arXiv:2601.00294v1 [cond-mat.stat-mech] 1 Jan 2026

连接希尔伯特空间碎片化的对易子方法与多项式方法

Bo-Ting Chen,[1], * Yu-Ping Wang, [2], * 和 Biao Lian[1]1普林斯顿大学物理系，美国新泽西州普林斯顿 *08544*2石溪大学物理系，美国纽约州石溪 *11790*(日期：2026年1月5日)

如果一个量子模型的希尔伯特空间分解为指数多个在动力学上互不连通的子空间（称为克雷洛夫子空间），则该模型呈现希尔伯特空间碎片化（HSF）。然而，根据识别方法的不同，一个模型可能具有不同的HSF。本文建立了近期提出的两种迥异的HSF识别方法之间的联系：交换子代数（CA）方法和整数特征多项式因式分解（ICPF）方法。对于由具有有理数矩阵表示的算符构成的哈密顿量，我们证明了一个定理：若其交换子代数的中心的所有特征值均为有理数，则ICPF方法得到的HSF必定与CA方法得到的HSF相同或更细。我们指出，大多数已知呈现HSF的模型都满足这一条件，并展示了该定理对这些模型成立。我们还讨论了若干代表性模型，在这些模型中，ICPF和CA方法得出的HSF有所不同。我们的结果或有助于探索HSF的统一定义。

近年来，非平衡封闭量子系统的热化问题在理论和实验领域都引起了广泛关注。尽管大多数非可积量子多体系统都遵循本征态热化假说（ETH） [1–4] 并迅速热化，但也存在显著的例外。例如，多体局域化系统 [5–10]因有效的准局域守恒量而无法热化。另一类例子是具有量子多体疤痕态 [11–18], 的模型；这些本征态构成一个测度为零的集合，违反 ETH；当它们与初态有显著重叠时，可导致非热化动力学。近年来，希尔伯特空间碎片化（HSF） [19–23] 作为打破遍历性和热化的一种新机制，得到了广泛研究。若一个体积为 L 的量子多体模型的希尔伯特空间可分解为 $\exp(aL)$ $(a > 0)$ 个彼此动态断开的子空间（称为克雷洛夫子空间），则该模型表现出 HSF，并由此产生非遍历动力学。

值得注意的是，模型所具有的 HSF 可能因识别方法不同而异。近期提出了两种识别 HSF 的方法：对易子代数（CA）方法 [24, 25],和整数特征多项式因式分解（ICPF）方法 [26]。CA 方法处理的是一族哈密顿量，阐明了克雷洛夫子空间与传统对称性扇区的相似之处和区别，并且可以扩展至开放量子系统 [27]。然而，该方法的计算成本极高，只有少数模型得到了解析求解 [24, 28, 29]。ICPF方法适用于具有有理数矩阵表示的哈密顿量（下文称为有理算子），数值计算效率显著更高，但其物理意义尚不明确。

有趣的是，我们发现，对于许多已知模型，CA 和 ICPF 方法得出的 HSF 相同，包括成对翻转模型 [30], Temperley-Lieb 模型 [31–34], t-J_z 模型 [35, 36]以及偶极守恒模型 [19, 20, 37],等（见补充材料 [38]）。这促使我们研究这两种截然不同的方法之间的关系。在本文中，我们针对由有理算子的线性组合构成的哈密顿量证明了一个定理：若其交换子代数中心中的所有有理算子都具有有理特征值，则 ICPF 方法得到的 HSF 必定与 CA 方法得到的 HSF 相同或更精细。上述所有模型均满足这一条件。我们还证明，若 ICPF 得到的 HSF 比 CA 得到的更精细，则其 Krylov 子空间基必定依赖于哈密顿量系数。我们在上述模型以及其他一些采用这两种方法得到不同 HSF 的代表性模型中验证了这些结论。

设置。我们研究具有L 个格点的晶格量子系统，其中每个格点都具有有限维希尔伯特空间。哈密顿量具有如下通用形式：

$$\hat{H}(\{J_\eta\}) \equiv \sum_{\eta=1}^{N} J_\eta \hat{h}_\eta \ , \tag{1}$$

ˆ其中， h_η 是局域作用于有限个格点上的厄米项，J_η 是实系数， N 是项的总数（对于局域哈密顿量，$N \sim \mathcal{O}(L)$）。重要的是，为了使 HSF 的 ICPF 方法 [26] 适用，我们假设存在一个正交归一基 $|u_i\rangle$，记作哈密顿量基，在该基中，ˆ每个算子 h_η 都是有理算子。这里，我们将算子 h 定义为有理算子，若其在哈密顿量基中的所有矩阵元都是有理数，即$\langle u_i|\hat{h}|u_j\rangle \in \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$。尽管这一假设看似严格，但大多数呈现 HSF 的量子模型都满足这一条件，而哈密顿量基通常是乘积态基。

如果存在一个希尔伯特空间基，使哈密顿量呈现块对角形式 $\hat{H} = \bigoplus_{k=1}^{N_K} K_k(\hat{H})$，且块的数目

* 这些作者对本研究的贡献相同。

随 aL 按 $\exp(aL)$ 指数增长，其中 $a > 0$ 为某个值，则称量子模型表现出 HSF。每个块 $K_k(\hat{H})$ 都是一个作用于 D_k 维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_k$ 上的 $D_k \times D_k$ 矩阵（$D_k \geq 1$），称为 克雷洛夫子空间。我们可以将其中一个基向量定义为根态 $|\Psi_k\rangle$，于是克雷洛夫子空间 $\mathcal{H}_k$ 由 D_k 个线性独立的态矢量 $\{|\Psi_k\rangle, \hat{H}|\Psi_k\rangle, \cdots, \hat{H}^{D_k-1}|\Psi_k\rangle\}$张成。根据定义，$\hat{H}^{D_k}|\Psi_k\rangle$ 将与上述 D_k 个向量线性依赖，因此克雷洛夫子空间在 $\hat{H}$ 的作用下封闭。

模型的 HSF 依赖于基，且可能并不唯一。近期提出了两种不等价的方法来识别 HSF，即 ICPF 方法 [26] 和 CA 方法 [24, 25], 。本研究旨在确立二者之间的联系。下文将先简要回顾这两种方法。

ICPF 方法。该方法 [26] 通过对哈密顿量中感兴趣的某些有理系数进行因式分解，来识别 HSF $J_\eta \in \mathbb{Q}$，该哈密顿量为方程（$\hat{H}$）中的1，并将其特征多项式分解为不可约有理多项式：

$$\Phi(\mu) \equiv \det\left(\mu\mathbb{1} - \hat{H}(\{J_\eta\})\right) = \prod_p \left[\phi_p^{(D_p)}(\mu)\right]^{d_p}, \quad (2)$$

其中 D_p 和 d_p 是正整数。每个因子$\phi_p^{(D_p)}(\mu)$都是关于 μ 的 D_p 次多项式，其系数均为有理数，因此称为有理多项式； d_p 是其重数。每个 $\phi_p^{(D_p)}(\mu)$都是不可约的（不能在有理数范围内因式分解）。这种因式分解必然存在，因为哈密顿量 H 以及由此得到的特征多项式 $\Phi(\mu)$在哈密顿量基下具有有理系数。注意，通过乘以某个整数 q，总可以将$\sim\Phi(\mu)$转化为整数系数多项式 $\Phi(\mu) = q\Phi(\mu)$。如 [26], 所示，方程（2）的有理因式分解是唯一的；根据高斯引理 [39]，它等价于将 $\Phi(\mu)$分解为不可约整系数多项式（因此得名 ICPF）。

如 [26], 式（2）所证明的，全希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 可分解为直和

$$\mathcal{H} = \bigoplus_p \left[\bigoplus_{\delta_p=1}^{d_p} \mathcal{H}_{p,\delta_p}\right], \quad (3)$$

其中每个$\mathcal{H}_{p,\delta_p}$ 都是一个维数为 D_p 的克雷洛夫子空间，与一个多项式因子 $\phi_p^{(D_p)}(\mu)$一一对应； $1 \leq \delta_p \leq d_p$ 则标记简并克雷洛夫子空间（它们具有相同的哈密顿量矩阵表示$\hat{H}$）。重要的是，根态$|\Psi_{p,\delta_p}\rangle$因而每个克雷洛夫子空间的整个基（由$\hat{H}$ 作用于$|\Psi_{p,\delta_p}\rangle$生成）$\mathcal{H}^{(\delta_p)}{}_p$ 都是有理态。这里，有理态 $|\Psi\rangle = \sum_j \psi_j|u_j\rangle$ 定义为：在哈密顿量基 $|u_j\rangle$中，任意两个非零分量之间的比值 $\psi_i/\psi_j \in \mathbb{Q}(i)$均为有理数。

CA 方法。这种方法根据哈密顿量的交换子代数识别 HSF 项$\{\hat{h}_\eta\}$，见方程（1）。设$\mathcal{A}$ 是由$\{\hat{h}_\eta\}$生成的冯·诺依曼代数，即通过对$\{\hat{h}_\eta\}$ 进行加法和乘法运算，并与任意复数结合所得到的算子集合。设$\mathcal{C}$ 是其交换子代数，定义为与所有$\{\hat{h}_\eta\}$项对易的算子集合。两个彼此对易的代数$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{C}$允许将希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 分解为$\mathcal{A} \times \mathcal{C}$[40], 的不可约表示，从而将 HSF 分解为虚拟二分划分的直和：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\lambda \left[\mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{A})} \otimes \mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{C})}\right], \quad (4)$$

其中$\mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{A})}$ 是$\mathcal{A}$的一个 D_λ 维不可约表示，而$\mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{C})}$ 是$\mathcal{C}$的一个 d_λ 维不可约表示。特别地，如果$\mathcal{C}$ 是阿贝尔代数，则所有 $d_\lambda \equiv 1$。每个二分划分扇区由不同的直和项指标 λ标记。在式（4）的基中，$\mathcal{A}$ 中的算子（例如哈密顿量$\hat{H}$）具有分块对角矩阵形式$\hat{h}_\mathcal{A} = \bigoplus_\lambda \left[M_\lambda(\hat{h}_\mathcal{A}) \otimes \mathbb{1}_{d_\lambda}\right]$，而$\mathcal{C}$ 中的算子则具有形式$\hat{h}_\mathcal{C} = \bigoplus_\lambda \left[\mathbb{1}_{D_\lambda} \otimes N_\lambda(\hat{h}_\mathcal{C})\right]$。因此，每个直和项 λ 的希尔伯特空间分解为 d_λ 个简并克雷洛夫子空间$\mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$ $(1 \leq \delta_\lambda \leq d_\lambda)$，每个子空间的维数为 D_λ：

$$\mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{A})} \otimes \mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{C})} = \bigoplus_{\delta_\lambda=1}^{d_\lambda} \mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda}. \quad (5)$$

