供应链中的信息延迟设计

Prem Talwai麻省理工学院运筹学研究中心，剑桥，MA 02142，talwai@mit.eduRen´e Caldentey芝加哥大学布斯商学院，芝加哥，IL 60637，rene.caldentey@chicagobooth.eduAvi Giloni叶史瓦大学Sy Syms商学院，纽约，NY 10033，agiloni@yu.eduClifford Hurvich纽约大学斯特恩商学院，纽约，NY 10012，churvich@stern.nyu.eduDavid Simchi-Levi麻省理工学院数据、系统与社会研究所，剑桥，MA 02142，dslevi@mit.eduYichen Zhang普渡大学丹尼尔斯商学院，西拉斐特，IN 47907，zhang@purdue.edu

arXiv:2601.00265v1 [math.OC] 1 Jan 2026

本文研究了在没有明确信息共享机制的情况下，分散式两级供应链中的下游零售商如何通过订单流的结构，向上游供应商隐式传递需求信息。我们通过引入信息延迟这一概念，并将最优隐式信息共享与零售商订货传递函数的群延迟联系起来，从而区别于以往研究。我们表明，纯延迟严格而言并非最优，而分数延迟机制能够重塑订单自相关，从而提高供应商可预测性并降低系统范围库存成本。借助 Hardy空间因式分解，我们构建了一类便于处理的可逆 ARMA 策略，用以近似理论上最优（但非有理）的极限滤波器，该滤波器由 Caldentey 等人 (2025b) 推导得出，并保留了其信息延迟特性。这一构造为我们提供了明确的指导，揭示策略复杂度（以 ARMA 策略的阶数衡量）如何影响供应链成本。我们进一步将分析拓展至记忆受限的供应商，并刻画零售商策略的复杂度应如何随供应商的有限预测窗口变化，同时指出在某些情况下，增加策略复杂度可能适得其反，这一点或许有悖直觉。

关键词：信息延迟；群延迟；订单平滑；ARMA 近似；有限记忆预测

1. 引言

供应链运营的成功取决于库存管理策略与为其提供依据的信息流之间是否有效协调。同步这些实物流与信息流，可确保货物在供应链中高效流转，最大限度地降低成本、缩短交货提前期，并维持最佳库存水平。库存政策决定了企业间补货的时间和数量，而其有效性则取决于需求信息的可用性和准确性。如果能够及时、准确地掌握下游需求，上游供应商便可预判需求、高效分配资源并维持服务水平。在理想情况下，这些信息会通过协作系统或正式的通信协议明确共享。然而在实际中，

这种信息共享往往缺失、延迟或不完整，导致上游企业只能根据观察到的订单模式间接推断需求状况。

本文探讨在缺乏明确的信息共享机制时，库存控制决策，尤其是零售商订货策略的结构，如何成为隐性信息传递的渠道。我们考察零售商如何设计订单流，向上游供应商传递相关信息，从而改善需求预测和库存规划。

我们以Caldentey 等人 (2025b）的研究成果为基础。该研究构建了一个数学框架，用于评估简单两级供应链中信息不对称所带来的成本。研究表明，在需求信息完全共享的情况下，零售商可以采用简单直观的订货策略，使系统范围库存成本最小化。相比之下，在不共享信息的情况下，最优策略会变得复杂得多，也不那么透明，其中涉及无限记忆策略，以及不切实际的非 ARMA 信号结构；这些结构以只能部分还原的方式嵌入需求信息。

受Caldentey 等人 (2025b）所研究的无信息共享机制的局限性启发，本文重新探讨了一个根本问题：如何在供应链中最有效地将信息从下游传递至上游，并探索在缺乏明确沟通的情况下维持协调决策的方法。我们提出并形式化定义了信息延迟这一概念——零售商通过有意放缓对需求冲击的补货响应，将与需求相关的信息清晰地嵌入订单流中。这样一来，零售商便能帮助供应商更准确地推断未来需求，并据此做出更明智的库存决策。这种隐性信号机制可以替代直接的信息共享，促进分散式供应链中的决策协调。

我们的首要贡献是证明，此类时延在形式和强度上的设计都会对供应链绩效产生重大影响。不同于以往将时延建模为单个整数滞后期（即纯延迟）的研究（参见 Bensoussan 等，2006），我们发现，或许有悖直觉的是，纯延迟并不能帮助供应商实现完美预测；而通过同时采用多个滞后期（即平滑 Disney 等人 (2004),Balakrishnan 等人 (2004),Brown (2004), Caldentey 等人 (2025a））可以构建出更灵活、更有效的延迟结构。我们的分析核心是分数延迟这一概念，它刻画了需求信息被逐步推迟的虚拟时间尺度。我们通过一类滤波策略将信息分散到不同时间，从而使订单模式更具可预测性。我们采用群延迟这一概念量化此效应，它衡量信号在时间维度上嵌入订单流的方式。至关重要的是，我们发现，与纯延迟不同——纯延迟不会改变订单过程的统计特征，因此供应商无法检测到它——分数延迟会重塑订单的自相关结构，并提高可预测性。因此，我们证明，在不存在信息共享的情形下，纯延迟在最小化联合库存成本方面严格劣于其他方案。

其次，我们表明，尽管理论上最优的某些延迟机制不可逆，因此在没有信息共享时供应商无法检测到，但仍可通过实际可实施的可逆（即可检测）滤波器对其进行近似。这些近似方案能够形成简单的策略，在最小化联合库存成本方面几乎达到最优，同时也便于在分散式环境中部署。

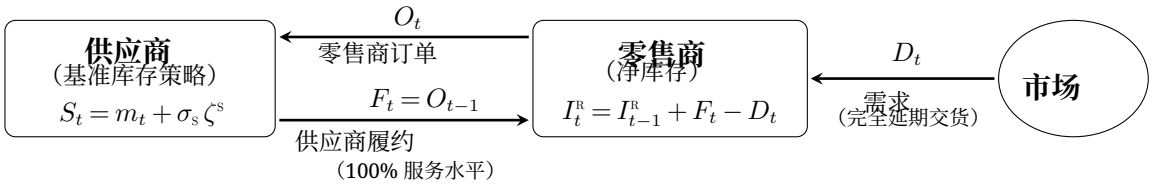
第三，我们将分析扩展到一种更贴近现实的情形：供应商受记忆容量限制，只能获取过去订单的有限近期历史记录。这种有限的可见性增加了另一层摩擦，削弱了供应商重构嵌入式时延的能力，也使基于延迟的信号传递更加复杂。在此情形下，我们发现并从解析角度刻画了零售信号编码复杂度与供应商解读能力之间的权衡。这种权衡类似于供应商与零售商成本之间的偏差—方差权衡；通过根据供应商的观测时域谨慎校准时延机制的复杂度，可以对其进行优化。这样便能在精度与学习过程的可处理性之间取得平衡，从而最大限度地降低系统总成本。

最后，本文在方法论上也为库存与供应链管理领域的文献作出了贡献：我们从嵌入零售商订单流中的延迟这一视角，重新审视信息共享。以往研究（Bensoussan 等，2006、Chen，1999）关注的是纯延迟，而我们研究了更广泛的一类全通滤波器。这类滤波器能够保留订单中的非确定性，并允许零售商调整需求信息随时间的分布方式。由此，我们可以根据零售商订货滤波器所引入延迟的类型和幅度，清晰地刻画供应商与零售商之间的成本权衡。我们还表明，一类关键的全通滤波器可以通过一族最小相位（可逆）自回归移动平均滤波器（引理 1）有效近似，即使不存在显式信息共享，也能复现所需的延迟特性。尽管此前已有研究探讨了用最大相位滤波器近似全通滤波器（Mehta 等，2023、Appaiah 和 Pal，2020），但据我们所知，本文首次针对这一供应链信号传递问题，开发了最小相位（可逆）近似方法。

总而言之，本文从统一的视角研究信息延迟，为供应链中的需求信号传递提供了一种新的运营解释。我们表明，即使不存在直接通信，零售商也可以有效地充当信息设计者，将需求过程的结构嵌入其订单流中，使其以供应商能够恢复并加以利用的形式呈现。通过这一做法，我们将预测理论、信号处理和库存管理中的洞见联系起来，并引入了用于增强分散式环境下协调的新工具。我们的研究最终表明，补货策略的设计不应仅着眼于管理库存，还应传递需求信息。

2. 一个两级供应链模型

我们考虑一个典型的两级供应链，由一个零售商和一个供应商组成，按离散时间演进，如图 1 所示。其运营特征与以下研究分析的特征相似Gavirneni 等人 (1999)、Lee 等人 (2000)、Aviv (2001)、Chen 和 Lee (2009)、Giloni 等人 (2014)、Caldentey 等人 (2025b)，包括：(i) 零售商面临的市场需求采用完全延期交货方式，因此所有未满足的需求都会



第 t 期供应商的信息集：$\mathcal{F}_t^s = \sigma\big(O_\tau : \tau \le t\big)$ 零售商库存成本：$C^R = h^R (I_t^R)^+ + b^R (I_t^R)^-$供应商平均预测：$m_t = \mathbb{E}[O_{t+1}|\mathcal{F}_t^s]$ 供应商库存成本：$C^s = h^s (S_{t-1} - O_t)^+ + b^s (O_t - S_{t-1})^+$供应商均方预测误差：$\sigma^2{}_s = \mathbb{V}\mathrm{ar}[O_{t+1}|\mathcal{F}_t^s]$ 供应商安全库存因子：$\zeta^s = \Phi^{-1}\big(\frac{b^s}{h^s+b^s}\big)$

