无名手稿 No.（将由编辑插入）

源于单纯形网格上增强二次历史插值的结构化矩矩阵的谱 Schur 分析

Allal Guessab · Federico Nudo

arXiv:2601.00301v1 [math.NA] 1 Jan 2026

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要 本文研究了源于单纯形网格上加权二次历史插值、具有典范分块形式的参数依赖结构化矩矩阵。对于单纯形上的严格正密度，我们构造了相容的面密度，并将二次多项式空间正交分解为面与内部成分，从而诱导出自然的面-内部块结构。我们确定了一个约化舒尔补，它能够完全刻画增广与适定性，并给出精确的谱稳定性结果。我们证明，该量等于一个低维对称正定算子的最小特征值的平方根。基于矩阵的这一观点为局部矩系统的可逆性提供了简明的谱判据，并促成了具有更佳条件性的面与内部基的谱优选。利用所得自由度以及密度和缩放参数作为设计变量，我们构造了一个小型特征值优化问题，旨在提高稳定性并降低全局重构系统的条件数。在均匀和拟均匀单纯形网格上的三维实验展示了增强二次重构所预测的稳定性、条件性与收敛行为。

关键词 结构化矩矩阵 · 舒尔补 · 谱稳定性 · 条件性 ·正交分解

数学主题分类（2020） 65F08, 65F10, 15A18,15A42

1 引言

分块结构的对称正定系统及其约化算子，是应用数值线性代数中反复出现的主题 [33,4,23]。在许多离散化方法中，代数结构由少量基本局部构件生成，例如在网格上组装的质量矩阵、刚度矩阵或矩矩阵。理解这些块如何相互作用、如何进行因子分解，以及它们的谱如何影响稳定性与条件性

Allal Guessab Avenue Al Walae，73000，达赫拉，摩洛哥 电子邮件：guessaballal7@gmail.com Federico Nudo（通讯作者）数学与计算机科学系，卡拉布里亚大学，伦德（CS），意大利 电子邮件：federico.nudo@unical.it

一直是数值线性代数的核心课题，并直接关系到大规模求解器和预条件器的稳健性与效率 [30,10,19,12,24,27,13,7,32]。针对大规模结构化问题的相关基于投影的方法和 Krylov 子空间技术，文献中已有广泛研究；例如参见 [3]。一个尤为相关的情形出现在基于积分数据的离散化方法中：此时，未知函数并非由点值重构，而是由区域子集上的平均值或加权积分重构。这类公式自然会在单元层面产生一族低维结构化矩阵，并见于多种应用，包括逆问题与成像、医学与地震层析成像，以及输运与流动模型 [20,25,28]。本文针对一族结构化矩矩阵开展谱 Schur 分析。这些矩阵具有典型的面-内部组织。我们证明，增广、唯一可解性与稳定性可通过一个适中规模的约化对称正定算子的可逆性及谱性质，以与维数无关的方式加以刻画。特别是，某个泛函稳定性量具有精确的矩阵解释：它等于经过适当归一化的约化算子的最小特征值的平方根。这一谱视角提供了具体且可计算的稳健性度量，并将局部空间、权重和缩放的选择转化为一个低维特征值设计问题。尽管积分插值是本研究构造的出发点，但分析基于矩阵，且适用范围更广，可用于由单纯形网格上的积分（或矩）约束所诱导的分块结构半正定矩系统。从这个意义上说，研究结果与数值线性代数中的 Schur 补技术以及谱设计/预处理原理直接相关。本分析的动机应用是单纯形网格上的局部加权增广二次积分插值。给定有限个由积分定义的线性泛函，积分插值的目标是构造一个近似函数，使其相关平均值能够重现给定数据。过去几十年来，这一原理推动了多方面的发展，涵盖从保形样条方案到全局多项式构造等领域 [14,15,31,6,5,8]。在局部公式中，区域被划分为若干单元，并在每个单纯形上根据给定积分数据计算局部积分插值函数。随后通过组装这些局部贡献得到全局近似 [17]。这一构造在单元层面形成小型结构化线性系统，其系数体现了密度、多项式重构空间与施加的矩约束之间的相互作用。从数值线性代数的角度看，这些系统的稳健性取决于通过 Schur 型约化得到的约化算子的谱性质。文献 [18] 研究了一种相关的、基于不同重构泛函的四面体网格三维加权二次积分插值方案。在大多数局部积分插值方案中，重构空间选为有限维多项式空间，因此相关矩矩阵可以用闭式表达。纯线性重构由于试探函数阶数较低，往往精度有限；而二次增广在提高近似能力的同时，仍保留了适合详细谱分析的代数结构。近似能力、条件数控制与对一般单纯形网格的兼容性之间的这种平衡，使二次积分插值特别适用于涉及积分数据或基于矩的数据的现代重建任务。尽管相应的矩矩阵看似简单，其内部组织却具有高度结构性；要推导稳健且与维数无关的稳定性结果，理解这种结构至关重要。

我们的贡献可总结如下。

– **典范面/内部域分解与内在块结构**。对于单纯形上的任意严格正密度，我们构造相容的面密度，并将二次增强空间正交分解为面部分和内部部分。这使得

相关矩矩阵的底层分块组织一目了然，并分离出控制增广的约化算子。

– 通过 Schur 约化得到与维数无关的唯一可解性判据。我们建立了两种等价的线性代数刻画，用于判定由指定矩得到的富化二次重构是否具有唯一可解性。在约化公式中，当且仅当一个仿射层矩阵以及一个与面/内部耦合相关的 Schur 型算子均为非奇异时，问题才具有唯一可解性。等价地，当且仅当仿射矩矩阵和二次矩矩阵均为非奇异时，问题才具有唯一可解性。由此得到的唯一可解性精确刻画仅取决于局部矩信息，与空间维数无关。

– 稳定性的精确谱刻画。我们推导了富化重构的下确界–上确界常数的算子公式，并证明经过 Schur 约化和归一化后，该常数恰好等于一个约化对称正定算子的最小特征值的平方根。这为评估密度和局部选择的影响提供了清晰的谱稳定性度量。

– 谱性质更优的基与条件数控制。基于约化谱描述，我们构造了显式的面与内部二次基函数族，以最大限度地减少块间耦合并改善条件性。由此得到的设计原则完全是有限维的（Gram结构、瑞利商和标准不等式），且与数值线性代数的视角自然契合。

– 仿射不变鲁棒性与谱优化。通过在仿射单元映射下利用重心坐标传递密度和测试函数，我们证明了相关约化算子在仿射等价单纯形之间的不变性，从而解释了其在均匀网格和准均匀网格上的稳定性。最后，我们针对密度和缩放参数构建了一个小规模特征值优化问题，可将其理解为对矩系统进行自动谱调优（或预处理）。

本文组织如下。第 2 节介绍加权二次历史插值问题，并推导相关矩矩阵的结构化分块形式。在此框架下，我们建立两个等价的唯一可解性判据，确定一个能够刻画唯一可解性和稳定性的 Schur 型约化算子，并证明所得策略对单元的仿射变换具有鲁棒性，从而在形状正则网格上得到一致有界性。第 3 节将二次多项式空间正交分解为面与内部成分，由此得出二次基函数的最优选择，并阐明其在矩矩阵结构中的谱作用。第 4 节给出该框架在狄利克雷权和仿射权下的显式实现。第 5 节介绍矩泛函及其底层密度的参数化缩放，并构建旨在改善稳定性或降低重构系统条件数的谱优化问题。最后，第 6 节给出三维数值实验，以验证理论预测。这些实验表明，全局二次直方重构算子的L^2-误差按预期速率 $O\left(h^3\right)$衰减，与标准二次有限元 [11], 的结果一致；实验还展示了所提格式预测的谱行为、稳定性和条件性。

2 加权二次历史插值的一般策略

设 $S_d \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非退化的 d 维单纯形，其顶点为 $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_d$，并令 $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$ 表示它的重心 重心坐标。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathbb{P}_k\left(S_d\right) = \operatorname{span}\left\{\lambda_0^{i_0} \cdots \lambda_d^{i_d} : \; i_0 + \cdots + i_d \leq k\right\},$$

S_d 上所有总次数不超过 k 的多项式所构成的空间。众所周知,

$$\dim\left(\mathbb{P}_k\left(S_d\right)\right)=\binom{d+k}{k}.$$

重心坐标 $\lambda_i\in\mathbb{P}_1(S_d)$、 $i=0$、.....、 d，满足

$$\sum_{i=0}^{d}\lambda_i=1,\quad \lambda_i\left(\boldsymbol{v}_j\right)=\delta_{ij},$$

其中， δ_{ij} 表示克罗内克δ。这些函数满足以下经典单位矩阵恒等式。

引理1 设 α_0、.....、 α_d 为正实数，则

$$\frac{1}{|S_d|}\int_{S_d}\prod_{i=0}^{d}\lambda_i^{\alpha_i}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\frac{d!\prod_{i=0}^{d}\Gamma(\alpha_i+1)}{\Gamma\left(d+1+\sum_{i=0}^{d}\alpha_i\right)},\tag{1}$$

其中， $|S_d|$ 表示 S_d 的体积， $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数 *[1]*。

对于每个 $j\in\{0,\ldots,d\}$，我们将与顶点 $\boldsymbol{v}_j$相对的 S_d的面记为 F_j，并将其重心坐标记为 $\{\mu_{j,i}\}_{i=0,\ i\neq j}^{d}$。

全文中，我们假设 $\Omega\in L^1(S_d)$ 是一种概率密度，在 S_d 的内部 几乎处处严格为正。对于每个面 F_j，我们将诱导面密度 ω_j 定义为 Ω 在 F_j上的归一化条件迹。更确切地说，对于任意 $\phi\in C^0(F_j)$，我们定义

$$\int_{F_j}\phi(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\displaystyle\int_{\{\boldsymbol{\sigma}\in S_d\,:\,\lambda_j(\boldsymbol{\sigma})<\varepsilon\}}\phi\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\Omega(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma}}{\displaystyle\int_{\{\boldsymbol{\sigma}\in S_d\,:\,\lambda_j(\boldsymbol{\sigma})<\varepsilon\}}\Omega(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma}}.$$

我们假设该极限存在，并定义一种概率密度 $\omega_j\in L^1(F_j)$，它在 F_j 上几乎处处为正。我们考虑加权内积

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{\Omega}&=\int_{S_d}f\left(\boldsymbol{\sigma}\right)g\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\Omega\left(\boldsymbol{\sigma}\right)d\boldsymbol{\sigma},\quad f,g\in L^2_{\Omega}\left(S_d\right),\\ \langle f,g\rangle_{\omega_j}&=\int_{F_j}f\left(\boldsymbol{x}\right)g\left(\boldsymbol{x}\right)\omega_j\left(\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x},\quad f,g\in L^2_{\omega_j}\left(F_j\right).\end{aligned}$$

在介绍完整的唯一可解性框架之前，我们先给出一些具体示例 es ill说明诱导面密度 ω_j 的含义。

例 *1* 我们考虑以下权函数:

– **常数权重**。设

$$\Omega(\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{|S_d|},\quad \boldsymbol{\sigma}\in S_d,$$

是单纯形 $S_d\subset\mathbb{R}^d$ 上的均匀概率密度。然后，根据定义，每个面 F_j 上的诱导面密度都是均匀的，即

$$\omega_j(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|F_j|},\quad \boldsymbol{x}\in F_j.$$

– 仿射权。
Let

$$\Omega(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \lambda_i(\boldsymbol{\sigma}), \quad \alpha_i > 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \in S_d,$$

在 S_d 上取一个正仿射权重。 F_j 上的诱导面密度为

$$\omega_j(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i \mu_{j,i}(\boldsymbol{x})}{\int_{F_j} \sum\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i \mu_{j,i}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \in F_j.$$

– Dirichlet 权重。
Let

$$\Omega(\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{i=0}^{d} \lambda_i^{\alpha_i - 1}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \alpha_i > 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \in S_d,$$

取一个 Dirichlet 型权重。于是，在面 F_j 上，诱导面密度在维数 $d-1$ 中仍为 Dirichlet 型，其中比例常数选取为确保在 F_j 上归一化。因此，Dirichlet 权重在面限制下保持封闭。

我们引入

$$\mathbb{S}_2(S_d) = \{p \in \mathbb{P}_2(S_d) \,:\, \langle p, \varphi \rangle_\Omega = 0,\ \forall \varphi \in \mathbb{P}_1(S_d)\},$$

关于加权内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$， $\mathbb{P}_2(S_d)$ 中 $\mathbb{P}_1(S_d)$ 的正交补。因此，

$$\mathbb{P}_2(S_d) = \mathbb{P}_1(S_d) \oplus \mathbb{S}_2(S_d), \tag{2}$$

并且，为了稍微简化记号，我们有时写作

$$\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{P}_2(S_d) \ominus \mathbb{P}_1(S_d).$$

因此，

$$\dim(\mathbb{S}_2(S_d)) = \dim(\mathbb{P}_2(S_d)) - \dim(\mathbb{P}_1(S_d)) = \frac{(d+2)(d+1)}{2} - (d+1) = \frac{d(d+1)}{2}. \tag{3}$$

接着，我们选取

$$\tilde{d} = \frac{(d-2)(d+1)}{2}$$

线性无关多项式 $\{\rho_k\}_{k=1}^{d}$ 属于 $\mathbb{S}_2(S_d)$，使得剩余的 $d+1$ 基函数与各个面相关联。我们令

$$\mathbb{V} = \operatorname{span}\left\{\rho_k \,:\, k = 1, \ldots, \tilde{d}\right\} \tag{4}$$

并定义

$$\mathbb{W} = \operatorname{span}\{\psi_j \,:\, j = 0, \ldots, d\},$$

使得该分解

$$\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W} \tag{5}$$

成立。

我们记

$$\mathit{\Pi}_{1,\Omega} : L^2_{\Omega}\left(S_d\right) \to \mathbb{P}_1\left(S_d\right) \tag{6}$$

and

$$\mathit{\Pi}_{1,\omega_j} : L^2_{\omega_j}\left(F_j\right) \to \mathbb{P}_1\left(F_j\right) \tag{7}$$

关于权重 Ω 和 ω_j，分别将加权 L^2-正交投影投射到 $\mathbb{P}_1(S_d)$ 和 $\mathbb{P}_1(F_j)$ 上。然后，我们在 $C^0(S_d)$ 上引入以下线性泛函:

– 面平均值

$$\mathcal{I}_j : f \mapsto \langle f, 1\rangle_{\omega_j} = \int_{F_j} f_{\big|_{F_j}}(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad j = 0, \ldots, d; \tag{8}$$

– 面二次矩

$$\mathcal{L}_j : f \mapsto \langle f, q_j\rangle_{\omega_j} = \int_{F_j} f_{\big|_{F_j}}(\boldsymbol{x})q_j(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad j = 0, \ldots, d, \tag{9}$$

其中，每个 $q_j \in \mathbb{P}_2(F_j)$ 的选取均满足

$$\langle q_j, \varphi\rangle_{\omega_j} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_1\left(F_j\right); \tag{10}$$

– 内部线性泛函

$$\mathcal{V}_k : f \mapsto \langle f, \rho_k\rangle_{\Omega} = \int_{S_d} f(\boldsymbol{\sigma})\rho_k(\boldsymbol{\sigma})\Omega(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma}, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}, \tag{11}$$

其中， ρ_k 定义于（4）中。

因此，线性泛函的总数为

$$(d+1) + (d+1) + \tilde{d} = 2(d+1) + \frac{(d+1)(d-2)}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} = \dim\left(\mathbb{P}_2\left(S_d\right)\right),$$

这确保了该构造的维数一致性。

注 *1* 由于任意 $\varphi \in \mathbb{P}_1(S_d)$ 在每个面 F_j 上的限制都是 F_j上的线性多项式，根据（10），有

$$\mathcal{L}_j(\varphi) = 0, \quad j = 0, \ldots, d.$$

此外，根据（4）以及 ρ_k的定义，我们还得到

$$\mathcal{V}_k(\varphi) = 0, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d},$$

对于任意 $\varphi \in \mathbb{P}_1(S_d)$。

利用分解 (5)，任意的 $p \in \mathbb{S}_2(S_d)$ 都可以写成

$$p = v + w,$$

其中

$$v = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \xi_\ell \rho_\ell \in \mathbb{V}, \quad w = \sum_{i=0}^{d} \gamma_i \psi_i \in \mathbb{W}.$$

消失约束

$$\mathcal{V}_k(p) = \mathcal{L}_j(p) = 0, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}, \quad j = 0, \ldots, d,$$

得到以下分块线性系统

$$H\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1、\ldots\ldots、\xi_{\tilde{d}})^\top$，$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_0、\ldots\ldots、\gamma_d)^\top$ 和

$$H=\begin{pmatrix}G & C\\ \tilde{C} & M\end{pmatrix}. \tag{12}$$

这里的块定义如下：

$$G\in\mathbb{R}^{\tilde{d}\times\tilde{d}} \text{ with entries } [G]_{k\ell}=\mathcal{V}_k(\rho_\ell)=\langle\rho_\ell,\rho_k\rangle_\Omega, \tag{13}$$

$$C\in\mathbb{R}^{\tilde{d}\times(d+1)} \text{ with entries } [C]_{ki}=\mathcal{V}_k(\psi_i)=\langle\psi_i,\rho_k\rangle_\Omega, \tag{14}$$

$$\tilde{C}\in\mathbb{R}^{(d+1)\times\tilde{d}} \text{ with entries } \left[\tilde{C}\right]_{j\ell}=\mathcal{L}_j(\rho_\ell)=\langle\rho_\ell,q_j\rangle_{\omega_j}, \tag{15}$$

$$M\in\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)} \text{ with entries } [M]_{ji}=\mathcal{L}_j(\psi_i)=\langle\psi_i,q_j\rangle_{\omega_j}. \tag{16}$$

