传递图上伯努利渗流中，两个顶点之间的连接概率不一定随距离单调变化

Alberto M. Campos*和 Bernardo N.B. de Lima†

arXiv:2601.00291v1 [math.PR] 1 Jan 2026

摘要

伯努利渗流模型中一个广受关注的问题是：传递图中两个顶点之间的连接概率是否会随着这两个顶点之间距离的增加而单调衰减。例如，在正方格点阵上，证明原点与顶点 $(0, n)$ 之间的连接概率关于 n 单调变化，仍是一个悬而未决的问题。在这篇短文中，我们给出一个传递图的例子，其中顶点之间的连接概率不一定会随着这些顶点距离的增加而衰减。我们还定义了实数空间 $\mathbb{Z}^d$ 中渗流的一个临界点；借助渗流过程的一种推广，可以观察到在 $\mathbb{Z}^d$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的嵌入中也会出现相同的现象。

关键词：渗流理论；渗流；数学主题分类编号：60K35，82B43

1 引言

伯努利渗流提出了许多表述起来十分简单、却难以解决的问题，其中也包括一些尚未解决的开放问题。一个这样的问题是证明顶点之间的连接概率随图距离单调变化。从本质上说，这个问题是在问：在随机介质中，两个点随着距离增加，它们在同一簇中相连的概率是否会降低。Hammersley 和 Welsh 于 1965年在首次通过渗流的背景下首次提出了这个问题。此后，已有许多论文探讨这一主题，包括 [1, 2, 4, 6, 9] 在首次通过渗流背景下的研究，以及 [10]在渗流理论中的研究。 [3] 在有向渗流框架下探讨了一个类似且同样引人入胜的问题。此外，值得一提的是双层床猜想，它在有限层板背景下提出了一个相关问题；参见 [5]。

为形式化这一问题，设 $G = (\mathbb{V}(G)\ \mathbb{E}(G))$ 为一个图，其中 $\mathbb{V}(G)$ 是顶点集， $\mathbb{E}(G) \subseteq \{\{v, u\} : v, u \in \mathbb{V}(G)\ v \neq u\}$ 是无向边集。对于每个 $v, u \in \mathbb{V}(G)$，定义图 G 中从 v 到 u 的路径为由顶点和边交替组成的序列，其形式为$\gamma = (v = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n = u)$，其中对于每个 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$，都有 $v_i, v_{i+1} \in e_i$。令$|\gamma|$ 表示路径 γ 中边的数量。那么，对于每个 v, $u \in \mathbb{V}(G)$，定义图距离：

$$d_G(v, u) = \min\{|\gamma| : \gamma \text{ is a path in } G \text{ from } v \text{ to } u\}.$$

如果不存在连接 v 到 u 的路径，则设 $d_G(v, u) = \infty$。若对于任意v, $u \in \mathbb{V}(G)$，都有 $d_G(v, u) < \infty$，则称图 G 是连通的。

米纳斯吉拉斯联邦大学数学系，安东尼奥·卡洛斯大道6627号，30123-970，米纳斯吉拉斯州贝洛奥里藏特，巴西

†米纳斯吉拉斯联邦大学数学系，安东尼奥·卡洛斯大道6627号，30123-970，米纳斯吉拉斯州贝洛奥里藏特，巴西

如果对于每一对顶点 v，$u \in \mathbb{V}(G)$，都存在一个将顶点 v 映射到 u的图同构，则称图 G 是传递的。在传递图 G 中，我们可以任意选取一个顶点作为原点，并用 o 表示。固定原点后，将每个 $v \in \mathbb{V}(G)$ 的范数定义为$\|v\|_G = d_G(o, v)$。

考虑图 G上的伯努利渗流模型，其参数为 p，标准底层概率空间记为 $(\Omega, \mathcal{F}\ \mathbb{P}_p)$。

给定 v，$u \in \mathbb{V}$，按照渗流领域的惯例，将事件 $\{v \longleftrightarrow u\}$ 定义为 Ω 中满足以下条件的配置集合：存在一条由开放边构成的路径，连接 v 和 u。此外，将渗流事件 $\{v \longleftrightarrow \infty\}$ 定义为存在一条从 v出发的无限开放路径的配置集合。