图1 两级供应链系统。

最终得到满足；（ii）供应商遵循状态依赖型基库存策略；以及（iii）当面临短缺时，供应商可以通过加急生产来维持对零售商的100%服务水平，但需承担额外成本。

零售商面临不确定的客户需求 D_t，该需求被建模为独立同分布的高斯序列 $D_t = d + \epsilon_t$，其中 $d > 0$ 是每期平均需求，$\{\epsilon_t\}$ 是方差为 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$ 的高斯白噪声。零售商利用其净库存 I_t^R 满足需求，并通过向供应商下达定期订单 O_t 进行补货。我们仅考虑相对于 $\{\epsilon_t\}$ 弱平稳的补货策略，因此零售商订单可表示为单边高斯 MA(∞)

$$O_t = d + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n \epsilon_{t-n}, \tag{1}$$

其中，MA 系数 $\{\psi_n\}$ 刻画了零售商的库存策略。我们将零售商策略记作 $\psi = \{\psi_n\}_{n\ge 0}$，并指出，这一类策略涵盖了大多数标准补货规则，例如基准库存策略和短视订货至目标策略。

供应商使用自身库存 I_t^S 满足零售商订单，并通过状态依赖型基库存策略管理库存。每期，供应商将其基库存水平 S_t 设为下一期订单的一步预测值加上安全库存：[†]

$$S_t = m_t(\tilde{\psi}) + \sigma_S(\tilde{\psi})\,\zeta^S, \qquad \zeta^S = \Phi^{-1}\left(\frac{b^S}{h^S + b^S}\right), \tag{2}$$

其中，$m_t(\psi) = \mathbb{E}[O_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_{S_t}]$ 表示供应商的一步超前预测，$\sigma^2{}_S(\psi) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[O_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t^S]$ 表示其均方预测误差（MSFE），(h^S, b^S) 分别表示单位持有成本和加急成本，$\mathcal{F}_t^S := \sigma(O_\tau : \tau \le t)$ 表示由订单历史生成的供应商信息集。安全系数 ζ^S 用于平衡持有成本与加急成本，而 Φ表示标准正态累积分布函数。

Und在这些运营条件下，零售商和供应商的净库存演变为 S

$$I_t^R = I_{t-1}^R + O_{t-1} - D_t \qquad \text{and} \qquad I_t^S = \big(S_{t-1} - O_t\big)^+.$$

Caldentey 等人 (2025b) 表明，对于任意给定的策略 ψ，零售商和供应商的长期平均成本可以写成 $\mathcal{C}^R(\psi) = K^R\,\sigma_I(\psi)$ 和 $\mathcal{C}^S(\psi) = K^S\,\sigma_S(\psi)$，其中 $\sigma_I(\psi)$ 是零售商库存的平稳标准

† 具体而言，供应商通过求解 $\min_S \; C_S = \mathbb{E}\big[h^s(S_t - O_{t+1})_+ + b^s(S_t - O_{t+1})^- \,|\, \mathcal{F}_t^s\big]$ 来确定 S_t

˜差， $\sigma_{\mathrm{S}}(\psi)$ 是供应商的均方预测误差平方根，并且 K^{R}， $K^{\mathrm{S}}>0$ 仅取决于成本参数和安全库存系数。‡ 因此，系统总成本为

$$\mathcal{C}(\tilde{\psi})=\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\tilde{\psi})+\mathcal{C}^{\mathrm{S}}(\tilde{\psi})=K^{\mathrm{R}}\,\sigma_{\mathrm{I}}(\tilde{\psi})+K^{\mathrm{S}}\,\sigma_{\mathrm{S}}(\tilde{\psi}).$$

˜为确保零售商库存过程稳定（从而$\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\psi)$有限），我们将讨论范围限定在˜属于可容许策略集合的策略 ψ

$$\widetilde{\Psi}=\left\{\tilde{\psi}\in\ell^2:\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\psi}_n=1,\quad \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{\psi}_k-1\right)^2<\infty\right\}.$$

˜条件$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n=1$ 即为有界库存条件。

遵循Caldentey 等人（2025b的做法，为方便起见，我们将寻找可容许˜ ˜ ˜订货策略 $\psi\in\Psi$ 以使供应链成本$\mathcal{C}(\psi$最小化的问题，从时域改写到 z变换˜ ˜域中。具体而言，我们用传递函数$\mathcal{C}(\psi$表示 $\psi(z)$，而非其时域˜MA 系数$\{\psi_n\}^{n\geq 0}$，其中

$$\tilde{\psi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\psi}_n z^n,\qquad z\in\mathbb{D},$$

以及 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\,|z|<1\}$ 是开单位圆盘。关键的是，可容许性条件 $\tilde{\psi}\in\widetilde{\Psi}$ 蕴含 $\tilde{\psi}\in\mathbb{H}^2$，即由解析函数构成、定义在 $\mathbb{D}$ 上且在单位圆周上的边界值平方可积的 Hardy–Hilbert 空间；这使我们能够利用该空间中的丰富结果来刻画最优策略。根据库存动态 $I_t^{\mathrm{R}}=I_{t-1}^{\mathrm{R}}+O_{t-1}-D_t$ 以及需求冲击过程的 z-变换为常数 1 这一事实，零售商库存过程的 z-变换满足

$$\psi_{\mathrm{I}}(z)=\frac{z\,\tilde{\psi}(z)-1}{1-z}.$$

因此，平稳库存方差可以表示为 ψ_{I} 的能量：

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2(\tilde{\psi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{z\,\tilde{\psi}(z)-1}{1-z}\right|^2\mathrm{d}\lambda,\qquad z=\exp(-i\lambda).\tag{3}$$

˜类似地，令 $f_{\tilde{\psi}}(\lambda)$ 表示由 ψ 所诱导的订单过程的谱密度，Kolmogorov 公式（Brockwell 和 Davis 2006，第 5.8 节）给出

$$\sigma_{\mathrm{S}}^2(\tilde{\psi})=2\pi\,\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f_{\tilde{\psi}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right),\tag{4}$$

对于具有独立同分布冲击的 MA(∞) 表示，我们有 $f_{\tilde{\psi}}(\lambda)=\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi}\left|\tilde{\psi}(e^{-i\lambda})\right|^2$。

对于后续分析，在不失一般性的前提下，我们令 $\sigma_\epsilon=1$ 和 $K^{\mathrm{S}}=1$，并˜定义 $K^{\mathrm{R}}=\kappa$。等价地，将$\mathcal{C}(\psi)$除以 $K^{\mathrm{S}}\sigma_\epsilon$，并令 $\kappa:=K^{\mathrm{R}}/K^{\mathrm{S}}$。这保留了

‡对于企业 $j\in\{\mathrm{R},\mathrm{S}\}$， $K^j=\left[h^j\zeta^j+(h^j+b^j)\,\mathcal{L}(\zeta^j)\right]$，其中 $\zeta^j=\Phi^{-1}\left(\frac{b^j}{h^j+b^j}\right)$，而 $\mathcal{L}(x)=\phi(x)-x(1-\Phi(x))$ 是正态损失函数，ϕ 和 Φ 分别表示标准正态概率密度函数和累积分布函数。

问题的结构，并使 κ 零售商成本的相对权重。在此归一化下，利用（3）和（4），在可行策略范围内最小化供应链总成本的问题可表示为

$$\mathcal{C}^* = \inf_{\tilde{\psi}\in\widetilde{\Psi}} \mathcal{C}(\tilde{\psi}) = \inf_{\tilde{\psi}\in\widetilde{\Psi}} \kappa \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{z\tilde{\psi}(z)-1}{1-z} \right|^2 \mathrm{d}\lambda \right)^{1/2} + \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde{\psi}(z)|\,\mathrm{d}\lambda \right), \quad z = e^{-i\lambda}. \tag{5}$$

因此，零售商策略发挥着双重作用：它既影响零售商库存的波动性，也影响供应商的预测准确性，进而影响整个供应链的绩效。

3. 先前结果与贡献概述

接下来，我们概述 Caldentey 等人（2025b）对 (5) 的求解方法。该方法利用 Hardy 空间方法，尤其是 Smirnov–Beurling（Nevanlinna）内外因子分解定理（参见 Rudin˜1987，定理 17.17 或 Nikolski 2019，定理 2.6.5）。任意非零的 $\psi \in \mathbb{H}^2$ 均可唯一地（除一个˜模常数外）分解为 $\psi(z) = Q(z)\,I(z)$，其中 Q 为外因子，I 为内因子。内因子满足 $|I(e^{-i\lambda})| = 1$，对几乎所有的 $\lambda \in [-\pi,\pi)$ 均成立，并且其自身可分解为 $I(z) = B(z)\,S(z)$，其中 B 是 Blaschke˜乘积，汇集了 ψ 在 $\mathbb{D}$ 内的零点；S 则是由单位圆周上的奇异测度决定的奇异内函数。内函数在 $\mathbb{T}$ 上充当全通滤波器：=$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$，即复平面中的单位圆；它们保持幅度不变，同时改变相位。

对于供应商的预测问题，这种因式分解有着明确的解释。由于内因子˜都是全通的，与 ψ 及其外因子 Q 相关的谱密度相同，因此在 $[-\pi,\pi)$中几乎处处有 $f_{\tilde{\psi}}(\lambda) = f_Q(\lambda)$，进而，

$$\sigma_{\mathrm{s}}^2(\tilde{\psi}) = \sigma_{\mathrm{s}}^2(Q).$$

因此，外因子 Q 捕捉了零售商订单中可预测的（可见）部分，而内因子则编码了从供应商角度看不可预测的（不可见）部分。在时域中，这对应于可逆性：当且仅当 ψ 没有内因子，即 $\psi(z) = Q(z)$时，订单才是可逆的（供应商能够从˜ ˜$\{O_n : n \le t\}$中恢复冲击 ϵ_t）。

基于这一结构，Caldentey 等人（2025b）通过利用外函数与奇异内函数之间的相互作用，并构造一系列 ϵ-最优策略，求解了（5）。他们的主要结果可概述如下。