为便于后续讨论，我们将每个克雷洛夫子空间$\mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$ 的一个正交（不一定归一化）基 $|\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda\rangle$ $(\Delta_\lambda = 1, \cdots D_\lambda)$称为*CA* 克雷洛夫基。

连接 *ICPF* 与 *CA*。 ICPF 和 CA 所确定的克雷洛夫子空间通常可能不同。为揭示二者之间的联系，我们定义如下偏序关系：

- 如果对于 ICPF（式（3））中的任意克雷洛夫子空间$\mathcal{H}_{p,\delta_p}$，都存在某个 CA 克雷洛夫基（式（5））中的一个直和项 λ 和一个指标δ_λ，使得$\mathcal{H}_{p,\delta_p} \subset \mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$，则称 ICPF $\succeq$ CA，这意味着 ICPF 给出的希尔伯特空间分解相同或更细。

- 如果存在一个 CA 克雷洛夫基，使得对于任意λ 和 δ_λ，都存在某个 p 和 δ_p，满足$\mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda} \subset \mathcal{H}_{p,\delta_p}$，则称 ICPF $\preceq$ CA（CA 给出的希尔伯特空间分解相同或更细）。

如果上述两个关系都成立，则有 ICPF = CA，且它们的 HSF 相同。如果只有一个关系成立，则偏序是严格的，且有 ICPF $\succ$ CA 或 ICPF $\prec$CA。

具体而言，关系 ICPF $\succeq$ CA 等价于存在一个 CA 克雷洛夫基，其中所有基态$|\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda\rangle$ 都是有理态。这是因为由 ICPF 确定的 HSF 必然具有由克雷洛夫子空间构成的有理基。若进一步在每个块中都有相同的维数$D_\lambda = D_p$，则有 ICPF = CA，这是由式（2）中因式分解的唯一性所保证的。

然而，要为给定模型显式构造 CA 克雷洛夫基可能相当复杂。下文中，

我们将说明，仅凭 $\mathcal{A}$ 的代数结构，就足以判断 ICPF $\succeq$ CA，无需构造 Krylov基。

为此，对于前文定义的两个交换代数 A 和 C，我们定义中心 Z $=$ A $\cap$ C，它是一个自交换代数。在公式（4）的 CA 基中，Z 由所有形式为 $\hat{h}_{\mathcal{Z}} = \bigoplus_\lambda \left[c_\lambda(\hat{h}_{\mathcal{Z}})\, \mathbb{1}_{D_\lambda} \otimes \mathbb{1}_{d_\lambda}\right]$ 的算子构成，其中 $c_\lambda(\hat{h}_{\mathcal{Z}})$ 是 $\hat{h}_{\mathcal{Z}}$ 的某个特征值。因此，中心 Z 是识别不同直和项 λ 的便捷工具。我们将中心 Z 的基记为 Basis(Z) $=\{\hat{z}_k\}$，并将其定义为生成 Z 的一组最小有理算子 $\hat{z}_k \in$。由于 A 和 C 都由有理算子生成，因此这样一组有理算子 $\hat{z}_k$ 的存在性得以保证。接下来，我们证明以下定理：

定理 1 (**主定理**)。 假设 Z 是量子模型的交换子代数的中心。如果每个元素 $\hat{z}_k \in$**基**(Z) （它是一个有理算子）的所有特征值 $c(\hat{z}_k)$ 均为有理数（即 $c(\hat{z}_k) \in \mathbb{Q}(i)$），则该模型具有 *ICPF* $\succeq$ *CA*。

证明概要。这里我们概述定理1的证明，完整细节见补充材料（SM [38]）。关键思路是注意到，在式（4）的 CA 克雷洛夫基中，哈密顿量 $\hat{H}$ 在 λ中是分块对角的，因此特征多项式 $\Phi(\mu)$ 可以写成

$$\Phi(\mu) = \prod_\lambda \Phi_\lambda(\mu)\ , \quad \Phi_\lambda(\mu) = \det{}_\lambda(\mu\mathbb{1} - \hat{\mathcal{P}}_\lambda \hat{H} \hat{\mathcal{P}}_\lambda)\ , \tag{6}$$

其中$\hat{\mathcal{P}}_\lambda$ 表示投影到 $D_\lambda d_\lambda$维希尔伯特空间中的投影算子，该空间对应于直和项 λ （式4）中的 $\Phi_\lambda(\mu)$ 是直和项 λ对应分块中哈密顿量的特征多项式。具体而言，用 CA 克雷洛夫基表示为：

$$\hat{\mathcal{P}}_\lambda = \mathbb{1}_{D_\lambda} \otimes \mathbb{1}_{d_\lambda} = \sum_{\delta_\lambda=1}^{d_\lambda} \sum_{\Delta_\lambda=1}^{D_\lambda} \frac{|\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda\rangle\langle\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda|}{\langle\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda|\lambda, \delta_\lambda, \Delta_\lambda\rangle}\ . \tag{7}$$

假设式 (1) 中的所有系数 J_η 均为有理数，因此哈密顿量 H 是一个有理算子。相应地，正如我们稍后将证明的，每个 P_λ 也都是有理算子。因此，式 (6) 中的每个多项式 $\Phi_\lambda(\mu)$ 按定义都是有理多项式，而 $\Phi(\mu) = \prod_\lambda \Phi_\lambda(\mu)$ 显然是 $\Phi(\mu)$ 的一个（可约）有理因式分解。由于每个 λ 直和项都由 d_λ 简并的克雷洛夫子空间 $\mathrm{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$构成，其特征多项式还可进一步分解为 $\Phi_\lambda(\mu) = \left[\phi_\lambda^{(D_\lambda)}(\mu)\right]^{d_\lambda}$，其中 $\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda$ (与 δ_λ无关) 是每个克雷洛夫子空间 $\mathrm{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$的 D_λ 次特征多项式。此外，$\Phi_\lambda(\mu)$ 的有理性确保了 $\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda(\mu)$ 也为有理数；这一点既可通过显式展开证明，也可通过伽罗瓦理论证明（详情见补充材料 [38] ）。因此，我们得到特征多项式 $\Phi(\mu) = \prod_\lambda \left[\phi_\lambda^{(D_\lambda)}(\mu)\right]^{d_\lambda}$ 的一个（可约）有理因式分解。根据不可约有理因式分解的唯一性，来自式 (2) 中 ICPF 的每个 $\phi_p^{(D_p)}(\mu)$ 都必须是某个多项式 $\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda(\mu)$ 的因子，这确保了相应的克雷洛夫子空间 $\mathcal{H}_{p,\delta_p} \subset \mathcal{H}_{\lambda,\delta_\lambda}$。因此，ICPF $\succeq$ CA。

我们现在证明，每个$\mathcal{P}_\lambda$ 都是有理算子。首先注意到，$\mathcal{P}_\lambda \in \mathcal{Z}$ 属于中心，因此由**基**$(\mathcal{Z}) = \{\hat{z}_k\}$生成。假设 $\hat{z}_k$ 在直和项 λ中取特征值 $c_\lambda(\hat{z}_k)$。基**基**$(\mathcal{Z})$的完备性由此保证$\hat{\mathcal{P}}_\lambda$ 可表示为

$$\hat{\mathcal{P}}_\lambda = \prod_k \left(\prod_{\lambda' \in \Lambda(\lambda,k)} \frac{\hat{z}_k - c_{\lambda'}(\hat{z}_k)}{c_\lambda(\hat{z}_k) - c_{\lambda'}(\hat{z}_k)} \right), \tag{8}$$

其中，我们将 $\Lambda(\lambda, k) = \{\lambda' \mid c_{\lambda'}(\hat{z}_k) \neq c_\lambda(\hat{z}_k)\}$ 定义为由与 λ 的特征值不同的 $\hat{z}_k$ 的直和项 λ' 构成的集合。因此，如果 $\hat{z}_k$ 的所有特征值都是有理数，那么每个 $c_\lambda(\hat{z}_k) \in \mathbb{Q}(i)$ 都是有理数，因此，式（8）中表示的每个 $\hat{\mathrm{P}}_\lambda$ 都是有理算子。 □

当哈密顿量基 $\{|u_i\rangle\}$ 为乘积态基时，HSF 可分为两类：经典碎片化（cHSF）和量子碎片化（qHSF）。如果每个克雷洛夫子空间都由哈密顿量基 $\{|u_i\rangle\}$的一个子集张成，则所得 HSF 定义为 cHSF；否则，HSF 定义为 qHSF。一个模型具有 cHSF 还是 qHSF，可能取决于所采用的 HSF 方法，例如 ICPF 或 CA（示例见表 I）。接下来给出定理1的如下推论：

推论 1. 如果某个模型在 *CA* 方法下具有 *cHSF*，那么该模型具有 *ICPF* $\succeq$ *CA*。

这是因为在这种情况下，CA Krylov基与哈密顿量基重合，使得 P_λ 很容易被对角化，其特征值为 0 或 1，且均为有理数。

此外，关于 HSF 对 J_η 的依赖性，我们有如下命题：

命题 1. 如果某个模型具有 *ICPF* $\succ$*CA*，也就是说，存在某些 *CA* 克雷洛夫子空间，它们通过 *ICPF* 允许更细的碎片化 $H_{\lambda,\delta_\lambda} = \bigoplus_j H_{p_j^{(\lambda)},\delta_{p_j}^{(\lambda)}}$，那么至少有一个 *ICPF* 克雷洛夫子空间 $H_{p_j^{(\lambda)},\delta_{p_j}^{(\lambda)}}$ 的基依赖于系数 $\{J_\eta\}$。

直观而言，命题 1 源于这样一个事实：CA 方法不依赖于系数 $\{J_\eta\}$。因此，任何由 ICPF 产生的更细碎片化都必然源于哈密顿量系数 $\{J_\eta\}$带来的额外结构。详细证明见补充材料 [38]。

示例。为验证上述结果，我们通过数值方法考察以下模型中的 HSF：成对翻转（PF）模型[30]，Temperley-Lieb（TL）模型 [31–34],量子破缺（QB）模型 [41–45],斐波那契矩阵（FM）模型和 t-J_z 模型 [35, 36]。在所有模型中，哈密顿量基均为格点乘积态基底。

这些模型的 HSF 结构总结于表 I。在 PF、TL、QB 和 t-J_z 模型中，所有

表 I. 四种代表性模型的 HSF，与定理 1、推论 1 和命题 1相符。

模型	哈密顿量对易子 $\mathcal{C}$ 基($\mathcal{Z}$)特征值	HSF 阶		ICPF 基	ICPF CA
成对翻转	式（9）	阿贝尔	有理	ICPF =CA $\{J_\eta\}$ 独立	cHSF cHSF
Temperley–Lieb	式（10）	非阿贝尔	有理	ICPF =CA $\{J_\eta\}$ 独立	qHSF qHSF
量子崩塌	式（11）	阿贝尔	有理	ICPF $\succ$CA $\{J_\eta\}$ 依赖	qHSF cHSF
斐波那契矩阵	式（12）	阿贝尔	无理	ICPF $\prec$CA $\{J_\eta\}$ 独立	cHSF qHSF
t-J_z	参见补充材料 [38]	阿贝尔	有理	ICPF =CA $\{J_\eta\}$ 独立	cHSF cHSF