若传递图 G 在参数 $p \in [0,1]$下满足单调性，则称该图具有单调性；也就是说，对于所有满足 $\|x\|_G < \|y\|_G$的顶点对 x，$y \in \mathbb{V}(G)$，均有 $\mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x) \geqslant \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow y)$。

给定正整数 d，令 $\mathbb{Z}^d$ 为 d维超立方格。对于所有 $d \geqslant 2$，图 $\mathbb{Z}^d$ 是否满足单调性这一问题仍未解决。然而，对这一问题的直观探索已取得令人瞩目的成果。其中最引人注目的贡献之一来自 J. van den Berg [4], ：他在首次通过渗流的背景下，对图 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}^2$ 给出了否定的答案。

在第2节中，我们将证明，仅有传递性不足以使图具有单调性。具体而言，我们将证明以下命题。

定理1. 对于每个 $\beta \in (0,1)$，都存在一个传递图 G 以及顶点 $x, y \in \mathbb{V}(G)$，使得 $\|x\|_G < \|y\|_G$，但对于每个 $p \in [\beta, 1)$，$\mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x) < \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow y)$

仔细分析定理1的证明后，可以证明，在一种推广通常伯努利渗流的新渗流模型中，即便是超立方格也可能不具有单调性。

在 $\mathbb{Z}^d$ 上参数为 $\lambda > 0$ 的管道-尘埃渗流模型 定义如下。给定 $e = (x, y) \in \mathbb{E}(\mathbb{Z}^d)$，令 $I_e = \{(x, x + t(y - x)) \in \mathbb{R}^d : t \in [0,1]\}$ 为连接 e 端点的线段。在每条线段 $(I_e)_{e \in \mathbb{E}}$ 上定义一个强度为 λ 的独立泊松点过程。我们将所有这些泊松过程上的底层乘积测度记作 $\mathbb{P}_\lambda$。泊松过程的每个点称为尘埃。

在该模型中，$\mathbb{Z}^d$ 的每条边以概率 $e^{-\lambda}$不含尘埃。在这种情况下，这条边称为完全开放。否则，如果该区间内含有一个或多个尘埃粒子（就像管道中的尘埃），每个尘埃都会成为障碍。给定两个点 x，$y \in \cup_{e \in \mathbb{E}} I_e$，如果存在一条包含在 $\cup_{e \in \mathbb{E}} I_e$ 内、连接 x 与 y 且避开所有尘埃粒子的连续路径，我们就称 x 与 y 相连。

管道-尘埃渗流模型将经典的参数为 p 的伯努利渗流推广到了取值为 $\lambda = -\ln(p)$ 的情形。此外，该模型还允许我们研究非整数点之间的连通性。

我们在第3节中研究该模型，并证明以下定理：

定理 2. 对于每个 $d \geqslant 2$，存在一个临界值 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) \in (0, \infty)$ 使得

a) If $\lambda > \lambda_c$, *then* $\mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e}) > \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow t\vec{e})$ *for all* $t \in (0,1)$.

b) 若$0 < \lambda < \lambda_c$，则存在 $t = t(\lambda) \in (0, 1)$ 使得 $\mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e}) < \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow t\vec{e})$.

其中 $\vec{e} = (1, 0, \ldots\ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$。

为说明这一结论，我们给出注1，其中证明了 $\lambda_c(\mathbb{Z}^2) = -\ln(p_c(\mathbb{Z}^2))$。相比之下，注释 3 表明，三角晶格中不会出现同样的行为。

致谢： 作者感谢 Augusto Teixeira 提供的宝贵讨论。A.M.C. 和 B.N.B.L. 的研究分别由 CNPq 项目 315656/2025-5 和 315861/2023-1 资助。

