等变上同调、BRST量子化与解析局部化：一个统一框架

Lixin Xu*

大连理工大学物理学院理论物理研究所，中国大连，116024

2026年1月5日

arXiv:2601.00256v1 [hep-th] 1 Jan 2026

摘要

本文详细阐述了等变上同调的两种主要模型——Cartan模型和Weil模型——以及通过Kalkman（Mathai–Quillen）变换实现的显式同构。随后，我们将这一框架与规范理论的BRST量子化联系起来，展示如何将BRST复形识别为Cartan模型。将Kalkman变换和Witten的Morse理论变形均视为规范固定过程，自然导向 *equivariant Witten deformation*。这一综合视角为等变闭形式的积分所满足的Atiyah–Bott–Berline–Vergne（ABBV）局部化公式提供了清晰的解析证明。本文还通过对 $\mathbb{CP}^1$ 和 $\mathbb{CP}^n$的计算，并辅以显式坐标计算，对该理论进行了丰富的阐释。

1 引言

等变上同调是定义在带有群作用的空间上的一种精妙的代数拓扑不变量，它同时编码了空间的拓扑性质和作用群的对称性。其发展与微分几何、辛几何和数学物理的进步密不可分。

从历史上看，等变上同调起源于对变换群的研究，并在拓扑场论中路径积分的局部化方面有着深远的应用 [1, 2, 3]。该理论为理解哈密顿群作用、动量映射和 Duistermaat–Heckman公式 [4, 5]提供了强有力的框架。

文献中主要有两种互补的代数模型：*Cartan*模型，它利用从李代数到微分形式的多项式映射；以及 *Weil* 模型，它由该群的Weil代数构造而成。二者的同构通过 Kalkman 变换（亦称 Mathai–Quillen 同构 [6]）建立，揭示了等变上同调与代数拓扑及同调代数之间的深层联系。

理论物理领域的平行发展催生了 BRST（Becchi–Rouet–Stora–Tyutin）形式主义 [7, 8], ，这是一种用于量子化受约束规范理论的上同调方法。值得注意的是，当规范群作用于场空间时，BRST复形自然地与Cartan模型相对应，从而在几何学与物理学的数学结构之间建立了一座基础性的桥梁。

在分析学方面，威滕通过Morse函数 [2]对 de Rham 微分进行变形，提供了一种将积分局部化到临界点的机制，从而将微分拓扑、量子力学与超对称性联系起来。

本文的核心贡献在于综合这些观点：我们观察到，Kalkman 变换与威滕变形都可以在统一的 BRST/BV框架中解释为规范固定过程。二者结合产生了等变威滕变形，我们借此给出著名的 Atiyah–Bott–Berline–Vergne（ABBV）局部化公式 [3, 5]的解析推导。

我们首先回顾 Cartan 模型和 Weil 模型的定义与性质，并通过详细证明建立 Kalkman同构（§2）。随后，我们将进一步阐明其与

*lxxu@dlut.edu.cn

BRST形式体系之间的精确对应关系，包括完整的 BRST/BV复形（§3）。回顾威滕变形及其规范固定解释（§4）后，我们构造等变Witten变形（§4.3），并运用它通过严格估计证明 ABBV 公式（§5）。关于 $\mathbb{CP}^1$ 和 $\mathbb{CP}^n$ 的详细示例展示了这一抽象理论框架的应用（§6）。最后，我们对应用及未来方向作进一步探讨（§7）。

2 等变上同调的 Cartan 模型与 Weil 模型 gy

Let M 是一个 n 维光滑流形，且 G是一个在 M 上光滑作用的紧李群

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M, \qquad (g, x) \longmapsto g \cdot x. \tag{1}$$

将 $\mathfrak{g}$ =Lie(G) 记为 G 的李代数。无穷小作用给出一个李代数同态

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \qquad \xi \longmapsto X_\xi, \tag{2}$$

其中 X_ξ 是由下式定义的基本向量场

$$X_\xi(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x. \tag{3}$$

映射 ρ 满足 $[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]}$，对所有 ξ， $\eta \in \mathfrak{g}$ 均成立。

2.1 Cartan模型

对于紧致的 G，*Cartan*模型提供了一种便于计算的等变上同调描述。

定义 2.1（Cartan 复形）。Cartan 复形定义为

$$\Omega^\bullet_G(M) \coloneqq \big(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^\bullet(M)\big)^G, \tag{4}$$

