# 周期性无限对流涡列（TCV）引起的模态-非模态耦合相互作用

Jyothi Kumar Puttam，[1,2] Prasannabalaji Sundaram，[3] Vajjala K. Suman，[1] Ankan Sarkar，[4]Tapan K.Sengupta，[5] Tirupathur N. Venkatesh，[1] 和 Rakesh K. Mathpal[6]1)计算与理论流体动力学，*CSIR-NAL*，印度班加罗尔 - *560017*2)博士生，高性能计算实验室，航空航天工程系，印度理工学院坎普尔分校，北方邦 - *208016*3)*CERFACS*，法国图卢兹4)机械工程系，*IIT (ISM) Dhanbad*，印度贾坎德邦 - *826 004*5)高性能计算实验室，印度理工学院坎普尔分校，北方邦 - *208016*6)非平衡流动模拟实验室，印度理工学院坎普尔分校，北方邦 - *208016*

arXiv:2601.00295v1 [physics.flu-dyn] 1 Jan 2026

（日期：2026年1月5日）

湍流转捩过程中的事件可能遵循模态或非模态路径，也可能是二者的组合。本文报告了一项计算研究，探讨由对流涡列引发的强自由来流激励。对于这种 TCV 激励，我们展示了模态分量与非模态分量之间的强烈相互作用如何导致扰动显著增长。我们提出，这正是对流涡扰动作用于底层剪切层时造成剧烈冲击的机制。

## 一、引言

要理解小尺度对流涡结构与底层剪切层的相互作用，就必须理解不稳定性与感受性之间的细微差别；感受性即动力系统对特定类别输入的响应，正如教科书[1]中所述。这一研究始于雷诺[2], 的经典管流实验；他在实验过程中控制环境参数，从而显著推迟了湍流的起始。由于当前环境扰动水平下不稳定性与感受性相互依存，管流中最高临界参数（雷诺数）的确定至今仍未解决。同样，飞机与自由来流湍流中的对流涡之间的所有相互作用，都取决于相关参数。本文旨在进一步理解湍流相互作用（建模为对流涡列），将其视为平板上流体流动在感受性与不稳定性作用下扰动增长的过程；该平板被建模为机翼表面。

从历史上看，黏性流动中的扰动增长被认为有两种途径：模态途径[3–6] 或非模态途径[7–10]。对模态途径的探索始于求解 Orr-Sommerfeld 方程（OSE）[11,12] ，由此发现了托尔米恩–施利希廷（TS）波[13–15]，并据此推测 TS 波是向湍流转捩的前兆。大多数关于模态途径的实验研究都致力于寻找由壁面激励[16]引发的 TS 波。然而，[17–19]中的实验和理论研究表明，作者通过对边界层施加脉冲激励，在未产生任何 TS 波的情况下实现了转捩。[17] 认为，这种非模态增长是托尔米恩–施利希廷模态的组合；[18,19] 则对此作了修正，指出即使以局部方式对边界层施加单色激励，转捩也严格源于作为时空波前的非模态增长。近年来的大多数非模态研究[7–10] 沿用了[20] 中的分类，后者提出，旁路转捩是完全排除 TS 波的转捩现象。其他研究者也对[5, 21–26]中的旁路转捩进行了深入研究。

在文献中[3,5] ，通常不区分壁面激励和自由来流激励，并假定自由来流激励会产生等效的壁面激励，从而引发TS波。然而，甚至更早期的研究者，如[20,27,28], ，也严格从自由来流激励的角度理解流动转捩，认为自由来流激励会在剪切层内引起非定常压力扰动。这在[20]中也被称为旁路转捩。

近年来，自由来流激励边界层问题已被证明[29] 湍流转捩是一个沿着非模态非线性全局路径发展的感受性问题。

近年来，本文作者从求解 OSE 出发，直至求解完整的非线性可压缩纳维–斯托克斯方程（CNSE），揭示了壁面激励引发湍流的途径，以及扰动增长的模态与非模态分量同时以时空波前（STWF）的形式存在这一现象[18, 30–32]；这不同于以往分别研究空间途径[33] 或时间途径[4]的方法。对于单色壁面激励问题，研究发现非模态分量（STWF）占主导地位，超过 TS波[32,34]。Sengupta 及其合作者还研究了边界层对自由来流对流激励的感受性[29,35,36]。Kendall[37,38] 报告了自由来流对流涡列（TCV）所产生的自由来流激励的实验验证。感受性实验[39], 展示了自由来流中的单个涡旋诱导的扰动增长；随后通过求解完整的非线性不可压缩纳维-斯托克斯方程，在数值上证实了这一现象[35,40] 。自由来流激励所致的涡诱导扰动增长仅呈现非模态途径。通过求解 OSE 和线性化纳维–斯托克斯方程[41], 以及非线性不可压缩纳维-斯托克斯方程[35,36] ，揭示了单个对流涡引起的自由来流激励转捩的物理机制，结果表明非模态增长占主导地位。

尽管 TCV[37,38], 会导致边界层中的扰动显著增长，但迄今尚无更清晰的解释。本文通过求解可压缩纳维–斯托克斯方程，展示了这一现象，并纳入可压缩性效应，揭示模态与非模态扰动的存在及其相互作用，从而导致显著的扰动增长。

本文的结构安排如下。第二节阐述壁面激励问题中模态与非模态扰动增长的区别。第三节介绍单个平移涡情形下观察到的非模态转捩路径。第四节展示周期性无限对流涡列（TCV）对转捩的影响，并着重说明非模态转捩路径的作用。第五节展示由 TCV 激励引起的非定常强迫，并提出一种飞机遭遇剧烈湍流的合理机制。最后，第六节对全文进行总结并给出结论。

## II. 壁面激励下模态与非模态扰动的区分

本文在此描述壁面激励情形下模态与非模态扰动增长的特点。考虑一块受到壁面激励的平板，激励在雷诺数（$Re = U_\infty \delta^* / \nu$）为 1000 的位置以时间谐波形式施加；该雷诺数以局部边界层位移厚度（$\delta^*$）为长度尺度、自由流速度（$U_\infty$）为速度尺度。时间尺度选为 $\delta^*/U_\infty$，以求解如下控制奥尔–索末菲方程:

$$\phi^{iv} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi = iRe[(\alpha U - \omega_0)[\phi'' - \alpha^2\phi] - \alpha U''\phi] \tag{1}$$

其中包含响应的模态与非模态分量，这些分量由一般时空框架中的扰动流函数定义，具体如下:

$$\psi_d(x, y, t) = \int_{Br_\alpha} \int_{Br_{\omega_0}} \phi(y, \alpha, \omega_0) e^{i(\alpha x - \omega_0 t)} d\alpha d\omega_0 \tag{2}$$

其中，符号"Br"表示复波数（$\alpha$）平面和圆频率（$\omega_0$）平面中的布罗姆维奇轮廓，该方法遵循布罗姆维奇轮廓积分法（BCIM）[30,42,43]。对于流动转捩，Sengupta等人[30,31]率先采用了BCIM。

图 1 中，流向扰动速度（$u_d$）由奥尔-索末菲方程计算得到，参数为 $\omega_0$ =0.06 和 $Re = 1000$；左侧各图显示了所标示时刻[18]的结果。右侧各图则显示了相同结果的傅里叶变换。空间局域的简谐激励器放置在基于局部位移厚度计算的雷诺数为 1000 的位置。为便于观察，各图中的 $y$ 轴刻度并不相同。在$t = 288$时刻的第一幅图中，可以看到一个明显的主峰；而在较晚时刻（$t = 1024$ 和 1472），则可以看到第二个隆起逐渐形成。虽然这两个峰都随时间不断增长，但右侧的第二个隆起对应于领先的 STWF，它在向下游传播时占据主导地位。第一个峰始终局域在激励器附近，已被确定为 TS波，即具有 $\alpha_{TS} = 0.1840$ 的模态分量。STWF 是非模态分量（$\alpha_{STWF} = 0.2608$），首次见于[32]，用于解释空间稳定模态分量的海啸式增长。此外，激励器紧邻区域的局部解可通过应用陶伯定理与阿贝尔定理得到，具体说明见[30,42]。目前已充分证实，对于二维（2D）和三维