由于 Ω 在 S_d 的内部几乎处处严格为正，且 $\rho_1、\ldots\ldots、\rho_{\tilde{d}}$ 线性无关，因此矩阵 G 是格拉姆矩阵，从而是对称正定矩阵。特别地，

$$\det(G)\neq 0. \tag{17}$$

最后，我们记

$$A\in\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)} \text{ with entries } [A]_{ji}=\mathcal{I}_j(\lambda_i)=\langle\lambda_i,1\rangle_{\omega_j}, \tag{18}$$

并得到以下刻画定理。

定理 1 自由度集合

$$\Sigma=\left\{\mathcal{I}_j,\mathcal{L}_j,\mathcal{V}_k:\ j=0,\ldots,d,\ k=1,\ldots,\tilde{d}\right\}$$

在 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上唯一确定，当且仅当

(a) 矩阵 A可逆；
(b) 舒尔补

$$T=M-\tilde{C}G^{-1}C\in\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)} \tag{19}$$

可逆。

证明 ($\Rightarrow$) 我们假设 Σ 在 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上唯一确定。反设 A 是奇异的。那么存在一个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_0,\ldots,a_d)^\top$，使得

$$\boldsymbol{a}\in\ker(A).$$

因此，该多项式

$$\varphi=\sum_{j=0}^{d}a_j\lambda_j\in\mathbb{P}_1(S_d)$$

满足

$$\mathcal{I}_j(\varphi)=0,\quad j=0,\ldots,d.$$

同时，由于每个 ρ_k 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ 都与 $\mathbb{P}_1(S_d)$ 正交，因此我们有

$$\mathcal{V}_k(\varphi)=\langle\varphi,\rho_k\rangle_\Omega=0,\quad k=1,\dots,\tilde{d}. \tag{20}$$

此外，根据面函数 q_j的构造，我们得到

$$\mathcal{L}_j(\varphi)=\langle\varphi,q_j\rangle_{\omega_j}=0,\quad j=0,\dots,d. \tag{21}$$

由于重心坐标 $\{\lambda_j\}_{j=0}^d$ 构成了 $\mathbb{P}_1(S_d)$ 和 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 的一组基，因此可得 $\varphi\neq 0$。于是，非零多项式 φ 消去了所有自由度，这与唯一可解性矛盾。因此， A 必须是非奇异的。

接下来假设 T 是奇异的。那么分块矩阵 H 是奇异的，因此存在向量

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}=\left(\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_{\tilde{d}}\right)^\top\in\mathbb{R}^{\tilde{d}},\quad \bar{\boldsymbol{\gamma}}=\left(\bar{\gamma}_0,\dots,\bar{\gamma}_d\right)^\top\in\mathbb{R}^{d+1}$$

使得

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{\xi}}\\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}\end{pmatrix}\in\ker(H),\quad \begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{\xi}}\\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

我们定义

$$\bar{v}=\sum_{\ell=1}^{\tilde{d}}\bar{\xi}_\ell\rho_\ell\in\mathbb{V},\quad \bar{w}=\sum_{i=0}^{d}\bar{\gamma}_i\psi_i\in\mathbb{W}$$

并设

$$\bar{q}=\bar{v}+\bar{w}\in\mathbb{S}_2\left(S_d\right).$$

则 $\bar{q}\neq 0$ 并满足

$$\mathcal{L}_j\left(\bar{q}\right)=0,\quad \mathcal{V}_k\left(\bar{q}\right)=0,\quad j=0,\dots,d,\quad k=1,\dots,\tilde{d}.$$

由于 A 可逆，存在唯一的 $\bar{\varphi}\in\mathbb{P}_1(S_d)$，使得

$$\mathcal{I}_j\left(\bar{\varphi}\right)=-\mathcal{I}_j\left(\bar{q}\right),\quad j=0,\dots,d. \tag{22}$$

因此 $\bar{p}=\bar{\varphi}+\bar{q}$ 非零且满足

$$\mathcal{L}_j\left(\bar{p}\right)=\mathcal{I}_j\left(\bar{p}\right)=\mathcal{V}_k\left(\bar{p}\right)=0,\quad j=0,\dots,d,\quad k=1,\dots,\tilde{d},$$

再次与唯一可解性矛盾。因此， T 必为非奇异矩阵。

(⇐) 反之，假设 $\det(A)\neq 0$ 且 $\det(T)\neq 0$。令 $p\in\mathbb{P}_2(S_d)$ 满足

$$\mathcal{I}_j(p)=\mathcal{L}_j(p)=\mathcal{V}_k(p)=0,\quad j=0,\dots,d,\quad k=1,\dots,\tilde{d}.$$

为了证明 Σ 在 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上唯一确定，只需证明 $p=0$。利用 (2) 和 (5)，我们可以将这个多项式表示为

$$p=\varphi+v+w,$$

其中

$$\varphi=\sum_{i=0}^{d}a_i\lambda_i\in\mathbb{P}_1\left(S_d\right),\quad v=\sum_{\ell=1}^{\tilde{d}}\xi_\ell\rho_\ell\in\mathbb{V},\quad w=\sum_{j=0}^{d}\gamma_j\psi_j\in\mathbb{W}.$$

由注 1 可知

$$0 = \mathcal{V}_k(p) = \mathcal{V}_k(v) + \mathcal{V}_k(w), \quad k = 1, \dots, \tilde{d}, \tag{23}$$
$$0 = \mathcal{L}_j(p) = \mathcal{L}_j(v) + \mathcal{L}_j(w), \quad j = 0, \dots, d. \tag{24}$$

令

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{d}}\right)^\top, \quad \boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_0, \dots, \gamma_d\right)^\top,$$

我们可以将关系式 (23) 和 (24) 表示为矩阵形式：

$$H \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

或等价地

$$\begin{pmatrix} G & C \\ \tilde{C} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

wher e G、 C、 C 和 M 分别在 (13)、(14)、(15) 和 (16) 中定义。该系统为 equi价于

$$\begin{cases} G\boldsymbol{\xi} + C\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \\ \tilde{C}\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

由于 G 可逆，第一个方程给出

$$\boldsymbol{\xi} = -G^{-1}C\boldsymbol{\gamma}. \tag{25}$$

将其代入第二个关系，并利用式 (19)，得到

$$T\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}.$$

由于 T 非奇异， $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$，且由式 (25)， $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$。因此

$$p = \varphi = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_i,$$

其余约束可化简为

$$\mathcal{I}_j(p) = \mathcal{I}_j(\varphi) = 0, \quad j = 0, \dots, d,$$

i.e.

$$A\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{a} = \left(a_0, \dots, a_d\right)^\top.$$

由于 A 非奇异， $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$，因此 $p = 0$。这证明了唯一可解性。

由定理 1 和分块矩阵的经典 Schur 补分解（例如，参见 [4, 第 3.1] 节），可立即得到一个推论：唯一可解性条件可以等价地改写为仿射矩矩阵和二次矩矩阵的非奇异性。

推论 1 自由度 Σ 在 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上具有唯一确定性，当且仅当仿射矩矩阵 A 和二次矩矩阵 H 均为非奇异矩阵。

证明 根据定理 1， Σ 的唯一可解性等价于 A 以及相关舒尔补 T的非奇异性。还需证明

$$T = M - \tilde{C}G^{-1}C \quad \text{is invertible if and only if} \quad H = \begin{pmatrix} G & C \\ \tilde{C} & M \end{pmatrix} \text{ is invertible.}$$

由于格拉姆矩阵 G 是对称正定的，因而可逆，标准的 Schur 补分解给出（参见例如 [4,16]）

$$\det(H) = \det(G)\det(T).$$

因此， H 非奇异当且仅当 T 非奇异。

注 *2* 式（18）中引入的矩阵 A 是一个对角元素为零且非对角元素严格为正的行随机矩阵。事实上，由于 $\lambda_j = 0$ 在 F_j 上，而 $\lambda_i > 0$ 在 F_j 上对于 $i \neq j$，并且由于 ω_j 在 F_j 上非负，我们有

$$[A]_{jj} = 0 \quad \text{and} \quad [A]_{ji} = \mathcal{I}_j(\lambda_i) = \int_{F_j} \lambda_i(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} > 0, \quad i \neq j.$$

此外，由于 ω_j 在 F_j 上归一化，我们得到

$$\sum_{i=0}^{d}[A]_{ji} = \int_{F_j}\left(\sum_{i=0}^{d}\lambda_i(\boldsymbol{x})\right)\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{F_j}\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1.$$

当 $d = 2$ 时，矩阵 A 是 3×3，并且容易验证，任何对角元素为零且非对角元素严格为正的行随机矩阵必然是非奇异的。然而，对于 $d \geq 3$，这一性质不成立：如 [22], 所示，大小至少为 4 的行随机零对角矩阵即使所有非对角元素都严格为正，也可能是奇异的。因此，定理 1 中的假设（a）在高维情形下是必要的。

注 *3* 所提出的框架在任意选择部分二次矩时仍然成立，无论这些二次矩位于边上还是 S_d内部。更准确地说，任意一组面矩 $\{\mathcal{L}_j\}$，连同用户任意选取的内部二次多项式子空间 $\mathbb{U} \subset \mathbb{S}_2(S_d)$，都能在二次子空间上定义一个适定的积分插值系统，前提是保留面平均值 $\{\mathcal{I}_j\}$ 。唯一可解性源于定理 1 中采用的相同结构要素，即：

(i) 仿射块 A的可逆性；(ii) 被启用的二次矩在各自支撑子空间上的线性无关性。

无需额外假设，也无需修改证明。

注 *4* 虽然定理 1 给出了唯一可解性的充要条件，但其˜公式涉及矩阵 G、 C、 C和 M，这些矩阵取决于面子空间 $\mathbb{W}$和内部子空间 $\mathbb{V}$的具体选择。我们引入线性映射

$$\mathcal{L} : q \in \mathbb{S}_2(S_d) \longmapsto (\mathcal{L}_0(q), \dots, \mathcal{L}_d(q))^\top \in \mathbb{R}^{d+1}, \tag{26}$$

并记为 $\mathcal{L}_{\mathbb{W}} = \mathcal{L}$。如果面泛函 $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_d$ 在 $\mathbb{W}_{\mathbb{W}}$ 上线性无关（等价地，如果 M 具有满秩），那么 $\mathcal{L}_{\mathbb{W}}$ 是一个同构。在这种情况下，可以选取˜ ˜一个面基 $\psi_0, \dots, \psi_d \in \mathbb{W}$，使得

$$\mathcal{L}_{\mathbb{W}}\left(\tilde{\psi}_j\right) = e_j,$$

其中 e_j 表示 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的第 j 个典范基向量。于是

$$\mathcal{L}_j\left(\tilde{\psi}_i\right)=\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad M=I_{d+1}.$$

通过在 $\mathbb{W}$ 内进行适当的基变换，可以实现这种归一化。因此，Schur 补可简化为

$$T=I_{d+1}-\tilde{C}G^{-1}C,$$

这对于相关自由度的理论分析和数值实现都特别方便。

定理 2 如果面泛函 $\mathcal{L}_0$、……、$\mathcal{L}_d$ 在 $\mathbb{S}_2\left(S_d\right)$ 上线性无关，则存在一个分解

$$\mathbb{S}_2\left(S_d\right)=\mathbb{V}\oplus\mathbb{W},$$

使得

– $\mathbb{W}$ 的维数为 $d+1$，并且关于内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\Omega$ 满足 $\mathbb{W}\perp\mathbb{V}$；– 在(16)中定义的矩阵 M 是可逆的；– 通过在 $\mathbb{W}$ 中进行适当的基变换，可以将 M 归一化为单位矩阵，即 $M=I_{d+1}$。

此外，若 $\mathbb{V}$ 的基选取为关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\Omega$正交归一，则 $G=I_{\tilde{d}}$、$C=0$以及与唯一可解性条件相关的舒尔补具有如下典范形式

$$T=M=I_{d+1}.$$

证明 由于泛函 $\mathcal{L}_0$、……、$\mathcal{L}_d$ 在 $\mathbb{S}_2(S_d)$上线性无关，线性映 p

$$\mathcal{L}:q\in\mathbb{S}_2\left(S_d\right)\longmapsto\left(\mathcal{L}_0(q),\ldots,\mathcal{L}_d(q)\right)^\top\in\mathbb{R}^{d+1}$$

的秩为 $d+1$。于是 $\mathcal{L}$ 是满射。因此，对每个典范向量 $e_i\in\mathbb{R}^{d+1}$，都存在$\psi_i\in\mathbb{S}_2(S_d)$使得

$$\mathcal{L}\left(\psi_i\right)=e_i,\quad i=0,\ldots,d.$$

等价地，

$$\mathcal{L}_j\left(\psi_i\right)=\delta_{ij},\quad i,j=0,\ldots,d,$$

因此矩阵

$$M=\left[\mathcal{L}_j\left(\psi_i\right)\right]_{i,j=0}^d$$

是单位矩阵，因而特别可逆。我们令

$$\mathbb{W}=\operatorname{span}\left\{\psi_0,\ldots,\psi_d\right\}.$$

根据构造，在（26）中定义的线性映射 $\mathcal{L}_{\mathbb{W}}:\mathbb{W}\to\mathbb{R}^{d+1}$ 是同构，相对于 $\mathbb{W}$ 的基 $\{\psi_0,\ldots,\psi_d\}$ 和 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的标准基，其对应矩阵为 $M=I_{d+1}$。

随后，我们将内部子空间定义为

$$\mathbb{V}=\left\{v\in\mathbb{S}_2\left(S_d\right):\langle v,w\rangle_\Omega=0\text{ for all }w\in\mathbb{W}\right\}.$$

因此，

$$\mathbb{S}_2\left(S_d\right)=\mathbb{V}\oplus\mathbb{W},\quad\mathbb{V}\perp\mathbb{W}.$$

此外，若选择 $\mathbb{V}$ 的基，使其关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\Omega$ 为正交归一的，则 $G=I_{\tilde{d}}$ 以及$C=0$。因此，与唯一可解性条件相关的舒尔补可化简为

$$T=M-\tilde{C}G^{-1}C=I_{d+1}.$$

注 *5* 如果面泛函 $\mathcal{L}_0$、.....、 $\mathcal{L}_d$ 在线性意义上依赖于 $\mathbb{S}_2(S_d)$，那么对于任意 $(d+1)$ 维子空间 $\mathbb{W} \subset \mathbb{S}_2(S_d)$ 及其任意基 $\{\psi_j\}_{j=0}^{d}$，相应的面矩阵 M 都是奇异的。因此，面分离假设不仅是构造正交分解的充分条件，也是必要条件

$$\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W},$$

且面块可逆。

为完成唯一确定性分析，我们给出二次空间的显式正交分解，并构造性地选取面测试多项式，使面矩阵M 可逆。

定理 3 若矩阵 A （(18)）可逆，则存在以下显式选取：

1. 函数 $q_j \in \mathbb{S}_2(F_j)$*;2.* 具有标准正交基 $\{\rho_k\}_{k=1}^{d}$ 的内部空间 $\mathbb{V}$*;3.* 具有基 $\{\psi_j\}_{j=0}^{d}$ 的面空间 $\mathbb{W}$

使得：

1. 集合 Σ 在 $\mathbb{P}_2$（S_d） 上唯一确定；*2.* 空间 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$ 关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\Omega$ 正交，因此相应的块满足 $G = I_{\tilde{d}}$ 和 $C = 0$。

证明 设 $p \in \mathbb{P}_2(S_d)$ 满足

$$\mathcal{I}_j(p) = \mathcal{L}_j(p) = \mathcal{V}_k(p) = 0, \quad j = 0, \dots, d,\ k = 1, \dots, \tilde{d}.$$

由于矩阵 A 可逆，定理 1 表明，只要相应的舒尔补

$$T = M - \tilde{C}G^{-1}C \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

可逆。

我们构造一个显式分解

$$\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W},$$

使得 $G = I_{\tilde{d}}$、 $C = 0$ 和 $T = M$。为此，令

$$g_j = \lambda_j \lambda_{j+1}, \quad j = 0, \dots, d,\ \mathrm{mod}(d+1), \tag{27}$$

并定义

$$\psi_j = (I - \Pi_{1,\Omega})(g_j) \in \mathbb{S}_2(S_d),$$

其中$\Pi_{1,\Omega}$ 在式（6）中定义。由于

$$\mathrm{span}\{\lambda_j\lambda_{j+1} : j = 0, \dots, d\} \cap \mathbb{P}_1(S_d) = \{0\},$$

由此可得，若

$$0 = \sum_{j=0}^{d} c_j \psi_j = \sum_{j=0}^{d} c_j (I - \Pi_{1,\Omega})(g_j) = (I - \Pi_{1,\Omega}) \left(\sum_{j=0}^{d} c_j g_j \right),$$

then

$$\sum_{j=0}^{d} c_j g_j \in \mathbb{P}_1\left(S_d\right).$$

但是，根据定义（27），我们还有

$$\sum_{j=0}^{d} c_j g_j \in \operatorname{span}\left\{\lambda_j \lambda_{j+1} \,:\, j=0,\ldots,d\right\}.$$

Then

$$\sum_{j=0}^{d} c_j g_j \in \operatorname{span}\left\{\lambda_j \lambda_{j+1} \,:\, j=0,\ldots,d\right\} \cap \mathbb{P}_1\left(S_d\right)$$

因此

$$\sum_{j=0}^{d} c_j g_j = 0.$$

由于族 $\{g_j\}_{j=0}^{d}$ 线性无关，我们得出 $c_0 = \cdots = c_d = 0$。因此，集合 $\{\psi_j\}_{j=0}^{d}$ 线性无关。于是我们令

$$\mathbb{W} = \operatorname{span}\left\{\psi_0,\ldots,\psi_d\right\} \subset \mathbb{S}_2\left(S_d\right),$$

并定义 $\mathbb{V}$ 为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega}$–在 $\mathbb{S}_2\left(S_d\right)$ 中的 $\mathbb{W}$ 的正交补。因此 $\mathbb{V} \perp \mathbb{W}$ 并且

$$\mathbb{S}_2\left(S_d\right) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}.$$