˜ ˜定理 1. 考虑在 $\mathcal{C}(\psi)$ 中对 5) 关于 Ψ 求最小值。根据零售商的相对成本权重 κ，可分为两种情形：

1. 若 $\kappa \ge \sqrt{5}$，则最优策略 $\tilde{\psi}^*$ 为 MA(1)，并可表示为

$$\tilde{\psi}^*(z) = \tilde{\psi}_0^* + (1-\tilde{\psi}_0^*)\,z, \qquad \tilde{\psi}_0^* = 1 - \left(\sqrt{\kappa^2-1}\right)^{-1}.$$

该解可逆，即不存在内因子。

2. 若 $\kappa < \sqrt{5}$，令 $\gamma_\kappa \ge 0$ 为 $\kappa^2 = (5+2\gamma)\exp(-2\gamma)$ 的唯一解，并对每个 $k \in \mathbb{N}$ 定义外部策略

$$\tilde{\psi}^k(z) = \frac{1+z}{2}\exp\left(\gamma_\kappa \frac{z-1}{1+z+k^{-1}}\right).$$

那么 $\{\tilde{\psi}^k : k \in \mathbb{N}\}$ 是一个 ϵ-最优序列，即 $\mathcal{C}^* = \lim_{k\to\infty}\mathcal{C}(\tilde{\psi}^k)$。

对于 $\kappa \geq \sqrt{5}$，最优策略具有一种简单且易于实施的形式：零售商订单是当前需求与滞后一期的需求的凸组合，

$$O_t = \tilde{\psi}_0^* D_t + (1 - \tilde{\psi}_0^*) D_{t-1}.$$

相比之下，对于 $\kappa < \sqrt{5}$， ϵ-最优序列 $\{\tilde{\psi}^k\}$ 没有有限阶 ARMA 表示，且其极限传递函数

$$\tilde{\psi}^\infty(z) := \lim_{k\to\infty} \tilde{\psi}^k(z) = \frac{1+z}{2} \exp\left(\gamma_\kappa \frac{z-1}{1+z}\right) \tag{6}$$

包含一个指数奇异内因子。令

$$\sigma^2_{\mathrm{I}^*} := \lim_{k\to\infty} \sigma^2_{\mathrm{I}}(\tilde{\psi}^k) \qquad \text{and} \qquad \sigma^2_{\mathrm{S}^*} := \lim_{k\to\infty} \sigma^2_{\mathrm{S}}(\tilde{\psi}^k).$$

对于 $\kappa < \sqrt{5}$，零售商库存方差在极限处连续， $\sigma^2{}_{\mathrm{I}^*} = \sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\tilde{\psi}^\infty)$，但供应商的均方预测误差出现向上跳跃，其中 $\sigma^2{}_{\mathrm{S}^*} < \sigma^2{}_{\mathrm{S}}(\psi^\infty)$。因此，$\mathcal{C}^* < \mathcal{C}(\psi^\infty)$，而极限策略 ψ^∞ 严格次优。

式（6）中的奇异内因子反映了当 κ 较小时（即供应商成本相对更重要时），优化问题固有的复杂度。特别是， ϵ-最优策略 $\{\tilde{\psi}^k\}$ 不具有有限阶 ARMA 表示，因此在实践中难以实施。

受这些挑战的启发，本文余下部分将提出一种解读零售商库存策略的新视角，并构建一个可实际实施的近似框架；这两项工作共同构成了本文的主要贡献：

1. 从概念上看，我们的根本性贡献在于通过信息延迟的视角诠释最优策略：供应商对实时需求信息的有限获取能力，迫使零售商策略性地推迟补货，将延迟作为平滑订单并提高订单可预测性的机制，从而在自身库存成本与供应商的预测准确性之间进行权衡。重要的是，最优策略并非仅由纯粹的延迟决定，而是需要纳入群延迟（其定义将在后文给出），因为群延迟刻画了信息时序如何在各个滞后期之间重新分配。这一视角阐明了信息延迟与群延迟如何共同塑造最优策略的结构，以及成本在供应链中的分布。

2. 我们构建了一个具体且可实施的自回归移动平均近似，用于逼近极限策略 $\psi^\infty(z)$；该近似在保持理性、计算上易于处理且透明的同时，实现了接近最优的成本。这为分散式供应链提供了一种可实际部署的策略。

3. 我们扩展了建模框架，以纳入供应商的预测并非基于完整的订单历史，而是基于过去观测值的有限窗口的情形。这一修改反映了实践中更为现实的信息结构，并为分析引入了新的维度。我们建立了收敛结果，表明随着供应商记忆长度的增加，相应的成本会趋近于无限记忆基准，从而弥合理想化的完整记忆设置与可实施的有限记忆预测策略之间的差距。

开发我们的信息延迟视角所产生的一个重要副产品，是引入了一套新的数学工具和模型，用于研究供应链环境下库存管理策略与其可预测性之间的联系。

4. 信息延迟

本节从信息延迟的角度，对零售商的库存策略进行可解释的刻画，并通过该策略传递函数的群延迟（定义1）加以形式化。我们表明，策略中嵌入的延迟可充当信号通道，供供应商利用以改进订单预测，但代价是零售商的库存波动性更高、补货延迟。

在深入讨论细节之前，我们先通过图2说明信息延迟这一概念。图中展示了我们 ϵ-最优自回归移动平均策略 $\psi^m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^m z^n$（详见第 5 节）在若干 κ取值下的脉冲响应系数 $\{\psi_n^m\}_{n\geq 0}$，以及相应的 $\sigma_{\mathrm{I}}(\psi^m)$ 和 $\sigma_{\mathrm{S}}(\psi^m)$取值。在时域中，在有界库存约束 $\psi^m(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^m = 1$下，我们将 ψ_n^m解释为：时刻 t实现的市场需求 D_t中，有多少比例体现在时刻 $t+n$下达的订单 O_{t+n}中。因此，序列 $\{\psi_n^m\}_{n\geq 0}$ 刻画了零售商对需求的延迟补货响应

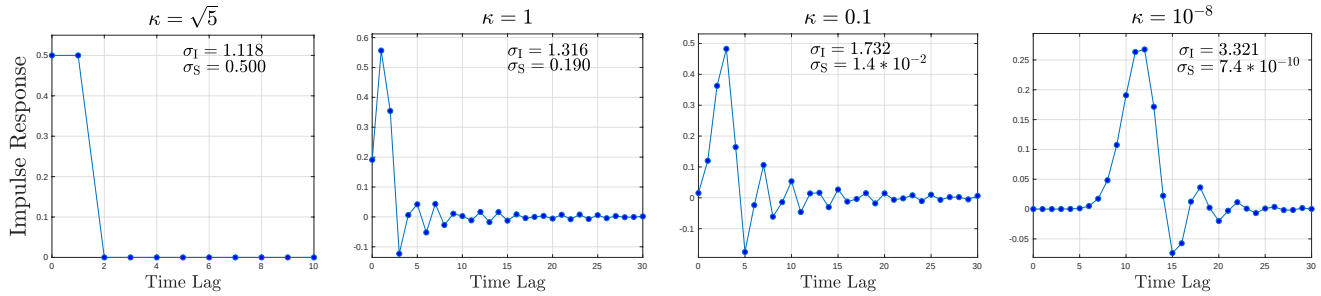


图2 脉冲响应系数 $\{\psi_n^m\}_{n\geq 0}$ 在 κ 和 $m = 100$取不同值时的情况。

在一个极端情况下，当 $\kappa = \sqrt{5}$（左图）时，脉冲响应的延迟极小，需求影响均匀分布在滞后期 0 和 1。另一个极端情况下，当 $\kappa = 10^{-8}$（右图）时，响应明显延迟，直到滞后期 6 左右才出现显著的需求反应。随着延迟增加（从左到右），供应商的均方预测误差平方根 σ_{S} 下降，而零售商的库存波动性 σ_{I} 上升，这说明最优延迟决定了零售商与供应商库存成本之间的权衡。我们在定理2 和 3中量化了这种关系；这两个定理将 $\sigma_{\mathrm{I}}(\psi)$ 和 $\sigma_{\mathrm{S}}(\psi)$ 与嵌入于中的信息延迟联系起来 ψ。

我们采用信号处理中的群延迟概念来形式化信息延迟，并将其具体应用于可容许库存策略 $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}$，即解析函数 $\tilde{\psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\psi}_k z^k \in \mathbb{H}^2$，其 MA 系数 ψ_k 为实数且满足有界库存归一化 $\psi(1) = 1$。

定义 1.（**群延迟**）设 $\tilde{\psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\psi}_k z^k \in \mathbb{H}^2$ 是一个 z-变换，其泰勒系数为 $\{\psi_k\} \subseteq \mathbb{R}$ 且满足 $\psi(1) = 1$。我们将 ψ 的群延迟定义为

$$\text{Group Delay: } \mathcal{GD}(\tilde{\psi}) \equiv \tilde{\psi}'(z)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\tilde{\psi}_k.$$

˜换言之，量 $\sum_{k=0}^{\infty} k\,\psi_k$ 通过测量脉冲响应的“质心”˜ ˜，从时域角度刻画群延迟（因为 $\psi(1) = 1$ 意味着 $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k = 1$）。群延迟越大，当前需求冲击平均需要经过更长时间，才会完全反映在输出信号（即零售商订单）中。为了进一步理解供应链情境下的这一界定，我们来看几个具体示例。

示例 1。

(a) 纯延迟。在纯延迟情况下，零售商订单满足 $O_t = D_{t-k}$，其中某个整数 $k \in \mathbb{N}$，也就是说，零售商仅将需求恰好延迟 k 个期间后下单。在这种情况下，零售商订单的 z-变换为 $\tilde{\psi}(z) = z^k$，其群延迟为 $\mathcal{GD}(\tilde{\psi}) = k$，这恰好符合我们对这种情况下延迟度量的预期。