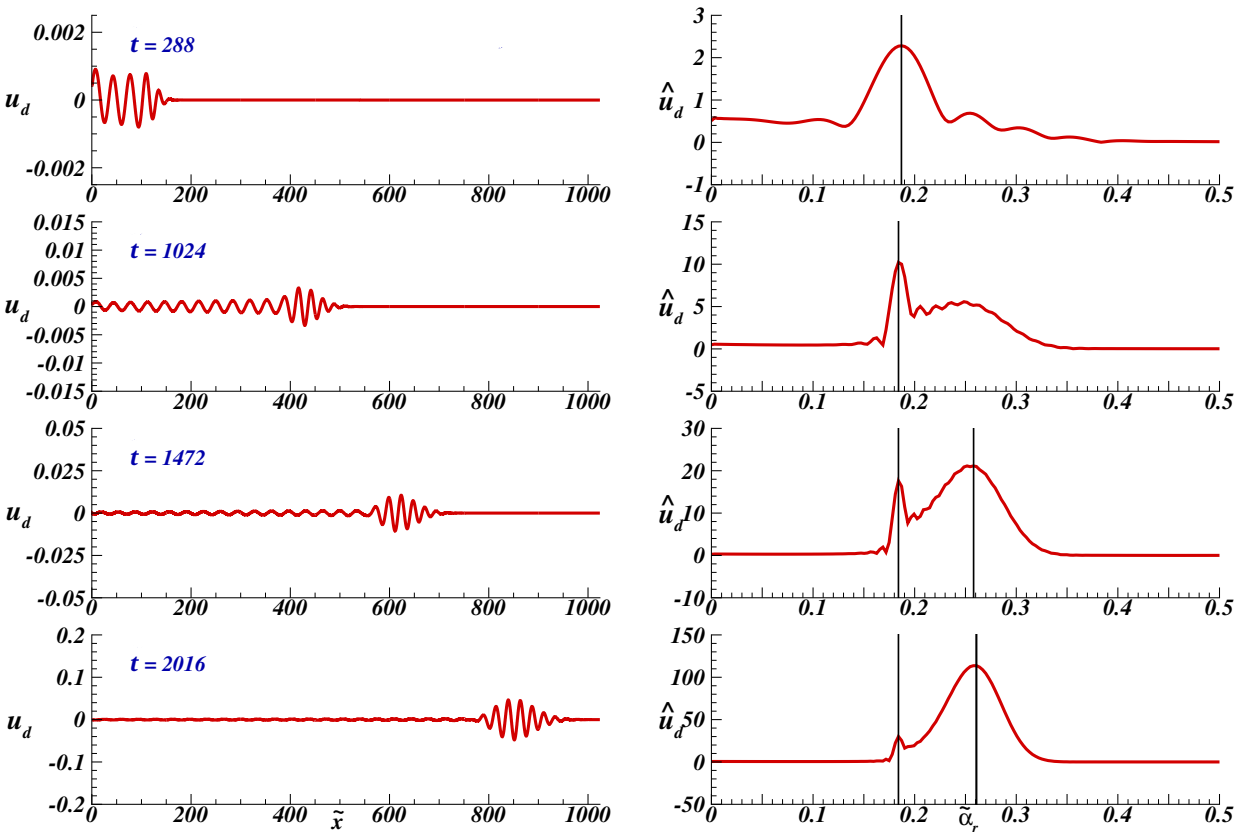



图 1. 单频壁面激励作用下，在图示时刻和高度 $y = 0.2781\delta^*$ 处的流向扰动速度； $Re = 1000$ 和 $\omega_0 = 0.06$ 如左栏所示。相应的频谱显示在右栏。TS波（$\alpha_{TS} = 0.1840$）和 STWF（$\alpha_{STWF} = 0.2608$）的中心波数以线条标示。所示时间为无量纲时间。

（3D）流动，壁面激励引发湍流转捩的主要前兆是 STWF，相关研究分别见[34,44]，。在解释谐波壁面激励下的模态增长和非模态增长后，还需注意，对于这种激励，实验观察到只有非模态增长占主导；这一结果可分别通过奥尔-索末菲方程的解得到，如[17,19]，所示。

## III. 单个平移涡旋引起的自由来流激励的转捩非模态途径

为从物理角度解释非模态增长，图2和图3展示了一个典型的涡旋诱导扰动增长问题。此处，一个单独的对流逆时针

涡旋（强度为 $\Gamma$）位于自由来流中，会产生不含模态分量的响应场，这一点已得到实验[39] 和理论[29,35,36]研究的证实。对于对流速度较低的情况（$c$），自由来流中的这类对流涡会通过冲刷其前方的边界层诱发扰动增长；而对于对流速度较高的涡旋，则会在速度剖面中形成拐点 $c_$。后一种情况会根据瑞利定理[1,3]发生时间增长。单个对流涡诱发边界层增长具有以下特点：(i) 响应包含两个部分，即局部场（恰好位于自由来流对流涡的正下方）和 STWF[30]；(ii) 响应中缺少模态分量，因此研究人员将其称为旁路转捩；(iii) 对于顺时针自由来流涡，其上游存在较弱的相互作用。Sengupta等人[29]展示了壁面激励所致扰动增长中的模态分量（TS波）与非模态分量（STWF）之间更清晰的区别。

针对自由来流涡旋强度为 $\Gamma = 0.1$、以 $c = 0.3U_\infty$ 的速度对流且以恒定高度 $H = 2L$ 对流的情况，在计算域（$-0.5L \leq x \leq 120L$，$0 \leq y \leq 1.5L$）中进行了全局线性与非线性分析，其中 L 根据$Re_L = U_\infty L/\nu = 10^5$定义。图 2 左侧图框显示线性化纳维–斯托克斯方程的结果，右侧则显示完整非线性纳维–斯托克斯方程的解。线性分析显示，STWF[29], 会随时间无限增长，因此进行完整的非线性分析至关重要。

图 3 绘出了单个自由来流对流涡旋强度为 $\Gamma = 0.1$、对流速度为 $c = 0.3U_\infty$、高度为 $H = 2L$ 时，线性（左）与非线性（右）不可压缩纳维–斯托克斯方程的 $u_d$ (ˆ$u_d$)频谱随无量纲 $\alpha$ 的变化。横坐标上的波数以其最大可分辨值（$\alpha_{max}$）归一化。因此，与 Sengupta等人[29], 所示的频谱结果相比，非线性分析在较高波数处呈现宽带响应，而线性情形则表现出局部谱峰。

## IV. 自由来流中周期性对流涡列的影响

单个涡旋会导致中等程度的瞬态增长，如图2所示。TCV会引起一类具有明确周期性的全新扰动增长现象。通过计-

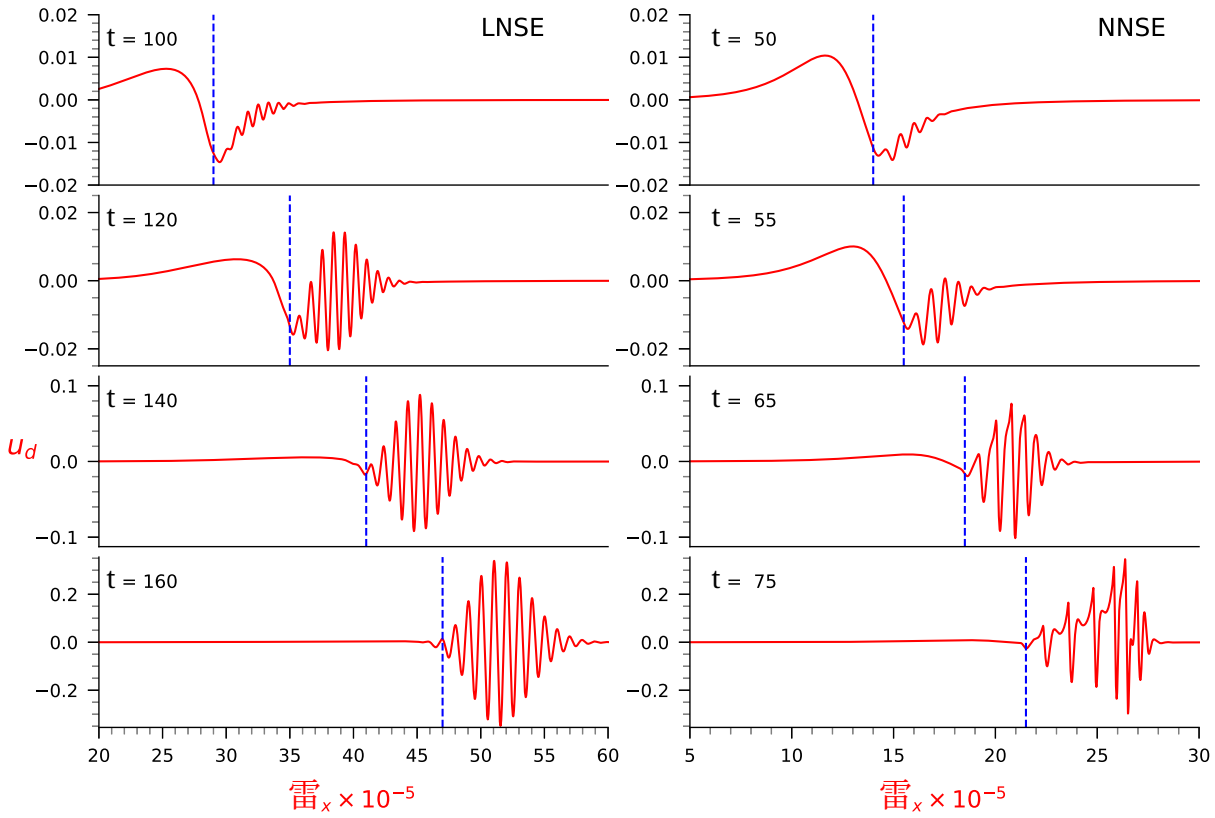



图 2. 由针对单个自由来流对流涡的线性化（左）和非线性（右）不可压缩纳维-斯托克斯方程模拟得到的高度为 $y = 0.0028$ 处的流向扰动分量 $u_d$，参数为 $\Gamma = 0.1$、$c = 0.3$ 和 $H = 2$。竖直虚线表示其瞬时位置。