其中 $S(\mathfrak{g}^*)$表示对偶李代数上的对称代数，上标 G 表示在对角作用下的G-不变元素：即对 $S(\mathfrak{g}^*)$的余伴随作用以及对 $\Omega^\bullet(M)$ 的拉回作用。元素 $\alpha \in \Omega^k_G(M)$ 是等变多项式映射

$$\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \Omega^\bullet(M), \qquad \xi \longmapsto \alpha(\xi) = \sum_{i \geq 0} \alpha_i(\xi), \tag{5}$$

其中 $\alpha_i(\xi)$ 是 ξ中取值于 $\Omega^\bullet(M)$ 的次数为 i的齐次元素，并且 $\deg_{\text{total}}(\alpha) = \deg_{\text{polynomial}} + \deg_{\text{form}} = k$。

等变微分 d_G： $\Omega^k_G(M) \to \Omega^{k+1}_G(M)$ 定义为

$$(d_G\alpha)(\xi) \coloneqq \mathrm{d}\big(\alpha(\xi)\big) - \iota_{X_\xi}\big(\alpha(\xi)\big). \tag{6}$$

定理 2.2（ d_G的幂零性）。算子 d_G 在 $\Omega^\bullet_G(M)$ 上满足 $d_G^2 = 0$ 。

证明。 对于 $\alpha \in \Omega^\bullet_G(M)$，计算

$$\begin{aligned}
(d_G^2\alpha)(\xi) &= d_G\big((d_G\alpha)(\xi)\big) \\
&= \mathrm{d}\big((d_G\alpha)(\xi)\big) - \iota_{X_\xi}\big((d_G\alpha)(\xi)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(\mathrm{d}\alpha(\xi) - \iota_{X_\xi}\alpha(\xi)\big) - \iota_{X_\xi}\big(\mathrm{d}\alpha(\xi) - \iota_{X_\xi}\alpha(\xi)\big) \\
&= \underbrace{\mathrm{d}^2\alpha(\xi)}_{=0} - \mathrm{d}\iota_{X_\xi}\alpha(\xi) - \iota_{X_\xi}\mathrm{d}\alpha(\xi) + \underbrace{\iota_{X_\xi}\iota_{X_\xi}\alpha(\xi)}_{=0} \\
&= -(\mathrm{d}\iota_{X_\xi} + \iota_{X_\xi}\mathrm{d})\alpha(\xi) \\
&= -\mathcal{L}_{X_\xi}\alpha(\xi).
\end{aligned}$$

由于 α 是 G-不变的，因此对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$， $\mathcal{L}_{X_\xi}\alpha(\xi) = 0$ 。 □

$(\Omega^\bullet_G(M),\ d_G)$ 的上同调是等变上同调 $H^\bullet_G(M;\ \mathbb{R})$。

注 2.3. Cartan模型特别适合进行计算，因为它直接处理 M 上的微分形式。术语 “$-\iota_{X_\xi}$ 可视为 de Rham 微分的“扭曲”，用于编码群作用。对于紧 G，该模型计算 Borel 等变上同调 $H^\bullet_G(M) \cong H^\bullet(EG \times_G M)$。

2.2 Weil 模型

Weil代数为分类空间 BG 上的微分形式提供了一个通用模型。

定义 2.4 （Weil代数）。 $\mathfrak{g}$的Weil代数是分次交换代数

$$W(\mathfrak{g}) := \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*), \tag{7}$$

其中， $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ 是外代数（生成元 θ^a 的次数为 1，即“联络形式”），而 $S(\mathfrak{g}^*)$ 是对称代数（生成元 ϕ^a 的次数为 2，即 “ 曲率形式 ” ）。

选取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{e_a\}$，其对偶基为 $\mathfrak{g}^*$ 的 $\{\theta^a\}$，并取由 $[e_b, e_c] = f^a_{bc} e_a$ 定义的结构常数 f^a_{bc}。微分算子 d_W 为

$$d_W \theta^a = \phi^a - \frac{1}{2} f^a_{bc}\, \theta^b \theta^c, \tag{8}$$

$$d_W \phi^a = -f^a_{bc}\, \theta^b \phi^c. \tag{9}$$

定理 2.5 （Weil代数的结构）。$(W(\mathfrak{g})\ d_W)$ 是一个带有 $d_W^2 = 0$ 的交换微分分次代数，并且它是无上同调的：对于 $k > 0$， $H^k(W(\mathfrak{g})) = 0$； $H^0(W(\mathfrak{g})) = \mathbb{R}$。