(b) 非纯延迟。假设零售商按照 MA(1) 订单$O_t = \tilde{\psi}_0 D_t + \tilde{\psi}_1 D_{t-1}$补充库存，其中 $\tilde{\psi}_0 + \tilde{\psi}_1 = 1$。在这种情况下，$\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}_0 + (1 - \tilde{\psi}_0)\,z$，这些订单的群延迟等于 GD$(\tilde{\psi}) = 1 - \tilde{\psi}_0$。例如，若 $\tilde{\psi}_0 = 0.5$，则 GD($\tilde{\psi}$) $= 0.5$，这可以解释为：零售商平均将需求的补货延迟了半个期间。值得注意的是，若 $\tilde{\psi}_0 > 1$，则 GD($\tilde{\psi}$) < 0，这表明零售商订单在这种情况下表现出负延迟。˜直观而言，$\psi_0 > 1$ 意味着零售商需求 D_t 在期间 t 对同一期间下达的订单 O_t 的贡献超过 100%，因此超出的部分必须在未来期间“返还”。因此，定义 1 中定义的群延迟，刻画了某一期间的需求对零售商后续期间订单产生影响的有效时序。

(c) 内函数：一类重要的特殊传递函数，其群延迟保证非负，即 $\mathbb{H}^2$ 中的内函数（全通滤波器）。设 $I(z) \in \mathbb{H}^2$ 是一个内函数，且 I 在单位圆 $\mathbb{T}$ 上的极分解为 $I(e^{-i\lambda}) = r(\lambda)e^{-i\phi(\lambda)}$，其中 $r(\lambda) > 0$ 表示增益，$\phi(\lambda)$ 表示相位。那么，I 的群延迟满足 群延迟$(I) = \phi'(0)$。也就是说，从频域角度看，内函数的群延迟量化了信号分量通过系统时在零频率附近经历的有效时间滞后，反映了输出信号的相位随频率在原点处的变化。根据 Julia-Wolff-Carathéodory 定理可得 群延迟$(I) = \phi'(0) \geq 0$；当 I 为非常数时，不等式为严格不等式；参见《定理 2.4》

(Dang 和 Qian 2011) ◇

在我们的供应链系统中，人们可能会直觉地认为，如果零售商订单呈现正群延迟，那么这种延迟应能增强供应商预测这些订单的能力。然而，这种直觉通常是错误的；内函数类提供了一个典型的反例。正如示例 1(c) 所指出的，内函数具有非负群延迟，但不会改变订单过程的谱密度。由于供应商的可预测性（以 Kolmogorov 公式（4）中的均方预测误差来衡量）仅取决于该谱密度，因此全通分量不会改变供应商的预测误差，却会增加零售商的库存成本。下面的简单示例具体说明这一点。

纯延迟（续）考虑内函数 $\tilde{\psi}(z) = I_k(z) = z^k$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 取自示例 1(a)；其群延迟为 $\mathcal{GD}(I_k) = k$。根据（4），供应商的均方预测误差满足 $\sigma^2{}_{\mathrm{S}}(I_k) = 1$，且与 k 无关。相比之下，根据（3），零售商的库存方差随之线性增长：$\sigma^2{}_{\mathrm{I}}(I_k) = 1 + k$。直观而言，将订单延迟 k 期间不会影响供应商的预测误差，却会使零售商承受 k 个独立需求冲击所累积的不确定性，从而使零售商的成本 $\mathcal{C}^{\mathrm{R}}$ 增加 $\sqrt{1+k}$ 倍（请注意，需求冲击方差已归一化为 1）。因此，纯延迟对零售商以及整个供应链都有明确的负面影响。 $\diamond$

以下结果建立了策略 $\psi(z)$ 的群延迟与供应商均方预测误差（MSFE）之间的直接联系，并证明了可逆订单必须具有正的群延迟，才能使供应商的预测误差保持较低。

定理 2. 考虑一个策略 $\psi \in \Psi$，其因式分解为 $\psi(z) = Q(z)\, I(z)$，其中 $Q(z)$ 是外函数，而 $I(z)$ 是内函数。假设：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log |Q(e^{-i\lambda})|}{|e^{i\lambda} - 1|^2} d\lambda < \infty$$

则：

$$c e^{-\mathcal{GD}(Q)} \geq \sigma^2_{\mathrm{S}}(\tilde{\psi}) \geq c^{-1} e^{-\mathcal{GD}(Q)} \geq c^{-1} e^{-\mathcal{GD}(\tilde{\psi})} \tag{7}$$

其中：

$$c \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\lambda}{1 - \cos\lambda} \log |Q(e^{i\lambda})| d\lambda < \infty \tag{8}$$

该定理表明，对于策略 ψ 而言，要实现较小的均方预测误差，在弱正则条件下，其外因子 RQ 呈现较大的群延迟既是必要条件也是充分条件。换言之，$\mathcal{GD}(Q)$ 以及相应的 $\mathcal{GD}(\psi)$ 为供应商可达到的均方预测误差设定了指数上界/下界。在我们的应用中，数值 c（在8式中）通常可以视为在一组 ψ 中固定不变的常数；例如，当 $Q(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - e^{i\theta_k}}{1 - e^{i\theta_k}} \prod_{l=1}^{m} \left(\frac{z - a_l}{1 - a_l} \right)^{\alpha_l}$（其中 $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$），并且所有 $|a_l| > 1$ 均与 1 充分分离时。

推论 1. 令 $Q(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - e^{i\theta_k}}{1 - e^{i\theta_k}} \prod_{l=1}^{m} \left(\frac{z - a_l}{1 - a_l} \right)^{\alpha_l}$ 其中 $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ 且 $a_l,\ e^{i\theta_k} \in \bar{\mathbb{D}}^c \cap \mathbb{B}(1,\ \delta)^c$ 对于某个 $\delta > 0$。则：

$$|c| \leq C(\delta) \left(n + \sum_{l=1}^{m} |\alpha_l| \right)$$

其中 c 如上所定义，且 $C(\delta)$ 是一个仅取决于 δ 的常数。

虽然定理 2 表明，群延迟是降低供应商成本的必要条件，但我们预计群延迟会增加零售商的成本。事实上，正如示例 2 所指出的，群延迟会使零售商面临不确定性，迫使他积累库存，以对冲瞬时需求冲击。我们的下一个结果将这一观点形式化，并根据订单的可逆（外）分量和全通（内）分量，对零售商的成本进行完整、明确的分解。事实上，定理3 证明，对可逆订单应用全通滤波器（即在其传递函数中插入一个内因子），必定会使零售商的库存方差 $\sigma^2{}_{\mathrm{I}}$ 恰好增加其群延迟。

˜定理 3。设 $\psi(z) = Q(z)B(z)S(z)$ 用其贝尔林因子分解表示为，其中

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\bar{a}_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \qquad \text{and} \qquad S(z) = \exp\Big(- \int \frac{\xi - z}{\xi + z} d\mu(\xi) \Big).$$

假设：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - a_n|^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - 1|^2} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log |Q(e^{-i\lambda})|}{|e^{i\lambda} - 1|^2} d\lambda < \infty \tag{9}$$

其中 $|a_n| < 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\mu \perp d\lambda$ §。那么，

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2(\tilde{\psi}) = 1 + \mathcal{GD}(Q) + \mathcal{GD}(B) + \mathcal{GD}(S) - \frac{1}{2} \partial_r f_Q(1) \tag{10}$$

其中 $f_Q(re^{-i\lambda}) = b_0 + 2\sum b_k r^k \cos k\lambda$ 满足 $\{b_i\}_{i \geq 0}$ 是 $\tilde{\psi}$ 的自协方差，而 ∂_r 表示径向$_{k \geq 1}$导数。此外，

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2(\tilde{\psi}) = \sigma_{\mathrm{I}}^2(Q) + \mathcal{GD}(B) + \mathcal{GD}(S) \geq \sigma_{\mathrm{I}}^2(Q).$$

因此，内因子 $I(z) = B(z)S(z)$ 会使零售商库存的库存波动性恰好增加其总群˜延迟，因此 $\sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\psi) - \sigma^2{}_{\mathrm{I}}(Q) = \mathcal{GD}(I) = \mathcal{GD}(B) + \mathcal{GD}(S)$。此外，与例 1(a) 中一样， I 的群延迟等于其相位 $\phi(\lambda) = \arg I(e^{-i\lambda})$ 在零点处的导数，即 $\mathcal{GD}(I) = \phi'(0)$。该导数是相位在零频率附近最佳线性近似的斜率，可解释为用“纯”延迟 $z^{\phi'(0)}$ 来近似 $I(z)$。因此，$\mathcal{GD}(I) = \phi'(0)$ 可作为全通（内）滤波器 I所引入有效时间延迟的替代指标。

此外，由 (10) 可知，外因子 Q 通过其群延迟 GD(Q) 以及数量 $\partial_r f_Q(1)$ 影响 σ^2 I；后者仅取决于订单谱密度，并衡量其自相关轮廓的质量“中心”（事实上，根据定义， $\partial_r f(1) = \sum_{k \geq 1} k b_k$ ）。直观地说，我们可以将 $|\partial_r f_Q(1)|$ 理解为衡量因子 Q 偏离内因子的程度（事实上，若 $|Q(e^{i\theta})| = 1$ 在 $[-\pi, \pi$ 上几乎处处成立，则 $\partial_r f_Q(1) = 0$）。这一观察将在命题 1 中发挥关键作用：届时我们将看到，对于序列 $\{Q_m\}_{m \geq 1}$， $|\partial_r f_{Q_m}(1)| \to 0$ ，该序列近似于 $\psi^{\infty}(z)$ 的全通分量。

我们注意到，定理3 显著强化了Caldentey 等人（2025b）的结果，尤其是其中的引理 3：该定理表明，任何 内因子（而不仅仅是 Blaschke 乘积）都是次优的，因为它会增加零售商库存波动性，却不会降低供应商均方预测误差。由于内因子对供应商而言在谱上不可见（它们不会改变零售商的订单谱），因此无法带来预测收益。因此，要提高可预测性，零售商必须通过可逆的 （外）订单来编码延迟。最后，我们指出，条件（9）中的弱正则性假设旨在确保 $\sigma^2{}_{\mathrm{I}}$ 有限；对于具有实根/极点的有理 Q 、原子的 μ以及有限布拉施克乘积 B （本文所考察的情形），这些假设总是成立。