设 $\{\rho_k\}_{k=1}^{\tilde{d}}$ 是 $\mathbb{V}$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega}$ 的标准正交基。那么

$$G = \left[\langle\rho_\ell,\rho_k\rangle_{\Omega}\right]_{k\ell} = I_{\tilde{d}}, \quad C = \left[\langle\psi_i,\rho_k\rangle_{\Omega}\right]_{ki} = 0.$$

在这种情况下，舒尔补可化简为

$$T = M - \tilde{C}G^{-1}C = M.$$

现在证明 M可逆。为此，我们固定 $j \in \{0,\ldots,d\}$，并令

$$h_\ell = \left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(g_{\ell}\Big|_{F_j}\right) \in \mathbb{S}_2\left(F_j\right), \quad \ell \notin \{j-1, j\}, \tag{28}$$

并定义线性泛函

$$\chi_\ell : q \in \mathbb{S}_2\left(F_j\right) \to \langle h_\ell, q\rangle_{\omega_j} \in \mathbb{R}, \quad \ell \in B_j := \{0,\ldots,d\} \setminus \{j-1, j\}.$$

$\left\{g_{\ell}\Big|_{F_j}\right\}_{\ell\in B_j}$ 的族线性无关，因为每个函数都是两个面重心坐标的乘积，并且在 F_j的一组不同边子集上消失。由于 Π_{1,ω_j} 是到 $\mathbb{P}_1(F_j)$上的正交投影，前面使用的相同单射性论证同样适用，由此可知族 $\{h_\ell\}_{\ell\in B_j}$ 线性无关。特别地，对于固定的 $\ell^\star \in B_j$，我们有

$$h_{\ell^\star} \notin \operatorname{span}\left\{h_\ell \,:\, \ell \in B_j \setminus \{\ell^\star\}\right\}.$$

由于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega_j}$ 在 $\mathbb{S}_2(F_j)$上非退化，相应的线性泛函集合 $\{\chi_\ell\}_{\ell\in B_j}$ 在对偶空间 $(\mathbb{S}_2(F_j))^\star$中也线性无关。因此，由于

$$\dim\left(\mathbb{S}_2\left(F_j\right)\right) > |B_j| - 1 = d - 2,$$

存在一个非零单元

$$q_j \in \bigcap_{\ell\in B_j\setminus\{\ell^\star\}} \ker\left(\chi_\ell\right) \subset \mathbb{S}_2\left(F_j\right), \tag{29}$$

此外

$$\chi_{\ell^\star}\left(q_j\right) = \langle h_{\ell^\star}, q_j\rangle_{\omega_j} \neq 0. \tag{30}$$

利用 (28) 和 (10)，我们有

$$\langle h_\ell, q_j\rangle_{\omega_j} = \left\langle \left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(g_{\ell}\big|_{F_j}\right), q_j\right\rangle_{\omega_j} = \left\langle g_{\ell}\big|_{F_j}, q_j\right\rangle_{\omega_j}, \quad \ell\in B_j. \tag{31}$$

结合 (29)、(30) 和 (31)，我们得出

$$\left\langle g_{\ell}\big|_{F_j}, q_j\right\rangle_{\omega_j} = 0, \quad \ell\in B_j\setminus\{\ell^\star\}, \quad \left\langle g_{\ell^\star}\big|_{F_j}, q_j\right\rangle_{\omega_j} \neq 0.$$

通过协调地选取指标 $\ell^\star$，例如

$$\ell^\star = j+2,\ \mathrm{mod}(d+1),$$

面矩阵的每一行

$$M = \left[\mathcal{L}_j\left(\psi_i\right)\right]_{ji} = \left[\mathcal{L}_j\left(g_i\right)\right]_{ji}$$

都恰好包含一个非零项，位于第 $\ell^\star = j+2$ 列。由于所选索引 $\{\ell^\star\}_{j=0}^d$ 两两不同，因此非零列也各不相同。经过列置换后， M 因此是对角元素非零的对角矩阵，故可逆。

注*6* 总而言之，定理 3 的正交构造保证：仅在矩阵 A 可逆这一假设下，就可以构造出一种配置，使得 $G = I_{\tilde{d}}$、$C = 0$ 和 $T = M$ 均可逆，从而根据定理 1 保证唯一可解性。

2.1 通过舒尔补实现 inf-sup 稳定性

现在我们研究二次直方积分问题的定量稳定性 。基于定理 1 的唯一可解性结果，我们推导出一个 inf–sup 条件，用以刻画内部自由度与面自由度之间耦合的鲁棒性。特别地，定理 1 给出了一个定性唯一可解性判据，该判据基于矩阵 A 和

$$T = M - \tilde{C}G^{-1}C.$$

尽管这一刻画保证了适定性，但它仍纯粹是定性的，既没有量化重构稳定性，也没有量化舒尔补 T 中所编码耦合的强度。因此，我们的目标是得到一种定量改进。具体而言，我们证明，增强二次历史插值格式的下确界–上确界稳定性由约化算子 S 的谱性质决定。这由此给出了一个显式且与维数无关的稳定性常数表达式。在确立主要结果之前，

我们先介绍必要的预备定义和辅助引理。

在本节中，我们假设矩阵 M 可逆，这对应于式 (26) 中定义的线性映射 $\mathcal{L}$ 在 $\mathbb{W}$上具有线性无关性的情形。记

$$D = \begin{pmatrix} M^\top M & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(q) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(q) \\ \mathcal{V}(q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)+\tilde{d}}, \quad q \in \mathbb{S}_2\left(S_d\right), \tag{32}$$

其中

$$\mathcal{L}(q) = \left(\mathcal{L}_0(q), \ldots, \mathcal{L}_d(q)\right)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathcal{V}(q) = \left(\mathcal{V}_1(q), \ldots, \mathcal{V}_{\tilde{d}}(q)\right)^\top \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}. \tag{33}$$

对于任意

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} \in Y := \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{\tilde{d}}, \quad \boldsymbol{\eta} = \left(\eta_0, \ldots, \eta_d\right)^\top, \quad \boldsymbol{\zeta} = \left(\zeta_1, \ldots, \zeta_{\tilde{d}}\right)^\top,$$

我们定义范数

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}^2 = \boldsymbol{\eta}^\top \left(M^\top M\right)^{-1} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}^\top G^{-1} \boldsymbol{\zeta}, \tag{34}$$

其中 M 和 G 是式 (16) 和 (13) 中定义的矩阵。相应的耦合双线性型为

$$\Psi(q; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \sum_{j=0}^{d} \eta_j \, \mathcal{L}_j(q) + \sum_{k=1}^{\tilde{d}} \zeta_k \, \mathcal{V}_k(q), \quad q \in \mathbb{S}_2\left(S_d\right), \quad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} \in Y. \tag{35}$$

引理 2 对于任意 $q \in \mathbb{S}_2(S_d)$，以下恒等式成立

$$\sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \neq \mathbf{0}} \frac{\Psi(q; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \left(\mathcal{L}(q)^\top \left(M^\top M\right) \mathcal{L}(q) + \mathcal{V}(q)^\top G \mathcal{V}(q)\right)^{1/2}.$$

证明 若 $\boldsymbol{u}(q) = \mathbf{0}$，结论显然成立。因此，以下假设 $\boldsymbol{u}(q) \neq \mathbf{0}$。

对于任意 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} \in Y$，由 (32) 和 (34) 可得

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}^2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}^\top D^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

此外，由 (32) 和 (35) 可得

$$\Psi\left(q; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}^\top \boldsymbol{u}(q). \tag{37}$$

由于 $M^\top M$ 和 G 均为对称正定矩阵，它们的分块对角组合 D 也为对称正定矩阵。因此， D^{-1} 存在，并诱导出内积

$$\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \rangle_{D^{-1}} := \boldsymbol{y}_1^\top D^{-1} \boldsymbol{y}_2, \quad \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^{(d+1)+\tilde{d}}.$$

然后，根据（36），我们有

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0} = \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{D^{-1}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}^\top D^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}}. \tag{38}$$

结合（37）和（38），我们有

$$\frac{\Psi\left(q;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\right)}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}}=\frac{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})^{\top}\boldsymbol{u}(q)}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{D^{-1}}}=\frac{\langle\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}),D\boldsymbol{u}(q)\rangle_{D^{-1}}}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{D^{-1}}}. \tag{39}$$

利用关于内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{D^{-1}}$ 的柯西–施瓦茨不等式，并利用 D的对称性，可得

$$\frac{\langle\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}),D\boldsymbol{u}(q)\rangle_{D^{-1}}}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{D^{-1}}}\leq\|D\boldsymbol{u}(q)\|_{D^{-1}}=\sqrt{(D\boldsymbol{u}(q))^{\top}D^{-1}(D\boldsymbol{u}(q))}=\sqrt{\boldsymbol{u}(q)^{\top}D\boldsymbol{u}(q)}. \tag{40}$$

结合（39）和（40）可得

$$\frac{\Psi\left(q;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\right)}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}}\leq\sqrt{\boldsymbol{u}(q)^{\top}D\boldsymbol{u}(q)}.$$

选择如下形式即可达到等号

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})=D\boldsymbol{u}(q).$$

事实上，利用（36）和（37），并利用 D 的对称性，可得

$$\begin{aligned}\Psi\left(q;D\boldsymbol{u}(q)\right)&=(D\boldsymbol{u}(q))^{\top}\boldsymbol{u}(q)=\boldsymbol{u}(q)^{\top}D\boldsymbol{u}(q),\\ \|D\boldsymbol{u}(q)\|_{Y,0}&=\sqrt{(D\boldsymbol{u}(q))^{\top}D^{-1}(D\boldsymbol{u}(q))}=\sqrt{\boldsymbol{u}(q)^{\top}D\boldsymbol{u}(q)}.\end{aligned}$$

由此可证

$$\sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}}\frac{\Psi\left(q;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\right)}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}}=\sqrt{\boldsymbol{u}(q)^{\top}D\boldsymbol{u}(q)}=\left(\mathcal{L}(q)^{\top}\left(M^{\top}M\right)\mathcal{L}(q)+\mathcal{V}(q)^{\top}G\,\mathcal{V}(q)\right)^{1/2}.$$

下面的引理表明，将二次多项式 q 分解为内部部分和面部分后，面矩和体积矩的合并贡献可表示为涉及矩阵 G、 C、 C 和 M 的分块表示˜。

引理 3 对于任意 $\boldsymbol{\xi}=\left(\xi_1、\ \ldots\ldots、\ \xi_{\tilde{d}}\right)^{\top}\in\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_0、\ \ldots\ldots、\ \gamma_d)^{\top}\in\mathbb{R}^{d+1}$，我们考虑

$$q=v+w\in\mathbb{S}_2\left(S_d\right),\quad v=\sum_{\ell=1}^{\tilde{d}}\xi_\ell\rho_\ell\in\mathbb{V},\quad w=\sum_{i=0}^{d}\gamma_i\psi_i\in\mathbb{W}. \tag{41}$$

下列恒等式成立

$$\mathcal{L}(q)^{\top}\left(M^{\top}M\right)\mathcal{L}(q)+\mathcal{V}(q)^{\top}G\mathcal{V}(q)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}^{\top}\begin{pmatrix}K_{11}&K_{12}\\ K_{21}&K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}, \tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned}K_{11}&=\tilde{C}^{\top}(M^{\top}M)\tilde{C}+G^3\in\mathbb{R}^{\tilde{d}\times\tilde{d}},\\ K_{12}&=\tilde{C}^{\top}(M^{\top}M)M+G^2C\in\mathbb{R}^{\tilde{d}\times(d+1)},\\ K_{21}&=M^{\top}(M^{\top}M)\tilde{C}+C^{\top}G^2\in\mathbb{R}^{(d+1)\times\tilde{d}},\\ K_{22}&=M^{\top}(M^{\top}M)M+C^{\top}GC\in\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)},\end{aligned} \tag{43}$$

with

$$G^2=GG,\quad G^3=GGG.$$

证明 利用（41）以及矩泛函 $\mathcal{L}_j$ 和 $\mathcal{V}_k$的线性性，我们得到

$$\mathcal{L}_j(q) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \xi_\ell \mathcal{L}_j(\rho_\ell) + \sum_{i=0}^{d} \gamma_i \mathcal{L}_j(\psi_i), \quad j = 0, \ldots, d,$$
$$\mathcal{V}_k(q) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \xi_\ell \mathcal{V}_k(\rho_\ell) + \sum_{i=0}^{d} \gamma_i \mathcal{V}_k(\psi_i), \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}.$$

然后，利用式 (13)、(14)、(15) 和 (16) 中矩阵的定义，我们得到

$$\mathcal{L}(q) = \tilde{C}\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\gamma}, \quad \mathcal{V}(q) = G\boldsymbol{\xi} + C\boldsymbol{\gamma},$$

其中， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{V}$ 在式 (33) 中定义。因此，

$$\mathcal{L}(q)^\top \left(M^\top M\right) \mathcal{L}(q) = \left(\tilde{C}\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\gamma}\right)^\top \left(M^\top M\right) \left(\tilde{C}\boldsymbol{\xi} + M\boldsymbol{\gamma}\right),$$
$$\mathcal{V}(q)^\top G \mathcal{V}(q) = (G\boldsymbol{\xi} + C\boldsymbol{\gamma})^\top G \left(G\boldsymbol{\xi} + C\boldsymbol{\gamma}\right).$$

展开两个表达式，合并 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的系数，并利用 G的对称性，我们得到式 (43) 中的分块矩阵，其元素为 K_{11}、 K_{12}、 K_{21} 和 K_{22}。

注 7 我们注意到，矩阵 K_{11} 和 K_{22} 是对称的，且 $K_{21} = K_{12}^\top$。此外，由于 $M^\top M$ 和 G 均为对称正定矩阵，因此该矩阵

$$K_{22} = M^\top (M^\top M) M + C^\top G C$$

也是对称正定的。事实上，对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top K_{22} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^\top \left(M^\top (M^\top M) M + C^\top G C\right) \boldsymbol{x} \\ &= (M\boldsymbol{x})^\top (M^\top M)(M\boldsymbol{x}) + (C\boldsymbol{x})^\top G (C\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，则 $M\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，因为 M 可逆，因此

$$(M\boldsymbol{x})^\top \left(M^\top M\right) (M\boldsymbol{x}) > 0,$$

而第二项非负，因为 G 是对称正定的。因此，

$$\boldsymbol{x}^\top K_{22} \boldsymbol{x} > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},$$

这证明了 K_{22} 是对称正定的。

对于接下来的结果，我们令

$$S = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}, \tag{44}$$

并定义

$$\hat{S} = G^{-1/2} S G^{-1/2}, \tag{45}$$

其中， G 是（13）中定义的格拉姆矩阵。由于 K_{11} 和 K_{22} 是对称的，且 $K_{21} = K_{12}^\top$，因此舒尔补 S 也是对称的。

˜**引理 4** 对于每个 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$，以下单位矩阵成立

$$\min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{d+1}} \left(\boldsymbol{\xi}^\top K_{11} \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^\top K_{12} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^\top K_{22} \boldsymbol{\gamma} \right) = \boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi},$$

其中 S 由(44)定义。极小化元唯一，且由下式给出

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = -K_{22}^{-1} K_{21} \boldsymbol{\xi}.$$

˜证明 对于任意固定的 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$，我们定义

$$F_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\xi}^\top K_{11} \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^\top K_{12} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^\top K_{22} \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

由于 K_{22} 是对称正定的， $F_{\boldsymbol{\xi}}$ 关于 $\boldsymbol{\gamma}$是严格凸的。对 $\boldsymbol{\gamma}$ 求导得到

$$\nabla_{\boldsymbol{\gamma}} F_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\gamma}) = 2 \left(K_{12}^\top \boldsymbol{\xi} + K_{22} \boldsymbol{\gamma} \right).$$

由于 $K_{12}^\top = K_{21}$，唯一的驻点 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 满足

$$K_{22} \boldsymbol{\gamma} = -K_{21} \boldsymbol{\xi},$$

因此，由于 K_{22} 可逆，

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = -K_{22}^{-1} K_{21} \boldsymbol{\xi}.$$

将 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 代入 $F_{\boldsymbol{\xi}}$，并利用 K_{22}的对称性，可得

$$F_{\boldsymbol{\xi}}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}) = \boldsymbol{\xi}^\top \left(K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \right) \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi},$$

这就证明了该结论。

下一个引理将与 ˆS 相关的二次型的约束极小化问题与在 (45) 中定义的归一化矩阵 S 的最小特征值联系起来。

引理 5 以下恒等式成立

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}^\top G \boldsymbol{\xi} = 1} \boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi} = \sigma_{\min} \left(\hat{S} \right),$$

其中 $\sigma_{\min} \left(\hat{S} \right)$ 表示ˆS的最小特征值。

证明 令 $\boldsymbol{\eta} = G^{1/2} \boldsymbol{\xi}$。则

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_2^2 = \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^\top G \boldsymbol{\xi},$$

因此，归一化 $\boldsymbol{\xi}^\top G \boldsymbol{\xi} = 1$ 与 $\|\boldsymbol{\eta}\|_2 = 1$等价。此外，

$$\boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi} = \left(G^{-1/2} \boldsymbol{\eta} \right)^\top S \left(G^{-1/2} \boldsymbol{\eta} \right) = \boldsymbol{\eta}^\top \left(G^{-1/2} S G^{-1/2} \right) \boldsymbol{\eta}.$$

因此，

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}^\top G \boldsymbol{\xi} = 1} \boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi} = \inf_{\|\boldsymbol{\eta}\|_2 = 1} \boldsymbol{\eta}^\top \left(G^{-1/2} S G^{-1/2} \right) \boldsymbol{\eta}. \tag{46}$$