基($\mathcal{Z}$)中的中心基都具有有理特征值，因此根据定理 $\succeq$ 1，ICPF 1。特别是，PF、TL 和 t-J_z 模型具有 ICPF =，且它们所有的 Krylov 子空间基都独立于 $\{J_\eta\}$。QB 模型具有严格的 ICPF $\succ$，且 ICPF Krylov 基是$\{J_\eta\}$ 依赖的，这与命题 1相符。FM 模型给出了一个例子，其中基 ($\mathcal{Z}$) 中的元素具有无理数特征值，因此具有严格的 ICPF $\prec$ CA。

下文将更具体地分析四种代表性模型的 HSF，更多细节见补充材料 [38]。ICPF 使用随机整数$\{J_\eta\}$计算，以避免意外的因式分解。ICPF = CA 的一个有用的充要条件是：对于每个由多项式$\phi_p^{(D_p)}(\mu)$表征的 ICPF Krylov子空间，都存在一个维数相同的 CA Krylov子空间 $D_\lambda = D_p$，其 CA 根态 $|\Psi\rangle$ 满足 $\phi_p^{(D_p)}(\hat{H})|\Psi\rangle = 0$。

(i) 成对翻转（*PF*）模型，其哈密顿量定义在一维（1D）晶格上，每个格点具有 m 基态 $|\alpha\rangle_i$ ($1 \le \alpha \le m$)，参数为$\{g_i^{\alpha,\beta}, \mu_i^\alpha\}$：

$$H_{\mathrm{PF}} = \sum_{i=1}^{L-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_i^{\alpha,\beta}\hat{F}_{i,i+1}^{\alpha,\beta} + \sum_{i=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{m}\mu_i^\alpha \hat{N}_i^\alpha , \qquad (9)$$

其中，$\hat{F}_{i,i+1}^{\alpha,\beta} = (|\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta|)_{i,i+1}$ 是作用于格点i 和 $i+1$上的成对翻转项，$\hat{N}_i^\alpha = |\alpha\alpha|_i$，以及 $g_i^{\alpha,\beta} = g_i^{\beta,\alpha^*}$。其对易子代数 C 是阿贝尔的，因此公式（4）中的 $d_\lambda \equiv 1$。我们通过数值计算验证，在 $L = 8$ 范围内，该模型具有 ICPF = CA，从而产生 cHSF。例如，在 $L = 6$处，ICPF 和 CA 均给出维数为 $D_\lambda = 87$、47、11、1 的克雷洛夫子空间，其数量分别为 1、6、24、96。$D_\lambda = 87$ 子空间具有一个根态 $|111111\rangle$，满足 $\phi_p^{(87)}(\hat{H})|111111\rangle = 0$，对任意 $\{g_i^{\alpha,\beta}, \mu_i^\alpha\}$ 均成立，其中 $\phi_p^{(87)}$是其来自 ICPF 的多项式。其他子空间也有类似结果。

(ii) Temperley-Lieb（*TL*）模型。该模型同样定义在一维晶格上，每个格点有 m 个基态 $|\alpha\rangle_i$，其哈密顿量的参数为 $\{J_{i,i+1}\}$：

$$H_{\mathrm{TL}} = \sum_{i=1}^{L-1} J_{i,i+1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}(|\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta|)_{i,i+1} . \qquad (10)$$

该模型具有非阿贝尔交换子代数$\mathcal{C}$，因此 d_λ 并不总是 1。我们验证到 $L = 8$ 为止，该模型具有 ICPF = CA，从而产生 qHSF。对于 $L = 6$，ICPF 和 CA 都给出克雷洛夫子空间，其 (D_λ, d_λ) =(9, 8)、(5, 55)、(5, 1) 和 (1, 377) 的基彼此重合。例如，(D_λ, d_λ) = (5, 1) 克雷洛夫子空间具有一个有理根态 $|\Psi\rangle = |\psi_{\mathrm{dimer}}{}_{1,2}\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{dimer}}{}_{3,4}\rangle \otimes |\psi_{\mathrm{dimer}}{}_{5,6}\rangle$，满足 $|\psi_{\mathrm{dimer}}{}_{i,i+1}\rangle = \sum_\alpha |\alpha\alpha\rangle_{i,i+1}$。对于任意 $\{J_{i,i+1}\}$，它都满足$\phi_p^{(5)}(\hat{H})|\Psi\rangle = 0$，其中 $\phi_p^{(5)}$是其由 ICPF 得到的 5 次多项式。

(iii) 量子击穿（*QB*）模型，该模型不守恒粒子数 [41–45]。我们考虑每个格点 i 有两种硬核玻色子模式 $b_{i,\nu}$（$\nu = 1, 2$），参数为 $\{J_i^\nu, \mu_i\}$：

$$H_{\mathrm{QB}} = \sum_{i=1}^{L-1}\sum_{\nu=1}^{2} J_i^\nu (b_{i+1,1}^\dagger b_{i+1,2}^\dagger b_{i,\nu} + \mathrm{h.c.}) + \sum_{i=1}^{L}\mu_i \hat{n}_i , \qquad (11)$$

其中 $\hat{n}_i = b_{i,1}^\dagger b_{i,1} + b_{i,2}^\dagger b_{i,2}$ 是数算符。该模型严格满足 ICPF $\succ$ CA，在 ICPF（CA）方法下分别呈现 qHSF（cHSF）。在补充材料 [38], 中，我们明确展示了在 $L = 3$ 时，由乘积态基张成的 QB 模型的 CA 克雷洛夫子空间可进一步被 ICPF 碎片化为更小的克雷洛夫子空间，这些子空间由纠缠态基张成，从而呈现 qHSF。ICPF Krylov子空间的基取决于系数 $\{J_i^\nu\}$，这与命题 1一致。

(iv) 斐波那契矩阵（*FM*）模型，其哈密顿量定义在一维晶格上，每个格点 i 有 2 个基态（$|0\rangle_i, |1\rangle_i$），参数为 $\{J_i\}$：

$$H_{\mathrm{FM}} = \sum_{i=1}^{L} J_i \hat{F}_i , \quad \hat{F}_i = |0\rangle\langle 0|_i + |0\rangle\langle 1|_i + |1\rangle\langle 0|_i . \qquad (12)$$

第 n 个斐波那契数可通过 $|0\rangle\langle 0|_i$ 项高效生成，该项位于 $\hat{F}_i^{n-1}$ 中。该模型的 $\mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathcal{Z}$ 由所有 $\hat{F}_i$ 生成。因此，基($\mathcal{Z}$) = $\{\hat{F}_i\}$ 具有无理数特征值 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，定理 1 不适用。CA 方法给出一个划分为 2^L 一维克雷洛夫子空间（即本征态）的 qHSF。相比之下，ICPF 方法产生二维克雷洛夫子空间，这一点可以验证。因此，该模型具有 ICPF $\prec$CA。

讨论。我们已经证明了定理 1 适用于方程 (1) 中由有理算子构成的哈密顿量，从而确保 ICPF $\succeq$ CA 在基($\mathcal{Z}$) 的所有特征值均为有理数这一条件下成立。有趣的是，除本文构造的 FM 模型等相对平凡的模型外，大多数已知模型都满足这一条件。这

将源自截然不同思想的 ICPF 和 CA 方法联系起来，用于识别 HSF。此外，命题1 揭示了 Krylov 基对参数的依赖，是 ICPF 和 CA 得出不同 HSF 的原因。这使得人们能够运用数值效率更高的 ICPF方法来识别 CA Krylov子空间。一个可能的未来方向是将这一框架扩展到某些类别的无理算子，例如具有代数数矩阵表示的算子，从而涵盖更多模型，如自旋为 1 的自旋模型。此外，进一步探索两者之间更深层的联系也将颇有意义且颇有助益。

量子纠缠、动力学局域化和阻止热化的两种方法，最终或可促成对 HSF 的统一定义。

致谢

致谢。B. C. 特别感谢 Abhinav Prem 和 Nicolas Regnault 帮助构思最初的想法，并感谢 YuminHu、Tian-Hua Yang 和 Zihan Zhou 提供有益的讨论。本研究由美国国家科学基金会通过项目编号 DMR-2141966 资助。