综上，这些观察结果促使我们将纯延迟滤波器用作蓝图，以设计能够近似实现同样信息延迟效益的外部（可逆）滤波器。事实上，结合˜定理2 和3 可知，正群延迟是优化总成本所必需的——而 ψ 则

§符号函数 $\perp$ 表示两个测度彼此奇异。

正群延迟会使零售商的成本线性增加（定理 3），而在弱正则条件下，会使供应商的成本呈指数级下降（定理 2）。此外，下面的命题 1 表明，一大类（全通）奇异内滤波器 S （它们如 ψ^∞ 式（6）中那样施加分数延迟）可以实现为一列可逆滤波器的极限，这些滤波器的相位导数始终严格为正，从而在保留群延迟的信息作用的同时，使供应商能够检测到延迟。在设计我们的近似方案时，我们参考定理 3——我们选择可逆滤波器序列 $\{Q_m\}_{m\geq 1}$ ，使得 $\mathrm{GD}(Q_m) = \mathrm{GD}(S)$ $\forall m \geq 1$ 且满足 $\partial_r f_{\tilde{Q}_m}(1) \to 0$ 如 $m \to \infty$。

命题 1。 设 $Q(z) \in \mathbb{H}^2$，并固定一个原子奇异内函数 $S(z) \in \mathbb{H}^2$ ¶，其边界值为 $S(e^{-i\lambda}) = e^{-i\phi(\lambda)}$（几乎处处于 $\mathbb{T}$ 上），且满足库存有界条件 $S(1) = 1$ （即 $\phi(0) = 0$）和可积性条件‖。设 $g_Q(e^{-i\lambda}) = |Q(e^{-i\lambda})|^2$，并假设：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_Q'(e^{i\lambda})|\phi^2(\lambda)\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} g_Q(e^{i\lambda})\left|\phi(\lambda)\phi'(\lambda)\cot\frac{\lambda}{2}\right|d\lambda < \infty \tag{11}$$

对于某个 $m \in \mathbb{N}$，考虑对 S 的如下近似 Q_m：

$$\tilde{Q}_m(z) = \left(1 - \frac{\log(S(z))}{m}\right)^{-m},$$

那么， Q_m 是外函数，并满足 $GD(Q_m) = GD(S) = \phi'(0)$。此外，我们有

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2(Q\tilde{Q}_m) = \sigma_{\mathrm{I}}^2(Q) + \mathcal{GD}(\tilde{Q}_m) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{m}\Big) = \sigma_{\mathrm{I}}^2(QS) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{m}\Big). \tag{12}$$

因此，外函数 Q_m 通过近似 S 的相位 $\phi(\lambda)$，来近似 S 的时延机制。事实上，从命题的证明可以看出， Q_m 的相位 ϕ_m 满足 $\phi_m(0) = \phi(0)$ 且 $\phi_m'(0) = \phi'(0)$。

在第 5 节中，我们将应用命题 1 ，构造一个可逆的 ARMA 类，其订单可用于近似最优策略。我们的方法关键在于用极限策略的外因子 $S(z) = \exp(\gamma_\kappa(z-1)/(1+z))$替换奇异内因子 $\tilde{\psi}^\infty(z)$ $\tilde{Q}_m(z) = \big(1 - \frac{1}{m}\log S(z)\big)^{-m}$。

5. ARMA 近似

如第3节所述，当 κ取值较小时，极限策略涉及一个带有奇异内因子的非有理传递函数。本节利用命题1引入一类 ϵ最优可逆 ARMA 订单，用于近似这一解。我们通过数值方法评估了这类订单的性能，并表明即使是低阶 ARMA 模型也能实现近乎最优的性能，在准确性与可处理性之间取得实用的平衡，同时为上一节讨论的最优信息时延机制提供紧凑且易于理解的表示。我们还推导了次优性的渐近界，量化了随着其 ARMA 阶数

¶奇异内函数的奇异测度 μ 是原子的，定义见定理 3 的陈述中的 S。

‖条件（11）刻画了 $\phi(\lambda) \to 0$ 当 $\lambda \to 0$ 时的速率，要求 $\phi^2(\lambda) \asymp \tan\frac{\lambda}{2}$；这相当于要求 $\sigma_{\mathrm{I}}^2(S) < \infty$（注意（ $|1-z|^2 = \sin^2\frac{\lambda}{2}$ 见（3））），其中 $\asymp$ 表示相差正乘法常数的渐近等价。

增大时，这类策略的收敛速率。最后，根据定理1，我们已知，当 $\kappa \geq \sqrt{5}$时，优化问题（5）的最优解是一个简单的 MA(1) 策略。因此，我们将分析重点放在 $\kappa < \sqrt{5}$的情形。

我们提出的近似过程以极限策略

$$\tilde{\psi}^{\infty}(z) = \frac{1+z}{2} \exp\left(\gamma_\kappa \frac{z-1}{1+z}\right),$$

为目标参照，并利用 $\exp(-x) \approx (1+x/m)^{-m}$ 在 $m \in \mathbb{N}$较大时的欧拉极限表示替代奇异内因子。采用这一近似方案，我们得到以下因果的、可逆的自回归移动平均阶数序列$\widehat{\ }$ $\tilde{\ }$，以近似 ψ^{∞}

$$\widehat{\psi}^{m}(z) \equiv \frac{1+z}{2}\left(1+\frac{\gamma_\kappa(1-z)}{m(1+z)}\right)^{-m} = \underbrace{\left(\frac{1+z}{2}\right)^{m+1}}_{\text{MA}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+\frac{\gamma_\kappa}{m}}{2}\right)^{-m}\left(1+\frac{1-\frac{\gamma_\kappa}{m}}{1+\frac{\gamma_\kappa}{m}}z\right)^{-m}}_{\text{AR}}, \tag{13}$$

$\widehat{\ }$其中，在第二个等式中，我们将 ψ^m 分解为一个阶数为 $m+1$的 MA 分量和一个阶数为 m的 AR 分量，二者均满足有界库存条件。因此，从实际角度来看，参数 m 刻画了我们所提出的近似策略 $\psi^m(z)$的“复杂度”。

如下所示，对于固定的 $m \in \mathbb{N}$，MA 部分通过抑制预测误差帮助供应商，而 AR 部分通过减少群延迟帮助零售商（见第 4 节）。增大 m 会改善零售商对$\tilde{\ }$的近似 ψ^{∞}，但会放大均方预测误差，损害供应商的利益 σ^2 s （见定理 2 的证明）。

顺带一提，尽管对于$\sim\psi^{\infty}(z)$ 中的奇异内因子，还可以采用其他有理逼近方案，但我们提出的方案有一个关键特性：它能匹配$\tilde{\ }$的全通 $\psi^{\infty}(z)$ 分量的群延迟，因此是分析和实现的自然选择。这可直接由命题1得出。

$\widehat{\ }$推论 2。 近似的自回归移动平均策略 $\psi^m(z)$ 在 (13) 中保留了极限策略 $\tilde{\psi}^{\infty}(z)$ 的群延迟，即 $\mathcal{GD}(\widehat{\psi}^m) = \mathcal{GD}(\tilde{\psi}^{\infty}) = \mathrm{d}\,\mathrm{d}z\,\psi^{\infty}(z)\big|_{z=1} = \frac{1+\gamma_\kappa}{2}$。 — ———

回顾定理 1 可知，γ_κ是 $\kappa^2 = (5+2\gamma)\exp(-2\gamma$的唯一解；因此，当 $\kappa \to 0$， $\gamma_\kappa \to \infty$。由此，推论 2 说明，优先考虑供应商（$\kappa := K^{\mathrm{R}}/K^{\mathrm{S}} \ll 1$）要求增大我们的订货策略的延迟 GD$(\psi^m)$，这进一步证实了定理 2 的结论：若要降低供应商的库存成本，大延迟是必不可少的。

$\widehat{\ }$为评估式（13）中近似策略的表现，表1 报告了相对成本$\mathcal{C}(\psi^m)/\mathcal{C}^*$关于 m 以及零售商相对成本权重 κ的函数关系。总体而言，对于 κ 取 $m \geq 10$的情况，该近似在不同 $\kappa \geq 1$取值下始终表现良好。此外，当 $m \geq 1$时，也就是说，零售商成本的权重高于供应商成本时，该近似在 $m \geq 1$下已表现出色，这表明即使订货复杂度不高，也能大幅降低供应链成本。

示例 3。为进一步说明表 1中的结果，请考虑以下情形 $\kappa = 1$，其中零售商和供应商的成本对供应链总成本的贡献相同。在此情形下，选择 $m = 1$ 可得到一个简单的 ARMA(1,2)订货策略：

$$O_t = \frac{\gamma_\kappa - 1}{1+\gamma_\kappa} O_{t-1} + \frac{1}{2(1+\gamma_\kappa)}(D_t + 2D_{t-1} + D_{t-2}), \qquad \text{with } \gamma_\kappa \approx 0.968,$$

	m							
κ	0	1	2	5	10	20	50	100
0.001	204.707	10.767	2.824	1.271	1.111	1.046	1.014	1.006
0.01	23.390	2.255	1.446	1.139	1.059	1.025	1.008	1.003
0.1	3.249	1.284	1.135	1.047	1.020	1.008	1.003	1.001
0.5	1.298	1.052	1.027	1.009	1.004	1.002	1.001	1.000
1.0	1.074	1.012	1.006	1.002	1.001	1.000	1.000	1.000
2.0	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sqrt{5}$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表1 近似策略 ψ^m 的相对成本绩效，作为 κ 和 m 的函数：$\mathcal{C}(\psi^m)/\mathcal{C}^*$