2 定理1的证明

在以完整的一般性证明定理1之前，我们先介绍一个分为两部分的简单构造。第一部分探讨有限图 P 中连接的性质。第二部分将与 P 同构的图连接成树状结构，从而构造出一个不满足单调性的传递图。证明本身将遵循与该构造相同的步骤，但从一个更一般的图 P 开始。

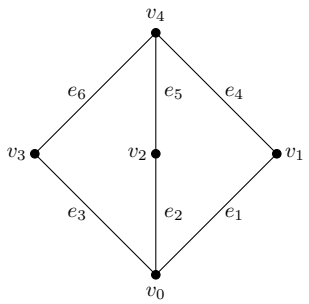


图1：图 P 及元素 $e_i, i \in \{1, ..., 6\}$ 的示意图，这些元素负责组装最终的图 G。

首先定义图 $P = (\mathbb{V}_P, \mathbb{E}_P)$，其中 $\mathbb{V}_P = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$，且 $\mathbb{E}_P = \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_4\}, \{v_4, v_3\}, \{v_3, v_0\}, \{v_0, v_2\}, \{v_2, v_4\}\}$。如图1所示，在此图中，将中间顶点集合定义为 $\{v_1, v_2, v_3\}$，将峰顶顶点集合定义为 $\{v_0, v_4\}$，其中v_0 将被视为原点。注意，$\|v_4\|_P = 2 > \|v_1\|_P = 1$，在标准伯努利渗流中，连接概率为：

$$\mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_4) = 1 - (1 - p^2)^3,$$
$$\mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_1) = p + (1 - p)(1 - (1 - p^2)^2)p.$$

将这些多项式相减，得到：

$$\mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_1) - \mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_4) = p(p-1)^2 \left(p + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(p + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

于是，对于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < 1$，可得：

$$\mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_4) > \mathbb{P}_p(v_o \longleftrightarrow v_1).$$

为使用 P构造传递图 G，我们定义粘合操作。给定两个图 H_1和 H_2，以及两个固定顶点 $x \in \mathbb{V}$（H_1）和 $y \in \mathbb{V}$（H_2），粘合操作通过从 H_1 和 H_2中移除顶点 x和 y，并引入一个新顶点 z，生成一个新图 H_3。顶点 z 继承此前与 x 和 y相连的所有边，这意味着 z 与原先和 x 或 y相邻的所有顶点都相邻。

考虑一个由图组成的无限图堆$\{H_j\}_j$，其中 $H_j = P$ 对每个 j都成立，并归纳地定义图G。首先令 $G_0 = P$，然后从图堆中取出五个图，分别对应于 G_0的每个未粘合顶点。将 G_0的每个顶点分别与从图堆中取出的一个图粘合。具体来说，如果该顶点是 G_0中的峰顶顶点，就将其与一个中间顶点粘合；如果该顶点是 G_0中的中间顶点，就将其与一个峰顶顶点粘合。这样构造出的图G_1 有二十个未粘合顶点。对于一般的第 k 步，从图 G_{k-1} 开始，从图堆中取出 $5 \cdot 4^{k-1}$ 个图，分别对应于 G_{k-1} 的每个未粘合顶点。然后，对于 G_{k-1}的每个未粘合顶点，若该顶点是峰顶顶点，就将其与一个中间顶点粘合；若该顶点是中间顶点，就将其与一个峰顶顶点粘合；由此定义图 G_k。由于$\{G_k\}_k$ 构成

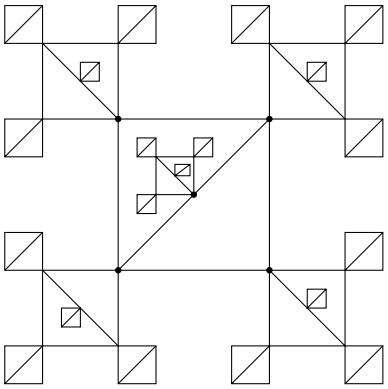


图 2: G_2的表示，其中图 P 的副本以树状结构粘合在一起，表示图 G的一部分。

一个递增的图序列，将 G 定义为它的极限。图 2 展示了 G 的一部分表示。

注意，G 是传递的，但根据构造，对于所有 $p > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，它都不具有单调性。