由于 $G^{-1/2} S G^{-1/2}$ 是对称的，其瑞利商在欧几里得单位球面上的最小值等于其最小特征值，即

$$\inf_{\|\boldsymbol{\eta}\|_2 = 1} \boldsymbol{\eta}^\top \left(G^{-1/2} S G^{-1/2} \right) \boldsymbol{\eta} = \sigma_{\min} \left(G^{-1/2} S G^{-1/2} \right) = \sigma_{\min} \left(\hat{S} \right). \tag{47}$$

结合式 (46) 和 (47) 可得

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}^\top G \boldsymbol{\xi} = 1} \boldsymbol{\xi}^\top S \boldsymbol{\xi} = \sigma_{\min} \left(G^{-1/2} S G^{-1/2} \right) = \sigma_{\min} \left(\hat{S} \right).$$

最后，在下一个定理中，我们将证明 inf–sup 关系，该关系将ˆ 公式的稳定性常数与约化矩矩阵 S 的最小特征值的平方根联系起来。

定理 4 下列 *inf-sup* 关系成立

$$\beta := \inf_{\substack{v\in\mathbb{V}\\ \|v\|_\Omega=1}} \inf_{w\in\mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)},$$

其中 ˆS 是式 (45)中定义的矩阵。

证明 对于任意 $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1,\ldots,\xi_{\tilde{d}}\right)^\top \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$和 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0,\ldots,\gamma_d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$，我们考虑

$$q = v + w \in \mathbb{S}_2\left(S_d\right), \quad v = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \xi_\ell \rho_\ell \in \mathbb{V}, \quad w = \sum_{i=0}^{d} \gamma_i \psi_i \in \mathbb{W}.$$

结合引理 2 和引理 3，可得

$$\begin{aligned}\sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} &= \left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}\right)^{1/2}\\ &= \left(\boldsymbol{\xi}^\top K_{11}\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^\top K_{12}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^\top K_{22}\boldsymbol{\gamma}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由引理 4 可得

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^{d+1}} \left(\boldsymbol{\xi}^\top K_{11}\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^\top K_{12}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^\top K_{22}\boldsymbol{\gamma}\right) = \boldsymbol{\xi}^\top S\boldsymbol{\xi},$$

其中， S 是式 (44) 中定义的矩阵，且唯一的极小化元为

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = -K_{22}^{-1}K_{21}\boldsymbol{\xi}.$$

于是，我们得到

$$\inf_{w\in\mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \min_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^{d+1}} \left(\boldsymbol{\xi}^\top K_{11}\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\xi}^\top K_{12}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^\top K_{22}\boldsymbol{\gamma}\right)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^\top S\boldsymbol{\xi}}.$$

施加归一化条件

$$1 = \|v\|_\Omega^2 = \langle v, v\rangle_\Omega = \sum_{k=1}^{\tilde{d}}\sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \xi_\ell \langle \rho_\ell, \rho_k\rangle_\Omega \xi_k = \boldsymbol{\xi}^\top G\boldsymbol{\xi},$$

我们有

$$\beta = \inf_{\substack{v\in\mathbb{V}\\ \|v\|_\Omega=1}} \inf_{w\in\mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \inf_{\boldsymbol{\xi}^\top G\boldsymbol{\xi}=1} \sqrt{\boldsymbol{\xi}^\top S\boldsymbol{\xi}}.$$

由引理 5 可得

$$\inf_{\boldsymbol{\xi}^\top G\boldsymbol{\xi}=1} \boldsymbol{\xi}^\top S\boldsymbol{\xi} = \sigma_{\min}\left(\hat{S}\right).$$

于是，我们得出结论：

$$\beta = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)}. \tag{48}$$

ˆ 特别地， $\beta > 0$ 当且仅当 S 是正定的。

基于特征值的稳定性刻画在数值线性代数中发挥着基础性作用，尤其是在分析结构化算子和 Schur型约化时 [10,2,29]。在当前情形下，这一视角尤其适用，因为下确界–上确界常数可以表示为约化矩阵最小特征值的平方根。相关谱技术已在 Toeplitz系统的背景下得到发展 [21,26],，而基于Lanczos 双对角化的矩量谱近似也已在 [9] 中得到研究。然而，本文所考察的矩矩阵并不具有 Toeplitz结构，因此与这些研究成果的联系是概念性的，而非结构性的。上述研究展示了特定矩阵结构如何约束算子的谱行为，以及如何借助基于Lanczos的求积公式等谱工具分析矩量。尽管我们的矩阵具有不同的内部组织方式，但这些方法与我们工作的共同核心理念是：谱结构是理解稳定性与条件性的关键。

注 *8* 本节引入的分解 $\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$ 并非唯一。原则上，也可以考虑子空间 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$ 的其他选取。这些替代方案或许能简化 Gram结构 $\left(G, C, \tilde{C}, M\right)$，并可能改善约化矩阵 S的条件性。然而，对最优或极小极大分解进行系统分析超出了本文的范围，留待未来研究。

注 *9* 本节的稳定性分析表明，离散 inf–sup 常数由约化算子 S的最小特征值的平方根决定。对于密度 Ω的某些高度各向异性构型，该算子在数值上可能接近奇异，其谱呈现出明显的扁平化。这种现象在结构化矩矩阵中很典型，并与逆问题和病态线性系统中观察到的现象密切相关，参见例如 [9,26]。在这些情形下，温和的谱稳定化策略

$$S_\alpha = S + \alpha I, \quad \alpha > 0,$$

通常用于缓解特征值的极端压缩，同时保留算子的基本结构。尽管此类正则化变体的开发不在本文的讨论范围内，但这种联系指明了未来拓展的一个自然方向，并将本文框架置于面向结构化算子的数值线性代数技术的更广阔领域中。

命题1 以下陈述成立：

(i) 集合

$$\Sigma = \left\{ \mathcal{I}_j, \mathcal{L}_j, \mathcal{V}_k \,:\, j = 0, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, \tilde{d} \right\}$$

在 $\mathbb{P}_2\left(S_d\right)$ 上唯一确定，当且仅当式(18) 和(19)中分别定义的矩阵 A 和 T均可逆。

(ii) 相应的离散系统满足下确界–上确界条件

$$\inf_{\substack{v \in \mathbb{V} \\ \|v\|_\Omega = 1}} \inf_{w \in \mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \neq \mathbf{0}} \frac{\Psi(v + w; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} > 0,$$

ˆ当且仅当 S 是对称正定的。

(iii) 在这种情况下，*inf-sup* 常数有显式表达式

$$\beta = \inf_{\substack{v \in \mathbb{V} \\ \|v\|_\Omega = 1}} \inf_{w \in \mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) \neq \mathbf{0}} \frac{\Psi(v + w; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)} > 0.$$

Σ 的唯一可解性由 A 和 T的可逆性刻画，而定量 *inf-sup* 稳定性则由 S的正定性刻画。

证明 第一个结论由定理 1 得出。

根据定理 4，下确界–上确界常数满足

$$\beta = \inf_{\substack{v\in\mathbb{V}\\ \|v\|_\Omega=1}} \inf_{w\in\mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)},$$

其中，$\hat{}S$ 在（45）中定义。特别地，$\beta > 0$ 当且仅当$\hat{}S$ 为对称正定矩阵时成立。这就证明了（ii）和（iii）。

注 *10* 根据定理 1，矩系统 Σ 在 $\mathbb{P}_2$（S_d）上唯一确定，当且仅当A 和 T 均可逆（等价地，A 和 H 均可逆；见推论 1）。相比之下，该方法的定量下确界–上确界稳定性并不直接取决于 A 和 T，而是取决于在（45）中引入的对称矩阵$\hat{}\,S$ 。事实上，定理 4 给出

$$\beta = \inf_{\substack{v\in\mathbb{V}\\ \|v\|_\Omega=1}} \inf_{w\in\mathbb{W}} \sup_{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\neq\mathbf{0}} \frac{\Psi(v+w;\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}{\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\|_{Y,0}} = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)}.$$

此外，由于

$$\hat{S} = G^{-1/2} S G^{-1/2},$$

$\hat{}\,\hat{}$矩阵 S 和 S 合同，因此具有相同的惯性指数。因此，当且仅当 S 为对称正定时，S 才是对称正定的。

总结如下：

– 唯一可解性：$\Longleftrightarrow A$ 和 T 可逆；– 一致的 inf–sup 稳定性：$\Longleftrightarrow S$ 为对称正定矩阵。

2.2 满足面分离条件的示例

现在，我们给出三类具有代表性的配置。对于这些配置，面泛函 $\mathcal{L}_0,\ldots,\mathcal{L}_d$ 在适当的子空间 $\mathbb{W} \subset \mathbb{S}_2(S_d)$ 上线性无关；等价地说，这些配置对应于式 (16) 中定义的面矩阵 M 为非奇异矩阵的情形。这些示例说明了结构定理中所采用的面分离假设，并证明该假设与定理 1 的唯一可解性框架完全一致。

例 *2* 设 S_2 为一个非退化三角形，其重心坐标为 λ_i、$i = 0,1,2$，并令 $\Omega \in L^1(S_2)$ 表示 S_2 上的常数概率密度。由于

$$\dim\left(\mathbb{P}_2\left(S_2\right)\right) = 6, \quad \dim\left(\mathbb{P}_1\left(S_2\right)\right) = 3,$$

$\mathbb{P}_2(S_2)$ 中 $\mathbb{P}_1(S_2)$ 的正交补 $\mathbb{S}_2(S_2)$ 的维数为 3。我们引入函数

$$g_0 = \lambda_1\lambda_2, \quad g_1 = \lambda_2\lambda_0, \quad g_2 = \lambda_0\lambda_1,$$

它们张成了 $\mathbb{P}_2(S_2)$ 的一个三维子空间。由于

$$\operatorname{span}\{g_0,g_1,g_2\} \cap \mathbb{P}_1\left(S_2\right) = \{0\},$$

正交投影 $I-\Pi_{1,\ \Omega}$ 在 span $\{g_0,g_1,g_2\}$ 上是单射，其中 $\Pi_{1,\ \Omega}$ 在式 (6) 中定义。我们定义

$$\psi_i=\left(I-\Pi_{1,\Omega}\right)\left(g_i\right)\in\mathbb{S}_2\left(S_2\right),\quad i=0,1,2. \tag{49}$$

于是，集合 $\{\psi_i:\ \ i=0,\ 1,\ 2\}$ 线性无关，构成 $\mathbb{S}_2(S_2)$ 的一个基。

采用循环约定

$$\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_0,\quad \boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{v}_1,$$

我们引入线性参数化

$$\gamma_j:t\in[0,1]\to t\boldsymbol{v}_{j+1}+(1-t)\boldsymbol{v}_{j+2}\in F_j,\quad j=0,1,2.$$

设 $\mu_{j,\ 0}$ 是沿 F_j 的一个重心坐标，并定义

$$q_j(\boldsymbol{x})=6\mu_{j,0}^2(\boldsymbol{x})-6\mu_{j,0}(\boldsymbol{x})+1.$$

由于 γ_j 是仿射的，变量替换公式表明，对于 F_j 上的任意可积函数 ϕ，

$$\int_{F_j}\phi(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_0^1\phi\left(\gamma_j(t)\right)dt.$$

特别地，经过简短计算可得

$$\int_{F_j}q_j(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_0^1 q_j\left(\gamma_j(t)\right)dt=\int_0^1\left(6\mu_{j,0}^2\left(\gamma_j(t)\right)-6\mu_{j,0}\left(\gamma_j(t)\right)+1\right)dt=0$$

并且，对于 $i=0,1$,

$$\int_{F_j}\mu_{j,i}(\boldsymbol{x})q_j(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_0^1\mu_{j,i}\left(\gamma_j(t)\right)q_j\left(\gamma_j(t)\right)dt=0,$$

sh由于 q_j 与 $\mathbb{P}_1(F_j)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega_j}$ 正交。相应的面函数 a ls are

$$\mathcal{L}_j(f)=\int_{F_j}f_{\big|_{F_j}}(\boldsymbol{x})q_j(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\quad j=0,1,2.$$

由于 $(\Pi_{1,\Omega}(f))\in\mathbb{P}_1(F_j)$ 且 $q_j\perp\mathbb{P}_1(F_j)$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega_j}$，我们有$_{F_j}$

$$\mathcal{L}_j\left(\left(I-\Pi_{1,\Omega}\right)(f)\right)=\mathcal{L}_j(f),$$

因此，投影到 $\mathbb{S}_2(S_2)$ 上不会改变面矩。在基函数 ψ_i 上计算 $\mathcal{L}_j$ 可得

$$M=\left[\mathcal{L}_j\left(\psi_i\right)\right]_{ji}=\left[\mathcal{L}_j\left(g_i\right)\right]_{ji}\in\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

为计算 M 的各项，注意在 F_0 上可得

$$g_1{}_{\big|_{F_0}}=g_2{}_{\big|_{F_0}}=0,$$

而当

$$g_0\left(\gamma_0(t)\right)=\lambda_1\left(\gamma_0(t)\right)\lambda_2\left(\gamma_0(t)\right)=t(1-t)=t-t^2.$$

于是，我们得到

$$\mathcal{L}_0\left(\psi_0\right)=\mathcal{L}_0\left(g_0\right)=\int_0^1\left(\lambda_1\left(\gamma_0(t)\right)\lambda_2\left(\gamma_0(t)\right)\right)q_0\left(\gamma_0(t)\right)dt=-\frac{1}{30}.$$

通过循环置换

$$\mathcal{L}_1(\psi_1) = \mathcal{L}_2(\psi_2) = -\frac{1}{30},$$

而所有非对角元素均为零。因此，

$$M = -\frac{1}{30} I_3, \quad \det(M) \neq 0.$$

特别地，面泛函 $\mathcal{L}_0$，$\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$ 在 $\mathbb{S}_2(S_2)$ 上线性无关，因此在面空间 $\mathbb{W} = \mathrm{span}\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ 上也线性无关。

例 3 设 S_3 为一个非退化四面体，其重心坐标为 $\lambda_i, i = 0, \ldots, 3$，并设 $\Omega \in L^1(S_3)$ 是 S_3 上严格为正的概率密度。与例 2 类似，我们引入二次函数

$$g_0 = \lambda_1\lambda_2, \quad g_1 = \lambda_2\lambda_3, \quad g_2 = \lambda_3\lambda_0, \quad g_3 = \lambda_0\lambda_1,$$

并定义

$$\psi_i = (I - \Pi_{1,\Omega})(g_i), \quad i = 0, \ldots, 3.$$

由于

$$\mathrm{span}\{g_0, g_1, g_2, g_3\} \cap \mathbb{P}_1(S_3) = \{0\},$$

投影算子 $I - \Pi_{1,\Omega}$ 在该张成空间上是单射。因此，ψ_0，……，ψ_3 线性无关，我们令

$$\mathbb{W} = \mathrm{span}\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\} \subset \mathbb{S}_2(S_3).$$

对于每个 $j = 0$，……，3，令 ω_j 表示 Ω 在 F_j 上的归一化限制，并选取满足以下条件的二次多项式 $q_j \in \mathbb{P}_2(F_j)$：

(i) 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega_j}$ 的 $q_j \perp \mathbb{P}_1(F_j)$；$(ii)$ 在 $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ 中，在 F_j 上不为零的两个函数记为 $\bar{g}_{j,1}$ 和 $\bar{g}_{j,2}$，多项式 q_j 满足

$$\left\langle \bar{g}_{j,1}\big|_{F_j}, q_j \right\rangle_{\omega_j} = 0, \quad \left\langle \bar{g}_{j,2}\big|_{F_j}, q_j \right\rangle_{\omega_j} \neq 0.$$

我们证明，这样的选择总是可能的。考虑线性泛函

$$\chi_{j,1}, \chi_{j,2} : \mathbb{S}_2(F_j) \to \mathbb{R}, \quad \chi_{j,m}(q) = \left\langle \bar{g}_{j,m}\big|_{F_j}, q \right\rangle_{\omega_j}, \quad m = 1, 2.$$

根据构造，这些泛函在对偶空间 $(\mathbb{S}_2(F_j))^\star$ 中均非零且线性无关。因此，核 $\ker(\chi_{j,1})$ 和 $\ker(\chi_{j,2})$ 是 $\mathbb{S}_2(F_j) = \mathbb{P}_2(F_j) \ominus \mathbb{P}_1(F_j)$ 的不同子空间，我们可以选取

$$q_j \in \ker(\chi_{j,1}) \setminus \ker(\chi_{j,2}),$$

其满足（ii）。由于 $\ker(\chi_{j,m}) \subset \mathbb{S}_2(F_j)$，$m = 1$，2、条件（$i$）自动成立。

相应的面矩阵为

$$M = [\mathcal{L}_j(\psi_i)]_{ji} = [\mathcal{L}_j(g_i)]_{ji} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

对于每个 j，恰好有一个限制 $\bar{g}_{j,1}$、$\bar{g}_{j,2}$ 与 q_j 的内积不为零，而所有其他项均为零。因此，M 的每一行恰好包含一个非零项。适当重新排列列后，M 是一个对角矩阵，且对角元素均非零，因此

$$\det(M) \neq 0.$$

例*4* 设 $S_d \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有重心坐标 λ_i、 $i=0$、.....、 d 的非退化单纯形，并令

$$\Omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \lambda^\alpha(\boldsymbol{x}), \quad c_\alpha > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d),$$

是定义在 S_d 上的光滑且严格为正的概率密度。对于任意 $j = 0, \ldots, d$，我们固定一个任意的非零多项式 $q_j \in \mathbb{S}_2(F_j)$。由 (3) 可得

$$\dim\left(\mathbb{S}_2\left(S_d\right)\right) = \frac{d(d+1)}{2},$$

因此，对于 $d \geq 2$，可以选取 $d+1$ 个线性无关函数 $\psi_0, \ldots, \psi_d \in \mathbb{S}_2(S_d)$。然后我们定义

$$\mathbb{W} = \operatorname{span}\left\{\psi_0, \ldots, \psi_d\right\} \subset \mathbb{S}_2\left(S_d\right),$$

一个 $(d+1)$ 维子空间。相应的面矩阵为

$$M = \left[\mathcal{L}_j\left(\psi_i\right)\right]_{ji} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