其成本仅比最优策略高。2%。将订单增加至 $m=2$（即采用 ARMA(2,3)策略）可进一步将这一差距缩小一半。 $\diamond$

下一个结果通过对以下渐近1 表中的结果提供解析量化，从而进一步印证了表 $\psi^m(z)$ 的性能 m 在其增大时的表现。

PRO位置 2。对于任意 $m\in\mathbb{N}$，存在某个常数 $C_\kappa>0$，其仅取决于 γ_κ ，

(i) $|\sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\tilde{\psi}^\infty)-\sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\widehat{\psi}^m)|\le C_\kappa m^{-1}$,

(ii) $|\sigma^2{}_{\mathrm{S}*}-\sigma^2{}_{\mathrm{S}}(\widehat{\psi}^m)|\le C_\kappa m^{-1}$，以及

(iii) $|\mathcal{C}(\widehat{\psi}^m)-\mathcal{C}^*|\le C_\kappa m^{-1}$。

命题 2 凸显了我们提出的近似策略类别 $\{\psi^m\}$ 在 (13) 中固有的最优性与可实施性之间的权衡。从实践角度看，我们希望选择较小的 m，以降低策略的复杂度。另一方面，我们希望使m 尽可能大，以缩小策略的最优性差距。

5.1. 有限记忆

本节将扩展上一节的结果，研究供应商记忆有限、只能基于有限窗口内的过去订单而非完整订单历史进行预测时，库存管理者面临的问题。实际上，供应商依赖有限订单历史，可能是由于预测方法欠佳或计算约束所致。有限记忆形式化刻画了现实中的信息限制，并凸显了可处理性与性能之间的自然权衡。我们的分析重点是界定此类有限记忆策略与理想化无限历史基准之间的性能差距，从而量化有限信息带来的成本。此外，我们还刻画了这一差距随供应商记忆长度增加而缩小的速率，并表明有限记忆策略的成本以明确的速率收敛至完整历史情形下的成本。这使我们能够评估，随着过去观测值的时间跨度扩大，可实施策略接近理论基准的速度。此外，与命题 2不同，我们表明，当供应商的记忆有限时，提高零售商策略的复杂度可能会不利于最优性。

我们考虑这样一种情形：在任意时刻，供应商仅使用最近的 $n+1$ 个订单$\{O_t$、O_{t-1}、.....、$O_{t-n}\}$来预测零售商的下一期订单。在这种情况下，$\mathcal{F}^{\mathrm{S}}(t)=\mathcal{F}_{\mathrm{O}_t}{}^n$，其中 $\mathcal{F}_{\mathrm{O}_t}{}^n$是

由零售商这段有限历史订单生成的 σ-代数。借助有限记忆，供应商通过计算 O_{t+1}在由{1、O_t、O_{t-1}、…
…、O_{t-n}}生成的线性空间上的投影，构造出对零售商下一期订单的最佳线性 n-过去预测值 O^n_{t+1}。也就是说，

$$\widehat{O}^n_{t+1} = c + \sum_{k=0}^{n} c_k\, O_{t-k},$$

其中，系数 $\mathfrak{c} = (c,\ c_0,\ \ldots\ldots,\ c_n)$ 在以下优化问题中取到最小值：

$$\sigma^2_{\mathrm{S},n} \equiv \min_{\mathfrak{c}} \mathbb{E}\Big[\Big(O_{t+1} - c - \sum_{k=0}^{n} c_k\, O_{t-k}\Big)^2\Big]. \tag{14}$$

注意，根据平稳性，量 $\sigma^2{}_{\mathrm{S}\,n}$（即 n-过去预测误差）与 t 无关。此外，一般而言，我们有 $\mathcal{F}_t^{\mathrm{o}\,n} \subseteq, \mathcal{F}_{\mathrm{o}t}$，这意味着 $\sigma^2{}_{\mathrm{S}} \le \sigma^2{}_{\mathrm{S}\,n}$。

对于有限记忆供应商，我们关注的是在策略类 $\{\psi^m\}$ 中最小化累积供应链成本 $\widehat{\mathcal{C}}_n(\psi) \equiv K_{\mathrm{I}}\,\sigma_{\mathrm{I}}(\psi) + K_{\mathrm{S}}\,\sigma_{\mathrm{S},\,n}(\psi)$。我们得到命题 2 的以下类似结果：

命题 3。 对于任意 $m \in \mathbb{N}$，存在某个 $C_\kappa > 0$，其仅取决于 γ_κ，
(i) $|\sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\tilde{\psi}^{\infty}) - \sigma^2{}_{\mathrm{I}}(\widehat{\psi}^m)| \le C_\kappa\, m^{-1}$；(ii) $|\sigma^2{}_{\mathrm{S}\,n}(\hat{}\psi_m) - \sigma^2{}_{\mathrm{S}*}| \le C_\kappa \left(\frac{(m+1)^2}{n} + \frac{m^2 \log\log(m+\gamma}{n} + \frac{1}{m}\right)$；(iii) 对于选择 $m(n) \asymp \left(\frac{\log n}{n}\right)^{-3}$：

$$|\mathcal{C}_n(\widehat{\psi}_{m(n)}) - \mathcal{C}^*| \le C_\kappa \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{15}$$

命题 3 强调了供应商记忆 n 与零售商策略复杂度 $\widehat{\psi}^m(z)$ 之间微妙的关系。事实上，从关系式 $m(n) \asymp \left(\frac{\log n}{n}\right)^{-3}$ 中可以看出，随着供应商扩大预测窗口，零售商应致力于传达更长时间范围内的需求冲击。然而，这种依赖关系严格来说是次线性的：如果零售商的订单过于复杂，供应商就有可能根据有限的订单记忆对预测过拟合，这揭示了设计信息延迟时经典的偏差-方差权衡。事实上，这会导致供应商根据有限的订单历史严重低估市场波动性，并持续做出不可靠的预测，随着时间推移，供应商的库存成本将因此飙升。

6. 讨论

本文研究了在缺乏明确信息共享机制的情况下，分散式两级供应链中的下游零售商如何通过其订单流的结构，向上游供应商隐式传递需求信息。我们引入信息延迟这一概念，作为隐式需求共享的工具，明确建立了最优隐式信息共享与零售商订货传递函数群延迟之间的联系。我们证明，纯延迟严格次优，而分数延迟机制能够重塑订单自相关性，从而提高供应商可预测性并降低系统范围库存成本。利用 Hardy空间因式分解，我们构建了一类易于处理的

可逆 ARMA 策略，该类策略能够逼近由 Caldentey 等人（2025b）推导出的理论最优（但非有理）极限滤波器，并保留其信息延迟特性。该构造清晰地揭示了策略复杂度（以 ARMA策略的阶数衡量）如何影响供应链成本。我们进一步将分析扩展至记忆受限的供应商，并刻画零售商策略的复杂度应如何随供应商有限的预测窗口变化，从而揭示在某些情况下，增加策略复杂度反而可能适得其反。

最后，我们提出一些值得深入探讨的未来研究方向。本文中的信息延迟以群延迟为特征，直观而言，它可以视为信号延迟结构的“第一矩”。虽然我们证明了这一延迟度量非常适用于本文的分析（其中成本以波动率/方差表示），但若能对整个延迟分布进行更全面的刻画，将会很有意义；要优化更复杂的成本结构，这很可能是必要的。作者目前正在开展的工作聚焦于将更一般的需求模型纳入我们的收敛分析，超越本文所考虑的独立同分布情形。另一个有趣的研究方向是探讨能否将本文的分析扩展到处理更高维的订单和需求表示（或许可以通过区分不同产品来实现）。

A. 证明

定理的证明 2：假设 $|Q(z)| \geq c$ 对于 $z \in \mathbb{T}$。我们可以写成：

$$Q(z) = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z} \log|Q(e^{i\lambda})| d\lambda\Big)$$

现在，由于 $Q(1) = 1$（库存有界条件），我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{GD}(Q) = Q'(1) = \frac{Q'(1)}{Q(1)} = \frac{d}{dz}[\log Q]|_{z=1} = \frac{d}{dz}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\log|Q(e^{i\lambda})|d\lambda\Big]\Big|_{z=1} \\
= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{i\lambda}}{(e^{i\lambda}-1)^2}\log|Q(e^{i\lambda})|d\lambda = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(1-\frac{e^{2i\lambda}+1}{(e^{i\lambda}-1)^2}\Big)\log|Q(e^{i\lambda})|d\lambda \\
= -\frac{1}{2}\log\sigma_{\mathrm{s}}^2(Q) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}\log|Q(e^{i\lambda})|d\lambda \qquad \text{(A1)}
\end{aligned}$$

其中，（A1）由 Kolmogorov 公式可得 $\sigma^2{}_{\mathrm{s}}(Q)$。

□

推论的证明 1我们可以直接计算定义 c（8）的积分：

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\lambda}{1-\cos\lambda}Q(e^{i\lambda})d\lambda = \sum_{l=1}^{m}\alpha_l\Big(\log\Big|1-\frac{1}{a_l}\Big| + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-a_l}\Big)\Big) + \sum_{k=1}^{n}\log\Big|\sin\frac{\theta_k}{2}\Big| + \frac{1}{2}$$

显然，右侧关于$\{|a_l|\}_{l=1}^m$联合递减，并且在 $\alpha_l = 1$ 和 $\theta_k = 0$ 处发散（对于任意 $l \in [m]$或 $k \in [n]$）。由于根据定义有 $\alpha_l \in B(1, \delta)$，我们的界限便得证。 □

定理 3 的证明：由（9）和 Fricain 和 Mashreghi （2008）中的定理 3.2(v)，可知对所有$r \in [0,1]$，再生核为：

$$k_r(z) \equiv \frac{1-r\tilde{\psi}(r)z\tilde{\psi}(z)}{1-rz} \in K_{z\tilde{\psi}} \qquad \text{(A2)}$$

