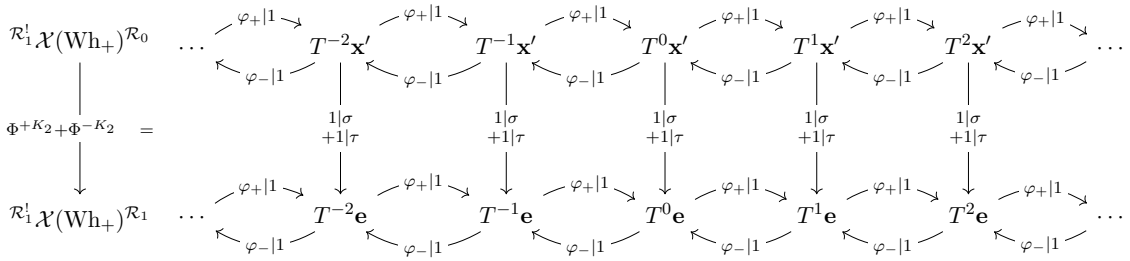
其中 $\mathbf{y}$ (分别为 $\mathbf{e}$) 是 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{X}_0(K_1)^{\mathbb{F}[U]}$的 0（分别为 1）幂等元中的唯一生成元。怀特黑德链环的链接数为 0。因此，根据第5.2.4节中的描述，长度为 1 的映射具有如下形式：



最后，我们计算长度为 1 的映射 $\Phi^{+K_2}+\Phi^{-K_2}$：$\mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0} \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$。由于 K_2 是平凡结，0- 框架手术复形 $\mathcal{X}_0(K_2)^{\mathcal{K}}$ 具有如下形式：

$$\mathbf{x}' \xrightarrow{\sigma+\tau} \mathbf{e}, \tag{8.1}$$

其中 $\mathbf{x}'$ (分别是 $\mathbf{e}$) 是 $\mathcal{X}_0(K_2)^{\mathcal{K}}$中 0（分别是 1）幂等元里的唯一生成元。然后，根据第5.2.3节中的描述，长度为1的映射具有如下形式



长度 2 映射 $\Phi^{\pm K_1,\ \pm K_2}$：$\mathcal{R}_0^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_0} \to \mathcal{R}_1^! \mathcal{X}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{R}_1}$ 为零。

8.2. **密歇根州中的怀特黑德结** $S^1 \times S^2$。现在我们计算怀特黑德结 $W \subseteq S^1 \times S^2$ 的手术复形，该结是通过对 K_1 施行 0-手术得到的。利用 ${}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!}$ 中定义的 AA 型双模 [Zem25, 第 3 节4]，我们有

$$\mathcal{X}_0(S^1 \times S^2, W)^{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{X}_0(U)^{\mathcal{K}} \boxtimes {}_{\mathcal{K}}[\mathcal{T}r]_{\mathcal{K}^!} \boxtimes {}^{\mathcal{K}^!}\mathcal{X}^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Wh}_+)^{\mathcal{K}}, \tag{8.2}$$

这里，U 是 S^3 中的平凡结，其 0-框架手术复形 $\mathcal{X}_0(U)^{\mathcal{K}}$ 如下所示：

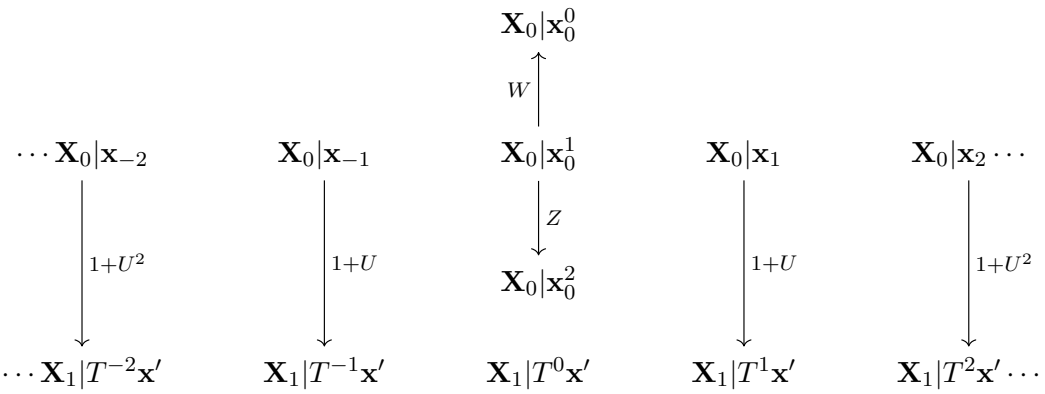
$$\mathcal{X}_0(U)^{\mathcal{K}} = (\ \mathbf{X}_0 \xrightarrow{\sigma+\tau} \mathbf{X}_1\ ).$$