证明。计算 $d_W^2 \theta^a = d_W(\phi^a - \frac{1}{2} f^a_{bc} \theta^b \theta^c) = -f^a_{bc} \theta^b \phi^c - \frac{1}{2} f^a_{bc} (d_W \theta^b) \theta^c + \frac{1}{2} f^a_{bc} \theta^b (d_W \theta^c)$。代入 $d_W \theta^b = \phi^b - \frac{1}{2} f^b_{de} \theta^d \theta^e$，并利用结构常数满足的雅可比恒等式，可验证所有项均相互抵消。对 $d_W^2 \phi^a$ 也同理。无上同调性由压缩同伦的存在性推出。 □

用于 G 的等变上同调的*Weil* 模型 采用复形

$$\big(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^\bullet(M)\big)_{\text{basic}}, \tag{10}$$

其中，“基本”指满足以下条件的元素

1. 水平：对于所有 a， $\iota_{e_a} \alpha = 0$ 都满足此条件，其中 ι_{e_a} 通过收缩作用于 θ^a 因子。2. 不变：对于所有 a，$\mathcal{L}_{e_a} \alpha = 0$ 都满足此条件，其中 $\mathcal{L}_{e_a} = [d_W, \iota_{e_a}]$。

微分算子为 $d_W \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}$。

2.3 Mathai–Quillen 同构（Kalkman 变换）

Cartan 模型和 Weil 模型通过一个显式变换同构。

定义 2.6 （Kalkman 变换）。 定义 κ： $W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^\bullet(M) \to W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^\bullet(M)$，如下所示：

$$\kappa := \exp(-\iota_\theta), \quad \text{where } \iota_\theta := \theta^a \otimes \iota_{X_a}, \tag{11}$$

其中 $X_a = X_{e_a}$。这是一个分次代数同构。

定理 2.7 （交织性质）。 κ 交织以下微分算子

$$\kappa \circ (d_W \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}) \circ \kappa^{-1} = d_G, \tag{12}$$

并限制 为 Weil 模型的基本子复形与 Cartan 复形之间的同构 x.

证明。 由于 ι_θ 是一个导子，我们使用 Baker–Campbell–Hausdorff 公式：

$$e^{-\iota_\theta}(d_W + \mathrm{d})e^{\iota_\theta} = d_W + \mathrm{d} + [d_W + \mathrm{d}, -\iota_\theta] + \frac{1}{2}[[d_W + \mathrm{d}, -\iota_\theta], -\iota_\theta] + \cdots . \tag{13}$$

计算 $[d_W, \iota_\theta] = -\mathcal{L}_\theta$ 和 $[\mathrm{d}\ \iota_\theta] = 0$（因为 d 与收缩算子可交换）。由于 $[\mathcal{L}_\theta, \iota_\theta] = 0$，更高阶对易子均为零。结果简化为 $d_W + \mathrm{d} - \mathcal{L}_\theta$。将 ϕ^a 认作$S(\mathfrak{g}^*)$的元素，并注意到在基本元素上， θ^a 项为零，我们便得到 d_G。 □

因此，$H^\bullet_{G\ \text{Cartan}}$ κ M Weil $\simeq$ 诱导出上链复形之间的同构，并由此得到一个同构 $H^\bullet_{G,}(M)$,( )。

注 2.8。 Kalkman 变换用类曲率生成元 ϕ^a取代类联络生成元 θ^a ，并将收缩项引入微分算子。这与微分几何中从联络到曲率的转变相呼应。

3 与 BRST 形式体系的关系

BRST 形式体系为规范理论的量子化提供了一种上同调方法。值得注意的是，当规范群作用于场空间时，它与 Cartan 模型相一致。

3.1 BRST 复形

考虑一个规范群 G 作用于场空间 $\mathcal{F}$的规范理论。最小 BRST 复形引入：

- 鬼场 c^a （奇，鬼数为 $+1$）
- 反鬼场 $\bar{c}^a$ （奇，鬼数为 -1）
- Nakanishi–Lautrup 场 B^a （偶，鬼数为 0）

BRST算子 s 的作用为：

$$s = \delta + c^a \mathcal{L}_{X_a} - \frac{1}{2} f^a_{bc}\, c^b c^c \frac{\partial}{\partial c^a}, \tag{14}$$