[1] J. M. Deutsch，封闭系统中的量子统计力学，Phys. Rev. A 43, 2046 (1991). [2] M. Srednicki，混沌与量子热化，Phys. Rev. E 50, 888 (1994). [3] M. Rigol、V. Dunjko 和 M. Olshanii，孤立量子系统中的热化及其机制，Nature (London) 452, 854 (2008). [4] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalat-tore，综述：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学，Rev. Mod. Phys. 83, 863 (2011). [5] P. W. Anderson，某些无序晶格中不存在扩散，Phys. Rev. 109, 1492 (1958). [6] I. V. Gornyi、A. D. Mirlin 和 D. G. Polyakov，无序导线中的相互作用电子：安德森局域化与低-t 输运，Phys. Rev. Lett. 95, 206603 (2005). [7] D. M. Basko、I. L. Aleiner 和 B. L. Altshuler，具有局域化单粒子态的弱相互作用多电子系统中的金属-绝缘体转变，Annals of Physics 321, 1126 (2006). [8] R. Nandkishore 和 D. A. Huse，量子统计力学中的多体局域化与热化，《凝聚态物理年度评论》6, 15 (2015). [9] E. Altman 和 R. Vosk，多体局域化系统中的普适动力学与重整化，《凝聚态物理年度评论》6, 383 (2015). [10] D. A. Abanin、E. Altman、I. Bloch 和 M. Serbyn，综述：多体局域化、热化与纠缠，Rev. Mod. Phys. 91, 021001 (2019). [11] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuletić 和 M. D. Lukin，在 51 原子量子模拟器中探测多体动力学，Nature (London) 551, 579 (2017). [12] C. Turner、A. Michailidis、D. Abanin、M. Serbyn 和 Z. Papic，量子多体疤痕态导致的弱遍历性破缺，自然物理 14, 745 (2018). [13] S. Moudgalya、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 模型精确激发态的纠缠：精确结果、多体疤痕态及对强本征态热化假说的违背，Phys. Rev. B 98, 235156 (2018). [14] S. Choi、C. J. Turner、H. Pichler、W. W. Ho、A. A. Michailidis、Z. Papić、M. Serbyn、M. D. Lukin 和 D. A. Abanin，《涌现的 su(2) 动力学与完美量子多体疤痕》，Phys. Rev. Lett. 122, 220603 (2019). [15] W. W. Ho、S. Choi、H. Pichler 和 M. D. Lukin，《受限模型中的周期轨道、纠缠与量子多体疤痕：矩阵乘积态方法》，Phys. Rev. Lett. 122, 040603 (2019). [16] S. Moudgalya、S. Rachel、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，《非可积模型的精确激发态》，Phys. Rev. B 98, 235155 (2018). [17] M. Serbyn、D. A. Abanin 和 Z. Papić，《量子多体疤痕与遍历性的弱破缺》，自然物理 17, 675 (2021). [18] A. Chandran、T. Iadecola、V. Khemani 和 R. Moessner，《量子多体疤痕：准粒子视角》，《凝聚态物理年度评论》14, 443 (2023), https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031620-101617.[19] P. Sala、T. Rakovszky、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann，《偶极矩守恒哈密顿量中由希尔伯特空间碎片化引起的遍历性破缺》，Phys. Rev. X 10, 10.1103/physrevx.10.011047 (2020). [20] V. Khemani、M. Hermele 和 R. Nandkishore，《从希尔伯特空间破碎到局域化：从理论到物理实现》，Phys. Rev. B 101, 174204 (2020). [21] T. Rakovszky、P. Sala、R. Verresen、M. Knap 和 F. Pollmann，《统计局域化：从强碎片化到强边缘模》，P hys. Rev. B 101, 125126 (2020). [22] S. Moudgalya、A. Prem、R. Nandkishore、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，载于 Memorial Volume for Shoucheng Zhang (2021) 第7章，第147–209页。[23] S. Moudgalya、B. A. Bernevig 和 N. Regnault，《量子多体疤痕与希尔伯特空间碎片化：精确结果综述》，《物理学进展报告》85, 086501 (2022). [24] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《希尔伯特空间碎片化与交换子代数》，Phys. Rev. X 12, 011050 2022( ). [25] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《用于检测对称性与交换子代数的数值方法》，Phys. Rev. B 107, 224312 (2023). [26] N. Regnault 和 B. A. Bernevig，《整数特征多项式因式分解与希尔伯特空间碎片化》，arXiv 预印本 10.48550/arXiv.2210.08019 (2022), arXiv:2210.08019 [cond-mat.stat-mech]。

[27] Y. Li、P. Sala 和 F. Pollmann，《开放量子系统中的希尔伯特空间碎片化》，Phys. Rev. Res. 5, 043239 (2023). [28] S. Moudgalya 和 O. I. Motrunich，《利用交换子代数全面刻画量子多体疤痕》，Phys. Rev. X 14, 041069 (2024). [29] Y. H. Kwan、P. H. Wilhelm、S. Biswas 和 S. A. Parameswaran，《最大希尔伯特空间碎裂的最小哈伯德模型》，Phys. Rev. Lett. 134, 010411 2025( ). [30] L. Caha 和 D. Nagaj，《成对翻转模型：一种高度纠缠的平移不变自旋链》(2018), arXiv:1805.07168 [quant-ph]. [31] M. N. Barber 和 M. T. Batchelor，《双二次自旋-1反铁磁链的谱》，Phys. Rev. B 40, 4621 (1989). [32] B. Aufgebauer 和 A. Klümper，《Temperley–Lieb 型量子自旋链：周期边界条件、谱重数与有限温度》，Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2010, P05018 (2010). [33] M. T. Batchelor 和 M. N. Barber，《自旋-s 量子自旋链与 Temperley–Lieb 代数》，Journal of Physics A: Mathematical and General 23, L15 (1990). [34] N. Read 和 H. Saleur，《自旋链、环模型与 S矩阵的扩展对称代数》，Nucl. Phys. B 777, 263 (2007), arXiv:cond-mat/0701259. [35] S. Zhang、M. Karbach、G. Müller 和 J. Stolze，《一维 t-j_z 及 t-j 模型中的电荷与自旋动力学》，Phys. Rev. B 55, 6491 (1997). [36] C. D. Batista 和 G. Ortiz，《t $-J_z$ 链模型的量子相图》，Phys. Rev. Lett. 85, 4755 (2000). [37] S. Moudgalya、A. Prem、R. Nandkishore、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，《受限哈密顿量的克雷洛夫子空间中的热化及其缺失》，载于 Memorial Volume for Shoucheng Zhang (WORLD SCIENTIFIC, 2021)，第147–209页。[38] 详情请参阅补充材料。[39] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》(CRC Press, 2018). [40] D. Harlow，《从量子纠错推导 Ryu–Takayanagi 公式》，Commun. Math. Phys. 354, 865 (2017), arXiv:1607.03901 [hep-th]. [41] B. Lian，《量子击穿模型：从多体局域化到带疤痕的混沌》，Phys. Rev. B 107, 115171 2023 2208 ( ), arXiv: .10509 [cond-mat.str-el]. [42] B.-T. Chen、A. Prem、N. Regnault 和 B. Lian，《扩展量子击穿模型中的量子碎片化》，Phys. Rev. B 110, 165109 (2024). [43] Y.-M. Hu 和 B. Lian，《从量子击穿模型到格点规范理论》，AAPPS Bulletin 34, 10 1007 43673 024 00128 4 2024 . /s - - - ( ). [44] X. Liu 和 B. Lian，《具有克雷洛夫子空间多体局域化的二维量子击穿模型》，Phys. Rev. B 111, 054302 (2025). [45] Y.-M. Hu、Z. Han 和 B. Lian，《量子击穿凝聚态作为无无序量子玻璃》，arXiv 预印本，arXiv: 2512 21847 2025 2512 21847 . ( ), [ ] arXiv: . cond-mat.str-el . [46]I. Stewart，《伽罗瓦理论》(Chapman and Hall/CRC, 2022). [47]B. Aufgebauer 和 A. Klümper，《Temperley–Lieb 型量子自旋链：周期边界条件、谱重数与有限温度》，Journal of 统计力学：理论与实验 **2010**，P05018 (2010)。[48] P. A. Grillet，《抽象代数》，第242卷（SpringerScience & Business Media，2007）。

补充材料

I. 冯·诺伊曼代数的基本性质

我们介绍一些定义，并陈述若干未经证明的定理；其证明可在现有参考文献中找到，例如 [40]。

定义 1. 设 H 是一个有限维希尔伯特空间，$L(H)$是作用于 H 上的线性算子的集合。H 上的冯·诺伊曼代数是满足以下条件的算符集合 $A \subseteq L(H)$：

- $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \mathbb{1} \in A$。
- $\forall x \in A,\ \ x_\dagger \in A$.
- $\forall x, y \in A,\ \ x + y \in A,\ \ xy \in A$。

定义 2. 给定一个冯·诺伊曼代数 A，其交换子代数 C 定义为 H 上与 A 中每个元素都对易的算符所构成的集合。A 的中心定义为 $Z = A \cap C$。容易验证，C 和 Z 本身都是冯·诺伊曼代数。

定理 2（双交换子定理）。设 A 为一个冯·诺伊曼代数，C 为其交换子代数。双交换子定理指出，C 的交换子代数就是 A 本身。

定理 3. 设 A 是作用于希尔伯特空间 H 上的冯·诺伊曼代数，令 C 表示其对易子。那么，H 可以作如下形式的块分解

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda} \left(\mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{A})} \otimes \mathcal{H}_\lambda^{(\mathcal{C})} \right) \tag{S1}$$

其中 $H_\lambda^{(\mathcal{A})}$ 和 $H_\lambda^{(\mathcal{C})}$ 分别是 A 和 C 的不可约表示。相对于这一分解，A 和 C 均呈块对角形式，

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda} \left(\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{A}) \otimes \mathbb{1} \right) \ , \ \mathcal{C} = \bigoplus_{\lambda} \left(\mathbb{1} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) \right). \tag{S2}$$

由 λ 标记的块称为直和项。

II. FORMAL PROOF OF ICPF $\succeq$ CA

A. ICPF $\succeq$CA

正文中，我们简要概述了 ICPF $\succeq$ CA 的证明。此处，我们给出完整证明。首先介绍一些术语。在哈密顿量基中，矩阵表示仅含有理数元素的算符称为有理算子。可在哈密顿量基中分解为整数系数线性组合的态（不一定归一化）称为有理态；归一化后，其各分量之比为有理数。

定理 4. 在哈密顿量基 $\{|u_i\rangle\}$ 中，所有$\hat{}$ h_η 均为有理算子，**基**$(Z) = \{\hat{}z_k\}$ 的每个元素都可以表示为有理算子。

证明。 我们首先通过迭代过程构造一个线性无关基**基**(A</style)：

1. 用恒等算符 $S = \{1\}$ 初始化集合 S。

2. E $\hat{}$ xpand S： 将其中每个元素与每个 h_η相乘，并将乘积加入 S：

$$S \leftarrow S \cup \left\{ \hat{s} \cdot \hat{h}_\eta \mid \hat{s} \in S,\ \forall \hat{h}_\eta \right\} \tag{S3}$$

3. 从 S中移除任何线性依赖元素。

4. 重复步骤 2 和步骤 3，直到集合 S 不再变化——也就是说，不再添加新的线性无关元素。所得集合 S 被视为**基**($\mathcal{A}$)。

由于此过程仅涉及有理数运算，**Basis**($\mathcal{A}$) $= \{\hat{a}_k\}$ 中的所有元素都是有理算子。为构造**Basis**($\mathcal{Z}$)，我们求解满足对易条件的系数 w_k：

$$\forall \hat{h}_\eta, \quad \left[\sum\nolimits_j w_j \hat{a}_j, \hat{h}_\eta\right] = 0 \tag{S4}$$

每个线性无关解 $w_j = w_j^{(k)}$（第 k 个解）都对应于 Basis(Z) $=$ {$\hat{z}_k$} 中的一个元素 $\hat{z}_k = \sum_j w_j^{(k)} \hat{a}_j$。我们将线性无关解的数量记为 $Z =$ |Basis(Z)|。由于式 (S4) 是一组系数为有理数的{w_j}方程，因此存在有理解，故所得基算子 {$\hat{z}_k$} 均可取为有理算子。注意，Basis(Z) 并非唯一确定；不过，我们只是在断言至少存在一个这样的有理基。

□

由于算符 $\hat{z}_k$ 彼此对易，因此可以同时对角化。整个希尔伯特空间随后分解为{z_k}的共同特征子空间 V_λ：

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\lambda V_\lambda\,, \quad \forall\, |v\rangle \in V_\lambda, \quad \hat{z}_k\,|v\rangle = c_\lambda(\hat{z}_k)\,|v\rangle\,, \tag{S5}$$