定理1的证明采用了非常相似的论证。首先定义图$P_n = (V_n, E_n)$，其中 $V_n = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$，且 $E_n = \{\langle v_j, v_i\rangle ; i \in \{1, ..., n-1\}\ j \in \{0, n\}\}$。此外，记$\{v_0, v_n\}$为峰顶顶点，记$\{v_1, ..., v_{n-1}\}$为中间顶点。那么，关于连接概率，我们有

$$\mathbb{P}_p\left(v_o \longleftrightarrow v_i\right) = \begin{cases} 1-(1-p^2)^{n-1} & , i = n; \\ p + (1-p)p(1-(1-p^2)^{n-2}) & , i \in \{1, 2, ..., n-1\}. \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p\left(v_o \longleftrightarrow v_n\right) - \mathbb{P}_p\left(v_o \longleftrightarrow v_1\right) &= (1-p)(1-p-(1-p^2)^{n-2}), \\ &\geqslant (1-p)^2(1-2(1-p^2)^{n-3}). \end{aligned}$$

这意味着，当 $p \geqslant (1-2^{\frac{-1}{n-3}})^{\frac{1}{2}}$ 时，概率之差为正。此外，对于每个 $\beta \in (0, 1)$，都存在 $n(\beta) > 0$，使得对于每个 $n > n(\beta)$，以下结论成立：

$$\mathbb{P}_p\left(v_o \longleftrightarrow v_n\right) > \mathbb{P}_p\left(v_o \longleftrightarrow v_i\right), \forall p \in [\beta, 1) \text{ and } i \in \{1, ..., n-1\}.$$

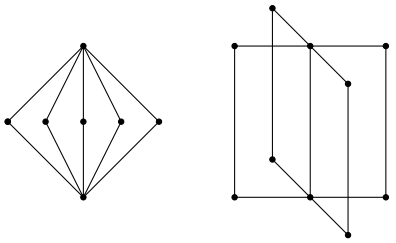
再次注意，对所有 $i \in \{1, ..., n-1\}$，$\|v_n\|_{P_n} = 2 > \|v_i\|_{P_n} = 1$。

要构造非传递图 $G^{(n)}$，请遵循与图 G 相同的构造，但不要使用图 P 的堆叠，而改用图 P_n 的堆叠。特别地，对于每个 $p \in [\beta, 1)$，通过取 $n > n(\beta)$，图 $G^{(n)}$ 不满足单调性，由此完成证明。

3 尘管渗流

第2节中的构造表明，存在不满足单调性的人工传递图。不过，像 $\mathbb{Z}^d$ 这样的图是否满足单调性，仍然是一个开放问题。

使用实数空间 $\mathbb{Z}^d$ 上的尘管渗流模型，可以找到一些点（坐标不一定是整数），在 λ 的某些取值下，这些点构成违反单调性性质的反例。为说明该模型存在与此性质相关的阈值，请看图 3，并考虑连接原点 o 与点 $2d-1$ 的长度小于三的路径



Fig图 3：图 P_6 的表示，以及 o 与 (1, 0,0) 之间最近的路径 .

$\vec{e}$ =(1，0，.....，0)。请注意，与第2节类似，增加平行路径的数量也会扩大峰顶顶点与中间顶点之间的连接概率差异。

对于 Dust-Pipe 模型，增大维度可能会使线段 $(o, \vec{e})$ 上的一个点，其连接概率低于顶点 $\vec{e}$。这种现象开始出现时的临界维度为 $d = 2$。

定理 3. 对于每个 $d \geqslant 2$，都存在 $\lambda_0 \in (0, \infty)$ 以及点 $x, y \in \bigcup_{e\in\mathbb{E}(\mathbb{Z}^d)} I_e$，使得$\|x\| < \|y\|$ 且 $\mathbb{P}_\lambda (o \longleftrightarrow x) < \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow y)$ 对每个 $\lambda \in (0, \lambda_0)$都成立。