其中 K_{zQ} 仍是与函数 zQ 相对应的 de Branges-Royvnak 空间（定义见 Fricain 和 Mashreghi （2008））。然后，由（A2）和 Fricain 和 Mashreghi （2008）中的定理 3.2(v)，可得：

$$\begin{aligned}\sigma_I^2(\tilde{\psi})\langle k_1(z),k_1(z)\rangle_2 &= \lim_{r\to 1}\langle k_r(z),k_r(z)\rangle_2\\ &= \lim_{r\to 1}\langle k_r(z),(I-T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*)k_r(z)\rangle_{K_{z\tilde{\psi}}}\end{aligned}$$

对于任意 $\phi\in\mathbb{H}^2$，令 $T_\phi f=P_+(\phi f)$，其中 P_+ 表示从 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $\mathbb{H}^2$的正交投影，并令T_ϕ^* 表示其伴随算子。于是，由（A2）以及 Fricain 和 Mashreghi (2008）第 89 页可得：

$$\begin{aligned}(I-T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*)k_r(z) &= (I-T_{zQ}T_{zQ}^*)^2\Big(\frac{1}{1-rz}\Big)\\ &= (I-2T_{zQ}T_{z\tilde{\psi}}^*+(T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*)^2)\Big(\frac{1}{1-rz}\Big)\end{aligned}$$

˜令$\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 表示 ψ 的谱密度的傅里叶系数，即：

$$|\tilde{\psi}(e^{i\lambda})|^2=b_0+\sum_{k\geq 0}b_k(e^{ik\lambda}+e^{-ik\lambda})$$

因此，我们有：

$$\Big\langle\frac{1}{1-rz},(T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*)^2\Big(\frac{1}{1-rz}\Big)\Big\rangle = r^2\tilde{\psi}^2(r)\Big\langle\frac{z\tilde{\psi}(z)}{1-rz},\frac{z\tilde{\psi}(z)}{1-rz}\Big\rangle \tag{A3}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)}{1-r^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}r^iz^i\Big)\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}b_iz^i\Big)d\lambda\\ &= \frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)}{1-r^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}b_ir^i\equiv\frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)}{1-r^2}\cdot f_Q(r)\end{aligned} \tag{A4}$$

其中定义：

$$f_Q(re^{i\theta})=b_0+2\sum_{k\geq 1}b_kr^k\cos k\theta$$

其中 f_Q 表示谱密度 $|\tilde{\psi}(e^{i\lambda})|^2$ 仅依赖于外因子 Q。现在，注意到：

$$T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*\Big(\frac{1}{1-rz}\Big)=\frac{z\tilde{\psi}(z)r\tilde{\psi}(r)}{1-rz}$$

综上所述，我们得到：

$$\begin{aligned}\langle k_1(z),k_1(z)\rangle_2 &= \lim_{r\to 1}\langle k_r(z),(I-T_{z\tilde{\psi}}T_{z\tilde{\psi}}^*)k_r(z)\rangle_{K_{zQ}}\\ &= \lim_{r\to 1}\Big\langle k_r(z),\frac{1-2z\tilde{\psi}(z)r\tilde{\psi}(r)}{1-rz}\Big\rangle_{K_{z\tilde{\psi}}}+\frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)}{1-r^2}\cdot f_Q(r)\\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1-2r^2\tilde{\psi}^2(r)+r^4\tilde{\psi}^4(r)}{1-r^2}+\frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)(f_Q(r)-r^2\tilde{\psi}^2(r))}{1-r^2}\\ &= 0+\lim_{r\to 1}\frac{r^2\tilde{\psi}^2(r)(f_Q(r)-1+1-r^2\tilde{\psi}^2(r))}{1-r^2}\\ &= 1+\tilde{\psi}'(1)-\frac{\partial_rf_Q(1)}{2}\end{aligned}$$

根据库存有界条件 $\tilde{\psi}(1) = 1$，我们有 $\tilde{\psi}'(1) = {}^{\tilde{\psi}}{}_{\prime(1)}\,\tilde{\psi}(1) = (\log \tilde{\psi})'(1) = (\log Q)'(1) + (\log B)'(1) + (\log I)'(1) = \mathrm{GD}(Q) + \mathrm{GD}(B) + \mathrm{GD}(I)$（其中，最后一个等式同样由库存有界条件得出，并分别应用于 Q, B, 和 I）。 □

命题 1 的证明：为了证明函数 $Q(z)$ 是外函数，首先注意到，当 $S(z)$ 的对数 $= -\infty$ 时，$Q(z) = 0$。因此，由于对于 $z \in \mathbb{D}$，$S(z) \neq 0$ （因为 S 是奇异内函数），我们同样有对于 $z \in \mathbb{D}$，$Q(z) \neq 0$。此外，由于 S 的奇异测度是原子的，对于某个可数集合 J，我们有 $\log S(z) = \sum_{k \in J} \frac{z+e^{i\lambda_k}}{z-e^{i\lambda_k}}$——因此，$Q$ 在 $\mathbb{T}$ 上的任意零点都与 Q 在 $\mathbb{T}$ 上的根重合。最后，由于 $\log(S(z)) = \log(|S(z)|) + i\arg(z)$，$Q$ 的极点满足 $\log(|S(z)|) = m > 0$。对调和函数 $\log|S(z)|$ 在 $\mathbb{D}$ 上应用最大值原理（回顾一下，$S(z)$ 是奇异内函数，因此 $\log S(e^{-i\lambda})$ 是纯虚数），可得 $\log |S(z)| \leq \max_{w \in \mathbb{T}} \lim_{r \to 1^-} \log|S(rw)| = 0$。由此可知，$Q$ 没有极点，因此是外函数。

首先，我们证明 $\mathcal{GD}(Q) = \phi'(0)$。显然：

$$\mathcal{GD}(\tilde{Q}) = \tilde{Q}'_m(1) = m \cdot \frac{S'(z)}{m \cdot S(z)} \left(1 - \frac{i \log S(z)}{m}\right)^{m-1} \Big|_{z=1} = S'(1) = \phi'(0)$$

其中，在倒数第二个等式中，我们使用了假设 $\phi(0) = 0$。

现在，我们应用定理 3。注意，根据库存有界条件，$\mathrm{GD}(QQ_m) = \mathrm{GD}(Q) + \mathrm{GD}(Q_m)$。因此，我们有：

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2(Q\tilde{Q}_m) - \sigma_{\mathrm{I}}^2(Q) = \mathrm{GD}(\tilde{Q}_m) + \frac{\partial_r f_Q(1)}{2} - \frac{\partial_r f_{Q\tilde{Q}_m}(1)}{2}.$$

现在，对于任意外传递函数 $O \in \mathbb{H}^2$，令 $g_O = |O|^2$。注意：

$$\partial_r f_O(1) = \lim_{r \to 1} \frac{f_O(r) - f_O(1)}{r - 1} = \frac{d\mathcal{H}[g_O]}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \tag{A5}$$

其中 $\mathcal{H}[g_O](e^{-i\lambda})$ 表示单位圆（ g_O Rosenblum and Rovnyak1997）上的谱密度的希尔伯特变换。根据希尔伯特变换的微分性质，我们有：

$$\partial_r f_O(1) = \mathcal{H}[g_O]'(e^{i0}) = \mathcal{H}[g'_O](e^{i0}) \tag{A6}$$

因此，我们可以写作：

$$|\sigma_{\mathrm{I}}^2(Q\tilde{Q}) - \sigma_{\mathrm{I}}^2(Q) - \mathrm{GD}(\tilde{Q})| = \left|\frac{\partial_r f_Q(1)}{2} - \frac{\partial_r f_{Q\tilde{Q}_m}(1)}{2}\right| = \left|\frac{\mathcal{H}(g'_Q)(e^{i0}) - \mathcal{H}(g'_Q g_{\tilde{Q}_m})(e^{i0}) - \mathcal{H}(g_Q g'_{\tilde{Q}_m})(e^{i0})}{2}\right| \tag{A7}$$

$$= \left| -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g'_Q(e^{i\lambda}) \text{ 余切 } \frac{\lambda}{2} d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} g_{\tilde{Q}_m}(e^{i\lambda}) g'_Q(e^{i\lambda}) \text{ 余切 } \frac{\lambda}{2} d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} g'_{\tilde{Q}_m}(e^{i\lambda}) g_Q(e^{i\lambda}) \text{ 余切 } \frac{\lambda}{2} d\lambda \right| \tag{A8}$$

$$= \left| -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g'_Q(e^{i\lambda}) \left(1 - \left(1 + \frac{\phi^2(\lambda)}{m^2}\right)^{-m}\right) \cot\frac{\lambda}{2} d\lambda + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} g_Q(e^{i\lambda}) \left(1 + \frac{\phi^2(\lambda)}{m^2}\right)^{-m-1} \phi(\lambda)\phi'(\lambda) \cot\frac{\lambda}{2} d\lambda \right| \tag{A9}$$

$$\leq \frac{1}{2m}\int_{-\pi}^{\pi} |g'_Q(e^{i\lambda})|\phi^2(\lambda) \text{ 余切 } \frac{\lambda}{2} d\lambda + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} g_Q(e^{i\lambda})|\phi(\lambda)\phi'(\lambda) \text{ 余切 } \frac{\lambda}{2}|d\lambda \tag{A10}$$

其中（A7）由微分的乘积法则以及（A6）得出，（A15）使用了单位圆上希尔伯特变换的积分表示，（A9）根据 Q_m 的定义得出，而（A10）由中值定理得出（注意 $\left|\frac{d}{dx}(1+x)^{-m}\right| \leq m$）。因此，我们的结果由假设（11）得出。 □