M 的每个元素都以配置的几何参数和代数参数实解析地 依赖于它们，即:

$i)$ ψ_i 的系数，表示在 $\mathbb{S}_2(S_d)$ 的一个固定基下；$ii)$ 定义权函数 Ω 的系数；$iii)$ 面多项式 q_j 的系数，表示在 $\mathbb{S}_2(F_j)$ 的一个固定基下。

因此，行列式

$$\det\left(M\left(\left\{\psi_i\right\}_{i=0}^d, \left\{c_\alpha\right\}_{|\alpha|\leq m}, \left\{q_j\right\}_{j=0}^d\right)\right) = F\left(\left\{\psi_i\right\}_{i=0}^d, \left\{c_\alpha\right\}_{|\alpha|\leq m}, \left\{q_j\right\}_{j=0}^d\right)$$

是这些有限个参数的实解析函数。如果至少有一个可容许的配置

$$\left(\left\{\psi_i\right\}_{i=0}^d, \left\{c_\alpha\right\}_{|\alpha|\leq m}, \left\{q_j\right\}_{j=0}^d\right)$$

满足 $\det(M) \neq 0$，那么 F 在相应的参数空间上不恒等于零。因此， F 的零点集是该空间的真子集，为实解析子集，内部为空且勒贝格测度为零。

根据例2和例3，对于 $d = 2$和 $d = 3$，存在显式的非退化配置。对于更高维情形 $d > 3$，可以仿照例2，取常数权重和适当选取的二次面多项式，从而得到满足 $\det(M) \neq 0$的配置。由于对于任意d，$\det(M)$ 都实解析地依赖于代数参数，因此每个维度中至少存在一个非退化配置，这意味着 F 不恒等于零。因此，对于所有 $d \geq 2$，面分离条件通常成立。

注*11* 在假设 M 可逆的情况下，可以选择 $\mathbb{V}$ 的基 $\{\rho_k\}_{k=1}^d$ 和 $\mathbb{W}$的基 $\{\psi_j\}_{j=0}^d$ ，使得

$$G = I_{\tilde{d}}, \quad M = I_{d+1}, \quad C = 0.$$

在这种归一化配置下，舒尔补变为

$$T = M - \tilde{C}G^{-1}C = I_{d+1},$$

而（43）中的分块矩阵 $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ 得出

$$S = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} = I_{\tilde{d}}.$$

因此，根据定义（45），我们有

$$\hat{S} = G^{-1/2} S G^{-1/2} = I_{\tilde{d}}.$$

因此，根据定理 4，inf–sup 常数满足

$$\beta = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)} = \sqrt{\sigma_{\min}\left(I_{\tilde{d}}\right)} = 1.$$

因此，在这种正交归一且面分离的构型中，二次积分插值问题不仅是唯一确定的，而且还具有最优稳定性，即离散 inf–sup 常数取得值 $\beta = 1$。

2.3 仿射不变几何鲁棒性

局部 inf–sup 常数关于约化舒尔补的谱刻画表明，原则上，稳定性可能取决于每个单纯形的形状和纵横比。在实际相关的情形中，所有单元均通过仿射映射由同一个参考单纯形得到，并且权重和测试函数也相应地进行传递；以下结果表明，局部矩矩阵、约化舒尔补以及局部 inf–sup 常数事实上在此类几何变换下保持不变。

因此，对于采用仿射映射和重心拉回的任意单纯形剖分，β 的计算（以及用于参数调优的任何谱量）都可归结为参考单纯形上的单个特征值问题，并可在所有单元之间复用。

定理 5 设 $\mathcal{T}_h$ 为一个单纯形网格，其中每个单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 都是固定$\hat{}$ $\hat{}$ 参考单纯形 K 在仿射双射 $\Phi_K\colon K \to K$ 下的像。对于每个 $j = 0, \ldots, d$，定义 $F_j := \Phi_K\left(\hat{F}_j\right)$，并记

$$\Phi_{K,j} = \Phi_K|_{\hat{F}_j},$$

$\hat{}$ Φ_K 在 F_j上的限制。假设以下条件成立：

– 对于任意 $f \in L^1(K)$，

$$\int_K f(\boldsymbol{\sigma}) \Omega_K(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\hat{K}} f\left(\Phi_K\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right) \hat{\Omega}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) d\hat{\boldsymbol{\sigma}}; \tag{50}$$

– 对于每个面 $\hat{} \; F_j \subset \hat{}K$ 以及任意 $g \in L^1(F_j)$，

$$\int_{F_j} g(\boldsymbol{x}) \omega_{K,j}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\hat{F}_j} g\left(\Phi_{K,j}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right)\right) \hat{\omega}_j\left(\hat{\boldsymbol{x}}\right) d\hat{\boldsymbol{x}}; \tag{51}$$

– 对于每个 K，内部测试函数和面测试函数满足

$$\rho_{K,k}(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\rho}_k\left(\Phi_K^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\right), \quad \boldsymbol{\sigma} \in K, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}, \tag{52}$$

and

$$\psi_{K,j}(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\psi}_j\left(\Phi_K^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\right), \quad \boldsymbol{\sigma} \in K, \quad j = 0, \ldots, d. \tag{53}$$

此外，多项式 $q_{K,\,j}$ 满足

$$q_{K,j}(\boldsymbol{x}) = \hat{q}_j\left(\Phi_{K,j}^{-1}(\boldsymbol{x})\right), \quad \boldsymbol{x} \in F_j, \quad j = 0, \ldots, d; \tag{54}$$

ˆ ˆ− K 上的约化稳定性矩阵 S 是对称正定的。

于是，对所有 $K \in \mathcal{T}_h$，相应的局部矩矩阵 $\left(G_K, C_K, \tilde{C}_K, M_K\right)$ 均与ˆK上的对应矩阵 $\left(G, C, \tilde{C}, M\right)$ 一致。特别地，约化稳定性矩阵 ˆ S_K和局部 ***inf–sup*** 常数 β_K 与 K 及 h无关，并且满足 $\beta_K = \beta > 0$。

ˆ证明 对每个 $K \in \mathcal{T}_h$，令 $\Phi_K \colon K \to K$ 为满足下述条件的仿射映射

$$\Phi_K\left(\hat{\boldsymbol{v}}_j\right) = \boldsymbol{v}_j, \quad j = 0, \ldots, d, \tag{55}$$

其中，ˆ$\boldsymbol{v}_j$、 $j = 0, \ldots, d$是 ˆK 的顶点。回顾一下，(50) 和 (51) 是仿射映射 Φ_K （及其在各面上的限制）下的变量替换恒等式。特别地，ˆΩ （以及 ˆ F_j 上的 ˆω_j ）表示参考单纯形上的拉回密度，其中包含与 Φ_K 相应的雅可比因子。

利用 (50)，内部格拉姆矩阵 G_K 的各项可写为

$$\begin{aligned}
[G_K]_{k\ell} &= \int_K \rho_{K,k}(\boldsymbol{\sigma})\rho_{K,\ell}(\boldsymbol{\sigma})\Omega_K(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} \\
&= \int_{\hat{K}} \rho_{K,k}\left(\Phi_K\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right)\rho_{K,\ell}\left(\Phi_K\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right)\hat{\Omega}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)d\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= \int_{\hat{K}} \hat{\rho}_k\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\hat{\rho}_\ell\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\hat{\Omega}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)d\hat{\boldsymbol{\sigma}},
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们使用了 (52)。右端不依赖于 K ，并定义了 ˆK上的参考矩阵 $[G]_{k\ell}$ 。因此，对于所有 $K \in \mathcal{T}_h$，均有 $G_K = G$ 。

类似地，利用 (51)、(52)、(53) 和 (54)，可以证明，对于任意 $K \in \mathcal{T}_h$，耦合块与面块满足

$$C_K = C, \quad \tilde{C}_K = \tilde{C}, \quad M_K = M.$$

约化稳定性矩阵 ˆ S_K 由块 $\left(G_K, C_K, \tilde{C}_K, M_K\right)$ 通过固定的一系列代数运算得到。由于这些块均与其参考矩阵对应块一致，因此我们得到

$$\hat{S}_K = \hat{S}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

根据将局部稳定性常数 β_K 与 S_K 的最小特征值 ˆ联系起来的一般 inf–sup 结果，我们有

$$\beta_K^2 = \sigma_{\min}\left(\hat{S}_K\right) = \sigma_{\min}\left(\hat{S}\right) = \beta^2.$$

ˆ由于根据假设， S 是对称正定的，因此 $\beta > 0$ ，从而

$$\beta_K = \beta > 0.$$

3 面与内部二次多项式的最优选择

面矩泛函

$$\mathcal{L}_j(f) = \int_{F_j} f_{\big|_{F_j}}(\boldsymbol{x}) q_j(\boldsymbol{x})\, \omega_j(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \left\langle f_{\big|_{F_j}}, q_j \right\rangle_{\omega_j}, \quad j = 0, \ldots, d,$$

确定面块

$$M = [\mathcal{L}_j(\psi_i)]_{ji} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)},$$

其中， $\psi_0, \ldots, \psi_d$ 是所选的面空间 $\mathbb{W}$的基。每个多项式 $q_j \in \mathbb{P}_2(F_j)$都必须满足

$$\langle q_j, \varphi \rangle_{\omega_j} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_1(F_j).$$

这一条件不能唯一确定 q_j，而这些多项式的具体选取会影响面块 M 的谱条件数，进而影响全局矩阵 H。

下面的定理给出一个基于谱性质的判据，用于选取族 $\{q_j\}_{j=0}^{d}$，旨在改善 M 的条件性，同时保持唯一可解性。为此，对每个面 F_j ，我们将 q_j 限制在正交补空间

$$\mathbb{S}_2(F_j) = \mathbb{P}_2(F_j) \ominus \mathbb{P}_1(F_j). \tag{56}$$

接下来，我们回顾 Gram 矩阵的一项基本谱性质，这对我们的讨论很有用。

引理 6 设 G 是与线性无关族 $\{g_s\}_{s=1}^{n} \subset L^2_\Omega(S_d)$相关联的格拉姆矩阵，并将其归一化，使得

$$\|g_s\|_\Omega = 1, \quad s = 1, \ldots, n.$$

则 G 是对称正定的，并且

$$\sigma_{\min}(G) \le 1 \le \sigma_{\max}(G). \tag{57}$$

因此

$$\kappa_2(G) = \frac{\sigma_{\max}(G)}{\sigma_{\min}(G)} \ge 1,$$

当且仅当 $\{g_s\}_{s=1}^{n}$ 正交归一时等号成立，或者等价地， $G = I_n$。

证明 对于任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\boldsymbol{x}^\top G \boldsymbol{x} = \sum_{m,s=1}^{n} x_m x_s \langle g_m, g_s \rangle_\Omega = \left\| \sum_{s=1}^{n} x_s g_s \right\|_\Omega^2 \ge 0,$$

由于函数 g_s、 $s = 1, \ldots, n$ 线性无关性，对于 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 不等式为严格不等式。因此 G 是对称正定的。令

$$G = Q \Lambda Q^\top, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

为其谱分解，其中

$$0 < \sigma_{\min}(G) \le \sigma_i \le \sigma_{\max}(G), \quad i = 1, \ldots, n.$$

由于 $\|g_s\|_\Omega^2 = \langle g_s, g_s \rangle_\Omega = 1$, $s = 1, \ldots, n$， G 的所有对角元素均为 1。因此 ore

$$\operatorname{trace}(G) = \sum_{s=1}^{n} \langle g_s, g_s \rangle = n = \sum_{s=1}^{n} \sigma_s.$$

特别地，平均特征值为 1，这意味着

$$\sigma_{\min}(G) \le 1 \le \sigma_{\max}(G).$$

由于谱条件数满足

$$\kappa_2(G) = \frac{\sigma_{\max}(G)}{\sigma_{\min}(G)} \ge 1,$$

当且仅当 G 的所有特征值均等于 1 时取等号，即 $\Lambda = I_n$ ，从而$G = I_n$。在此情况下，族 $\{g_s\}_{s=1}^{n}$ 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$是正交归一的。

定理 6 设 $\{\psi_j\}_{j=0}^{d}$ 是 $\mathbb{W}$ 的一组基。对于每个 $j \in \{0,\dots,d\}$，假设存在一个指标 $i(j) \in \{0,\dots,d\}$ 使得

$$\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\Big|_{F_j}\right) \neq 0.$$

我们定义

$$q_j^\star = \arg\max_{\substack{q\in\mathbb{S}_2(F_j)\\ \|q\|_{\omega_j}=1}} \left|\left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, q\right\rangle_{\omega_j}\right|. \tag{58}$$

那么最大化元存在，且除符号外唯一，并由下式给出

$$q_j^\star = \frac{\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\Big|_{F_j}\right)}{\left\|\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\Big|_{F_j}\right)\right\|_{\omega_j}}. \tag{59}$$

特别地，$q_j^\star \in \mathbb{S}_2(F_j)$ 且 $\left\|q_j^\star\right\|_{\omega_j} = 1$。

证明 令 $\{\tau_{j,\iota}\}_{\iota=1}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ 为 $\mathbb{S}_2(F_j)$ 的一个标准正交基，且相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\omega_j}$。任意满足 $\|q\|_{\omega_j}=1$ 的 $q \in \mathbb{S}_2(F_j)$ 都可写为

$$q = \sum_{\iota=1}^{\frac{d(d-1)}{2}} \zeta_\iota \tau_{j,\iota}, \quad \|\boldsymbol{\zeta}\|_2 = 1, \quad \boldsymbol{\zeta} = \left(\zeta_1,\dots,\zeta_{\frac{d(d-1)}{2}}\right)^\top.$$

根据内积的线性性，

$$\left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, q\right\rangle_{\omega_j} = \sum_{\iota=1}^{\frac{d(d-1)}{2}} \zeta_\iota \left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, \tau_{j,\iota}\right\rangle_{\omega_j} = \boldsymbol{\zeta}^\top \boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}, \tag{60}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)} = \left(\left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, \tau_{j,1}\right\rangle_{\omega_j}, \dots, \left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, \tau_{j,\frac{d(d-1)}{2}}\right\rangle_{\omega_j}\right)^\top.$$

Since $\|q\|_{\omega_j}=1$ 意味着 $\|\boldsymbol{\zeta}\|_2 = 1$，根据（60），（58）中的最大化问题可写为 as

$$\arg\max_{\substack{q\in\mathbb{S}_2(F_j)\\ \|q\|_{\omega_j}=1}} \left|\left\langle \psi_{i(j)}\Big|_{F_j}, q\right\rangle_{\omega_j}\right| = \arg\max_{\|\boldsymbol{\zeta}_j\|_2=1} \left|\boldsymbol{\zeta}_j^\top \boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}\right|.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，当.....时，最大值可取到

$$\boldsymbol{\zeta}_j = \frac{\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}}{\left\|\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}\right\|_2}.$$

因此，最优多项式为

$$q_j^\star = \sum_{\iota=1}^{\frac{d(d-1)}{2}} \zeta_{j,\iota}\tau_{j,\iota} = \sum_{\iota=1}^{\frac{d(d-1)}{2}} \frac{\left\langle \psi_{i(j)}\big|_{F_j}, \tau_{j,\iota} \right\rangle_{\omega_j}}{\left\|\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}\right\|_2}\tau_{j,\iota} = \frac{\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\big|_{F_j}\right)}{\left\|\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}\right\|_2}.$$

最后，应用 Parseval 恒等式可得

$$\left\|\boldsymbol{\psi}_{j,i(j)}\right\|_2^2 = \left\|\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\big|_{F_j}\right)\right\|_{\omega_j}^2,$$

然后

$$q_j^\star = \frac{\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\big|_{F_j}\right)}{\left\|\left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(\psi_{i(j)}\big|_{F_j}\right)\right\|_{\omega_j}}.$$

3.1 显式实现

现在给出上一节讨论的示例中面二次多项式的显式表达式。

– **常数权重**。
对于一维面 $t \in [0,1]$ 上的均匀权重 $\omega_j(t) = 1$，与 $\mathbb{P}_1([0,1])$ 正交的唯一归一化二次多项式为

$$q_j^\star(t) = \sqrt{5}\left(6t^2 - 6t + 1\right).$$

这与例 2 中所作的选择一致。
– **狄利克雷权重**。
对于狄利克雷型权重

$$\omega_j(t) = t^{\alpha_r - 1}\left(1 - t\right)^{\alpha_s - 1}, \quad \alpha_r, \alpha_s > 0,$$

子空间 $\mathbb{P}_2([0,1]) \ominus \mathbb{P}_1([0,1])$ 是一维的，由所有关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega_j}$ 与 1 和 t 正交的二次多项式构成。该空间的典范生成元是二次平移雅可比多项式，用 $[0,1]$ 坐标表示为

$$q_j^\star(t) = c_j \pi_{J,2}^{(\alpha_r - 1, \alpha_s - 1)}\left(2t - 1\right),$$

其中 $\pi^{(\alpha_r-1,\alpha_s-1)}_{J,\,2}$ 表示经典雅可比多项式，而 $c_j > 0$ 是一个归一化常数，选取它使得 $\left\|q_j^\star\right\|_{\omega_j} = 1$。根据构造，多项式 $q_j^\star$ 满足

$$\int_0^1 q_j^\star(t)\omega_j(t)dt = 0, \quad \int_0^1 t q_j^\star(t)\omega_j(t)dt = 0,$$

a且它是满足这些正交条件的 $\mathbb{P}_2([0,1])$ 中唯一（差一个符号）的单元。

在例 2 的三角形构型中，面泡函数为

$$g_0 = \lambda_1\lambda_2, \quad g_1 = \lambda_2\lambda_0, \quad g_2 = \lambda_0\lambda_1,$$

相应的基函数为

$$\psi_i = \left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)(g_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

在每个面上 F_j 我们有

$$g_{i|_{F_j}} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mu_{j,0}\mu_{j,1} \in \mathbb{P}_2(F_j), & i = j, \end{cases}$$