证明。 固定 $\vec{e}$ =(1,0,...,0) $\in \mathbb{V}(\mathbb{Z}^d)$，并取 $t \in$(0,1)。于是，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow t\vec{e}) &\leqslant e^{-\lambda t} + e^{-\lambda(1-t)} - e^{-\lambda}, \\ \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e}) &\geqslant 1 - (1 - e^{-3\lambda})^{2(d-1)}(1 - e^{-\lambda}). \end{aligned} \tag{1}$$

第一个不等式依赖于假设 $\mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e}) \leqslant 1$，而第二个不等式将空间限制为由三条或更少边组成的路径。图 3 展示了 $\mathbb{Z}^3$ 中此类路径的示意图。

注意，方程（1）中的界对每个 d都相同，而概率$\mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e})$ 随着 d 增大。因此，如果能利用方程（1）中的界在维度 $d = 2$ 下证明定理 3，那么该结论在更高维度下也成立。

因此，令 $d = 2$、 $t =_{-}\frac{1}{2}$和 $z = e^{-\lambda/2}$。比较点 (1，0) 和 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，得到： _

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda\left(o \longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) &\leqslant z(2 - z), \\ \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow (1, 0)) &\geqslant 1 - (1 - z^6)^2(1 - z^2). \end{aligned}$$

因此，对上述界作差可得

$$1 - (1 - z^6)^2(1 - z^2) - z(2 - z) = z(z - 1)^2 g(z),$$

其中 $g(z) = z^{11} + 2(z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 - z^4 - z^3 - z^2 - z - 1)$。

由于 $g(1) = 1$ 和 g 是连续的，因此存在 $z_0 < 1$，使得对于所有 $z \in (z_0, 1]$，都有 $g(z) > 0$。于是，

$$\mathbb{P}_\lambda\left(o \longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) \leqslant z(2 - z) < 1 - (1 - z^6)^2(1 - z^2) \leqslant \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow (1, 0)),$$

正如所需。举例来说，我们可以取 $z_0 = 0.99$，或 $\lambda < 0.02$。 □

定理 3 表明，对于 $d \geqslant 2$，当 λ 接近零时，原点附近的连接概率不会随距离单调变化。具体而言，具有较高连接概率的点集的拓扑会发生相变，在连通集与非连通集之间转换。因此，定义：

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = \sup\left\{\lambda > 0 : \begin{array}{l}\text{There exists } t \in (0, 1] \text{ such that} \\ \mathbb{P}_\lambda\left(o \longleftrightarrow \vec{e}\right) > \mathbb{P}_\lambda(o \longleftrightarrow t\vec{e})\end{array}\right\}. \tag{2}$$

为了继续讨论，有必要用伯努利渗流框架来描述这一现象。在此之前，我们需要以下引理：

引理 1. 令 a、b、$c \in [0,1]$ 和 $\lambda \in (0、\infty)$ 为任意值，定义函数：

$$f_\lambda(t) = ae^{-t\lambda} + be^{-(1-t)\lambda} - ce^{-\lambda},\ \forall t \in [0,1].$$

那么，有

$$\min_{t\in[0,1]} f_\lambda(t) = \begin{cases} f_\lambda(1) & , \text{if } \frac{b}{a} \leqslant e^{-\lambda}; \\ f_\lambda(0) & , \text{if } \frac{b}{a} \geqslant e^{\lambda}; \\ f_\lambda(t_0) & , \text{for some } t_0 \in (0,1) \text{ if } e^{-\lambda} < \frac{b}{a} < e^{\lambda}. \end{cases}$$

证明。 求导可得,

$$f'_\lambda(t) = 0 \iff t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

若 $b/a \leqslant e^{-\lambda}$，则 $t \geqslant 1$，因此最小值在 $t = 1$ 处取得。当 $b/a \geqslant e^{\lambda}$ 时，也有类似结果。若 $e^{\lambda} > b/a > e^{-\lambda}$，则存在一个最小值，其对应的某个 $t \in (0,1)$。 □