命题 2 的证明： 在整个证明过程中，我们记：

$$S = \exp\left(\gamma_\kappa \frac{z-1}{1+z}\right) \tag{A11}$$

$$\tilde{Q}_m = \left(1 + \frac{\gamma_\kappa(1-z)}{m(1+z)}\right)^{-m} \tag{A12}$$

$$Q = \frac{1+z}{2} \tag{A13}$$

现在，记 $g_O = \|O\|^2$ 为与传递函数 O对应的谱密度。应用定理 3，并注意到与（A5）和（A6）类似：

$$\begin{aligned}
|\sigma^2{}_{\text{我}}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2{}_{\text{我}}(\tilde{\psi}_\infty)| &= |\text{GD}(\tilde{Q}_m) - \text{GD}(S) + \frac{\partial_r f_Q(1)}{2} - \frac{\partial_r f_{Q\tilde{Q}_m}(1)}{2}| \\
&= \left|\frac{\mathcal{H}(g'_Q)(e^{i0}) - \mathcal{H}(g'_Q g_{\tilde{Q}_m})(e^{i0}) - \mathcal{H}(g_Q g_{\tilde{Q}_m})'(e^{i0})}{2}\right| && \text{(A14)} \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g'_Q(e^{-i\lambda})\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} g_{\tilde{Q}_m}(e^{i\lambda})g'_Q(e^{-i\lambda})\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} g'_{\tilde{Q}_m}(e^{i\lambda})g_Q(e^{i\lambda})\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda\right| && \text{(A15)} \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\left(1 - \left(1 + \frac{\gamma_\kappa^2\tan^2\frac{\lambda}{2}}{m^2}\right)^{-m}\right)\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda\right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma_\kappa^2}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos^2\frac{\lambda}{2}}_{\text{余弦}}\underbrace{\left(1 + \frac{\gamma_\kappa^2\tan^2\frac{\lambda}{2}}{m^2}\right)^{-m-1}}_{\text{正弦}}\underbrace{\tan\frac{\lambda}{2}}_{\text{正切}}\underbrace{\sec^2\frac{\lambda}{2}}_{\text{余切}}\cot\frac{\lambda}{2}d\lambda\right| && \text{(A16)} \\
&\preceq \frac{\gamma_\kappa^2}{m}\int_{-\pi}^{\pi} d\lambda + \frac{\gamma_\kappa^2}{m} && \text{(A17)} \\
&\preceq \frac{\gamma_\kappa^2}{m}, && \text{(A18)}
\end{aligned}$$

其中，在（A14）中，我们使用了 $\text{GD}(Q_m) = \text{GD}(S)$，这是由命题 1得到的；应用了 f_O 的希尔伯特变换表示（见命题 1 的证明）、希尔伯特变换与微分的可交换性以及乘积法则；在（A15）中，我们应用了圆周上的希尔伯特变换积分表示；在（A17）中，我们代入了（A11）、（A12）和（A13）。现在，很容易看出 $S(e^{-i\lambda}) = e^{i\tan\frac{\lambda}{2}}$。因此，我们有：

$$\sigma_{\text{I}}^2(\hat{\psi}_m) - \sigma_{\text{I}}^2(\tilde{\psi}_\infty) \leq \frac{C_\kappa}{m}$$

其中某个 $C_\kappa > 0$ 仅取决于 κ。此外，对于 (b) 部分，我们有：

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{S}}^2(\hat{\psi}_m) - \sigma_{S^*}^2 &= \hat{\psi}_m^2(0) - \tilde{\psi}_\infty(0) \\
&= \frac{1}{2}\left((1 - \frac{\gamma_\kappa}{m})^{-2m} - \exp(-2\gamma_\kappa)\right) \\
&\leq \frac{C_\kappa}{m} && \text{(A20)}
\end{aligned}$$

由中值定理直接应用可得。将第 (i) 和 (ii) 部分结合起来，我们得到第(iii)部分中成本的误差界。 □

命题 3 的证明：由于误差 $|\sigma^2{}_{\text{I}}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2{}_{\text{I}}(\tilde{\psi}^*)|$ 不受有限过去形式的影响，我们只需界定供应商成本中的误差：$|\sigma^2{}_{\text{S}\,n}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2{}_{\text{S}}(\tilde{\psi}_\infty)|$。我们首先研究 $\sigma^2{}_{\text{S}\,n}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2{}_{\text{S}}(\hat{\psi}_m)$。注意，由于，

$$\max_m \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\psi}_m(e^{-i\lambda})|^2 d\lambda < \infty$$

我们有 $\max_{n,m} \sigma^2{}_{S\,n}(\hat{}\psi_m) < \infty$。对于谱密度 $\mu(\theta) = g(\theta)d\theta$，我们回顾一下以 Toeplitz行列式表示的 $\sigma^2{}_{S\,n}(g)$ 的以下表达式：

$$\sigma^2_{S,n}(g) = \frac{D_{n-1}(g)}{D_{n-2}(g)}$$

其中 $D_k(g) =$ 行列式$\left([g_{i-j}]_{i,j=0}^{k}\right)$ 是符号函数为 $g(e^{-i\lambda}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k$ 余弦 $k\lambda$ 的托普利茨行列式（例如，参见Gray 和 Davisson 2004中的公式 (4.72)）。因此，我们可以写成：

$$\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2_S(\hat{\psi}_m) \le |\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m)|(\log\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m) - \log\sigma^2_S(\hat{\psi}_m)) \le C\Big(\log\frac{D_{n-1}(\hat{g}_m)}{D_{n-2}(\hat{g}_m)} - \frac{1}{\pi}\int \log|\hat{\psi}_m|(e^{-i\lambda})d\lambda\Big)$$

其中 $\hat{}g_m = |\hat{}\psi_m|^2$。现在，应用 Deift 等人 (2011) 中的定理 1.1，其中：

$$V(z) = (z+1-\frac{\gamma}{m}(z-1))^{-m} = \exp\Big(\log(z+1-\frac{\gamma}{m}(z-1))^{-m}\Big) = \exp\Big(-m\Big(1+\frac{\gamma}{m}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(\frac{m-\gamma}{m+\gamma}\Big)^k\Big)\Big)$$

我们得到：

$$\begin{aligned}\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2_S(\hat{\psi}_m) &\le |\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m)|(\log\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m) - \log\sigma^2_S(\hat{\psi}_m)) \\ &\asymp \frac{(m+1)^2\log n}{n}\end{aligned} \tag{A21}$$

结合式（A20），可得：

$$|\sigma^2_{S,n}(\hat{\psi}_m) - \sigma^2_{S^*}| \preceq \frac{(m+1)^2\log n}{n} + \frac{1}{m}$$

这证明了命题中的第二项。最后，结合命题$|\sigma^2{}_{I}(\hat{}\psi_m) - \sigma^2{}_{I}(\tilde{\psi}^*)|$ 中的界 2，我们得到：

$$|\mathcal{C}_n(\widehat{\psi}_{m(n)}) - \mathcal{C}^*| \le C_\kappa\Big(\frac{(m(n)+1)^2\log n}{n} + m(n)^{-1}\Big)$$

选择我们的 $m(n)$以平衡各项，可得第 (iii) 项。 □

参考文献

Appaiah、Kumar、Debasattam Pal。2020。使用 Blaschke 插值进行全通滤波器设计。*IEEE* 信号处理快报27226–230。Aviv，Y. 2001。协同预测对供应链绩效的影响。《管理科学》47(10) 1326–1343。Balakrishnan，A.、J. Geunes、M. S. Pangburn。2004。通过控制上游变异传播来协调供应链。《制造与服务运营管理》6(2) 163–183。Bensoussan，Alain、Metin Cakanyildirim、Suresh P Sethi。2006。对于存在信息延迟的库存问题，基库存策略和（s，S）策略的最优性。《优化理论与应用杂志》130153–172。Brockwell，P.J.、R.A. Davis。2006。时间序列：理论与方法。Springer，纽约。

Brown，Robert Goodell.2004. 离散时间序列的平滑、预测与预报. CourierCorporation.

Caldentey, Ren´e, Avi Giloni, Clifford Hurvich, Prem Talwai, Yichen Zhang. 2025a. 用于库存与信息控制的二项式平滑。Caldentey, Ren´e, Avi Giloni, Clifford Hurvich, Yichen Zhang. 2025b. 供应链中的信息设计与共享。运筹学数学 50(3) 1965–1991. Chen, Fangruo. 1999. 受信息延迟影响的分散式供应链。《管理科学》 45(8) 1076–1090. Chen, L., H.L. Lee. 2009. 广义需求模型下的信息共享与订单波动控制。《管理科学》 55(5) 781–797. Dang, Pei, Tao Qian. 2011. 最小相位信号的解析相位导数、全通滤波器与信号。*IEEE*信号处理汇刊 59(10) 4708–4718. Deift, Percy, Alexander Its, Igor Krasovsky. 2011. 具有Fisher-Hartwig奇点的Toeplitz、Hankel及Toeplitz+Hankel行列式的渐近性质。数学年刊 1243–1299. Disney, S. M., D. R. Towill, W. Van de Velde. 2004. 生产与库存控制中的方差放大与黄金比例。国际生产经济学杂志 90(3) 295–309. Fricain, Emmanuel, Javad Mashreghi. 2008. de Branges–Rovnyak空间中函数的边界行为。复分析与算子理论 2(1) 87–97. Gavirneni, S., R. Kapuscinski, S. Tayur. 1999. 容量受限供应链中的信息价值。《管理科学》 45(1) 16–24. Giloni, Avi, Clifford Hurvich, Sridhar Seshadri. 2014. ARMA需求下供应链中的预测与信息共享。*IIE*汇刊 46(1) 35–54. Gray, Robert M, Lee D Davisson. 2004. 统计信号处理导论。剑桥大学出版社。Lee, Hau L., Kut C. So, Christopher S. Tang. 2000. 两级供应链中的信息共享价值。《管理科学》 46626–643. Mehta, Parth, Kumar Appaiah, Rajbabu Velmurugan, Debasattam Pal. 2023. 使用幺模插值设计全通滤波器。*IEEE* 信号处理快报 30 433–437. Nikolski, Nikola¨ı. 2019. *Hardy*空间。剑桥大学出版社出版社，英国剑桥。Rosenblum, Marvin, James Rovnyak. 1997. *Hardy*类与算子理论。Courier Corporation。Rudin, Walter. 1987. 实分析与复分析。McGraw-Hill。