其中$\mu_{j,\ 0}$ 和 $\mu_{j,\ 1}$ 表示 F_j上的局部重心坐标。因此，

$$\psi_{i|_{F_j}} = \left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)\left(g_{i|_{F_j}}\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \left(I - \Pi_{1,\omega_j}\right)(\mu_{j,0}\mu_{j,1}) \in \mathbb{S}_2(F_j), & i = j. \end{cases}$$

由于 $q_j^\star \in \mathbb{S}_2(F_j)$ 与 $\mathbb{P}_1(F_j)$ 正交，因此

$$\left\langle \psi_{i|_{F_j}}, q_j^\star \right\rangle_{\omega_j} = \left\langle g_{i|_{F_j}}, q_j^\star \right\rangle_{\omega_j},$$

因此，式 (16) 中定义的面矩阵 M 为对角矩阵，其元素为

$$[M]_{jj} = \left\langle \mu_{j,0}\mu_{j,1}, q_j^\star \right\rangle_{\omega_j} \neq 0.$$

3.2 内部二次多项式的最优选择

In 第 2 节引入的二次直方插值框架中，内部矩函数 ls

$$\mathcal{V}_k(f) = \int_{S_d} f(\boldsymbol{\sigma})\rho_k(\boldsymbol{\sigma})\Omega(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma}, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d},$$

是式 (9) 中定义的面矩 $\mathcal{L}_j(f)$ 的体对应项。虽然面测试函数 $q_j^\star$ 的最优选择改善了面块 M 的条件性，但内部二次多项式 ρ_ℓ 的选择决定了体块的条件性

$$G = \left[\mathcal{V}_k(\rho_\ell)\right]_{k\ell} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}\times\tilde{d}},$$

从而决定了矩阵的谱稳定性

$$H = \begin{pmatrix} G & C \\ \tilde{C} & M \end{pmatrix}.$$

我们的目标是构造一个最优族 $\{\rho_\ell^\star\}_{\ell=1}^d$，在定理 1 的唯一可解性假设下，使 G 的条件数最小，或等价地，使其最小特征值最大。

每个内部多项式 ρ_ℓ 都必须关于加权内积$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\Omega$与所有仿射函数正交，即

$$\langle\rho_\ell, 1\rangle_\Omega = 0, \quad \langle\rho_\ell, \lambda_j\rangle_\Omega = 0, \quad j = 0, \ldots, d, \quad \ell = 1, \ldots, \tilde{d}.$$

只要这种正交化可行，我们还要求空间 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\Omega}$相互正交，也就是说

$$\langle \rho_\ell, \psi_j \rangle_{\Omega} = 0, \quad j = 0, \ldots, d, \quad \ell = 1, \ldots, \tilde{d}.$$

在此背景下，以下定理确立了投影内部生成元的谱最优性。

定理 7 令 $\{p_\ell\}_{\ell=1}^{d} \subset \mathbb{P}_2(S_d)$ 满足

$$\mathbb{V} = \operatorname{span}\left\{ (I - \Pi_{1,\Omega})(p_\ell) \,:\, \ell = 1, \ldots, \tilde{d} \right\} \subset \mathbb{S}_2(S_d).$$

我们将可容许类定义为

$$\mathcal{A} = \left\{ \{\rho_\ell\}_{\ell=1}^{\tilde{d}} \subset \mathbb{S}_2(S_d) \,:\, \rho_\ell \in \operatorname{span}\{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_\ell)\},\ \|\rho_\ell\|_{\Omega} = 1 \right\}. \tag{61}$$

考虑归一化族

$$\rho_\ell^{\star} = \frac{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_\ell)}{\|(I - \Pi_{1,\Omega})(p_\ell)\|_{\Omega}}, \quad \ell = 1, \ldots, \tilde{d}, \tag{62}$$

并设 $G^{\star} = \left[\langle \rho_\ell^{\star}, \rho_k^{\star} \rangle_{\Omega}\right]_{k\ell}$。则

$$\sigma_{\min}(G^{\star}) = \max_{\{\rho_\ell\}_{\ell=1}^{\tilde{d}} \in \mathcal{A}} \sigma_{\min}(G), \tag{63}$$

也就是说，族 (62) 在 $\mathcal{A}$ 中达到了条件数最优的内部格拉姆块。此外，若 $\tilde{}$ 中的投影 $\{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_\ell)\}_{\ell=1}^{d}$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega}$ 中两两正交，则 $G^{\star} = I_{\tilde{d}}$。

证明 设 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{\tilde{d}}$ 是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega}$ 的 $\mathbb{V}$ 的标准正交基。对于每个 $k \in \left\{1, \ldots, \tilde{d}\right\}$,$\tilde{}$，由于 $(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k) \in \mathbb{V}$, 存在系数 $a_{k\ell} \in \mathbb{R}$, $\ell = 1, \ldots, d$，使得

$$(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k) = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} a_{k\ell} \tau_\ell. \tag{64}$$

根据张成假设,

$$\boldsymbol{a}_k = \left(a_{k1}, \ldots, a_{k\tilde{d}}\right)^{\top} \neq \mathbf{0},$$

根据 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{d}$ 的正交归一性，我们得到

$$\|(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k)\|_{\Omega}^2 = \|\boldsymbol{a}_k\|_2^2. \tag{65}$$

因此，由 (64) 和 (65) 可将归一化函数写成

$$\rho_k^{\star} = \frac{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k)}{\|(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k)\|_{\Omega}} = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} \frac{a_{k\ell}}{\|\boldsymbol{a}_k\|_2} \tau_\ell, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}. \tag{66}$$

此外

$$\rho_k^{\star} \in \operatorname{span}\{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k)\}, \quad k = 1, \ldots, \tilde{d}, \tag{67}$$

因此 $\{\rho_k^{\star}\}_{k=1}^{d} \in \mathcal{A}$。

现在令 $\{\rho_k\}_{k=1}^{d} \in \mathcal{A}$。由于

$$\rho_k \in \operatorname{span}\{(I - \Pi_{1,\Omega})(p_k)\} \subset \mathbb{V}, \quad k = 1, \dots, \tilde{d}, \tag{68}$$

我们可以写成

$$\rho_k = \sum_{\ell=1}^{\tilde{d}} u_{k\ell}\tau_\ell, \tag{69}$$

其中

$$\boldsymbol{u}_k = \left(u_{k1}, \dots, u_{k\tilde{d}}\right)^\top.$$

Us根据 (67) 和 (68)，归一化 $\|\rho_k\|_\Omega = 1$ 意味着存在 $s_k \in \{-1, +1\}$ suc h that

$$\boldsymbol{u}_k = \left(u_{k1}, \dots, u_{k\tilde{d}}\right)^\top = s_k \frac{\boldsymbol{a}_k}{\|\boldsymbol{a}_k\|_2}, \quad k = 1, \dots, \tilde{d}. \tag{70}$$

设

- $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为一个矩阵，其第 k 行为 $\boldsymbol{u}_k^\top$；
- $U^\star \in \mathbb{R}^{\tilde{d}\times\tilde{d}}$ 为一个矩阵，其第 k 行为 $(\boldsymbol{a}_k/\|\boldsymbol{a}_k\|_2)^\top$；
- $S \in \mathbb{R}^{\tilde{d}\times\tilde{d}}$ 为一个对角矩阵，其对角元素为 $S_{kk} = s_k$、$k = 1$、.....、$\tilde{d}$。

由此可得（70）

$$U = SU^\star. \tag{71}$$

根据 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{d}$ 的正交归一性以及（69），

$$\langle \rho_\ell, \rho_k \rangle_\Omega = \boldsymbol{u}_\ell^\top \boldsymbol{u}_k. \tag{72}$$

结合（71）和（72），可得

$$G = UU^\top = (SU^\star)(SU^\star)^\top = S\left(U^\star(U^\star)^\top\right)S = SG^\star S. \tag{73}$$

因此，G 与 $G^\star$ 相似，故具有相同的谱。特别地，对于任意$\{\rho_k\}_{k=1}^{d} \in \mathcal{A}$，有

$$\sigma_{\min}(G^\star) = \sigma_{\min}(G),$$

从而

$$\sigma_{\min}(G^\star) = \max_{\{\rho_\ell\}_{\ell=1}^{\tilde{d}} \in \mathcal{A}} \sigma_{\min}(G).$$

最后，若 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{d}$ 中的向量两两正交，则由（66）可得

$$\langle \rho_\ell^\star, \rho_k^\star \rangle = \delta_{\ell k}, \quad \ell, k = 1, \dots, \tilde{d},$$

因此，$G^\star = I_{\tilde{d}}$ 根据引理 6 是谱最优的。

4 显式且实用的构造

本节给出关于 Dirichlet 型权重的内部二次多项式的闭式解析表达式。这一具体构造展示了上文介绍的一般框架，尤其将常数权重 $\Omega = 1$ 的情形作为特例包含在内。

4.1 Dirichlet 权重

Dirichlet 权重定义为

$$\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\sigma}) = C_{\boldsymbol{\alpha},d} \prod_{i=0}^{d} \lambda_i^{\alpha_i - 1}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0, \ldots, d, \quad \boldsymbol{\sigma} \in S_d, \tag{74}$$

其中

$$C_{\boldsymbol{\alpha},d} = \frac{\Gamma\left(d + \sum_{j=0}^{d} \alpha_j\right)}{|S_d|\, d! \prod_{j=0}^{d} \Gamma\left(\alpha_j\right)}$$

表示所选取的归一化常数，使得

$$\int_{S_d} \Omega_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} = 1.$$

现在，我们证明单纯形上带 Dirichlet 权重的二次空间具有唯一可解性。

推论 2 设 $S_d \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非退化的 d-单纯形，其重心坐标为 $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$，*Dirichlet* 权重为 $\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\sigma})$。记 $\omega_{j,\boldsymbol{\alpha}}$ 为面 F_j上的诱导狄利克雷权函数。则自由度集合

$$\Sigma = \left\{ \mathcal{I}_j, \mathcal{L}_j, \mathcal{V}_k \,:\, j = 0, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, \tilde{d} \right\}$$

对于任意选择的狄利克雷参数 $\alpha_i > 0$，在 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上唯一确定。

证明 设 $p \in \mathbb{P}_2(S_d)$ 满足

$$\mathcal{I}_j(p) = \mathcal{L}_j(p) = \mathcal{V}_k(p) = 0, \quad j = 0, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, \tilde{d}.$$

根据定理 1，我们必须证明 A 和舒尔补

$$T = M - \tilde{C} G^{-1} C \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

均可逆。

我们首先证明 A 可逆。由于 $\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}$ 是狄利克雷权重，其在 F_j 上的限制仍为狄利克雷型，参数为 $\{\alpha_i\}_{i\neq j}$，且归一化为单位质量。因此，利用 (1)，我们得到

$$[A]_{ji} = \mathcal{I}_j\left(\lambda_i\right) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \dfrac{\alpha_i}{S - \alpha_j}, & i \neq j, \end{cases}$$

其中

$$S = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i.$$

因此，我们可以写成

$$A = DB,$$

其中

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{S - \alpha_0}, \ldots, \frac{1}{S - \alpha_d} \right),$$

且 $B \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ 由下式给出

$$[B]_{ji} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \alpha_i, & i \neq j. \end{cases}$$

因此， B 具有如下形式

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_d \\ \alpha_0 & 0 & \cdots & \alpha_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_d \\ \alpha_0 & 0 & \cdots & \alpha_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{d} \alpha_i \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

为了计算最后一个行列式，我们将第一列替换为所有列之和，得到

$$\det(B) = d \prod_{i=0}^{d} \alpha_i \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

接下来，从其余各行中分别减去第一行，得到一个上三角矩阵

$$\det(B) = d \prod_{i=0}^{d} \alpha_i \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^d d \prod_{i=0}^{d} \alpha_i \neq 0.$$

因此,

$$\det(A) = \det(D)\det(B) = (-1)^d d \left(\prod_{i=0}^{d} \frac{\alpha_i}{S - \alpha_i} \right) \neq 0,$$

这证明了 A 是非奇异的。

剩下要证明 T 可逆。根据定理 3，我们可以选取 $\mathbb{V}$、 $\mathbb{W}$ 和面测试函数 q_j，使得 $C = 0$和 $G = I_{\tilde{d}}$成立，从而 $T = M$。此外，定理 3 的证明中给出的显式构造确保 M 的每一行在不同的列中恰好含有一个非零项，因此 M 可逆。因此， T 可逆，证明完毕。

注 *12* 在此情形下，任意二次单项式的 $L^2_{\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}}$–正交投影

$$\lambda_j \lambda_\ell, \quad 0 \leq j < \ell \leq d,$$

到 $\mathbb{S}_2(S_d) = \mathbb{P}_2(S_d) \ominus \mathbb{P}_1(S_d)$上的投影具有闭式表示

$$\rho_{j\ell}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_j(\boldsymbol{\sigma})\lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma}) - k_\ell \lambda_j(\boldsymbol{\sigma}) - k_j \lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma}) + h_{j\ell},$$

其中

$$k_\ell = \frac{\alpha_\ell}{S+2}, \quad k_j = \frac{\alpha_j}{S+2}, \quad h_{j\ell} = \frac{\alpha_j \alpha_\ell}{(S+1)(S+2)}, \quad S = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i.$$

我们通过一个双射为无序顶点对集合编上索引

$$\nu : \left\{1, \ldots, \frac{d(d+1)}{2}\right\} \mapsto \{(j, \ell) \,:\, 0 \le j < \ell \le d\}$$

并设定 $\rho_\iota = \rho_{\nu(\iota)}$, $\iota = 1,\ldots,\ {}^{d}_{(d+1)\,2}$。

由 (1) 可得

$$\langle \rho_\iota, 1\rangle_\Omega = 0, \quad \langle \rho_\iota, \lambda_j\rangle_\Omega = 0, \quad j = 0, \ldots, d, \quad \iota = 1, \ldots, \frac{d(d+1)}{2},$$

也就是说，每个 ρ_ι 都关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ 与 $\mathbb{P}_1(S_d)$ 正交。由于 $\dim(\mathbb{S}_2(S_d)) = {}^{d}_{(d+1)\,2}$，${}_{d(d+1)}$集合 $\{\rho_\iota\}_{\iota=1}^{2}$ 构成 $\mathbb{S}_2(S_d)$ 的一组基。

Remark13 通过对每个 j =选择 $\alpha_j = 1$，即可得到常权情形 $\Omega = 1$ $0, \cdots d$。在此情况下，系数简化为

$$k_\ell = k_j = \frac{1}{d+3}, \quad h_{j\ell} = \frac{1}{(d+2)(d+3)},$$

相应的多项式可显式写为

$$\rho_{j\ell}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_j(\boldsymbol{\sigma})\lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{d+3}\left(\lambda_j(\boldsymbol{\sigma}) + \lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma})\right) + \frac{1}{(d+2)(d+3)}.$$

为便于说明，我们列出最低维数下的显式表达式。

– 对于 $d = 2$（三角形单纯形），有 $S = d + 1 = 3$，因此

$$k_\ell = k_j = \frac{1}{5}, \quad h_{j\ell} = \frac{1}{20}.$$

因此，

$$\rho_{j\ell}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_j(\boldsymbol{\sigma})\lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{5}\left(\lambda_j(\boldsymbol{\sigma}) + \lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma})\right) + \frac{1}{20}, \quad 0 \le j < \ell \le 2.$$

– 对于 $d = 3$（四面体单纯形），有 $S = d + 1 = 4$，因此

$$k_\ell = k_j = \frac{1}{6}, \quad h_{j\ell} = \frac{1}{30}.$$

因此，

$$\rho_{j\ell}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda_j(\boldsymbol{\sigma})\lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{6}\left(\lambda_j(\boldsymbol{\sigma}) + \lambda_\ell(\boldsymbol{\sigma})\right) + \frac{1}{30}, \quad 0 \le j < \ell \le 3.$$

4.2 仿射权情形

仿射权定义为

$$\Omega(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \lambda_i(\boldsymbol{\sigma}), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0, \dots, d, \quad \boldsymbol{\sigma} \in S_d, \tag{75}$$

并将其归一化，使得

$$\int_{S_d} \Omega(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} = 1.$$

类比狄利克雷情形，我们现在证明仿射权下二次自由度的唯一可解性。

推论 3 设 $S_d \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非退化单纯形，其重心坐标为 $\lambda_0, \dots, \lambda_d$，且 Ω 是仿射权。设 ω_j 表示在 F_j上诱导的归一化面密度。那么，自由度集合

$$\Sigma = \left\{ \mathcal{I}_j, \mathcal{L}_j, \mathcal{V}_k \ : \ j = 0, \dots, d, \, k = 1, \dots, \tilde{d} \right\}$$

在任意参数选择 $\alpha_i > 0$ 下，都是 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 上的唯一确定集。

证明 设 $p \in \mathbb{P}_2(S_d)$ 满足

$$\mathcal{I}_j(p) = \mathcal{L}_j(p) = \mathcal{V}_k(p) = 0, \quad j = 0, \dots, d, \ k = 1, \dots, \tilde{d}.$$

根据定理 1，只需证明 A 和

$$T = M - \tilde{C} G^{-1} C \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

均可逆。我们先证明 A 可逆。由于 $\lambda_j = 0$ 在 F_j 上，我们有

$$[A]_{jj} = 0, \quad [A]_{ji} = \mathcal{I}_j(\lambda_i) = \int_{F_j} \mu_{j,i}(\boldsymbol{x}) \omega_j(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{s=0 \\ s\neq j}}^{d} \alpha_s \int_{F_j} \mu_{j,i}(\boldsymbol{x}) \mu_{j,s}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\displaystyle\sum_{\substack{s=0 \\ s\neq j}}^{d} \alpha_s \int_{F_j} \mu_{j,s}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}. \tag{76}$$