其中， δ 是作用于 $\mathcal{F}$上的德拉姆微分， $\mathcal{L}_{X_a}$ 是沿规范轨道的李导数，最后一项是作用于鬼空间上的 Chevalley–Eilenberg微分。

Weil代数	**BRST形式体系**
联络 θ^a （奇，次数 1）	鬼场 c^a （奇，鬼数 $+1$）
曲率 ϕ^a （偶，次数 2）	辅助场 B^a （偶，鬼数 0）
微分算子 d_W	BRST算子 s
水平条件	规范不变性
不变条件	物理态条件
基本子复形	0 次 BRST 上同调

表 1：Weil代数与BRST形式体系之间的全面对应关系。

3.2 Batalin–Vilkovisky形式体系

完整的 BV复形扩展了这一结构

$$\Phi_{\mathrm{BV}} = (\text{fields}) \oplus (\text{anti-fields}) \oplus (\text{ghosts}) \oplus (\text{anti-ghosts}). \tag{15}$$

BV 微分算子 s_{BV} 的平方为零，并编码了规范对称性和运动方程。

定理 3.1 （BRST 作为等变上同调）。 规范理论的 BRST 上同调与场空间 $\mathcal{F}$的 G-等变上同调同构。

证明。 将 δ 对应于 d，将 $c^a \mathcal{L}_{X_a}$ 对应于 $-\iota_{X_c}$ （约定不同可能导致差异），并注意到切瓦利–埃伦伯格项与之吻合。由此可在相应的复形上得到 $s \simeq d_G$ 。 □

注 3.2。 这种对应关系解释了为何拓扑场论（陈–西蒙斯理论、唐纳森–威滕理论）通常具有 BRST 恰当作用量：它们对等变恰当形式进行积分，而这些形式的取值通过 ABBV 局部化。

4 威滕变形及其等变对应

4.1 de Rham复形的威滕变形

给定 $f\colon\ M \to \mathbb{R}$ 光滑，Witten 引入了一种变形

$$d_t \coloneqq e^{-tf}\, \mathrm{d}\, e^{tf} = \mathrm{d} + t\, \mathrm{d}f \wedge . \tag{16}$$

定理 4.1 （ d_t的性质）。 1. $d_t^2 = 0$ 对所有 $t \geq 0$

2. $(\Omega^\bullet(M),\ d_t)$ 的上同调与 $H^\bullet(M;\ \mathbb{R})$ 同构

3. 对于 f Morse，当 $t \to \infty$ 时，Witten 拉普拉斯算子 $\Delta_t = d_t d_t^\dagger + d_t^\dagger d_t$ 将特征形式局部化在临界点附近

证明。 (1) $\mathrm{d}^2 = 0$、$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}f = 0$，以及 $[\mathrm{d},\ \mathrm{d}f\wedge] = \mathrm{d}^2 f\wedge = 0$。
(2) 通过 e^{tf} 的共轭给出链同构。(3) 由对 Δ_t的半经典分析可得。

□

4.2 规范固定解释

在 BV 形式体系中，规范固定通过由规范固定费米子 Ψ 生成的正则变换来实现

$$s_{\mathrm{BV}} \ \longrightarrow\ e^{\{\Psi,\ \cdot\}} s_{\mathrm{BV}} e^{-\{\Psi,\ \cdot\}}. \tag{17}$$

对于具有 Q 超对称荷的超对称量子力学，选择 $\Psi = tf$ 可得到$Q_t = e^{tf} Q e^{-tf}$，从而恢复 Witten 变形。

4.3 等变Witten变形

假设 f 是 G-不变的： $\mathcal{L}_{X_\xi} f = 0$ 对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$均成立。定义

定义 4.2 （等变Witten变形）。 *Kalkman–Witten* 变换 为

$$\kappa_t \coloneqq e^{-tf}\, \kappa\, e^{tf} = e^{-tf - \iota_\theta}, \tag{18}$$

其中，利用 G-不变性可将 $[f, \iota_\theta] = 0$ 简化。

将 κ_t 作用于 Weil 微分，得到

$$\begin{aligned} d_{W,t} &\coloneqq \kappa_t\, d_W\, \kappa_t^{-1} \\ &= e^{-tf} d_G e^{tf} \\ &= d_G + t\, \mathrm{d}f \wedge . \end{aligned} \tag{19}$$