注意到

$$\mathbb{P}_\lambda\left(o \longleftrightarrow t\vec{e}\right) = e^{-t\lambda} + P_\lambda\left(o \longleftrightarrow \vec{e} | \langle o, \vec{e}\rangle \text{ is closed}\right)\left(e^{-(1-t)\lambda} - e^{-\lambda}\right).$$

由引理 1，当 $P_\lambda(o \longleftrightarrow \vec{e}|\langle o,\vec{e}\rangle$ 是闭集$) > e^{-\lambda}$ 时，原点附近的连接概率不是单调的。

现在，考虑参数为 p 的普通伯努利渗流，我们定义阈值：

$$\tau_c(\mathbb{Z}^d) = \inf\left\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \vec{e}|\langle o,\vec{e}\rangle \text{ is closed}) > p\right\}. \tag{3}$$

并且，根据典范关系，有 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = -\ln\ \tau_c(\mathbb{Z}^d)$。

渗流理论中的大多数参考文献都采用传统的伯努利记号。因此，在某些情况下，使用 $\tau_c(\mathbb{Z}^d)$ 的定义比使用 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ 更自然。需要强调的是，除了定义之外，连接概率的单调性这一现象目前只在 Dust-Pipe 模型中得到了证明，而在伯努利渗流模型中仍是一个开放问题。

现在，让我们证明这些值并非平凡，即 $\tau_c(\mathbb{Z}^d) \in (0,\ 1)$ 或 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) \in (0,\ \infty)$。

定理 4。 对于 $d \geqslant 2$，存在 $0 < p_0 < p_1 < 1$，使得对每个 $p \in (0,\ p_0)$，都有$\mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \vec{e}|\langle o,\vec{e}\rangle$ 是闭集 $) < p$；并且对每个 $p \in (p_1,\ 1)$，都有

$$\mathbb{P}_p\left(o \longleftrightarrow \vec{e}|\langle o,\vec{e}\rangle \text{ is closed }\right) > p.$$

证明。 将连接概率与存在一条长度为 3 的路径的概率进行比较（该路径不一定以顶点 $\vec{e}$ 为终点），我们得到：

$$\mathbb{P}_p\left(o \longleftrightarrow \vec{e}|\langle o,\vec{e}\rangle \text{ closed}\right) < \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\gamma:|\gamma|=3}\{\text{The path } \gamma \text{ is open}\}\right) \leqslant 2d(2d-1)^2p^3.$$

因此，当 $p < (2d(2d-1))^{-1/2}$ 时，概率小于 p，于是我们得到 p_0。利用定理 3，我们可以取 $p_1 = 0.99 \geqslant e^{-0.02}$，由此便证明了该定理对所有维度 $d \geqslant 2$ 均成立。 □

由于 $\tau_c(\mathbb{Z}^d)$ 属于闭区间 $[p_0,p_1] \subset (0,\ 1)$，因此还需证明 τ_c 确实代表一种临界现象。基本上，在 τ_c 以下，连接概率是单调的；而在 τ_c 以上，连接概率则不是单调的。为此，考虑以下定理：

定理 5. 函数 $F(p) = \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \vec{e} | \langle o, \vec{e} \rangle$ 是闭的) 对于 $p \in [0,1] \setminus \{p_c(\mathbb{Z}^d)\}$ 是解析函数。此外，对于每个 $p \in (\tau_c(\mathbb{Z}^d), 1)$，都有 $\mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow \vec{e} | \langle o, \vec{e} \rangle$ 闭的$) > p$。

证明。 证明对于所有 $d \geqslant 3$， $F(p)$ 在 $[0,1] \setminus \{p_c(\mathbb{Z}^d)\}$ 中是解析函数，所依据的是 Grimmett 的著作 [7] 中三个定理的论证。首先应用定理 (6.108) 中描述的动物构造，并且当 $p < p_c$时，利用定理 (5.4) 所给出的指数衰减，以确保该级数是解析的。然后，对于 $p > p_c$，利用引理 (7.89) 中所述的双臂概率的指数衰减。