其中，$c_\lambda(\hat{z}_k)$ 是 $\hat{z}_k$ 在特征子空间 V_λ 上的特征值。标签 λ 对所有不同的联合特征子空间进行索引，因此对于任意 $\lambda \neq \lambda'$，都存在至少一个 $\hat{z}_k$，使得 $c_\lambda(\hat{z}_k) \neq c_{\lambda'}(\hat{z}_k)$。根据定理 3，A 和 C 均具有块对角表示，其中各块（称为直和项）对应于子空间 $V_\lambda = \mathrm{H}_\lambda^{(\mathcal{A})} \otimes \mathrm{H}_\lambda^{(\mathcal{C})}$。$\hat{}$ 投影到这些子空间的投影算子记为 P_λ。这些投影算子可以由 $\hat{z}_k$ 的线性组合的乘积构造得到：

$$\hat{\mathcal{P}}_\lambda = \prod_k \left(\prod_{\lambda' \in \Lambda(\lambda,k)} \frac{\hat{z}_k - c_{\lambda'}(\hat{z}_k)}{c_\lambda(\hat{z}_k) - c_{\lambda'}(\hat{z}_k)} \right), \tag{S6}$$

其中，我们定义 $\Lambda(\lambda, k) = \{\lambda' \mid c_{\lambda'}(\hat{z}_k) \neq c_\lambda(\hat{z}_k)\}$ 为由 λ' 构成的直和项集合，其中 $\hat{z}_k$ 的特征值不同于 λ 的特征值。

定理 5. 若且唯若**基**(Z)中每个元素的所有特征值都是有理数，投影算子 $\hat{P}_\lambda$ 才是有理算子。

证明。 $\hat{z}_k \in$**基**($\mathcal{Z}$) 的特征值由 $c_\lambda(\hat{z}_k)$给出。若这些系数全都是有理数，且如ˆ定理 4中所证，算符 $\hat{z}_k$ 是有理算子，那么投影算子 $\mathcal{P}_\lambda$ 就是有理算子。

反之，假设对于某个 λ 和 k，特征值 $c_\lambda(\hat{z}_k)$ 是无理数。那么，由 (S5)，可得：

$$\hat{z}_k \hat{\mathcal{P}}_\lambda = c_\lambda(\hat{z}_k)\hat{\mathcal{P}}_\lambda \tag{S7}$$

$\hat{}$ 若投影算子$\mathcal{P}_\lambda$ 是有理算子，等式左边只会包含有理数。然而，右边涉及无理数 $c_\lambda(\hat{z}_k)$，这就导致矛盾。因此，在哈密顿量基下，$\hat{\mathcal{P}}_\lambda$ 必定含有无理数项。

□

在哈密顿量基下，哈密顿量 $H(J_\eta)$和投影算子 $\hat{\mathcal{P}}_\lambda$ 的矩阵表示都是有理的。因此，特征多项式 $\Phi_\lambda(\mu) = \det_\lambda(\mu\mathbb{1} - \hat{\mathcal{P}}_\lambda H(J_\eta)\,\hat{\mathcal{P}}_\lambda)$具有有理系数。换言之，哈密顿量投影到每个直和项（标记为 λ）上时，都有一个有理特征多项式。因此，ICPF 方法能够捕捉具有不同 λ 的不变子空间。

在标记为 λ 的直和项中，（首一）特征多项式 $\Phi_\lambda(\mu)$ 可表示为若干子多项式的乘积，每个子多项式都提升至 d_λ 次方：$\Phi_\lambda(\mu) = \left[\phi_\lambda^{(D_\lambda)}(\mu)\right]^{d_\lambda}$，其中子多项式 $\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda(\mu)$ 对应一个维数为 D_λ 的退化子空间。剩下需要证明的是 $\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda(\mu)$ 是否具有有理系数。

定理 6. 设 $f(x)$ 是一个首一多项式，也就是说，它的首项系数为 *1*。如果对于某个自然数 n，$[f(x)]^n$ 具有有理系数，那么 $f(x)$ 也必定具有有理系数。

证明。设 $f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots a_0$。展开 $[f(x)]^n$，得到

$$f^n(x) = x^{nd} + na_{n-1}x^{nd-1} + \left[na_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}a_{n-1}^2\right] x^{nd-2} + \cdots \tag{S8}$$

让我们来考察最高次项的系数：

1. x^{nd-1} 的系数是 na_{n-1}，它是有理数；因此 a_{n-1} 是有理数。

2. 假设对于某个 $i \geq 2$，系数 $a_{n-i+1}, \cdots a_{n-1}$ 都是有理数。x^{nd-i} 项的系数是 $na_{n-i} + c_{n-i}$，其中 c_{n-i} 是一个涉及更高阶系数 $a_{n-i+1}, \cdots \ a_{n-1}$的有理多项式。根据归纳假设，表达式 c_{n-1} 是有理数，因此 a_{n-i} 是有理数。

根据归纳法，对于 $i \in [0, d-1]$，所有系数 a_i 都是有理数。因此，$f(x)$具有有理系数 s.

利用伽罗瓦理论可以得到一个更简单的证明：令 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a_{n-1}, \cdots a_0)$为由系数 a_i生成的域扩张。令 $\sigma \in$ Gal($\mathbb{K}/\mathbb{Q}$)为域扩张 $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$的伽罗瓦群的一个自同构。由于 f^n 具有有理系数，我们有 $\sigma(f^n) = \sigma(f)^n = f^n$。因为 f是首一的，这意味着 $\sigma(f) = f$。因此，σ固定所有系数 a_i，所以伽罗瓦群中的每个自同构都平凡作用。因此，Gal($\mathbb{K}/\mathbb{Q}$)是平凡群。根据伽罗瓦理论基本定理 [46], $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$，且所有系数 a_i 都是有理数。 □

这就完成了证明：$\phi^{(D_\lambda)}{}_\lambda(\mu)$ 具有有理系数，对应于 CA 方法识别出的每个克雷洛夫子空间的特征多项式。至此，我们已证明正文中的主定理，现简要重述如下：

定理 7 (**本文的主定理**)。如果**基**(Z) 中每个元素的所有特征值都是有理数，则 *ICPF* $\succeq$*CA*。

B. ICPF $\succ$CA：依赖系数的基

在量子击穿模型等模型中，两种方法得到的 HSF 不同，且我们的主定理中的不等式不取等号。ICPF 方法进一步将 CA 克雷洛夫子空间分解为更小的分量，即 ICPF 子空间。在这种情况下，更精细的 ICPF 子空间必然依赖于哈密顿量系数$\{J_\eta\}$。正文中的命题 1 陈述了这一点，证明如下。

假设一个 CA 克雷洛夫子空间可分解为 ICPF 克雷洛夫子空间的直和：$\mathcal{K}_{\text{CA}} = \bigoplus_i \mathcal{K}^{(i)}{}_{\text{ICPF}}$，并假设$\mathcal{K}^{(i)}{}_{\text{ICPF}}$ 的基独立于$\{J_\eta\}$。这意味着，对于系数的任意取值，每个子空间在哈密顿量的作用下都保持不变：

$$H(\{J_\eta\})\,|v\rangle \in \mathcal{K}^{(i)}_{\text{ICPF}}, \quad \forall\, |v\rangle \in \mathcal{K}^{(i)}_{\text{ICPF}}. \tag{S9}$$

Si由于假设$\mathcal{K}^{(i)}{}_{\text{ICPF}}$ 独立于$\{J_\eta\}$，我们可以令 $H(\{J_\eta\}) = \hat{}h_\eta$，从而得到 :

$$\hat{h}_\eta\,|v\rangle \in \mathcal{K}^{(i)}_{\text{ICPF}}, \quad \forall \eta,\ |v\rangle \in \mathcal{K}^{(i)}_{\text{ICPF}}. \tag{S10}$$

这意味着子空间$\mathcal{K}^{(i)}{}_{\text{ICPF}}$ 在所有局域项 $\hat{}\ h_\eta$的作用下保持不变，这表明$\mathcal{L}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ 在（S2）中是可约的。这与$\mathrm{H}_\mathcal{A}$ 支持一个不可约表示的假设矛盾。

III. t-J_z MODEL

A. 模型描述

t-J_z 模型 [35, 36] 是一种描述自旋费米子的 一维晶格模型，其第 i个格点上的产生算符分别记为$c_{i,\uparrow}^\dagger$，$c_{i,\downarrow}^\dagger$。对于大小为 L的系统，其哈密顿量为

$$H_{t-J_z} = \sum_{i=1}^{L-1}\left[-t_{i,i+1}\sum_{\sigma\in\{\uparrow,\downarrow\}}\left(\tilde{c}_{i,\sigma}\tilde{c}^\dagger_{i+1,\sigma} + \text{h.c.}\right) + J_{i,i+1}S^z_iS^z_{i+1}\right] + \sum_{i=1}^{L}\left[h_iS^z_i + g_i(S^z_i)^2\right], \tag{S11}$$

其中，修正后的费米子算符定义为$\tilde{c}_{i,\sigma} \equiv c_i^{\sigma}(1 - c_{i,-\sigma}^{\dagger} c_{i,-\sigma})$，以及$S_i^z \equiv \tilde{c}_{i,\uparrow}^{\dagger} \tilde{c}_{i,\uparrow} - \tilde{c}_{i,\downarrow}^{\dagger} \tilde{c}_{i,\downarrow}$。该模型的希尔伯特空间不允许同一格点上有两个费米子占据：每个格点只能为空、被一个自旋向上费米子占据，或被一个自旋向下费米子占据。因此，希尔伯特空间的总维数为 3^L。单格点算符 S_i^z 和$(S_i^z)^2$ 会破坏我们不关注的对称性。

t-J_z 模型具有两个（局域）运动积分，分别对应两种费米子种类 $N_\uparrow$、 $N_\downarrow$ 的守恒粒子数：

$$N^{\uparrow} = \sum_{i=1}^{L} \tilde{c}_{i,\uparrow} \tilde{c}_{i,\uparrow}^{\dagger}, \quad N^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{L} \tilde{c}_{i,\downarrow} \tilde{c}_{i,\downarrow}^{\dagger}. \tag{S12}$$

对所有可能的值求和，可得希尔伯特空间 3^L 的总维数 :

$$\sum_{N_\uparrow=0}^{L} \sum_{N_\downarrow=0}^{L-N_\uparrow} \frac{L!}{N_\uparrow! N_\downarrow! (L - N_\uparrow! - N_\downarrow!)} = (1+1+1)^L = 3^L. \tag{S13}$$

B. 希尔伯特空间碎片化

哈密顿量的非平凡作用是 将自旋向上和自旋向下态分别向左和向右移动 t:

$$|\cdots 0 \uparrow \cdots\rangle \leftrightarrow |\cdots \uparrow 0 \cdots\rangle, \quad |\cdots 0 \downarrow \cdots\rangle \leftrightarrow |\cdots \downarrow 0 \cdots\rangle. \tag{S14}$$