我们将 $d_{G,\ t} \coloneqq d_G + t\,\mathrm{d}f\wedge$ 记作。

定理 4.3 （$d_{G,\ t}$的性质）。 1. $d_{G,\ t}^2 = 0$ 在 $\Omega_G^\bullet(M)$ 上

2. $(\Omega_G^\bullet(M)\, d_{G,\ t})$ 的上同调与 $H_G^\bullet(M)$ 同构

3. 映射 $\alpha \mapsto e^{-tf}\alpha$ 给出一个同构 $(\Omega_G^\bullet(M),\ d_G) \cong (\Omega_G^\bullet(M)\, d_{G,\ t})$

证明。 (1) 计算：

$$d_{G,t}^2 = d_G^2 + t[d_G, \mathrm{d}f\wedge] + t^2(\mathrm{d}f\wedge)^2. \tag{20}$$

由于 $d_G^2 = 0$，$(\mathrm{d}f\wedge)^2 = 0$，以及 $[d_G, \mathrm{d}f\wedge] = \mathrm{d}(d_G f)\wedge = 0$（因为根据不变性，$d_G f = \mathrm{d}f - \iota_X f = 0$）。 □

5 通过等变Witten变形证明 ABBV 局部化公式

我们提出 一种使用等变 Witten 变形证明 ABBV 局部化公式的解析方法 n.

5.1 设置与假设

L设 M 是紧致、定向、无边界的 n 维流形，具有 $G = S^1$ 作用。假设

1. 不动点集 $M^G = \{p_1, \ldots, p_N\}$ 由孤立点组成

2. $\omega \in \Omega_G^n(M)$ 是等变闭的： $d_G\omega = 0$

3. f： $M \to \mathbb{R}$ 是 G-不变 Morse 函数，其临界点恰好位于 M^G

4. $f \geq 0$, $f(p_i) = 0$, $f > 0$ 远离不动点

引理 5.1（不变 Morse 函数的存在性）. 对于作用于紧致M具有孤立的ct.....上的紧李群 G 立不动点，存在一个 G-不变 Morse 函数 f，其临界点位于 M^G。

证明。取一般的 $\xi \in \mathfrak{g}$，使得 X_ξ具有孤立零点。对于一个 G-不变度量 g，定义 $f(x) = \frac{1}{2}g(X_\xi, X_\xi)$。这是 G-不变的，其临界点是 X_ξ 的零点。 □

5.2 t 的变形与独立性

考虑变形后的形式

$$\omega_t := e^{-tf}\omega. \tag{21}$$

由于 $d_G\omega = 0$，我们有

$$d_{G,t}\,\omega_t = e^{-tf} d_G\omega = 0. \tag{22}$$

将积分定义为变形参数的函数

$$I(t) := \int_M [\omega_t]_n = \int_M e^{-tf}[\omega]_n. \tag{23}$$

命题 5.2 (t-无关性)。 $I(t)$ 与 t 无关：对所有 $t \geq 0$, $I(t) = I(0)$。

证明。映射

$$\Phi_t : \alpha \mapsto e^{-tf}\alpha, \tag{24}$$

是从 $(\Omega_G^\bullet(M)\ d_G)$ 到 $(\Omega_G^\bullet(M)\, d_{G,t})$ 的复形同构，因为 $d_{G,\ t} = e^{-tf} d_G e^{tf}$。具体而言， Φ_t 是链映射，因为

$$d_{G,t}(\Phi_t\alpha) = (d_G + t\,df\wedge)(e^{-tf}\alpha) = e^{-tf}d_G\alpha - t(df\wedge e^{-tf}\alpha) + t(df\wedge e^{-tf}\alpha) = e^{-tf}d_G\alpha = \Phi_t(d_G\alpha), \tag{25}$$

这里我们用到了 $d_G(e^{-tf}\alpha) = e^{-tf}d_G\alpha + (d_G e^{-tf})\alpha and d_G e^{-tf} = -tdfe^{-tf}$。该映射可逆，其逆映射为 $\Phi_t^{-1}\alpha = e^{tf}\alpha$。