在证明了 $F(p)$ 的解析性之后，我们将证明方程 $F(p) = p$ 有唯一的非平凡解，且 $p \in (0,1)$。为此考虑以下命题:

命题 1 （ [7]的定理 (2.38)）。设 A 是一个仅依赖于 $\mathbb{Z}^d$ 的有限条边的递增事件，并假设 $0 < p < 1$。那么 $\log \mathbb{P}_p$（A）/$\log p$ 是 p 的非递增函数。

令 $n > 0$，并设 $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| \leqslant n\}$ 为大小为 n 的离散盒。定义 B_n 为预先移除了边 $\langle o, \vec{e} \rangle$ 的盒 Λ_n。事件 $\{0 \xleftrightarrow{B_n} \vec{e}\}$ 是一个依赖于有限条边的递增事件，因此函数

$$h_n(p) = \frac{\log \mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{B_n} \vec{e})}{\log p}$$

由命题 1 可知是非递增的。

由于 h_n 是一个非递增连续函数，对于每个 $n \geqslant 2$ ，定理 4 蕴含 $h_n(p)>1$ 对 $p < p_0$ 成立，且 $h_n(p)<1$ 对 $p > p_1$成立。因此，存在一个非平凡值 p^*，使得 $h_n(p^*) = 1$。

如果存在两个点 $p_1^* < p_2^* \in (0,1)$，使得 $h_n(p_1^*) = h_n(p_2^*) = 1$，那么根据命题 1，概率 $\mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{B_n} \vec{e})$ 在 (p_1^*, p_2^*) 内必定等于 p。然而，这会导致矛盾，因为 $\mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{B_n} \vec{e})$ 是一个次数大于一的多项式。

此外，若存在点 $p_1^* < p_2^* \in (0, 1)$，使得 h_n 的极限满足

$$\lim_{n\to\infty} h_n(p_1^*) = \lim_{n\to\infty} h_n(p_2^*) = 1,$$

那么对于每个点 $p \in (p_1^*, p_2^*)$，解析概率 $F(p)$ 都将等于 p。这同样会导致矛盾，因为在 $p = 0$ 和 $p = 1$附近，这个等式并不成立。

这意味着 $F(p) = p$ 至多有一个唯一根 $p \in \in (0, 1)$。因此，根据非递增论证可知，对于每个 $p \in (\tau_c(\mathbb{Z}^d), 1)$，在以事件 $\{\langle o, \vec{e} \rangle$ 闭合$\}$ 为条件时，空间中的连接概率大于 p，由此完成证明。 □

由于 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = -\ln \tau_c(\mathbb{Z}^d)$，可知 $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ 也是一个定义良好且非平凡的临界点。因此，定理 2 的第 b)项直接由定理 5 得出，而第 a)项则由定义 (3)、定理 4 和定理 5 得出。本文最后以以下评述作结:

注1. 注意，在 $\mathbb{Z}^2$的临界点处，可以利用对偶晶格证明，对于 $\mathbb{Z}^2$，有 $\tau_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2} = p_c(\mathbb{Z}^2)$。

注释 2. 利用 FKG 不等式和特征刻画引理 1，对于 $p > \tau_c$，每条边上的连接概率都在边的内部取得局部最小值。

注释 3. 令 T 和 H 分别表示三角晶格和六角晶格，并令 $\vec{e}_{\mathrm{T}}$和 $\vec{e}_{\mathrm{H}}$ 为三角晶格和六角晶格中原点 o 的任意最近邻顶点,