重要的是，由于不允许双重占据，自旋向上态无法越过自旋向下态。因此，在开放边界条件下，克雷洛夫子空间的不同扇区由自旋链中 $|\uparrow\rangle$ 与 $|\downarrow\rangle$的排列顺序唯一确定。例如， $|\uparrow\downarrow 0 \uparrow 0\rangle$ 和 $|\uparrow\ 0 \downarrow 0 \uparrow\rangle$ 属于同一个克雷洛夫子空间，而 $|\uparrow 0 \downarrow 0 \uparrow\rangle$ 和$|\uparrow 0 \uparrow 0 \downarrow\rangle$虽然属于同一个对称性扇区，却位于不同的克雷洛夫子空间中。在每个扇区中，$d_{N_\uparrow,N_\downarrow} = \frac{(N_\uparrow+N_\downarrow)!}{N_\uparrow! N_\downarrow!}$种排列↑和 ↓的方式，因此 $(N_\uparrow, N_\downarrow)$ 扇区可分解为 $d_{N_\uparrow,N_\downarrow}$ 个不同的克雷洛夫子空间，每个子空间的维数为 $D_{N_\uparrow,N_\downarrow} = \frac{L!}{(N_\uparrow+N_\downarrow)!(L-N_\uparrow-N_\downarrow)!}$。

上文所述的克雷洛夫子空间可以通过将整数系数代入哈密顿量，使用 ICPF 方法加以刻画。例如，考虑具有 $L = 4$ 的模型。选择一组随机整数系数

$$\begin{cases} (t_{1,2}, t_{2,3}, t_{3,4}) & = (-3, -4, 2) \\ (J_{1,2}, J_{2,3}, J_{3,4}) & = (-1, -4, 5) \\ (h_1, h_2, h_3, h_4) & = (2, 5, -5, -1) \\ (g_1, g_2, g_3, g_4) & = (-3, -6, -3, 1) \end{cases},$$

ICPF 方法通过以下因式分解刻画希尔伯特空间碎片化：

$$\begin{aligned} &\det(\mu \mathbb{1} - H) = \phi_1^{(4)}(\mu) \cdot \phi_2^{(4)}(\mu) \cdot \phi_3^{(4)}(\mu) \cdots \\ =&(\mu^4 + 2\mu^3 - 256\mu^2 - 362\mu + 12327)(\mu^4 + 36\mu^3 + 324\mu^2 + 48\mu - 1665)(\mu^4 + 64\mu^3 + 1460\mu^2 + 13684\mu + 41607) \cdots, \end{aligned} \tag{S15}$$

其中，我们仅明确展示了对应于具有 $N_\uparrow = 1$ 和 $N_\downarrow = 2$ 的对称性扇区的因子，该扇区的维数为 12，而对应于其他对称性扇区的因子则简写为 $\cdots$。因子 $\phi_p^{(D_p)}(\mu)$ 中的上标 D_p表示 μ 的最高阶，而下标 i 用作区分不同因子的标签。根据 ICPF 方法，该对称性扇区分解为三个不同的克雷洛夫子空间，每个子空间的维数均为四。这些克雷洛夫子空间由特定的基集合张成：

$$\begin{cases} \phi_1^{(4)}(\mu): & |\uparrow\downarrow\downarrow 0\rangle, |\uparrow\downarrow 0 \downarrow\rangle, |\uparrow 0 \downarrow\downarrow\rangle, |0 \uparrow\downarrow\downarrow\rangle \\ \phi_2^{(4)}(\mu): & |\downarrow\uparrow\downarrow 0\rangle, |\downarrow\uparrow 0 \downarrow\rangle, |\downarrow 0 \uparrow\downarrow\rangle, |0 \downarrow\uparrow\downarrow\rangle \\ \phi_3^{(4)}(\mu): & |\downarrow\downarrow\uparrow 0\rangle, |\downarrow\downarrow 0 \uparrow\rangle, |\downarrow 0 \downarrow\uparrow\rangle, |0 \downarrow\downarrow\uparrow\rangle \end{cases}. \tag{S16}$$

我们记作 根态——任意一个基向量——记作 $|\Psi_p\rangle$，其满足 $\phi_p^{(4)}(H)|\Psi_p\rangle =$ 0:

$$\begin{cases} \phi_1^{(4)}(\mu): & |\Psi_1\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow 0\rangle \longrightarrow (H^4 + 2H^3 - 256H^2 - 362H + 12327)|\Psi_1\rangle = 0 \\ \phi_2^{(4)}(\mu): & |\Psi_2\rangle = |\downarrow\uparrow\downarrow 0\rangle \longrightarrow (H^4 + 36H^3 + 324H^2 + 48H - 1665)|\Psi_2\rangle = 0 \\ \phi_3^{(4)}(\mu): & |\Psi_3\rangle = |\downarrow\downarrow\uparrow 0\rangle \longrightarrow (H^4 + 64H^3 + 1460H^2 + 13684H + 41607)|\Psi_3\rangle = 0 \end{cases}. \tag{S17}$$

这些根态在哈密顿量的作用下，生成各自对应的 4 维克雷洛夫子空间。另一方面，我们可以使用 CA 方法研究 HSF。 t-J_z 模型的对易子为

$$N^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} N_{j_1}^{\sigma_1} N_{j_2}^{\sigma_2} \cdots N_{j_k}^{\sigma_k}, \tag{S18}$$

其中 $N_j^\sigma = \tilde{c}_{j,\sigma}\tilde{c}_{j,\sigma}^\dagger$ 和 $1 \le k \le L$。特别是， $k=1$ 对应于式（S12）中引入的守恒荷。对易子在每个克雷洛夫子空间内均取不同的（一维）表示。在对称性扇区 $(N_\uparrow, N_\downarrow) = (1, 2)$中，每个克雷洛夫子空间（以其中一个基态表示）都携带对易子的相应表示：

	$N^\uparrow$	$N^\downarrow$	$N^{\uparrow\uparrow}$	$N^{\uparrow\downarrow}$	$N^{\downarrow\uparrow}$	$N^{\downarrow\downarrow}$	$N^{\uparrow\uparrow\uparrow}$	$N^{\uparrow\uparrow\downarrow}$	$N^{\uparrow\downarrow\uparrow}$	$N^{\uparrow\downarrow\downarrow}$	$N^{\downarrow\uparrow\uparrow}$	$N^{\downarrow\uparrow\downarrow}$	$N^{\downarrow\downarrow\uparrow}$	$N^{\downarrow\downarrow\downarrow}$
$\lvert\uparrow\downarrow\downarrow 0\rangle$	1	2	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
$\lvert\downarrow\uparrow\downarrow 0\rangle$	1	2	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$\lvert\downarrow\downarrow\uparrow 0\rangle$	1	2	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	1	0

(S19)

比较式（S17）和式（S19）可知，在 $(N_\uparrow, N_\downarrow) = (1, 2)$ 扇区中，ICPF 方法和 CA 方法对克雷洛夫子空间的定义等价，适用于 $L = 4$ t-J_z 模型。因此，两种方法得到相同的 HSF 结构。这种等价性也扩展到其他对称性扇区，在两种方法下，整个希尔伯特空间都以相同方式发生碎裂。更一般地，我们发现，对于所有不超过 $L \le 8$ 的系统尺寸，ICPF 方法都与 CA 方法一致。

IV. 成对翻转模型

A. 模型描述

成对翻转模型 [30] 描述了一个大小为 L 的一维晶格模型，其中每个格点对应一个 m 级系统。该模型在哈密顿量作用下的演化呈现 HSF：

$$H_{\mathrm{PF}} = \sum_{j=1}^{L-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_j^{\alpha,\beta} \underbrace{(|\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta|)_{j,j+1}}_{F_{j,j+1}^{\alpha,\beta}} + \sum_{j=1}^{L}\sum_{\alpha=1}^{m} \mu_j^\alpha \underbrace{(|\alpha\rangle\langle\alpha|)_j}_{N_j^\alpha}. \tag{S20}$$

这里， $g^{\alpha,\beta}_{i} = g^{\beta,\alpha^*}_{i}$ 以确保厄米性。

该系统具有 $U(1)$ 个守恒量：

$$N^\alpha = \sum_j (-1)^j N_j^\alpha. \tag{S21}$$

然而，这些量并非独立；它们满足关系 $\sum_\alpha N^\alpha = \mathbb{1}$。因此，整体对称性总计为 $U(1)^{m-1}$。

对于具有 $m = 3$ 的模型，我们引入一种基于颜色的记号：

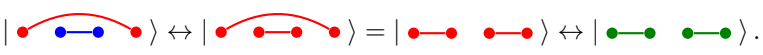
$$|1\rangle = |\,\bullet\,\rangle, \quad |2\rangle = |\,\bullet\,\rangle, \quad |3\rangle = |\,\bullet\,\rangle.$$

为表示乘积态，我们按以下方式构造图：从彼此不相连的彩色点开始。然后，将相邻的同色点连接起来形成二聚体，并从后续处理中排除这些二聚体。对剩余彼此不相连的点重复这一过程，直到无法再形成二聚体。最终的图由孤立点和二聚体组成。例如：

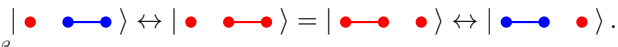
$|323321\rangle =$ 

B. 希尔伯特空间碎片化

将 $F^{\alpha,\beta}_{i,i+1}$ 作用于纯乘积态，可以将任意二聚体构型变换为任意一组颜色任意的无交叉二聚体。例如：



此外，在 $F^{\alpha}{}_{,i}{}^{\beta}{}_{i+1,}$作用下，任意未配对点都可以越过二聚体移动。例如



我们观察到，无论如何将 $F^{\alpha}{}_{,\,i}{}^{\beta}{}_{,\,i+1}$或 N_i^{α}作用于乘积态，奇异点的排列顺序始终不变。因此，可以根据奇异点的排列顺序来区分不同的克雷洛夫子空间。

使用 ICPF 方法，可以通过多项式因式分解得到的因子来表征这些克雷洛夫子空间。考虑一个 $L=6$ 模型的哈密顿量，其整数系数随机选取。特征多项式可分解为多个因子：一个 87 次因子、6 个互不相同的 47 次因子、24 个互不相同的 11 次因子，以及 96 个互不相同的一次因子。我们分别将对应的多项式记为 $\phi_1^{(87)}(\mu)$、$\phi_{2\sim7}^{(47)}(\mu)$、$\phi_{8\sim31}^{(11)}(\mu)$、$\phi_{32\sim127}^{(87)}(\mu)$。与因子 $\phi_1^{(87)}(\mu)$ 对应的子空间，其基向量由完全连接的二聚体组成，即不含奇异点。与每个 $\phi_p^{(47)}(\mu)$ 相关的基向量包含 2 个连接二聚体和 2 个奇异点。与因子 $\phi_p^{(11)}(\mu)$ 对应的基向量由 1 个连接二聚体和 4 个奇异点组成。最后，与因子 $\phi_p^{(1)}(\mu)$ 对应的子空间，其基向量完全由奇异点构成。