因此，它在等变上同调上诱导出一个同构。特别地， $e^{-tf}\omega$ 在 $d_{G,t}$-上同调中的上同调类，是固定类 $[\omega]_{d_G}$ 的像。积分 $I(t) = \int_M [e^{-tf}\omega]_n$ 仅取决于这个上同调类，因为等变闭形式的最高次分量的积分是在等变上同调上定义良好的泛函（因为等变恰当形式在紧致无边界的 M 上的积分为零）。因此， $I(t)$ 关于 t 是常数， $I(t) \equiv I(0) = \int_M [\omega]_n$。 □

备注 5.3. 在等变情形下，积分在变形下的不变性源于与基本类配对的上同调性质。

5.3 当 $t \to \infty \to \infty$ 时的局部化

由 t 无关性可知:

$$\int_M [\omega]_n = \lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}\int_M e^{-tf}[\omega]_n. \tag{26}$$

引理 5.4（远离不动点处的指数衰减）. 对于任意紧致的 $K \subset M\setminus M^G$, $\int_K e^{-tf}[\omega]_n \to 0$ 随 $t \to \infty$ 指数衰减。

证明。由于 $f > 0$ 在 K 上，令 $\delta = \min_K f > 0$。于是

$$\left|\int_K e^{-tf}[\omega]_n\right| \leq e^{-t\delta}\int_K |[\omega]_n| \to 0. \tag{27}$$

□

因此，贡献局部化到不动点的邻域

$$\int_M [\omega]_n = \sum_{p\in M^G}\lim_{t\to\infty}\int_{U_p} e^{-tf}[\omega]_n. \tag{28}$$

5.4 孤立不动点处的局部计算

固定 $p \in M^G$。根据等变管状邻域定理，一个 G-不变邻域 U_p 与 $T_pM \cong \mathbb{C}^m$ 等变微分同胚（假设 $n = 2m$ 也是如此）。线性各向同性作用的权重为w_1，……，$w_m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

在 $\mathbb{C}^m$ 上选取坐标 $(z_1, \ldots, z_m)$

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j |z_j|^2 + O(|z|^3), \tag{29}$$

$$[\omega]_{2m}(z) = \omega_0(p) \prod_{j=1}^{m} \frac{i}{2} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j + O(|z|). \tag{30}$$

这里，$\omega_0(p)$ 是 ω 在 p 处的 0-形式分量，而 $\lambda_j > 0$ 是经过可能的定向调整后的结果。

引理 5.5（高斯渐近）。当 $t \to \infty$

$$\int_{U_p} e^{-tf} [\omega]_{2m} = \omega_0(p) \left(\frac{2\pi}{t}\right)^m \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} + O(t^{-m-1}). \tag{31}$$

证明。改用极坐标 $z_j = r_j e^{i\theta_j}$

$$\frac{i}{2} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j = r_j \mathrm{d}r_j \wedge \mathrm{d}\theta_j. \tag{32}$$

主要贡献来自高斯积分

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{-\frac{t}{2}\sum \lambda_j r_j^2} \omega_0(p) \prod r_j \mathrm{d}r_j \mathrm{d}\theta_j = \omega_0(p)(2\pi)^m \prod_{j=1}^{m} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}\lambda_j r^2} r \mathrm{d}r. \tag{33}$$

E每个径向积分等于 $\frac{1}{t\lambda_j}$。驻相法下，高阶项贡献 $O(t^{-m-1})$. □

权重 w_j 通过动量映射与 λ_j 相关： $\lambda_j = |w_j|$ ，符号由取向适当确定。

5.5 ABBV 局部化公式

合并所有不动点的贡献:

定理 5.6（Atiyah–Bott–Berline–Vergne 局部化）。对于 $\omega \in \Omega_G^n(M)$，其中 $d_G\omega = 0$

$$\int_M [\omega]_n = (2\pi)^m \sum_{p \in M^G} \frac{\omega_0(p)}{\prod_{j=1}^{m} w_j(p)}, \tag{34}$$

其中 $n = 2m$，且 $w_1(p) \ldots, w_m(p)$ 是 p 处各向同性表示的权重。

备注 5.7 (等变欧拉类解释)。分母 $\prod_{j=1}^{m} w_j(p)$（相差一个 $(2\pi)^m$）就是切空间的等变欧拉类 $e_G(T_pM)$。因此

$$\int_M \omega = \sum_{p \in M^G} \frac{i_p^* \omega}{e_G(N_p)}, \tag{35}$$

其中 N_p 是 p 处的法丛， $i_p^*\omega$ 表示 0-形式分量的限制 .