算半无限平板上受TCV激励的边界层的可压缩纳维–斯托克斯方程，可以展示这一现象。该TCV由等间距排列的顺时针涡组成（强度为每单位长度 $\Gamma = -0.005$ ），涡间距为 $a$，以恒定高度（$H$）和速度（$c = 0.3U_\infty$）对流，其示意图如图4所示。研究表明，对于单个对流涡，逆时针涡会产生显著的扰动增长，而顺时针涡则会在上游引起瞬态增长，但这种增长很快衰减，因此不会产生可感知的扰动增长。因此，为了确立TCV情形的特殊性，我们采用顺时针涡来展示其独特性及扰动增长机制在定性上的差异。选择 $c$ 是基于文献中对这一极强感受性参数的实验鉴定[37,39]。其次，单个逆时针涡只会在其前方产生冲刷作用，从而引起非模态增长。在缺少

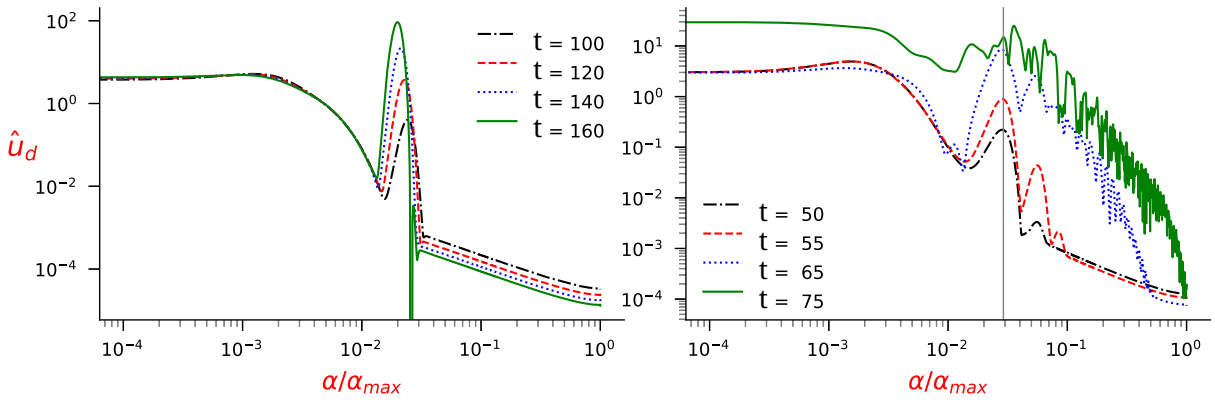



图3. 对于参数为 $\Gamma = 0.1$、 $c = 0.3$ 和 $H = 2$的单个自由来流对流涡，线性（左）和非线性（右）不可压缩纳维–斯托克斯方程模拟所得流向扰动分量在高度 $y = 0.0028$处的傅里叶变换 $u_d$ 。波数以可解析最大波数上限（$\alpha_{max}$）进行归一化。

为避免无限 TCV 中的任何偏向，我们特意改为考虑一个顺时针涡旋。在 Kendall[37], 中，有报道称，与之相当的 TCV 类实验具有较强的感受性，其最大感受性出现在对流速度为 $0.25 \leq c/U_\infty \leq 0.35$的范围内。然而，在实验装置[37], 中，对流涡可沿壁面法向自由移动，且异号涡旋之间还可能相互作用，因此未能展现 TCV 情形的真正潜力。为展示此类 TCV 相遇的物理机制，我们针对图4所示构型进行了模拟，建立了一项核实验，并严格控制各项参数（$\Gamma, c, H$）。实验中观察到 TCV 的最大感受性；在参数为（$c = 0.3U_\infty$）的情况下，流向扰动速度达到 $|u_d| \approx 0.004U_\infty$ [37]，模拟采用二维可压缩纳维-斯托克斯方程。

## A. 控制方程与数值方法

无限周期性对流涡旋列所产生的感受性可能非常强，其强度取决于对流速度，正如[37]所示。结果是，在局部区域，流动的马赫数可能超过临界值，此时流动具有可压缩性。因此，采用非定常二维可压缩纳维-斯托克斯方程进行直接模拟。二维可压缩纳维-斯托克斯方程的无量纲形式如下：

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{E}_c}{\partial x}+\frac{\partial \hat{F}_c}{\partial y}=\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \hat{F}_v}{\partial y} \tag{3}$$

其中， $Q$ 为守恒变量向量ˆ $Q=[\rho;\ \ \rho u;\ \ \rho v;\ \ \rho e_t]^T$；ˆ $E_c$ 和ˆ $F_c$ 为对流通量ˆ $E_c=[\rho u;\ \ \rho u^2+p;\ \ \rho uv;\ \ (\rho e_t+p)\ u]^T$，ˆ $F_c=[\rho v;\ \ \rho uv;\ \ \rho v^2+p;\ \ (\rho e_t+p)\ v]^T$；ˆ $E_v$，ˆ $F_v$为黏性通量ˆ $E_v=[0;\ \ \tau_{xx};\ \ \tau_{xy};\ \ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}-q_x]^T$，ˆ $F_v=[0;\ \ \tau_{yx};\ \ \tau_{yy};\ \ u\tau_{yx}+v\tau_{yy}-q_y]^T$。$q_i$ 表示热通量。

其中， $\tau_{ij}$ 为包含雷诺数（Re）的无量纲应力张量项，表示为：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{\mu}{Re}\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{4}$$

$$\tau_{xx}=\frac{1}{Re}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right) \tag{5}$$

$$\tau_{yy}=\frac{1}{Re}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right) \tag{6}$$

采用斯托克斯假设 $\left(\lambda=-\frac{2}{3}\mu\right)$来计算应力项。

利用完全气体状态方程 $p=\rho R_{nd}T$封闭方程组。可压缩纳维–斯托克斯方程中涉及的无量纲参数包括自由来流马赫数 $M_\infty$、前文所述的 $Re_L$ 以及普朗特数 $Pr$。本次模拟采用 $Pr=0.72$的数值。

采用适当的参考尺度进行无量纲化，具体如下：

$$\begin{aligned} &x_{ref,i}=L;\ \ v_{ref,i}=U_\infty;\ \ t_{ref}=\frac{L}{U_\infty};\ \ \rho_{ref}=\rho_\infty;\ \ T_{ref}=T_\infty \\ &p_{ref}=\rho_\infty U_\infty^2;\ \ e_{t_{ref}}=U_\infty^2;\ \ \mu_{ref}=\mu_\infty;\ \ \ \lambda_{ref}=\lambda_\infty \end{aligned} \tag{7}$$

其中，下标 $ref$ 表示参考量。

**B. 边界条件**

为确定如图4示意图所示、在流入边界和顶部边界处掠过平板并对流的无限阵列无旋自由来流涡旋所诱导的扰动，采用了镜像涡系统。由此在流动的无黏部分产生了诱导扰动

速度。有关这些扰动速度分量的详细信息和表达式已在文献中给出，例如[30,45]，并且已使用这些表达式计算流入边界和计算域顶部施加的时变边界条件，以求解可压缩纳维–斯托克斯方程。

## C. 数值方法

在本研究中，采用紧致格式求解可压缩纳维–斯托克斯方程中的对流项，以获得更高的精度。Sharma 等人开发的六阶 NUC6 格式[46], 用于物理平面，并采用非均匀网格间距。精度的一个主要来源在于，NUC6 格式能够直接在物理平面的非均匀网格上运行，从而消除了由于网格变换而产生的额外混叠误差来源。不言而喻，这种处理还减少了非线性对流项计算中的混叠。Sharma 等人[46] 给出的适用于非均匀网格的 NUC6 格式可写为：

$$\begin{aligned} p_{j-1}\,u'_{j-1} + u'_j + p_{j+1}\,u'_{j+1} = s_1\frac{u_j - u_{j-2}}{h_{\mathrm{llj}}} + s_2\frac{u_j - u_{j-1}}{h_{\mathrm{lj}}} \\ + s_3\frac{u_{j+1} - u_j}{h_{\mathrm{rj}}} + s_4\frac{u_{j+2} - u_j}{h_{\mathrm{rrj}}} \end{aligned} \tag{8}$$