利用 (1)，得到

$$\begin{aligned} \int_{F_j} \mu_{j,i}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \frac{|F_j|}{d}, \\ \int_{F_j} \mu_{j,i}^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \frac{2\,|F_j|}{d(d+1)}, \\ \int_{F_j} \mu_{j,i}(\boldsymbol{x}) \mu_{j,s}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} &= \frac{|F_j|}{d(d+1)}, \ i \neq s. \end{aligned}$$

将这些表达式代入式 (76)，得到

$$[A]_{jj} = 0, \quad [A]_{ji} = \frac{S_j + \alpha_i}{(d+1) S_j}, \ i \neq j, \tag{77}$$

其中

$$S_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i. \tag{78}$$

令 $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ 满足

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

设

$$X = \sum_{i=0}^{d} x_i, \quad Y = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x_i, \quad \alpha_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i. \tag{79}$$

由 (77)，对每个 $j = 0, \ldots, d$，可得

$$0 = [A\boldsymbol{x}]_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} [A]_{ji} x_i = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \frac{S_j + \alpha_i}{(d+1)S_j} x_i = \frac{1}{(d+1)S_j} \left(S_j \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} x_i + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i x_i \right),$$

这意味着

$$S_j \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} x_i + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i x_i = 0.$$

因此，补上缺失的 $i = j$ 项并利用 (78)，可得

$$S_j \sum_{i=0}^{d} x_i + \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x_i = S_j x_j + \alpha_j x_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{d} \alpha_i x_j + \alpha_j x_j,$$

也就是说

$$S_j X + Y = \alpha_{\mathrm{tot}} x_j, \quad j = 0, \ldots, d. \tag{80}$$

对 $j = 0, \ldots, d$ 求和，得到

$$\left(\sum_{j=0}^{d} S_j \right) X + (d+1) Y = \alpha_{\mathrm{tot}} X. \tag{81}$$

由于

$$S_j = \alpha_{\mathrm{tot}} - \alpha_j, \tag{82}$$

我们有

$$\sum_{j=0}^{d} S_j = (d+1)\alpha_{\mathrm{tot}} - \alpha_{\mathrm{tot}} = d\alpha_{\mathrm{tot}}. \tag{83}$$

代入 (81) 得到

$$d\alpha_{\mathrm{tot}} X + (d+1) Y = \alpha_{\mathrm{tot}} X,$$

因此

$$Y = -\frac{d-1}{d+1} \alpha_{\mathrm{tot}} X. \tag{84}$$

另一方面，利用（79）和（80），我们得到

$$Y = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x_i = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \left(\frac{S_i X + Y}{\alpha_{\mathrm{tot}}} \right)$$

由（82）可得

$$Y = \left(\frac{\alpha_{\mathrm{tot}}^2 - \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^2}{\alpha_{\mathrm{tot}}} \right) X + Y.$$

因此

$$\left(\frac{\alpha_{\mathrm{tot}}^2 - \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^2}{\alpha_{\mathrm{tot}}} \right) X = 0.$$

由于对所有 i 都有 $\alpha_i > 0$，我们有

$$\alpha_{\mathrm{tot}}^2 - \sum_{i=0}^{d} \alpha_i^2 = 2 \sum_{0 \le i < j \le d} \alpha_i \alpha_j > 0,$$

这意味着 $X = 0$。由 (84) 可知，$Y = 0$ 也成立。最后，由 (80) 得到 $x_j = 0$ 对于 $j = 0$、.....、d 成立，因此 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，即 $\ker(A) = \{0\}$。因此，A 可逆。

还需证明 T 可逆。根据定理 3，我们可以选取 $\mathbb{V}$、$\mathbb{W}$ 和面测试函数 q_j，使得 $C = 0$ 且 $G = I_{\tilde{d}}$，从而 $T = M$。此外，相同的构造确保 M 的每一行恰好在一个不同的列中含有一个非零项，因此 M 可逆。因此，T 可逆，证明完毕。

5 矩泛函的参数化缩放与优化策略

本节中，我们引入一种对矩泛函进行参数化对角缩放的方法

$$\Sigma = \left\{ \mathcal{I}_j, \mathcal{L}_j, \mathcal{V}_k \,:\, j = 0, \dots, d,\ k = 1, \dots, \tilde{d} \right\},$$

该方法在保留上述分析框架的同时，允许对所得离散系统的稳定性与条件性进行优化。我们引入严格为正的缩放参数

$$\theta_j > 0, \quad \upsilon_k > 0, \quad j = 0, \dots, d, \quad k = 1, \dots, \tilde{d},$$

并定义参数向量

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_d)^\top, \quad \boldsymbol{\upsilon} = \left(\upsilon_1, \dots, \upsilon_{\tilde{d}}\right)^\top.$$

缩放后的矩泛函定义为

$$\tilde{\mathcal{L}}_j = \theta_j \mathcal{L}_j, \quad \tilde{\mathcal{V}}_k = \upsilon_k \mathcal{V}_k, \quad j = 0, \dots, d, \quad k = 1, \dots, \tilde{d}. \tag{85}$$

参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\upsilon}$ 仅作用于与 $\mathbb{S}_2(S_d)$ 相关的二次矩子系统。

因此，与缩放后的二次矩矩泛函 $\tilde{\mathcal{L}}_j, \tilde{\mathcal{V}}_k$，$j = 0, \dots, d$, $k = 1, \dots, d$, 相关的矩阵 H 可以用式（12）中定义的标准矩阵 H 表示为

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} D_{\mathcal{V}} & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} D_{\mathcal{V}} & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & C \\ \tilde{C} & M \end{pmatrix},$$

其中

$$D_{\mathcal{V}} = \operatorname{diag}\left(v_1, \ldots, v_{\tilde{d}}\right), \quad D_{\mathcal{L}} = \operatorname{diag}\left(\theta_0, \ldots, \theta_d\right).$$

由于 $D_{\mathcal{V}}$ 和 $D_{\mathcal{L}}$ 是可逆对角矩阵，这种缩放保持二次矩矩阵的秩，因此不会影响定理 1 中确立的唯一可解性。

5.1 参数化狄利克雷密度

设

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_d)^\top, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0, \ldots, d,$$

并定义参数化狄利克雷密度

$$\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\sigma}) = C_{\boldsymbol{\alpha},d} \prod_{j=0}^{d} \lambda_j^{\alpha_j - 1}(\boldsymbol{\sigma}),$$

其中 $C_{\boldsymbol{\alpha},\ d}$ 表示归一化常数。汇总密度和缩放参数，我们定义完整参数向量

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v})^\top \in \mathbb{R}_+^{2(d+1)+\tilde{d}}.$$

5.2 优化目标

优化旨在通过调整密度参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 以及缩放因子 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{v}$来提高格式的稳定性。这些参数直接影响全局系统的条件性，进而影响其数值性能。为此，我们引入参数向量 $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{v})^\top \in \mathbb{R}_+^{2(d+1)+d}$，以便针对直方图插值系统的谱性质构建优化问题。

回顾单位矩阵恒等式

$$\beta(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}(\boldsymbol{p})\right)},$$

其中，$\hat{S}(\boldsymbol{p})$ 表示式 (45) 中定义的归一化舒尔算子。因此，我们考虑以下最大化问题

$$\max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^{2(d+1)+\tilde{d}}} \beta(\boldsymbol{p}) = \max_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^{2(d+1)+\tilde{d}}} \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}(\boldsymbol{p})\right)}. \tag{86}$$

或者，我们也可以最小化参数化二次矩矩阵的条件性，即

$$\min_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^{2(d+1)+\tilde{d}}} \kappa_2\left(\tilde{H}(\boldsymbol{p})\right). \tag{87}$$

由于缩放是对角矩阵，这些问题可以自然地解释为对二次矩子系统的自动谱预处理。

5.3 优化过程

参数向量 $\boldsymbol{p}$ 的维数适中，目标函数 $\beta(\boldsymbol{p})$ 和 $\kappa_2\left(\tilde{H}(\boldsymbol{p})\right)$连续，但通常是非凸的。因此，我们采用以下优化方法：

– 内尔德-米德单纯形算法、– 有界坐标搜索，– 或正正交象限
上的投影拟牛顿法。

在我们的实现中，更新步骤采用投影拟牛顿法执行，以确保所有参数均为正值。每次迭代都会执行以下步骤：

1. 组装狄利克雷密度 $\Omega_{\boldsymbol{\alpha}}$ 和诱导的面密度 $\omega_{j,\ \boldsymbol{\alpha}}$。2. 计算矩矩阵

$$G = G(\boldsymbol{p}), \quad C = C(\boldsymbol{p}), \quad \tilde{C} = \tilde{C}(\boldsymbol{p}), \quad M = M(\boldsymbol{p}).$$

3. 构造缩放二次矩矩阵

$$\tilde{H}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} D_{\mathcal{V}} & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{L}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & C \\ \tilde{C} & M \end{pmatrix}.$$

4. 构造归一化舒尔算子 $\hat{}S(\boldsymbol{p})$。$\tilde{}$5. 评估所选目标：$\beta(\boldsymbol{p})$ 或 $\kappa_2(H(\boldsymbol{p}))$。6. 根据所选优化格式更新参数向量 $\boldsymbol{p}$ 。

总体计算成本不高，因为所有运算都在单个单纯形上进行，且涉及的矩阵大小固定。

算法 1 矩系统的参数优化

1: 选择初始猜测 $\boldsymbol{p}^{(0)} = (\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{v}^{(0)}) > 02$: 对于 $n = 0$、1、2，.....，直至收敛，执行 3: 构造 $\Omega_{\boldsymbol{\alpha}^{(n)}}$ 和面密度 $\omega_{j,\boldsymbol{\alpha}^{(n)}}4$: 组装 $G^{(n)}$, $C^{(n)}$, $\tilde{C}^{(n)}$, $M^{(n)}$ 5: 使用 $G^{(n)}$, $C^{(n)}$, $\tilde{C}^{(n)}$, $M^{(n)}$构造 $H^{(n)}$ 6: 构造 $\tilde{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} D_{\mathcal{V}}^{(n)} & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{L}}^{(n)} \end{pmatrix} H^{(n)}$

7: 计算舒尔算子 $\hat{}S^{(n)}8$: 评估目标 $\Phi^{(n)}$，其中使用 $\Phi^{(n)} = \beta(\boldsymbol{p}^{(n)})$ 或 $\Phi^{(n)} = \kappa_2(\tilde{H}^{(n)})$ 9: 更新 $\boldsymbol{p}^{(n+1)} = \texttt{OptimizeStep}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \Phi^{(n)})$ 10: 结束循环 11: 返回优化参数 $\boldsymbol{p}^{\star}$

5.4 计算成本

最后需要指出，优化矩权重的选取不会增加该方法的计算成本。组装面块和内部块只需计算局部二次矩，并对每个单元求解一个 $(d+1) \times (d+1)$ 线性方程组。因此，整体复杂度与未优化方案保持一致。

注 *14* 对角缩放参数 $(\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{\upsilon})$ 通过对二次矩矩泛函进行可逆左缩放来发挥作用，因此保持相关二次矩矩阵的秩不变。此外，根据推论 2 中确立的唯一可解性结果，对于所有可容许的狄利克雷参数 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{+}^{d+1}$，完整的矩系统仍然是唯一确定的。

6 数值实验

本节将介绍一系列数值实验，以验证前文所建立的理论框架。实验目标有三：

(*i*) 评估增强二次直方图插值算子的逼近性质；(*ii*) 考察其对网格质量的稳健性；(*iii*) 量化 inf-sup 稳定性常数 $\beta = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}\right)}$ 的影响。

所有计算均在 MATLAB 中完成，定义重构算子的线性泛函采用足够高阶的高斯求积规则进行计算，因此积分误差相对于重构误差可以忽略不计。

我们考虑以下测试函数集

$$f_1(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z), \quad f_2(x,y,z) = \sin(2\pi xyz),$$

$$f_3(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+25}, \quad f_4(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2},$$

$$f_5(x,y,z) = \sin(x)\cos(y)e^{-z^2}, \quad f_6(x,y,z) = \log\left(x^3y^3z^3+1/4\right),$$

$$f_7(x,y,z) = \sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2},$$

$$f_8(x,y,z) = \sin\left(10\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2}\right) \times e^{-\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2}},$$

$$f_9(x,y,z) = \sin(2\pi xyz)e^{x^2+y^2+z^2},$$

它们均定义在立方体域 $\mathcal{Q} = [0,1]^3$ 上。该集合包括光滑和非光滑函数、具有径向对称性的函数，以及呈现显著振荡的示例；综合来看，这些示例为评估基于积分插值的近似提供了相当严苛的基准测试。

我们比较经典线性积分插值方法与本文提出的增强二次格式的精度。权重选用狄利克雷密度，它具有仿射不变性，并且所有面矩和体积矩均有闭式表达式。我们在均匀细化网格和拟均匀四面体网格上进行比较，从而评估该方法在网格细化过程中的表现，以及其对网格质量变化的敏感性。

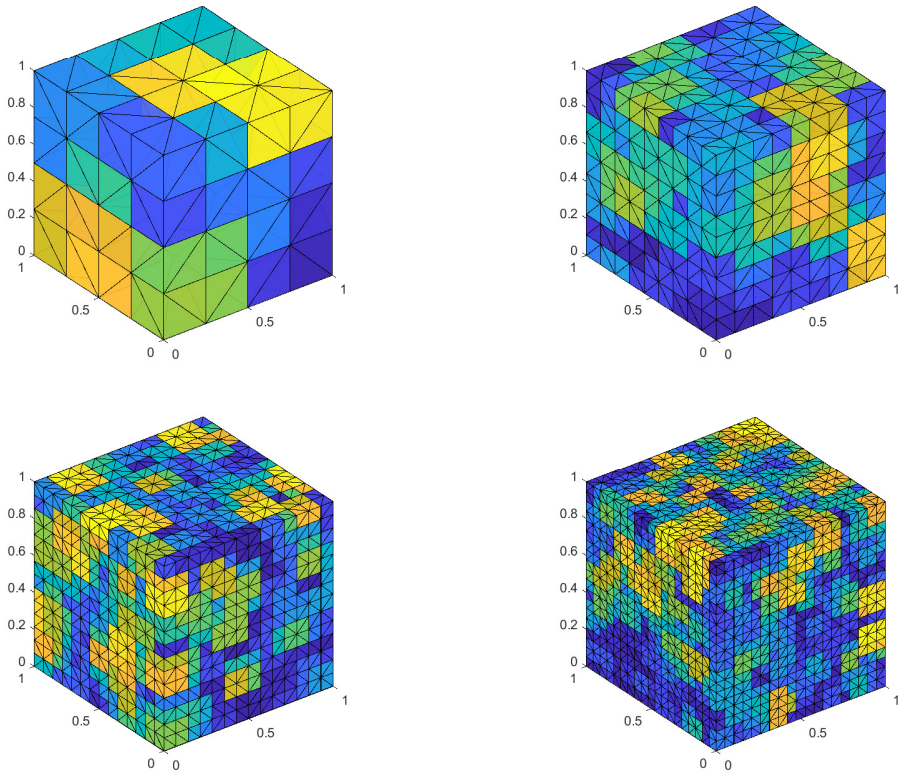


图 1 均匀 Delaunay 三角剖分 $\mathcal{T}_n$，对应 $n = 5$、10、15 和 20。

6.1 均匀三角剖分

我们首先考察一族均匀四面体网格：将立方体划分为 $(n-1)^3$ 个笛卡尔网格单元，再将每个单元分割为六个全等的四面体。对于给定的分辨率参数 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{T}_n = \left\{ K_i \,:\, i = 1, \ldots, 6(n-1)^3 \right\},$$

见图 1。这种经典构造可生成形状正则网格，并能控制单元质量，因此是本文比较中的自然基准。对于每个测试函数 f_i，我们计算经典局部线性直方积分法（$\varepsilon_1^{\mathrm{CH}}$）对应的$L^2$ 误差，以及采用狄利克雷密度和优化参数 $\boldsymbol{p}^\star$（$\varepsilon_2^{\mathrm{enr}},\ \boldsymbol{p}^\star$）的增强二次格式所得到的误差。图 2 所示结果呈现出清晰且一致的趋势：在整个网格尺寸范围内，二次格式产生的误差更小，且其衰减速率始终更快。

特别是，结合增强二次直方图插值算子的多项式再现性质与上文所建立的狄利克雷矩系统的一致 inf–sup 稳定性，我们可以推知，所得逐单元重构定义了一族线性算子

$$\tilde{\Pi}_{2,h} : L^2(\mathcal{Q}) \to \mathbb{P}_2(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\mathcal{Q}), \quad h > 0.$$