该模型的对易子与所有 $F^{\alpha}{}_{,i}{}^{\beta}{}_{,i+1}$和 N_i^{α}均对易，具体如下：

$$N^{\alpha_1\cdots\alpha_k}=\sum_{j_1<\cdots<j_k}(-1)^{\sum_{l=1}^{k}j_l}N_{j_1}^{\alpha_1}\cdots N_{j_k}^{\alpha_k},\quad \alpha_j\neq\alpha_{j+1}. \tag{S22}$$

对于 $L=6$ 模型，对易子将希尔伯特空间分解为多个不可约表示，每个不可约表示都由对易子的一组不同的一维表示刻画。

	$N^{\bullet}$	$N^{\bullet}$	$N^{\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet}$	$N^{\bullet\bullet\bullet}$	D_λ	d_λ
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	87	1
	−1	1	0	−1	0	0	0	0	0	0	47	1
	−1	0	1	0	−1	0	0	0	0	0	47	1
	1	−1	0	0	0	−1	0	0	0	0	47	1
	0	−1	1	0	0	0	−1	0	0	0	47	1
	1	0	−1	0	0	0	0	−1	0	0	47	1
	0	1	−1	0	0	0	0	0	−1	0	47	1
	−1	2	−1	−2	1	0	−1	0	−1	1	11	1
	0	2	−2	0	0	0	−1	0	−3	0	11	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(S23)

为简洁起见，这里不列出完整的碎裂结构。如表所示，不同的不可约表示——每个都由其对应基态之一表示——至少有一个对易子的作用彼此不同。对于更大的系统尺寸 L，不可约表示的数量及其对应的 D_λ 和 d_λ均可用闭式表达式表示。特别地，包含 p 个奇异点的基向量态所对应的不可约表示数量为

$$\begin{cases} n_p=1 & p=1\\ n_p=m(m-1)^{p-1} & p>1 \end{cases}. \tag{S24}$$

每个此类不可约表示的简并度 $d_\lambda=1$，其维数 $D_{L,p}$ 可由生成函数 :

$$G(z)\equiv\sum_{\ell=0}^{\infty}D_{\ell,p}z^{\ell},\quad D_{0,0}\equiv1,\quad D_{\ell,p}\equiv0 \text{ if } p>\ell, \tag{S25}$$

其中

$$G(z)=\frac{2(m-1)}{m-2+m\sqrt{1-4(m-1)z^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4(m-1)z^2}}{2(m-1)z}\right)^{p}. \tag{S26}$$

CA 方法所得不可约表示的维数与 ICPF 方法中相应多项式因子的次数完全一致。此外，每个 CA Krylov子空间的基在其对应的特征多项式作用于哈密顿量后均被湮灭。例如，$\phi_1^{(87)}(H)|\,\rangle=0$。因此，我们得出结论：在 $L=6$ PF 模型中，ICPF 方法等价于 CA 方法。至少截至 $L\leq8$，这一等价关系已得到验证。

V. TEMPERLEY-LIEB 模型

A. 模型描述

现在我们研究 Temperley-Lieb（TL）模型 [31–34], 该模型属于成对翻转模型这一类，但在 CA 方法下表现出量子碎片化 。该模型定义在一个 m级链上，采用开放边界条件，其哈密顿量为:

$$H=\sum_{i=1}^{L-1}J_{i,i+1}e_i=\sum_{i=1}^{L-1}J_{i,i+1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\left(|\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta|\right)_{i,i+1}, \tag{S27}$$

其中 $e_i=(|\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta|)_{i,i+1}$。与成对翻转模型类似，TL 模型也有 m 厄米守恒荷:

$$N^{\alpha}=\sum_{j}(-1)^{j}N_{j}^{\alpha}, \tag{S28}$$

其中 α 从 1 到 m变化。

TL 模型中克雷洛夫子空间的基态具有一种方便的图形表示法。在这种记法中，每一对最大纠缠位点都用一个二聚体表示:

$$|\psi_{\text{dimer}}\rangle=|\ \bullet\!\!-\!\!\bullet\ \rangle=\sum_{\alpha=1}^{m}|\alpha\alpha\rangle\,,$$

而冻结态则表示为孤立点，它们在 e_i的作用下会被湮灭。这种图形表示法的优点在于，它使 e_i 的作用更加直观。回想一下， e_i 将位点 i 和 $i+1$ 上的态投影到一个最大纠缠对上——从图形上看，这相当于在这些位点之间插入一个二聚体。 e_i 的作用分为四种情况:

1. 如果格点 i 和 $i+1$ 已经由一个二聚体连接，那么 e_i 保持构型不变，只将态乘以因子 m:

$$e_i\,|\ \underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i+1}{\bullet}\ \rangle=m\,|\ \underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i+1}{\bullet}\ \rangle\,.$$

2. 如果格点 i 是一个孤立的点，而格点 $i+1$ 通过一个二聚体与另一个格点 l连接，那么 e_i的作用会打断 $i+1$ 和 l之间的二聚体，使 l 成为孤立点，并在 i 和 $i+1$之间形成一个新的二聚体:

$$|\ \underset{i}{\bullet}\ \underset{i+1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{l}{\bullet}\rangle=|\ \underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i+1}{\bullet}\ \ \underset{l}{\bullet}\rangle\,.$$

3. 如果格点 i和 $i+1$分别与不同的格点相连——i与 k相连， $i+1$与 l相连——那么 e_i的作用会移除两个已有的二聚体，并以两个新的二聚体取而代之：一个连接 i 和 $i+1$，另一个连接 k和 l:

$$e_i\,|\ \underset{k}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i}{\bullet}\ \ \underset{i+1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{l}{\bullet}\rangle=|\ \underset{k}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i+1}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{l}{\bullet}\rangle\,.$$

4. 如果格点 i 和 $i+1$ 是孤立的，对应于一个冻结态，那么 e_i 会湮灭该态 :

$$e_i\,|\ \underset{i}{\bullet}\ \ \underset{i+1}{\bullet}\ \rangle=0.$$

从格点 i_s 开始、大小为 l 的冻结态满足

$$e_i\,|\psi_{\text{frozen}}\rangle=0,\quad i=i_s,\cdots,i_s+l-2, \tag{S29}$$

可通过求解试探解获得

$$|\psi_{\text{frozen}}\rangle=\sum_{\alpha_1,\cdots\alpha_L}C_{\alpha_1\cdots\alpha_L}\,|\alpha_1\cdots\alpha_L\rangle\,. \tag{S30}$$

将试探解代入方程（S29），可得到关于系数$C_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$的线性方程组，且所有系数均为有理数。因此，$C_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 的系数为有理数。

B. 希尔伯特空间碎片化

除了（S28）中的守恒荷外，该模型还具有更多形式如下的守恒荷

$$M_\alpha^\beta = \sum_j (M_j)_\alpha^\beta, \quad \begin{cases} (M_j)_\alpha^\beta = -(|\beta\rangle\langle\alpha|)_j & j \text{ even} \\ (M_j)_\alpha^\beta = (|\alpha\rangle\langle\beta|)_j & j \text{ odd.} \end{cases} \tag{S31}$$

通过注意到 $(M_j)_\alpha^\alpha \equiv (-1)^j N_j^\alpha$，守恒荷 N^α 可以用 M_α^β 表示。算符 $M_\alpha^\beta (1 \le \alpha,\ \beta \le m)$ 随后生成一个由 m^2-1 个独立元素构成的代数，对应于模型的全局 $U(m)$ 对称性。为了得到最一般的对易子，我们遵循 [34] 中的构造，并定义：

$$\overline{M}_{a_1\cdots a_k}{}^{b_1\cdots b_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \prod_{l=1}^{k} (M_{i_l})_{\alpha_l}^{\beta_l}, \quad k = 1, \cdots \lfloor L/2 \rfloor. \tag{S32}$$

对这些算符取无迹投影，即可得到对易子：

$$M_{a_1\cdots a_k}{}^{b_1\cdots b_k} = (P \cdot \overline{M} \cdot P)_{a_1\cdots a_k}{}^{b_1\cdots b_k}, \tag{S33}$$

其中 P 表示 Jones–Wenzl 投影算子。对于每个 k，都可以递归地构造这些投影算符。例如，当 $k=2$ 时，投影后的对易子形式为：

$$M_{ab}{}^{cd} = \overline{M}_{ab}{}^{cd} - \frac{1}{m}\overline{M}_{a'b}{}^{ca'}\delta^a{}_d - \frac{1}{m}\overline{M}_{ab'}{}^{b'd}\delta^b{}_c + \frac{1}{m^2}\overline{M}_{a'b'}{}^{b'a'}\delta^b{}_c\delta^a{}_d. \tag{S34}$$

给定对易子，即可显式计算每个克雷洛夫子空间的维数 D_λ 和简并度 d_λ：

$$D_\lambda = \binom{L}{L/2+\lambda} - \binom{L}{L/2+\lambda+1}, \quad d_\lambda = [2\lambda+1]_q, \tag{S35}$$

这里，当 L 为偶数时，$\lambda = 0,\ 1,\ \cdots L/2$；当 L 为奇数时，$\lambda = 1/2,\ \cdots (L-1)/2$。量 $[x]_q$ 表示 q 变形整数，其定义为

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \tag{S36}$$

其中 $q = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$。

对于具有 $L=4$ 和 $m=3$ 的模型，希尔伯特空间的维数为 $3^4 = 81$。根据 CA 方法以及（S35），克雷洛夫子空间的维数和简并度为 $(D_\lambda, d_\lambda) = (2,1),\ (3,8),\ (1,55)$。每个克雷洛夫子空间都可以由其对应的根态生成：

$$\begin{cases} \lambda = 0, D_\lambda = 2, d_\lambda = 1: & |\bullet\!\!-\!\!\bullet \quad \bullet\!\!-\!\!\bullet\rangle \\ \lambda = 1, D_\lambda = 3, d_\lambda = 8: & |\bullet\!\!-\!\!\bullet \quad \bullet \quad \bullet\rangle \\ \lambda = 2, D_\lambda = 1, d_\lambda = 55: & |\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\rangle \end{cases} \tag{S37}$$