其中，$p_{j-1} = W_4\,\alpha_{j-1}$，$s_1 = W_4\,q_1$ +(1-$W_4$) $r_1$，$s_2 = W_4\,q_2$ +(1-$W_4$) $r_2$，$p_{j+1}$ = (1-$W_4$)$\alpha_{j+1}$，$s_3 = W_4\,q_3$ + (1-$W_4$) $r_3$，$s_4 = W_4\,q_4$ + (1-$W_4$) $r_4$，$W_4 = \frac{h_{rj}}{h_{rj}+h_{lj}}$ 和 $h_{llj}$ = ($x_j$ - $x_{j-2}$)$h_{rrj}$ = ($x_{j+2}$ - $x_j$)，$h_{lj}$ =($x_j$ - $x_{j-1}$) $h_{rj}$ = ($x_{j+1}$ - $x_j$)。

系数的取值按如下方式在[46] 中获得，

$\alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \frac{2}{3}$

$q_1 = \frac{1}{6}$　　$q_2 = \frac{11}{9}$　　$q_3 = \frac{1}{3}$　　$q_4 = \frac{1}{18}$

$r_1 = -\frac{1}{18}$　　$r_2 = \frac{1}{63}$　　$r_3 = \frac{11}{9}$　　$r_4 = \frac{1}{6}$

## D. TCV 引起的非模态转捩路径

TCV 问题的扰动涡量等值线如图5、图6和图7所示，分别对应标示的时刻，并分为两部分：(a) 整个计算域，以及 (b) 靠近平板的

区域。在这些图中，零扰动涡量等值线以粗线绘制（彩色图中为洋红色），并进行了标注。同样，正、负扰动涡量区域也分别进行了标注，并对高涡量区域加以阴影表示。在 $t = 0$时，TCV 扰动以脉冲方式施加。对于所示的最早时刻（$t = 45$），如图5(a)所示，区域的大部分范围内仅能观察到极弱的扰动。朝向入口边界，在靠近上边缘的位置，由于 TCV 的作用，可以看到两个较小的正 $\omega_d$ 涡环（不包括邻近入口边界的涡环）。考虑这些涡环可发现，流动呈现出类似三层结构的形态：平板上方为正区域，远离平板处为负区域，而在涡环中再次出现正区域。然而，沿流向远离入口边界后，三层结构转变为四层结构，上边缘附近出现负区域。放大观察平板附近区域时，图5(b)显示，从区域中部一直到出口存在较高的正 $\omega_d$ 区域（带阴影），且该区域深深嵌入边界层内部。

在 $t = 150$，如图 6(a) 所示，TCV 在上边缘留下的印迹沿下游方向推进，伴随着十一道正 $\omega_d$ 涡环，同时负 $\omega_d$ 区域的范围缩小，因而五层结构区域也随之缩小。图 6(b) 显示，较高 $\omega_d$ 的区域（阴影部分）沿流向和壁法向扩展。此时，在 $x = 100$ 附近平板上方可以看到一个小区域，其中正、负 $\omega_d$ 交替呈锯齿状排列（称为锯齿层）；如图 6(c) 所示，流动在此处转捩为湍流。沿壁法向，涡旋扰动被拉伸，形成涡旋喷发，并扩展至 $\omega_d$ 的不同层中。在 $x = 100$ 附近，局部三层结构转变为类似五层结构的形态，其中有两个锯齿层：一个位于壁面上，另一个位于约 $y = 0.5$ 处，且与壁面分离。如图 7(a) 所示，随着壁法向范围在 $t = 175$ 增大，这类涡旋喷发变得更加显著。在 $t = 175$, $t = 150$ 的锯齿状分离层 (i) 向上喷发，直至邻近上边缘的正 $\omega_d$ 涡环；(ii) 以交错互锁的方式向下喷发，直至负 $\omega_d$ 区域的边缘；(iii) 此外，还沿上游和下游方向扩展。

对于此 TCV 案例，频谱中同时存在模态与非模态分量，并且它们会因非线性动力学而相互作用，如图 8 和图 9 所示。图中左列展示了流向和壁法向扰动速度分量随 $x$ 的变化，相应的傅里叶变换显示在右列。

与间距（$a$）相对应，频谱中预计会出现作为 $\alpha_0$ （$= 2\pi/a$）整数倍的模态分量。频谱中的这些模态分量以红色竖线标出。频谱中额外的非模态结构标记为 $N_1$、 $N_2$、.....等。它们的位置和形态由纳维–斯托克斯方程的非线性动力学决定。请注意，底部图框中的纵轴比例经过缩小，这表明扰动场在较晚时刻增长得非常迅速。还可以看到，按图中使用的 $y$ 尺度，谱峰和振幅随时间增大。在$t = 150$处， $u_d$ 的谱振幅在两个高度处相近；而在 $t = 175$处，较低高度处的振幅显著更大。

对于壁法向扰动速度分量 $v_d$，图 9 中观察到一种互补的特性。该速度分量在壁面附近受到强烈抑制，而在 $t = 150$ 和 175 处的自由来流附近则十分显著。在 $t = 150$ 时，与 $2\alpha_0$、 $4\alpha_0$ 和 $6\alpha_0$ 对应的模态峰占主导；而到 $t = 175$ 时，非模态分量占主导，清楚地体现了非线性的影响。

## V. TCV 作用期间的非定常强迫

从图 5 至图 9 可以清楚地看到，速度场和涡量场呈现出明显的非定常行为。因此，预计 TCV 会引起显著的非定常强迫。图 10 展示了所示时刻平板上的壁面摩擦阻力和表面压力。作为参考，图中还给出了层流和平板上充分发展的湍流（时间平均）时典型的摩擦阻力变化。显然，这两个积分量的幅值都随时间增大。此外，最大瞬时壁面摩擦阻力超过了湍流值。还可以看出，这两个气动量共同作用，使平板受到升力和阻力。压力所显示的吸力增大，与图 9 中的 $v_d$ 一致。

由于非定常强迫局限于 TCV 的作用，因此在 TCV 作用下，等效机翼也会产生令人不安的气动力矩，影响飞机的飞行动力学。TCV 还可能对机身及其他气动尾翼周围的流场造成类似影响。

## VI. 总结与结论

总结本文报告的研究时，我们需要清楚地区分模态扰动场和非模态扰动场。本文借助 Orr-Sommerfeld 方程的 BCIM （见图 1 ）对此进行了区分；该图显示了由壁面激励引起转捩时存在模态、非模态和局部解分量。然而，要解释飞机遭遇湍流的情形，重要的是认识到此类影响与来自自由来流的涡旋激励有关。为此，我们研究了两个典型问题：(i) 一个非周期平移涡旋掠过平板（模拟机翼的吸力面），相关研究包括实验研究[39] 和理论研究[1,29,30,35]。此类自由来流激励不会呈现模态分量（对于旁路转捩而言），并且只有逆时针（反气旋）涡旋才能产生轻微至中等程度的瞬态响应场；文献中将其称为 CAT[47–51]，用于诊断和构建推测模型。本文给出了 CAT 式中等强度相互作用的物理解释（见图2）；这种相互作用发生在平移的逆时针涡旋速度范围较窄时（此处选取 $c = 0.3U_\infty$）。图中将求解线性化纳维–斯托克斯方程得到的全局线性机制，与求解完整可压缩纳维–斯托克斯方程得到的解进行比较，以说明后者相较于前者的重要性。图3比较了线性解和非线性解的傅里叶–拉普拉斯变换，表明非线性非模态途径是正确的：线性路径能够给出正确的起始，但在线性化情形下，STWF 的增长没有上限，这在物理上不可行。(ii) 与自由来流中孤立对流涡旋产生的扰动场相比，TCV 问题更具普遍性，能够反映自由来流湍流的影响。因此，对于图4所示的示意情形，当 TCV 在输入频谱中引入模态尺度时，可能发生更强的相互作用。此处，无论 TCV 各组成涡旋的旋向如何，都可能发生相互作用。TCV 引起的涡旋相遇强烈得多。除了非模态分量之外，还可以观察到模态分量；即使涡旋强度低了许多个数量级，它们在频谱中也会表现出剧烈的相互作用。图5至图7展示了典型结果：扰动从极早时刻开始迅速增长，并呈现非模态分量所特有的连续频谱。