从 [Zem25 第 3 节4]中的构造可以直接看出，唯一满足以下条件的单项式序列为 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{K}^!$

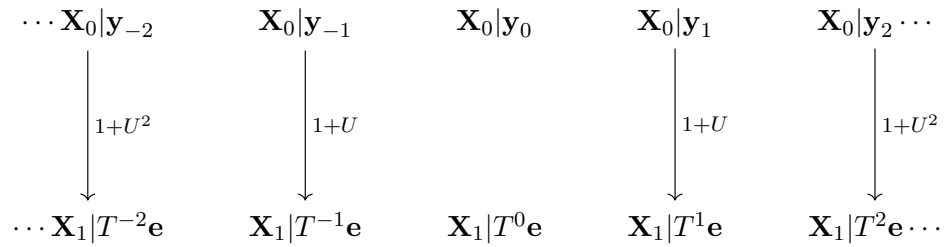
$$m_{1|1|n}(\sigma, 1, a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

具有 $n=1$ 和 $a_1=s$。对于与 τ 非平凡配对的序列，也有类似的结论。

$\mathcal{X}_0(S^1\times S^2,\ W)^{\mathcal{K}}$ 的幂等元 0 子空间因此由以下无穷复形给出



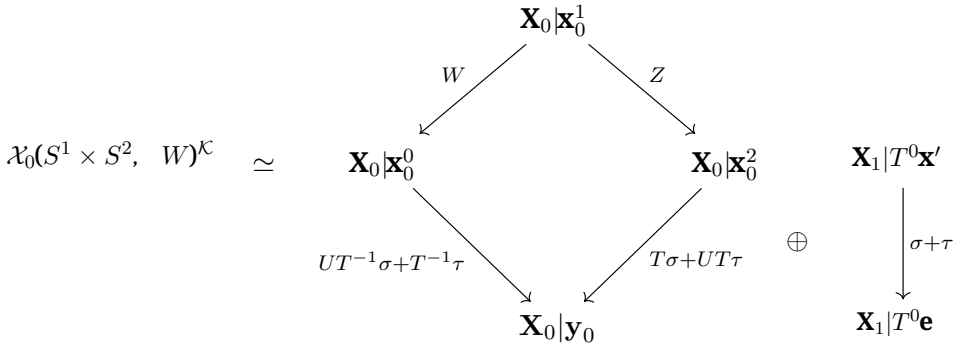
张量积的幂等元 1 由下式给出



我们注意到，在 $\mathcal{K}$ 的两个幂等元 (0，0) 和 (1，1) 中，元素 $1+U^n$ 是单位元，因为$n>0$ 我们相对于 U-进拓扑对 $\mathcal{K}$ 进行完备化（关于 $\mathcal{K}$上的完备化，更多内容请参见 [Zem23, 第 4.2]节）。特别地，经过同伦等价后，我们可以移除除以下生成元之外的所有生成元

$$\mathbf{X}_0|\mathbf{x}_0^0,\quad \mathbf{X}_0|\mathbf{x}_0^1,\quad \mathbf{X}_0|\mathbf{x}_0^2,\quad \mathbf{X}_1|T^0\mathbf{x}',\quad \mathbf{X}_0|\mathbf{y}_0,\quad \text{and}\quad \mathbf{X}_1|T^0\mathbf{e}.$$

此外，利用上面对 Φ^{K_2} 和 Φ^{-K_2} 的描述，我们可以轻易计算出 $\mathcal{X}_0(S^1\times S^2,W)^{\mathcal{K}}$ 的相应模型具有以下形式:



注记 8.1. 注意，$\mathcal{X}_0(S^1\times S^2,\ W)^{\mathcal{K}}$ 与 $\mathcal{X}_0(T_{2,\ 3})^{\mathcal{K}}\oplus\mathcal{X}_0(U)^{\mathcal{K}}$同构。

References

[BLZ22] Maciej Borodzik、Beibei Liu 和 Ian Zemke, *Lattice homology formality and plumbed l-* , , , . arXiv: . . 即将发表，.[*space links* 2022 2210 15792 *Journal of the European Math. Society* BLZ24] , *Heegaard Floer homology knotifications of links and plane curves with noncuspidal* , , , 代数与几何拓扑 *singularities* **24** 2024 9, 4837 4889 ( )，第 – 期。[CZZ24] Daren Chen、Ian Zemke 和 HUGO ZHOU, *L-space satellite operations and knot Floer homology* 2024 2412 05755 [ ] , . 电子预印本，arXiv . math.GT . [CZZ25] , *Applications of the L-space satellite formula* 2025 2509 20288 , . 电子预印本，arXiv . math.GT .[GN15] Eugene Gorsky 和 Andr´ as Nemethi´, *Lattice and Heegaard Floer homologies of algebraic links* **23** 2015 12737 12780 , Int. Math. Res. Not. IMRN ( ), – .[HMSZ25] Kristen Hendricks、Abhishek Mallick、Matthew Stoffregen 和 Ian Zemke, *The link surgery formula and equivariant surgeries* 2025 2507 12809 [ ] , . 电子预印本，arXiv . math.GT .[Kel01] Bernhard Keller, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, 《同调与同伦应用》3 (2001), 第 1 期，1–35。[Liu17] Yajing Liu, *L-space surgeries on links*, 《量子拓扑》8 (2017), 第 3 期，505–570。[LOT15] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsv´ath 和 Dylan P. Thurston, *Bimodules in bordered Heegaard Floer homology* **19** 2015 2, 525 724 Geom. Topol. ( ), no. – .[LOT18] Robert Lipshitz 、 Peter S. Ozsvath 和 Dylan P. Thurston, *Bordered Heegaard Floer homology* **254** 2018 1216, +279 , 《美国数学会回忆录》( ), 第 viii 期。[LS87] Larry Lambe 和 Jim Stasheff, *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, 《数学手稿》58 (1987), 第 3 期，363–376。[MO10] Ciprian Manolescu 和 Peter S. Ozsv´ath, , . 电子预印本，arXiv: . *Heegaard Floer homology and integer surgeries on links* 2010 1011 1317 [math.GT]. [OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *Holomorphic disks and knot invariants*, 《高等数学》186 (2004), 第 1 期，58–116。[OS05] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, 《拓扑学》44 (2005), 第 6 期，1281–1300。[OS08] Peter Ozsv´ath 和 Zoltan Szabo´, , , 代 *Holomorphic disks link invariants and the multi-variable Alexander polynomial* **8** 2008 2, 615 692 数与几何拓扑 ( )，第 – 期。[OS19] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, *Algebras with matchings and knot Floer homology*, 2019。电子预印本，arXiv 1912.01657 [math.GT]. [Ras03] Jacob Rasmussen, *Floer homology and knot complements*, 博士论文，2003。arXiv:math/0306378。[Sei08] Paul Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, 《苏黎世高级数学讲座》，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008。[Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, 《剑桥高等数学研究》，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。[Zem21] Ian Zemke, *Bordered manifolds with torus boundary the link surgery formula*, 2021。电子预印本，arXiv 2109.11520 [math.GT]. [Zem23] , *A general Heegaard Floer surgery formula* 2023 2308 15658 , . 电子预印本，arXiv . [ ] math.GT . [Zem25] , *Koszul duality and the link surgery formula* 2025 2507 09964 , . 电子预印本，arXiv . [ ] math.GT . [Zem] , *U-equivariant models of link surgery complexes*。正在准备中。

Department of Mathematics, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA*Email address*: darenc@caltech.edu

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR, USA
Email address: izemke@uoregon.edu

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA
Email address: hugozhou@umich.edu