分别。利用基于对偶和代换法的论证 [(11.116)，见 [7],第 333], 页，关于临界点 $p = 2\sin\ \pi/18$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_p^{\mathrm{T}}\left(o \longleftrightarrow \vec{e}_{\mathrm{T}} | \left\langle o, \vec{e}_{\mathrm{T}} \right\rangle \text{ closed}\right) = p^2 + 2p(1-p)A + (1-p)^2 B; \\ \mathbb{P}_{1-p}^{\mathrm{H}}\left(o \longleftrightarrow \vec{e}_{\mathrm{H}} | \left\langle o, \vec{e}_{\mathrm{H}} \right\rangle \text{ closed}\right) = (1-p)^2 A + 2p(1-p)B; \\ \mathbb{P}_{1-p}^{\mathrm{H}}\left(o \longleftrightarrow \vec{e}_{\mathrm{H}} | \left\langle o, \vec{e}_{\mathrm{H}} \right\rangle \text{ closed}\right) + \mathbb{P}_p^{\mathrm{T}}\left(o \longleftrightarrow \vec{e}_{\mathrm{T}} | \left\langle o, \vec{e}_{\mathrm{T}} \right\rangle \text{ closed}\right) = 1. \end{cases}$$

其中 $\mathbb{P}^T$和 $\mathbb{P}^H$分别是三角晶格和六角晶格上的测度。并且，对于 T 中三角形的顶点 $\{x, y, z\}$, 令:

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{P}_p^{\mathrm{T}}\left(\{x \longleftrightarrow y\} \cup \{x \longleftrightarrow z\} | \left\langle x, y \right\rangle, \left\langle y, z \right\rangle \text{ and } \left\langle z, x \right\rangle \text{ closed}\right), \\ B &= \mathbb{P}_p^{\mathrm{T}}\left(\{x \longleftrightarrow y\} | \left\langle x, y \right\rangle, \left\langle y, z \right\rangle \text{ and } \left\langle z, x \right\rangle \text{ closed}\right). \end{aligned}$$

该方程组的解给出 $A = (1 - B)$，这意味着:

$$\begin{aligned} \tau_c(\mathrm{T}) &< p_c(\mathrm{T}) \\ \tau_c(\mathrm{H}) &> p_c(\mathrm{H}). \end{aligned}$$

特别是，该空间的 τ_c 不一定等于临界点。

参考文献

[1] Ahlberg, D.: 《一维图上的首次通过渗流的渐近性质》。应用概率进展，47(1):182–209，2015年3月。 https://doi.org/10.1239/aap/1427814587。[2]Alm, S.E., Wierman, J.C.: 《渗流理论中受限首次通过时间均值的不等式》。组合学、概率与计算，8(4):307–315, 1999年7月。https://doi.org/10.1017/s0963548399003843。[3] Andjel, E.D., Sued, M.: 《有向二维渗流中的一个不等式》，第21–30页。Birkhäuser Basel，2008年。 https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8786-0_2。[4] van ben Berg, J.: 《关于 J. M. Hammersley 和 D. J. A. Welsh 有关首次通过渗流的猜想的一个反例》。应用概率进展, 15(2):465–467，1983年6月。 https://doi.org/10.2307/1426447[5] Gladkov, N., Pak, I., Zimin, A.: 《双层床猜想是错误的》。美国国家科学院院刊，122(24)，2025年6月。 https://doi.org/10.1073/pnas.2420725122。[6] Gouéré, J.B.: 《首次通过渗流中的单调性》。工作论文或预印本，2012年2月。 https://hal.science/hal-00669299。[7] Grimmett, G.: 《渗流》。数学科学基础丛书。施普林格，1999年。[8] Hammersley, J. M., Welsh, D. J. A.: 《首次通过渗流、次可加过程、随机网络与广义更新理论》，第61–110页。施普林格·柏林·海德堡，柏林，海德堡，1965年。 https://doi.org/10.1007/978-3-642-99884-3_7。[9] Howard, C. D.: 《欧几里得首次通过渗流中期望通行时间的可微性与单调性》。应用概率杂志, 38(4):815–827，2001年。 http://www.jstor.org/stable/3215766。[10] de Lima, B.N.B, Procacci, A., Sanchis, R.: 《关于伯努利键渗流单调性的一点说明》。统计物理学杂志, 160(5):1244–1248，2015年5月。 https://doi.org/10.1007/s10955-015-1284-z。