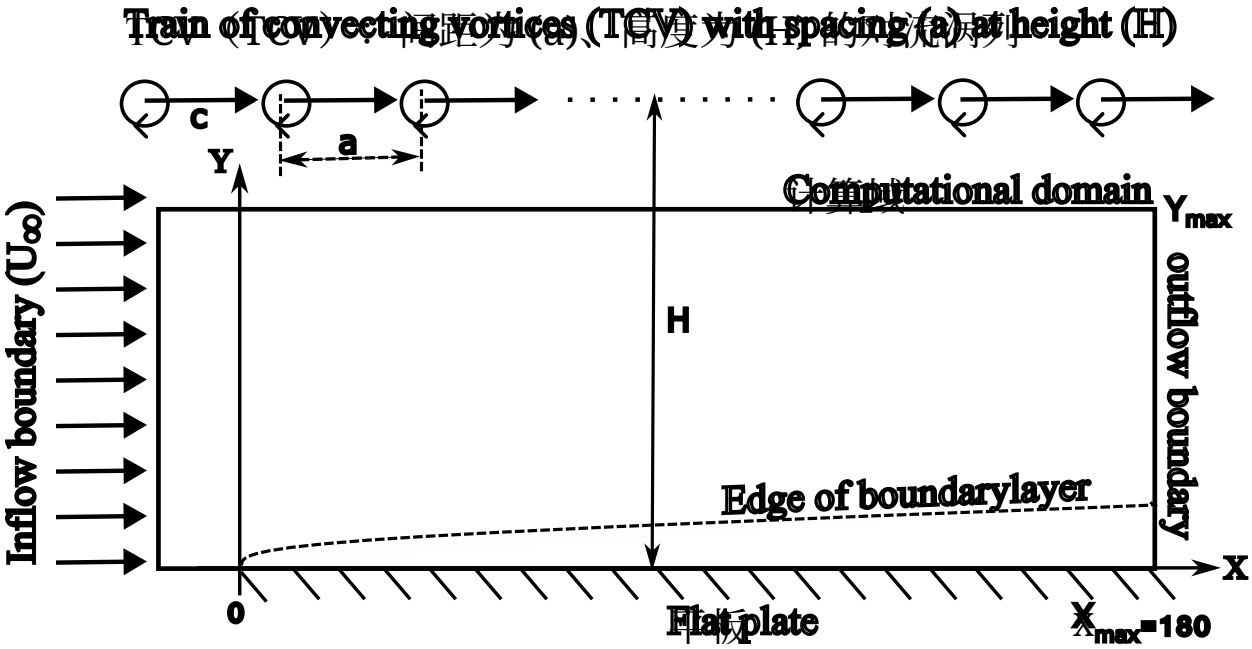


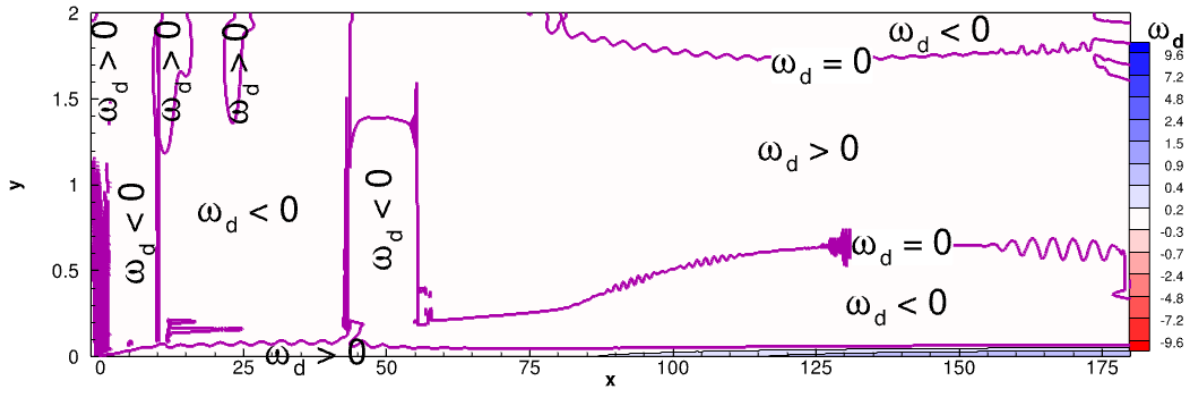

图4. 无限周期性对流涡列引起的自由来流激励示意图。

## VII. 致谢

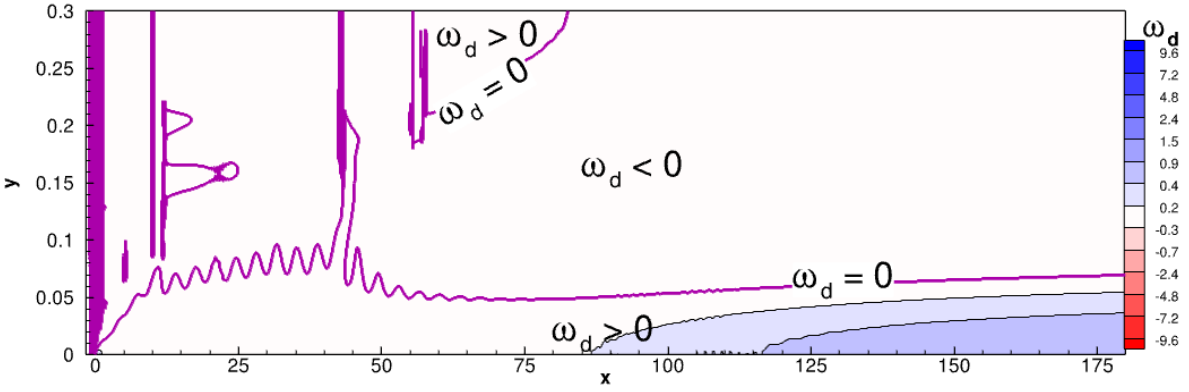
谨此特别感谢 IIT (ISM) Dhanbad 机械工程系研究生 Vipin Sharma 先生早期所作的贡献。

## 参考文献

[1]T. K. Sengupta，《湍流转捩：基于动力系统的感受性研究方法》（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2021 年）。[2]O. Reynolds，“关于决定水流呈直线状还是蜿蜒状运动的条件以及平行通道中阻力定律的实验研究”，《伦敦皇家学会哲学汇刊》174，935–982（1883 年）。[3]P. G. Drazin 和 W. H. Reid，《流体动力学稳定性》（剑桥大学出版社，剑桥，英国，1981 年）。[4]R. Betchov 和 W. O. Criminale，《平行流稳定性》（学术出版社，纽约，美国，1967 年）。