在 ICPF 方法中，我们将整数系数代入哈密顿量：$(J_{1,2}, J_{2,3}, J_{3,4}) = (7, 6, -3)$，特征多项式因式分解为

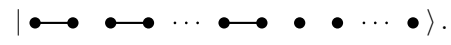
$$\det(\mu\mathbb{1} - H) = [\phi_1^{(1)}(\mu)]^{55} \cdot \phi_2^{(2)}(\mu) \cdot [\phi_3^{(3)}(\mu)]^8 = \mu^{55}(\mu^2 - 30\mu + 192)(\mu^3 - 30\mu^2 + 3\mu + 2646)^8. \tag{S38}$$

这表明希尔伯特空间分解为一个 55 重简并的一维克雷洛夫子空间、一个二维克雷洛夫子空间，以及一个 8 重简并的三维克雷洛夫子空间，这与 CA 方法的预测一致。此外，根据（S37），所有根态在哈密顿量基中均为有理数，因此可得出结论：对于 $=$，ICPF $L = 4$。我们明确验证了对于 $=$，ICPF $L \le 8$。

对于任意 L，通过证明克雷洛夫子空间的根态在哈密顿量基下表示时具有有理系数，即可建立 ICFP $\succeq$ CA。这些根态对应于 TL 模型中键代数的不可约表示，且已有明确表达式 [47]。更具体地说，对于标记为 λ 的不可约表示，其中 $(D_\lambda,\ d_\lambda)$ 在（S35）中给出，相应的根态为

$$|\psi_{\text{dimer}}\rangle_{1,2} \otimes |\psi_{\text{dimer}}\rangle_{3,4} \cdots \otimes |\psi_{\text{dimer}}\rangle_{L-2\lambda-1,L-2\lambda} \otimes |\psi_{\text{frozen}}\rangle, \tag{S39}$$

其中 $|\psi_{\text{frozen}}\rangle$ 表示尺寸为 $L-2\lambda$ 的 TL 模型中的冻结态，满足（S29），其中 $i_s=2\lambda+1$。根态可以图示为



(S40)

恰好存在 d_λ 个独立的冻结态 $|\psi_{\text{frozen}}\rangle$，每个冻结态都对应一个 d_λ重简并克雷洛夫子空间中的不同根态。由于 $|\psi_{\text{dimer}}\rangle$和 $|\psi_{\text{frozen}}\rangle$在哈密顿量基底中都具有有理系数，因此这些根态在同一基底中也具有有理系数。

VI. 量子崩塌模型

（玻色子）量子崩塌模型描述一个大小为 L 的一维玻色子链，每个格点包含 2 个硬核玻色模 $b_{i,\nu}$，标记为 $\nu=1,2$，它们满足以下对易关系

$$b_{i,\nu}b^\dagger_{j,\nu'}-(1-2\delta_{ij}\delta_{\nu\nu'})b^\dagger_{j,\nu'}b_{i,\nu}=\delta_{ij}\delta_{\nu\nu'}\ . \tag{S41}$$

系统的动力学由以下哈密顿量支配：

$$H=\sum_{i=1}^{L-1}\sum_{\nu=1,2}J_i^\nu(b^\dagger_{i+1,1}b^\dagger_{i+1,2}b_{i,\nu}+\text{h.c.})+\sum_{i=1}^{L}\mu_i\sum_{\nu=1,2}\hat{n}_{i,\nu}, \tag{S42}$$

其中，h.c. 表示厄米共轭，而 $\hat{n}_{i,\nu}=b^\dagger_{i,\nu}b_{i,\nu}$ 是格点 i上模 ν 的数算符。哈密顿量中的势能项统计每个格点上的玻色子总数；因此，该模型的对易子保持每个格点上的玻色子数不变。该模型的基可以用由圆圈组成的 2×3 网格表示，其中三列对应晶格位置 $i=1,2,3$，两行对应不同的模。实心圆（•）表示占据态，空心圆（◦）表示未占据态。例如，◦ •◦ ◦◦ ◦◦ ◦表示一个具有 $L=4$ 的基，其中格点 $i=2$ 上的 $\nu=1$ 模处于占据态。

键代数 $\mathcal{A}$ 由哈密顿量中出现的局域项生成，

$$\mathcal{A}=\text{gen}\left\{b^\dagger_{i+1,1}b^\dagger_{i+1,2}b_{i,\nu}+\text{h.c.},\ \hat{n}_{i,1}+\hat{n}_{i,2}\ \middle|\ i,\nu\right\}. \tag{S43}$$

该模型的对易子随后可用以下算符表示：

1. 恒等算符 $\mathbb{I}_i$2. 数算符：$\hat{n}_{i,\nu}$3. 每个格点处的跃迁算符：$\hat{o}_{i,1}=b_{i,1}b^\dagger_{i,2}$，$\hat{o}_{i,2}=b_{i,2}b^\dagger_{i,1}$4. 数算符乘积：$\hat{n}^{(1,2)}_i=\hat{n}_{i,1}\hat{n}_{i,2}$

聚焦于 $L=3$，该模型的交换子代数 $\mathcal{C}$ 由以下生成元的任意线性组合及多重乘积生成：

1. $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3$, $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2\hat{o}_{3,\nu_3}$, and $\mathbb{I}_1\hat{o}_{2,\nu_2}\hat{o}_{3,\nu_3}$
2. $\hat{n}^{(1,2)}_1\hat{n}^{(1,2)}_2\hat{n}^{(1,2)}_3$, $\hat{n}^{(1,2)}_1\hat{n}^{(1,2)}_2\hat{o}_{3,\nu_3}$, and $\hat{n}^{(1,2)}_1\hat{o}_{2,\nu_2}\hat{o}_{3,\nu_3}$
3. $\hat{o}_{1,\nu_1}\hat{o}_{2,\nu_2}\hat{o}_{3,\nu_3}$
4. $\hat{n}^{(1,2)}_1\hat{n}^{(1,2)}_2\hat{n}_{3,\nu_3}$, $\hat{n}^{(1,2)}_1\hat{n}_{2,\nu_2}\hat{o}_{3,\nu_3}$, and $\hat{n}_{1,\nu_1}\hat{o}_{2,\nu_2}\hat{o}_{3,\nu_3}$
5. $\mathbb{I}_1\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}_{2,2}\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$ and $\mathbb{I}_1\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}^{(1,2)}_2\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$
6. $\hat{n}_{1,\nu_1}\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}_{2,2}\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$ and $\hat{n}_{1,\nu_1}\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}^{(1,2)}_2\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$
7. $\hat{o}_{1,\nu_1}\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}_{2,2}\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$ and $\hat{o}_{1,\nu_1}\left(\hat{n}_{2,1}-\hat{n}^{(1,2)}_2\right)\hat{o}_{3,\nu_3}$

8. $[\mathbb{I}_1 \hat{} n_{2,1} + \hat{} n_{1,1}\mathbb{I}_2 + \hat{} n_{1,2}\mathbb{I}_2] \hat{} o_{3,\nu_3}$

9. $\left[\hat{n}_{1,1}\hat{n}_{2,1} + \hat{n}_{1,2}\hat{n}_{2,1} + \hat{n}_1^{(1,2)}\mathbb{I}_2\right] \hat{o}_{3,\nu_3}$

10. $\hat{} n_1^{(1,2)} \left[\hat{} n_{2,\ 1} \hat{} n_{3,\ 1} + \hat{} n_{2,\ 2} \hat{} n_{3,\ 1} + \hat{} n_2^{(1,2)}\mathbb{I}_3\right]$

11. $2\hat{} n_{1,1}\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3 + 2\hat{} n_{1,2}\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 \hat{} n_{2,1}\mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 \hat{} n_{2,2}\mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 \hat{} n_{3,1}$

12. $\hat{} n_{1,1}\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3 + \hat{} n_{1,2}\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 \hat{} n_2^{(1,2)}\mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_1 \hat{} n_{2,1} \hat{} n_{3,1} + \mathbb{I}_1 \hat{} n_{2,2} \hat{} n_{3,1} - 2\mathbb{I}_1 \hat{} n_2^{(1,2)} \hat{} n_{3,1}$

上文列出的对易子将希尔伯特空间分解为彼此在动力学上互不连通的 CA子空间：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},\ 1} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},\ 2} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},3} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},4} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ ,\ ,\ \right),\\
\text{千}_{\mathrm{CA},\ 5} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},6} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},\ 7;1} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},\ 7;2} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},\ 8;1} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},8;2} &= \text{张成}\left(\ ,\ ,\ \right),
\end{aligned}
\tag{S44}
$$

此处仅列出维数大于 1 的克雷洛夫子空间。克雷洛夫子空间 $K_{CA},1$、$K_{CA},3$、$K_{CA},5$、$K_{CA},7$ 分别通过粒子-空穴对称性与 $K_{CA},2$、$K_{CA},4$、$K_{CA},6$、$K_{CA},8$ 相关联。克雷洛夫子空间 $K_{CA},7$ 和 $K_{CA},8$ 均存在二重简并。我们通过验证投影到克雷洛夫子空间后所有对易子都与恒等算符成正比，证明了它们确实是束缚代数 A 的不可约表示。根据舒尔引理，上述所有 K_{CA} 都是不可约的 [48]。此外，上述克雷洛夫子空间由经典乘积基张成；因此，该模型呈现经典碎片化。

在 ICPF 方法中，列于 (S44) 的所有克雷洛夫子空间进一步分解为更小的 ICPF Krylov 子空间。正如我们在第 II 节的证明中所讨论的，所有更小的 ICPF Krylov 子空间都明确依赖于哈密

顿系数 J_i^ν:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},1} =& \mathrm{span}\left(\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}},\ J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\oplus\mathrm{span}\left(J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}-J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},3} =& \mathrm{span}\left(\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\circ\end{smallmatrix}},\ J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}}+J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}},\ J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}+J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
&\oplus\mathrm{span}\left(J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}}-J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}}\right)\oplus\mathrm{span}\left(J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}-J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},5} =& \mathrm{span}\left(\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}},\ J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}}+J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\circ\end{smallmatrix}},\ J_1^1J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^1J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^2J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^2J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
&\oplus\mathrm{span}\left(J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}}-J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\circ\end{smallmatrix}},\ J_1^2J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^2J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}-J_1^1J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}-J_1^1J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
&\oplus\mathrm{span}\left(J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}-J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\bullet\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\oplus\mathrm{span}\left(J_2^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}}-J_2^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},7;1} =& \mathrm{span}\left(\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\ \circ&\bullet&\circ\end{smallmatrix}},\ J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\bullet\\ \circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}}+J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}}\right)\oplus\mathrm{span}\left(J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\bullet\\ \circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}}-J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\ \bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}}\right)\\
\mathcal{K}_{\mathrm{CA},7;2} =& \mathrm{span}\left(\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\circ\\ \circ&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}},\ J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}+J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)\oplus\mathrm{span}\left(J_1^2\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}-J_1^1\boxed{\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\ \bullet&\circ&\bullet\end{smallmatrix}}\right)
\end{aligned}
\tag{S45}
$$