由于 $\tilde{\Pi}_{2,h}$ 能够重现二次多项式，二次有限元的标准逼近结果（例如参见 [11, 第 3]章）保证了在形状正则

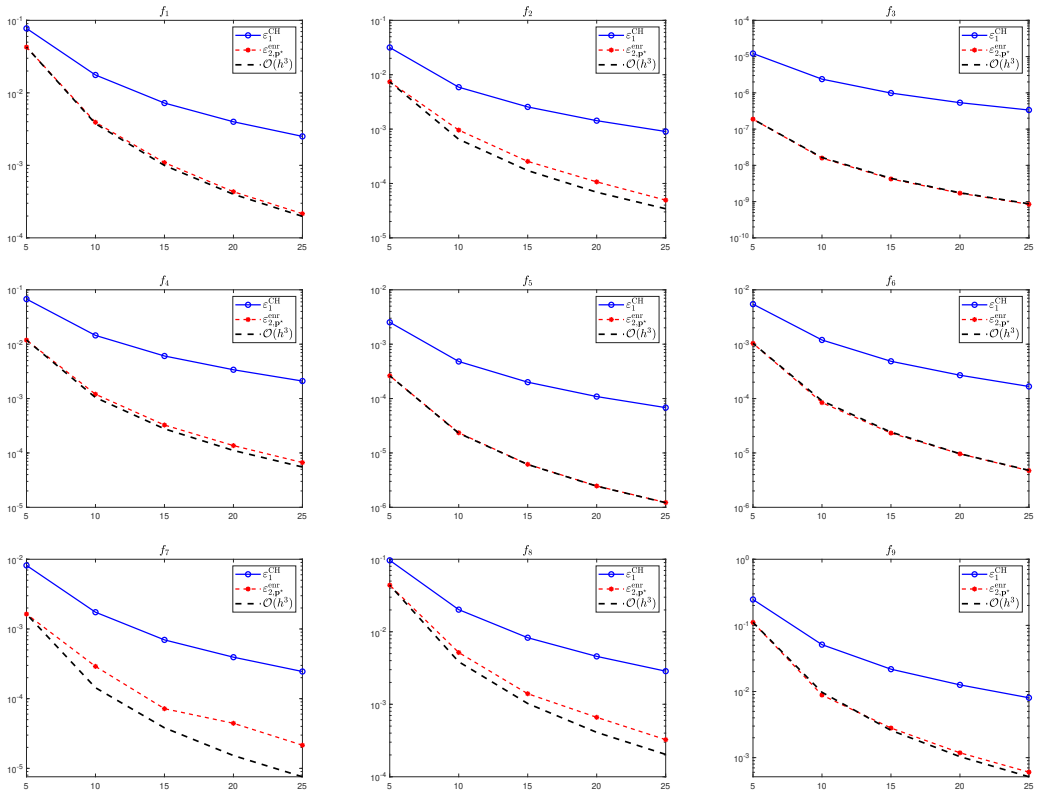


Fig. 2 比较 L^2 误差 $\varepsilon_1^{\mathrm{CH}}$（线性历史插值）与$\varepsilon_2^{\mathrm{enr}}$, $\boldsymbol{p}^\star$ （所提出的二次格式）在 uniform 个网格上。

网格上，对于足够光滑的数据，收敛率为 ()。对于正则性有限的测试函数，预计其渐近收敛率会降低。这里所需的统一 inf–sup 界由定理 5 得出，因为在狄利克雷情形下，在对权重和测试函数进行仿射传输时，局部稳定性常数 β_K 是一致有界的。数值结果（见图 2）准确反映了这一行为。

6.2 准均匀三角剖分

接下来，我们研究该方法在准均匀网格上的表现。在这种设置下，每个三角剖分 $\tilde{\mathcal{T}}_n$ 均通过以下方式生成：从 $[0,1]^3$ 上的规则笛卡尔网格出发，对内部网格点施加小幅随机扰动，同时保持所有边界顶点不变。随后，使用MATLAB中的 delaunayn 例程对扰动后的点云进行剖分，生成的三角剖分虽然无结构，但仍保持形状正则，其网格尺寸与基础笛卡尔网格的网格尺寸相当。

尽管网格是非结构化的，定理 5 仍逐单元适用：每个四面体都是参考单纯形的仿射像；对于通过重心拉回传输的 Dirichlet 权重，相应的局部矩系统满足一致 inf–sup 界。因此，局部稳定性常数 β_K 在各单元之间仍保持一致有界，这与在均匀网格和准均匀网格上观察到的行为一致。

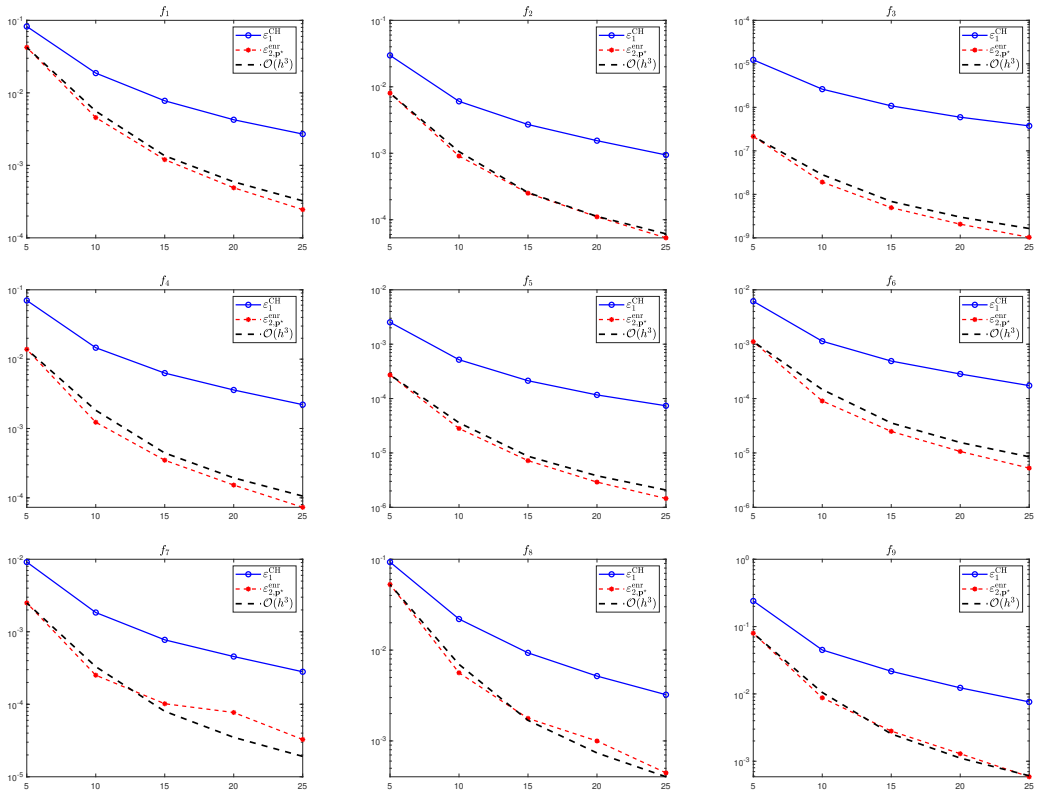


Fig. 3 L^2 误差的比较：$\varepsilon_1^{\mathrm{CH}}$（线性历史插值）和 $\varepsilon_{2,\,\boldsymbol{p}^\star}^{\mathrm{enr}}$（所提出的二次格式），针对四 si-uni边形 Delaunay 网格，这些网格由扰动的笛卡尔网格生成。

对于每个测试函数 f_i $i = 1, \ldots, 9$，我们都计算与均匀情形相同的 L^2 误差，即与经典局部线性积分插值算子相关的误差 $\varepsilon_1^{\mathrm{CH}}$，以及与所提出的增强二次格式相关的误差 $\varepsilon_{2,\boldsymbol{p}^\star}^{\mathrm{enr}}$。误差随有效网格尺寸 h 变化的曲线见图 3。定性上，这与在结构化网格上观察到的行为基本相同：对于所有测试函数，二次重构的精度始终高于线性方法，并且两条误差曲线的斜率差异清晰可见。与均匀情形一样，$\varepsilon_{2,\boldsymbol{p}^\star}^{\mathrm{enr}}$ 随网格细化的误差衰减始终比 $\varepsilon_1^{\mathrm{CH}}$更陡，表明其具有更高的有效收敛率。这种行为在准均匀、轻度非结构化网格上仍得以保持，证实了该方法对于中等程度的网格畸变和对齐性丧失具有鲁棒性。

6.3 下确界–上确界常数的计算

我们通过分析局部 inf–sup 稳定性参数的行为来结束本研究

$$\beta(\alpha) = \sqrt{\sigma_{\min}\left(\hat{S}(\alpha)\right)},$$

其中，对于给定的狄利克雷参数 α，

$$\hat{S}(\alpha) = G(\alpha)^{-1/2} S(\alpha) G(\alpha)^{-1/2}.$$

在整个实验中，我们采用对称选择

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha.$$

稳定性常数由 $\hat{}_S = \hat{}S(\alpha)$ 的最小特征值的平方根计算得出。本实验的结果如图 4 所示，其中报告了 $\alpha \in [2,5]$ 时 $\beta = \beta(\alpha)$ 的取值。

数值趋势十分明显：随着 α 增大，$\beta(\alpha)$ 单调递减。这一现象可归因于狄利克雷密度逐渐集中到各个面的顶点附近，从而使 inf–sup 常数减小。同时，这种对 α 的依赖性与定理 5 中确立的仿射不变稳定性完全一致；该稳定性保证局部 inf–sup 常数不受单元几何形状的影响。

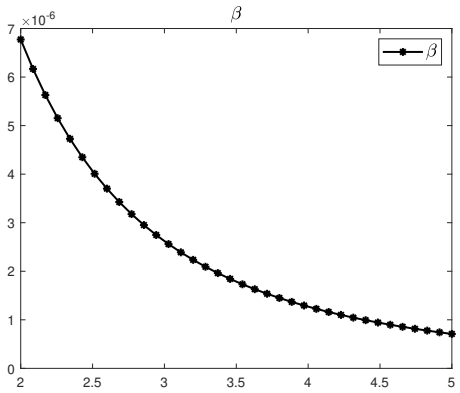


Fig. 4 参考四面体上对称狄利克雷密度对应的 inf–sup 稳定性参数 $\beta(\alpha)$ 的变化体 n. 该常数随 α单调递减。

$\beta(\alpha)$的单调衰减凸显了舒尔补对密度参数选择的敏感性。具体而言，α 取值较大时会降低局部二次重构的稳定性，而适度选择 α 则能显著增强 inf–sup 界。因此，该实验直接从数值上验证了第 2 节中建立的下确界–上确界常数的理论刻画。

注 *15* 在强各向异性区域，算子 $S(\alpha)$可能呈现明显扁平化的谱，进而使离散 inf–sup 常数恶化。一种简单的谱平移，

$$S_{\mathrm{reg}}(\alpha) = S(\alpha) + \alpha_{\mathrm{reg}} I, \quad \alpha_{\mathrm{reg}} > 0,$$

提供了一种温和的稳定化：它在保留矩算子结构的同时，避免最小特征值被过度压缩。对于任意狄利克雷参数 α，相应的正则化稳定性常数定义为

$$\beta_{\mathrm{reg}}(\alpha) = \sqrt{\sigma_{\min}\left(G^{-1/2} S_{\mathrm{reg}}(\alpha) G^{-1/2}\right)}.$$

如图 4 所示，即使是非常小的偏移量 α_{reg} ，也能带来明显的改善。这表明，修改 $S(\alpha) \mapsto S_{\mathrm{reg}}(\alpha)$ 可在高度各向异性构型下提供实用的保障，同时不影响矩公式的主要结构性质。

结论与未来工作

本文为单纯形网格上的加权二次历史插值建立了一个统一且完全构造性的框架。该方法依托于对 $\mathbb{P}_2(S_d)$ 进行规范的面/内部划分，并结合对相关矩量矩阵的结构化 Schur 型分析。这一约化给出了与维数无关的唯一可解性刻画，并导出了尖锐的 inf–sup 条件。分析的一个核心结论是，增广二次积分插值的稳定性由一个低维约化算子 $S(\Omega)$ 决定，其最小特征值即为下确界–上确界常数。这一视角清晰地阐释了增广、条件性与鲁棒性的谱解释，并自然地启发了系统化的谱优化策略。此外，我们证明，这种约化稳定机制在单元的仿射变换下具有鲁棒性，从而确保 inf–sup 常数在形状正则网格上保持一致有界，不受局部几何畸变的影响。

基于这些理论结果，我们构造了显式的面和内部二次多项式族，使矩矩阵具有良好的条件数。我们还引入了对密度和矩泛函的参数化缩放，在保留公式解析结构的同时实现自动谱调优。在非结构化网格上进行的三维数值实验验证了预期的 $O\left(h^3\right)$ 收敛率，并与理论 inf–sup 估计完全一致。此外，实验还表明，所提出的谱优化策略在降低所得离散系统的条件数方面具有实际效果。

总的来说，本文建立的框架为一般单纯形网格上的高阶积分插值提供了数学上透明且计算上有效的基础；本文的工作针对富集二次构造，而更高次数的扩展留待后续研究。展望未来，我们计划：

(i) 确定最优或极小极大正交分解；(ii) 将谱优化策略推广到更高次数的多项式空间；(iii) 探究其在逆问题以及涉及更广泛加权矩数据类别的重建任务中的应用。

致谢

本研究作为 RITA“意大利逼近研究网络”的一部分，以及 UMI 小组“逼近理论与应用”的一部分开展。研究得到 GNCS-INdAM 2025 项目“多项式、样条与核函数：从数值逼近到开源软件”的支持。F. Nudo 的工作得到欧盟下一代欧盟计划在意大利国家复苏与韧性计划（PNRR）框架下的资助，该计划包括任务4、组成部分2、投资1.2“为青年研究人员提交的项目提供资金”，依据教育与研究部第47/2025号法令执行。本研究得到“2022年访问教授项目”资助，该项目促成了 Allal Guessab 教授于2022年春季访问卡拉布里亚大学数学与计算机科学系。

参考文献

1. Abramowitz, M., Stegun, I.A.：《数学函数手册：公式、图表和数学表》。多佛出版社，纽约（1972） 2. Alkilayh, M., Reichel, L., Ye, Q.：大型广义特征值问题中若干特征对的计算方法。Appl. Numer. Math. **183**，108–117（2023） 3. Bentbib, A.H., Jbilou, K., Kaouane, Y.：一种用于大规模 MIMO 动力系统模型降阶的计算型全局切向 Krylov 子空间方法。J. Sci. Comput. **75**，1614–1632（2018） 4. Benzi, M., Golub, G.H., Liesen, J.：鞍点问题的数值解。《数值学报》**14**，1–137（2005） 5. Bruni Bruno, L., Dell'Accio, F., Erb, W., Nudo, F.：拟切比雪夫线段上的多项式直方图插值。J. Sci. Comput. **104**，65（2025） 6. Bruni Bruno, L., Erb, W.：区间线段上函数平均值的多项式插值。SIAM J. Numer. Anal. **62**，1759–1781（2024） 7. Bruni Bruno, L., Semplice, M., Serra Capizzano, S.：权重的数值线性代数。第一部分：从一维拉普拉斯算子情形的谱分析到条件性与预处理。BIT Numer. Math. **65**，46（2025） 8. Bruno, L.B., Dell'Accio, F., Erb, W., Nudo, F.：Padua、Fekete 和 Leja 三角形上的二元多项式直方图插值技术。arXiv 预印本 arXiv:2506.03025（2025） 9. Calvetti, D., Golub, G.H., Reichel, L.：通过 Lanczos 双对角化估计 L 曲线。BIT Numer. Math. **39**，603–619（1999） 10. Calvetti, D., Kim, S.M., Reichel, L.：用于结构化矩阵特征值计算的重启 QR 算法。J. Comput. Appl. Math. **149**，415–422（2002） 11. Ciarlet, P.G.：椭圆型问题的有限元法。SIAM（2002） 12. Dorostkar, A., Neytcheva, M., Serra Capizzano, S.：通过二维广义局部 Toeplitz 序列对耦合偏微分方程及其 Schur 补进行谱分析。Comput. Methods in Appl. Mech. Eng. **309**，74–105（2016） 13. El Hachimi, A., Jbilou, K., Ratnani, A., Reichel, L.：使用 t-乘积对三阶张量进行谱计算。Appl. Numer. Math. **193**，1–21（2023） 14. Fischer, M., Oja, P.：保单调有理样条直方图插值。J. Comput. Appl. Math. **175**，195–208（2005） 15. Fischer, M., Oja, P., Trossmann, H.：共单调保形样条直方图插值。J. Comput. Appl. Math. **200**，127–139（2007） 16. Golub, G.H., Van Loan, C.F.：《矩阵计算》，第4版。约翰斯·霍普金斯大学出版社（2013） 17. Guessab, A.：基于 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的精确逼近。NSU 出版与印刷中心（2022） 18. Guessab, A., Nudo, F.：具有概率自由度的四面体网格上的二次加权直方图插值。arXiv 预印本 arXiv:2511.07271（2025） 19. Jagels, C., Reichel, L.：有理高斯求积中矩阵的结构。Math. Comput.**82**，2035–2060（2013） 20. Kak, A.C., Slaney, M.：计算机断层成像原理。SIAM（2001） 21. Lemmerling, P., Mastronardi, N., Van Huffel, S.：求解 Hankel/Toeplitz 结构化总体最小二乘问题的快速算法。Numer. Algorithms **23**，371–392（2000） 22. Marchi, E., Tarazaga, P.：关于 (k, n) 随机矩阵。Linear Algebra and its Applications **26**，15–30（1979） 23. Mastronardi, N., Van Barel, M., Van Camp, E., Vandebril, R.：一类结构化矩阵的特征向量计算。J. Comput. Appl. Math. **189**，580–591（2006） 24. Mazza, M., Semplice, M., Serra Capizzano, S., Travaglia, E.：不可压缩 Navier–Stokes 错列 DG 近似的矩阵理论谱分析及相关的基于谱的预处理方法。Numer. Math. **149**，933–971（2021） 25. Natterer, F.：计算机断层成像的数学。SIAM（2001） 26. Noschese, S., Reichel, L.：带状 Toeplitz 矩阵的结构化距正规性距离。BIT Numer. Math. **49**（3），629–640（2009） 27. Noschese, S., Reichel, L.：估计并提高网络的结构鲁棒性。Numer. Linear Algebra Appl. **29**，e2418（2022） 28. Palamodov, V.P.：从积分数据进行重建。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州（2016） 29. Reichel, L., Trefethen, L.N.：Toeplitz 矩阵的特征值与伪特征值。Linear Algebra Appl. **162**，153–185（1992） 30. Serra Capizzano, S.：矩阵序列和离散化边值问题的谱行为。Linear Algebra Appl. **337**，37–78（2001） 31. Siewer, R.：直方图插值样条。J. Comput. Appl. Math. **220**，661–673（2008） 32. Stani´c, M.P., Albijani´c, M., Djur˘ci´c, D., Spalevi´c, M.M.：分析、逼近、优化：计算与应用。技术报告，Springer（2025） 33. Van Barel, M., Fasino, D., Gemignani, L., Mastronardi, N.：正交有理函数与结构化矩阵。SIAM J. Matrix Anal. Appl. **26**，810–829（2005）