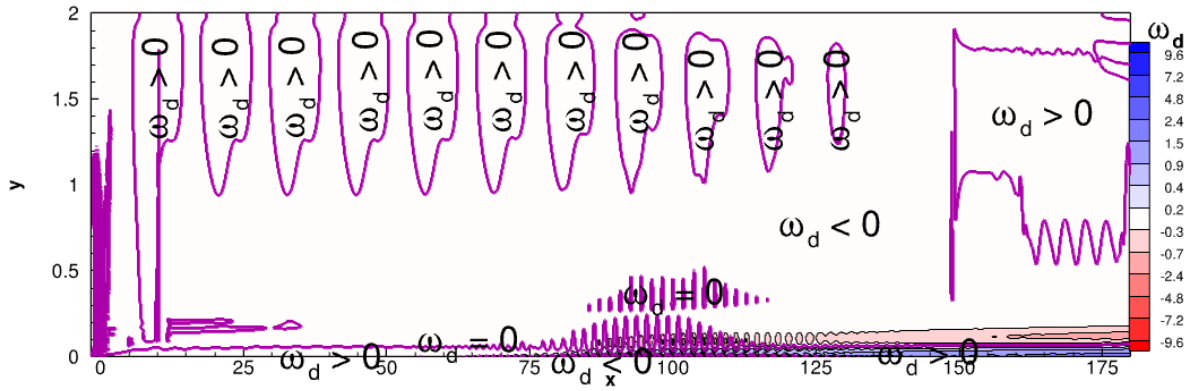

(a)t = 45



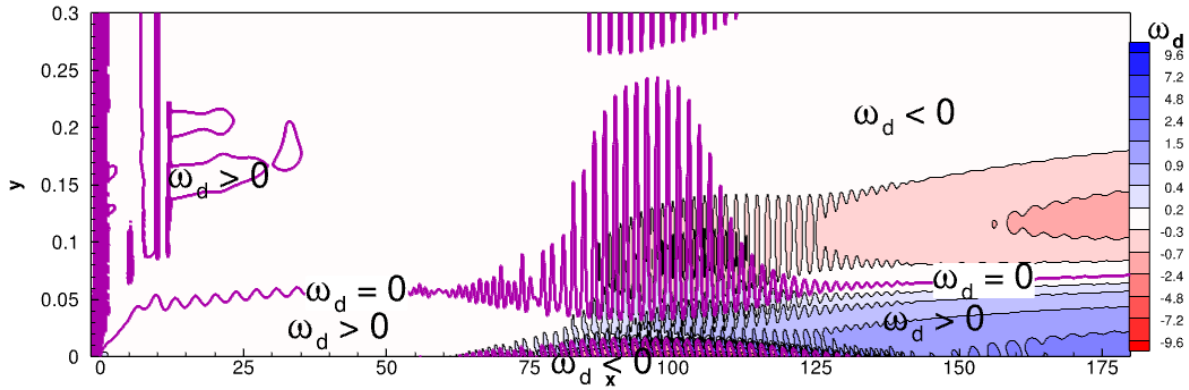

(b)在 t = 45 时更靠近平板

图5. 无限周期性对流涡列情形下扰动涡量 $\omega_d$ 的演化。对流涡的强度为 $\Gamma = -0.005$，无量纲时间为 $t = 45$。

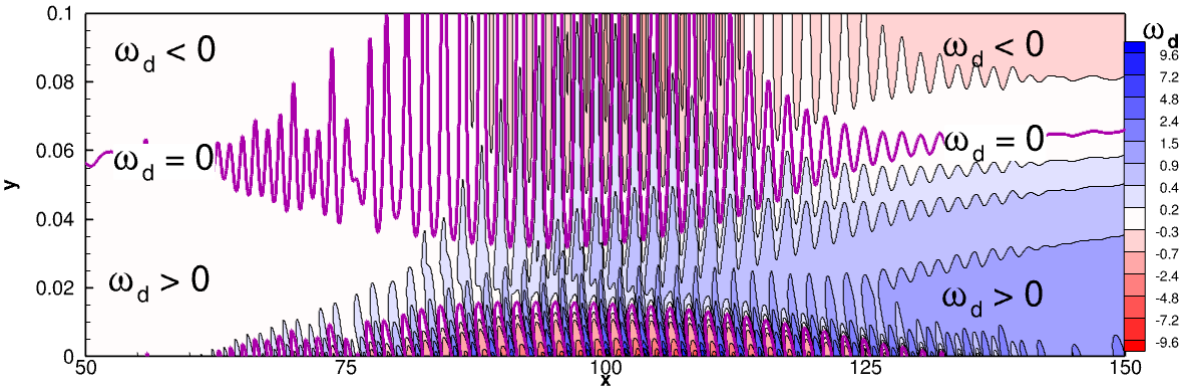
[5]P. J. Schmid 和 D. S. Henningson，《剪切流中的稳定性与转捩》（Springer-Verlag，纽约，美国，2001 年）。[6]S. Chandrasekhar，《流体动力学与磁流体动力学稳定性》（Dover Publications，纽约，美国，1961 年）。[7]J. M. Chomaz，“空间发展流中的全局不稳定性：非正规性与非线性”，《流体力学年度评论》**37**，357–392（2005 年）。[8]R. R. Kerswell，“非线性非模态稳定性理论”，《流体力学年度评论》**50**，319–345（2018 年）。[9]P. J. Schmid，“非模态稳定性理论”，《流体力学年度评论》**39**，129–162（2007 年）。[10]L. N.Trefethen、A. E. Trefethen、S. C. Reddy 和 T. A. Driscoll，“无特征值的流体动力学稳定性”，《科学》**261**，578–584（1993 年）。




(a)在 t=150



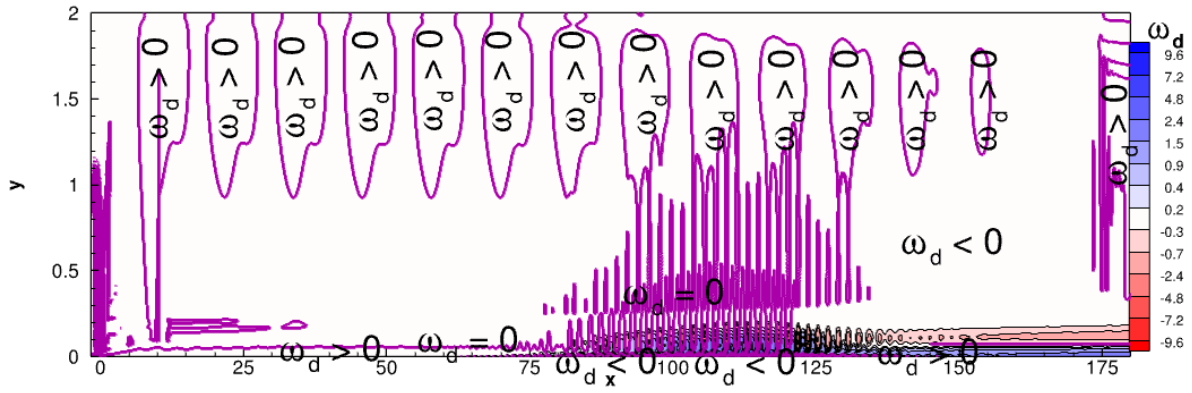

(b)在更靠近平板处，t=150



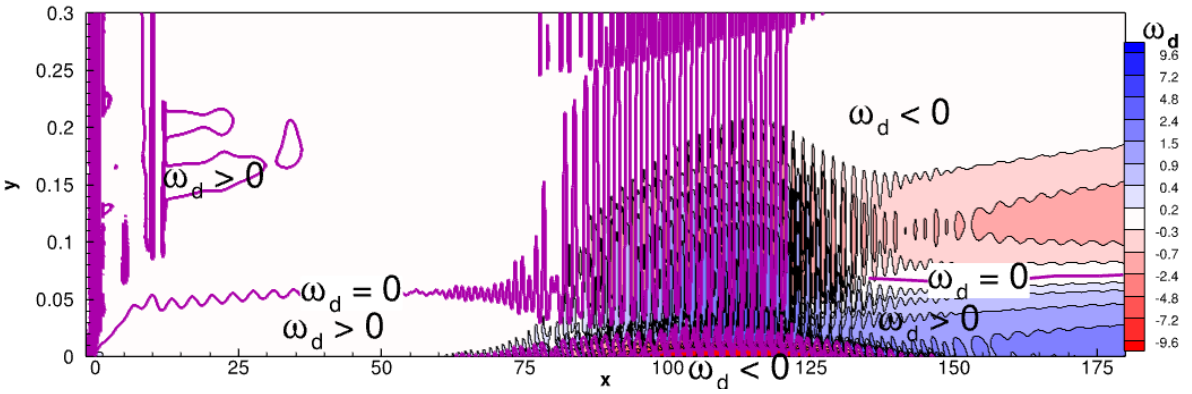

(c)在非常靠近平板处，t=150

图 6. 无限周期性对流涡列情况下扰动涡量 $\omega_d$ 的演变。无量纲时间为 $t = 150$时，对流涡的强度为 $\Gamma = -0.005$ 。

[11]W. M. Orr，《理想液体和黏性液体稳态运动的稳定性或不稳定性。第一部分：理想液体。第二部分：黏性液体》，爱尔兰皇家科学院院刊**27**，69–138（1907年）。




(a)t=175




(b)在 t=175 时更靠近平板

图 7. 无限周期性对流涡列情况下扰动涡量的演化 $\omega_d$。在无量纲时间 $t = 175$ 时，对流涡的强度为 $\Gamma = -0.005$。

[12]A. Sommerfeld, 《对湍流液体运动的流体力学解释的贡献》，载于*Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici*, G. Castelnuovo 编（罗马，1909年）。[13] W. Tollmien, 《湍流的形成。第一篇报告》，哥廷根科学学会数学—物理学部通报 **1929**，21–44（1928年）。[14]H. Schlichting, 《平板流动中湍流的形成》，哥廷根科学学会数学—物理学部通报**42**，181–208（1933年）。[15]R. Jordinson, 《平板边界层。第一部分：Orr–Sommerfeld方程的数值积分》，《流体力学杂志》**43**，801–811（1970年）。[16]G. B. Schubauer 和 H. K. Skramstad, 《层流边界层振荡与层流流动的稳定性》，《航空科学杂志》**14**，69–78（1947年）。