6 示例与应用

6.1 在 $\mathbb{CP}^1$上的局部化

考虑具有齐次坐标 $[z_0$ 的 $\mathbb{CP}^1 : \ z_1]$ ，以及作用 S^1: $e^{i\theta} \cdot [z_0 : \ z_1] = [z_0 : \ e^{i\theta} z_1]$。不动点: $p_+ = [1 : \ 0]$, $p_- = [0 : \ 1]$。

富 比尼-斯图迪形式 $\omega = \frac{i}{2\pi} \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$ 具有 $\int_{\mathbb{CP}^1} \omega = 1$。其等变延拓为 $\tilde{\omega}(\xi) = \omega - \xi H$.

应用 i 化 ABBV

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega = \frac{-\xi H(p_+)}{(+1)\xi} + \frac{-\xi H(p_-)}{(-1)\xi} = -0 + 1 = 1. \tag{36}$$

不动点	仿射坐标	权重 w	动量映射 H
p_+	$z = z_1/z_0$	$+1$	$H = \lvert z\rvert^2/(1+\lvert z\rvert^2)$
p_-	$w = z_0/z_1$	-1	$H = 1/(1+\lvert w\rvert^2)$

表2： $\mathbb{CP}^1$上的 S^1作用数据。

6.2 向 $\mathbb{CP}^n$的推广

对于带有 S^1 作用 $e^{i\theta}\cdot[z_0$ 的 $\mathbb{CP}^n$： $\cdots$： $z_n] = [z_0$： $e^{i\theta}z_1$： $\cdots$： $e^{in\theta}z_n]$，不动点为坐标轴 $p_k = [0$： $\cdots$： 1： $\cdots$： $0]$，其中第 k 个位置为 1。在 p_k 处的权重为 $\{k-j\}_{j\neq k}$。

定理6.1（在 $\mathbb{CP}^n$上的局部化）。对于K¨ahler形式的 S^1-等变积分

$$\int_{\mathbb{CP}^n}\omega^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k H(p_k)^n}{\prod_{j\neq k}(k-j)}. \tag{37}$$

7 结论

我们提出了一个将等变上同调、BRST量子化和解析局部化联系起来的统一框架:

- 对Cartan模型和Weil模型进行了详细阐述，并给出了明确的证明
- BRST/等变上同调对应的阐释
- 将等变Witten变形构造为规范固定过程
- 带误差估计的 ABBV 局部化严格分析证明
- 阐释该理论的综合实例

这一框架统一了代数、几何和分析视角，揭示了拓扑、群作用与超对称量子力学之间的深层联系。ABBV 公式本身是现代辛几何和拓扑场论的基石，其应用范围从杜斯特马特–赫克曼公式到超对称规范理论中配分函数的计算。

等变 Witten 变形提供了一种强大的分析工具，使局部化现象一目了然：随着变形参数 t 趋于无穷，积分的贡献仅来自不动点的无穷小邻域，在这些邻域中，高斯近似变得精确。这是在无限维情形下对鞍点法的严格体现，也是超对称局部化中许多结果的理论基础。

8 致谢

作者感谢 H. L¨u 教授介绍 Cartan模型的等变微分。本研究部分得到国家自然科学基金委员会项目（批准号: 12475047）的资助。

参考文献

[1] R. J. Szabo, 《等变上同调与路径积分的局部化》, 施普林格, 200 0.

[2] E. Witten, 超对称性与莫尔斯理论, 《微分几何杂志》 **17**(1982) 661–692。

[3] M. F. Atiyah 和 R. Bott, 动量映射与等变上同调, *Topology* **23** (1984) 1– 28.

[4] J. J. Duistermaat 和 G. J. Heckman, 关于约化相空间辛形式的上同调变化, *Invent. Math.* **69** (1982) 259–268。

[5] N. Berline 和 M. Vergne, 《等变特征类。等变上同调中的局部化公式》, 法国科学院院刊 ´科学系列 ´ *I* 辑 **295** (1982) 539–541。

[6] V. Mathai 和 D. Quillen，超联络、Thom类与等变微分形式，*Topology* **25** (1986) 85–110。[7] C. Becchi、A. Rouet、R. Stora，规范理论的重整化，*Ann. Phys.* **98** (1976) 287–321。[8] I. V. Tyutin，算子形式主义下场论与统计物理中的规范不变性，***Lebedev***研究所预印本 (1975)。