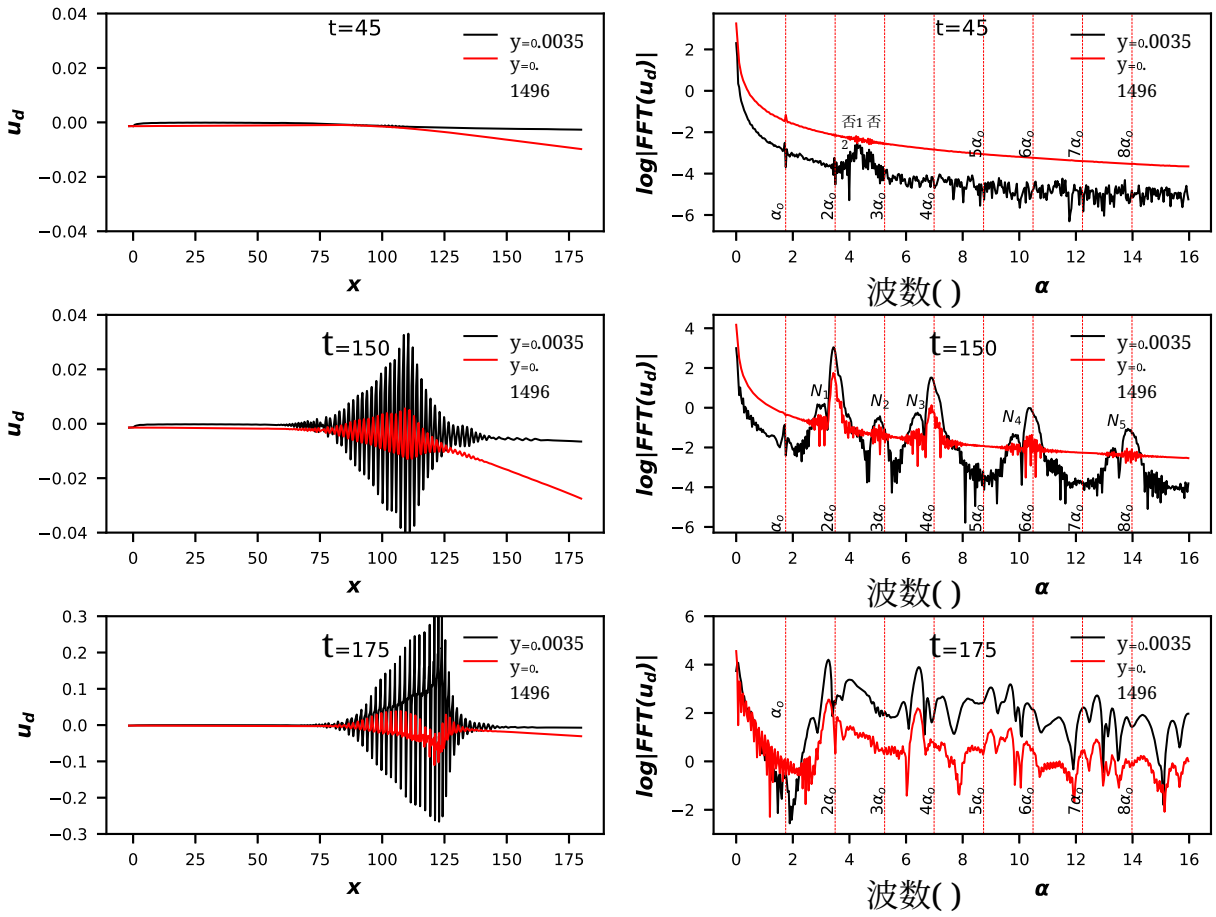



图 8. 强度为 $\Gamma = -0.005$ 的无限涡列对自由来流产生激励时，两个指定高度处的流向扰动分量 $u_d$（左）及其傅里叶变换（右）。模态峰 $\alpha$ 至 $8\alpha$ 由涡列间距决定，非模态峰标记为 $N_j$。

[17]M. Gaster 和 I. Grant，“层流边界层中波包形成与发展的实验研究”，Proc. R. Soc. Lond. A **347**，253–269（1975）。[18]P. Sundaram，流体流动感受性与湍流转捩的高精度模拟，博士学位论文，印度理工学院坎普尔分校，印度坎普尔（2022）。[19]P. Sundaram、T. K. Sengupta 和 S. Sengupta，“零压梯度边界层流动转捩是否需要托尔米恩–施利希廷波？”，《流体物理》**31**，031701（2019）。[20]M. Nishioka 和 M. V. Morkovin，“非定常压力梯度下的边界层感受性：实验与综述”，《流体力学杂志》**171**，219–261（1986）。

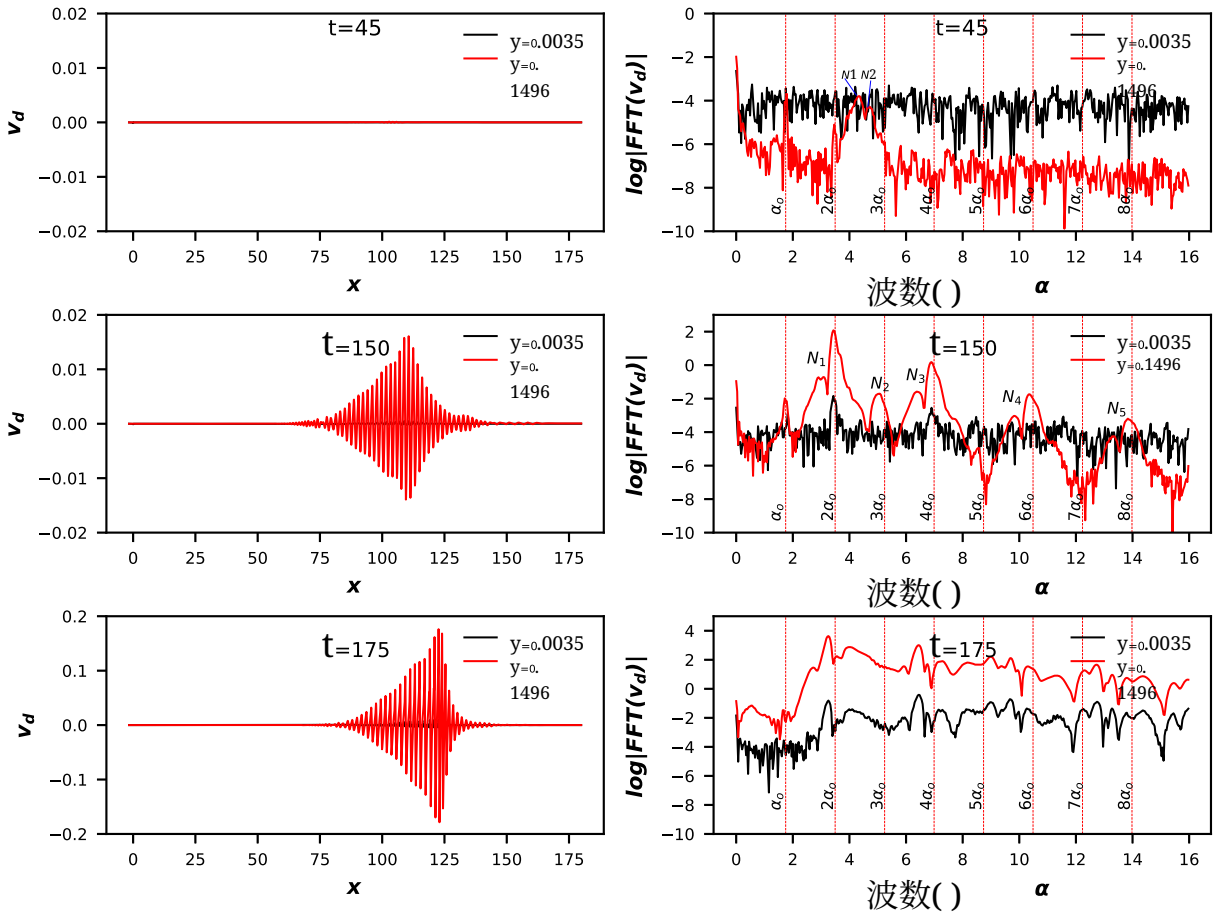



图 9. 无限涡列（强度为 $\Gamma = -0.005$）对自由来流的激励，在两个指定高度处的壁法向扰动分量 $v_d$（左）及其傅里叶变换（右）。模态峰 $\alpha$ 至 $8\alpha$ 由涡列间距决定，非模态峰标记为 $N_j$。

[21]L. Brandt、P. Schlatter 和 D. S. Henningson，“自由来流湍流作用下的边界层转捩”，Journal of Fluid Mechanics**517**，167–198（2004）。[22]P. Durbin 和 X. Wu，“涡旋扰动作用下的转捩”，《流体力学年度评论》**39**，107–128（2007）。[23]R. G. Jacobs 和 P. A. Durbin，“旁路转捩的模拟”，Journal of Fluid Mechanics**428**，185–212（2001）。[24]W. S. Saric、H. L. Reed 和 E. J. Kerschen，“边界层对自由来流扰动的感受性”，《流体力学年度评论》**34**，291–319（2002）。

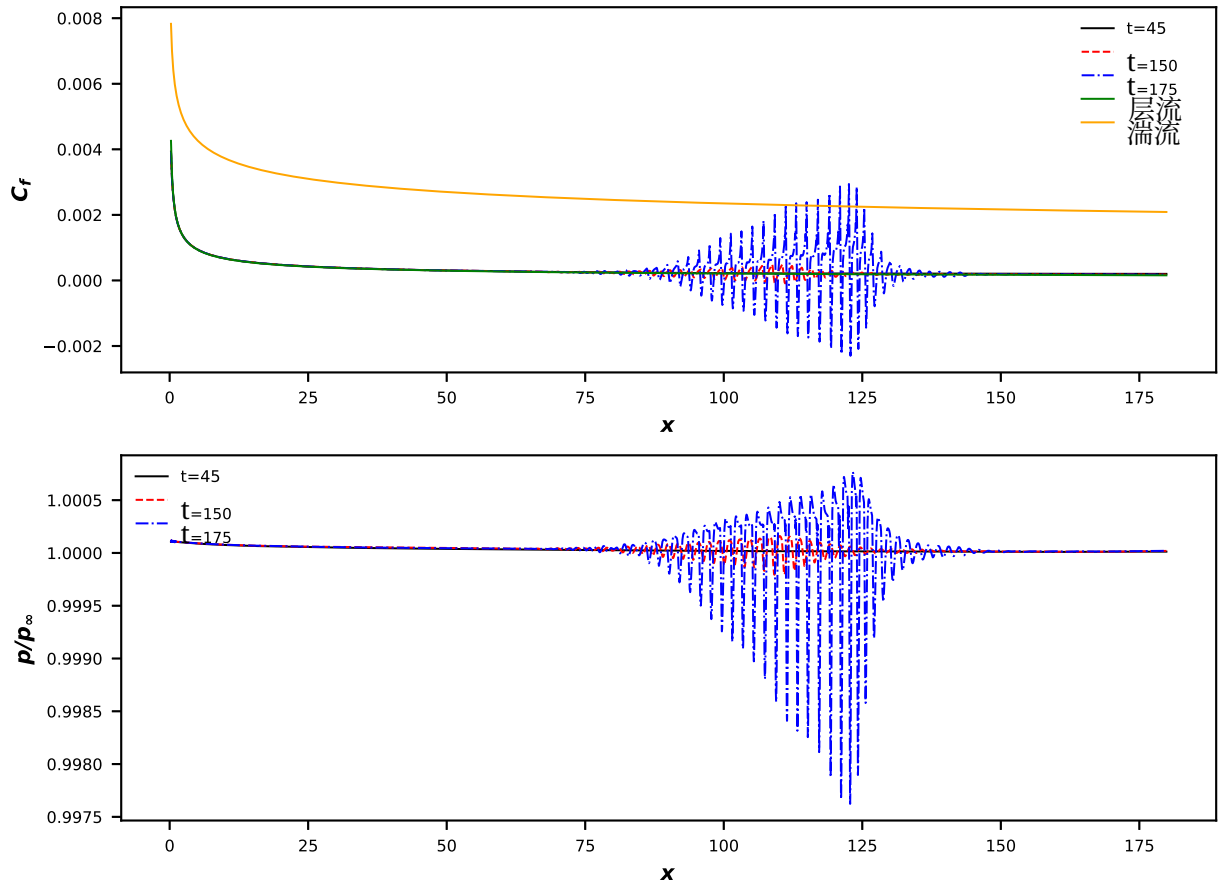



图 10. 无限涡列（强度为 $\Gamma = -0.005$，顺时针旋转）产生的自由来流激励下，表面摩擦阻力系数 $C_f$ 和压力的演变。

[25]T. A. Zaki，“从条带到斑点，进而发展为湍流：探索边界层转捩的动力学”，Flow, Turbulence and Combustion 91，451–473（2013）。[26]T. A. Zaki and P. A. Durbin，“模态相互作用与转捩的旁路途径”，Journal of Fluid Mechanics 531，85–111（2005）。[27]G. I. Taylor，“湍流统计理论 V. 湍流对边界层的影响”，Proc. R. Soc. Lond. A 156，307（1936）。[28]A. S. Monin and A. M. Yaglom，统计流体力学：湍流力学（MIT出版社，剑桥，马萨诸塞州，1971）。[29]A. Sengupta, P. Sundaram, and T. K. Sengupta，“二维湍流转捩的非模态非线性途径”，Phys. Rev. Research 2，012033(R)（2020）。[30] T. K. Sengupta，流动不稳定性与湍流转捩 （CRC出版社，博卡拉顿，美国，2012）。

[31]T. K. Sengupta, M. Ballav, and S. Nijhawan，“通过谐波激励产生托尔米恩–施利希廷波”，《流体物理》**6**，1213–1222（1994）。[32]T. K. Sengupta, A. K. Rao, and K. Venkatasubbaiah，“空间稳定边界层中的时空增长波前”，《物理评论快报》**96**，224504（2006）。[33]L. M. Mack，“边界层线性稳定性理论”，技术报告（层流稳定性与转捩专题课程，1984）。[34]T. K. Sengupta and S. Bhaumik，“流体流动从感受性阶段开始发生湍流”，《物理评论快报》**107**，154501（2011）。[35]A. Sengupta, V. K. Suman, and T. K. Sengupta，“零压梯度边界层中涡旋诱导失稳的直接数值模拟”，《物理评论E》**100**，033118（2019）。[36]A. Sengupta，低压涡轮中扰动环境的数值研究，博士论文，剑桥大学，剑桥，英国（2020）。[37]J. M. Kendall，“层流边界层对行进压力场的感受性实验研究”，载于第*19*届美国航空航天学会流体动力学、等离子体动力学与激光会议，檀香山，夏威夷州，美国（1987）。[38]J. M. Kendall，“边界层对自由来流湍流的感受性”，载于第*21*届流体动力学、等离子体动力学与激光会议，西雅图，华盛顿州，美国（1990）。[39]T. T. Lim, T. K. Sengupta, and M. Chattopadhyay，“平板边界层中涡旋诱导亚临界失稳的可视化研究”，《实验流体力学》**37**，47–55（2004）。[40]T. K. Sengupta, S. De, and S. Sarkar，“不可压缩壁面剪切层中的涡旋诱导失稳”，《流体力学杂志》**493**，277–286（2003）。[41]T. K. Sengupta, M. Chattopadhyay, Z. Y. Wang, and K. S. Yeo，“湍流转捩的旁路机制”，《流体与结构》**16**，15–29（2002）。[42]B. van der Pol and H. Bremmer，基于双边拉普拉斯积分的运算微积分（剑桥大学出版社，剑桥，英国，1959）。[43]A. Papoulis，傅里叶积分及其应用 （麦格劳-希尔，纽约，美国，1962）。[44]S. Bhaumik and T. K. Sengupta，“湍流转捩的前兆：时空波前”，《物理评论E》**89**，043018（2014）。[45]J. M. Robertson，理论与应用流体动力学，普伦蒂斯-霍尔理论与应用力学国际丛书（普伦蒂斯霍尔，1965）。

[46]N. Sharma、A. Sengupta、M. Rajpoot、R. J. Samuel 和 T. K. Sengupta，“适用于非均匀笛卡尔网格的混合六阶空间离散格式”，《计算机与流体》**157**，208–231（2017）。[47]T. K. Sengupta、T. T. Lim 和 M. Chattopadhyay，“涡诱导不稳定性：晴空湍流遭遇的一种可能机制”，载于第九届 *ACFM* 会议论文集（2002）。[48]J. A. Dutton 和 H. A. Panofsky，“晴空湍流：一个谜团或将揭开”，《科学》**167**，937–944（1970）。[49]T. L. Clark、W. D. Hall、R. M. Kerr、D. Middleton、L. Radke、F. M. Ralph、P. J. Neiman 和 D. Levinson，“科罗拉多州 12 月 9 日下坡风暴期间导致飞机受损的晴空湍流的成因：数值模拟及与观测结果的比较”，《大气科学杂志》**57**，1105–1131（2000）。[50]R. C. Wingrove 和 R. E. J. Bach，“航空公司飞行记录中的严重湍流与机动飞行”，《航空器杂志》**31**，753–760（1994）。[51]K. A. Browning、C. D. Watkins、J. R. Starr 和 A. McPherson，“利用高功率飞机和仪器化飞机对对流层顶晴空湍流进行同步测量”，《自然》**228**，1065–1067（1970）。