稳健小波 NKK 周期图的渐近分布

Manganaw N'Daam*[1]、Tchilabalo Abozou Kpanzou[1], 和 Edoh Katchekpele[1]

[1]数学建模与统计决策分析实验室（LaMMASD），〞数学系，〞卡拉大学，〞邮政信箱 404，〞卡拉，〞多哥。电子邮箱： manganawn@gmail.com、kpanzout@univkara.tg、edohkatchekpele@gmail.com

arXiv:2601.00310v1 [stat.ME] 1 Jan 2026

摘要

本文研究了在固定分辨率层级下，由最小绝对偏差（LAD）谐波回归构造的小波 NKK 周期图的渐近分布。利用底层时间序列的小波表示，我们分析了长程依赖条件下所得周期图的概率结构。结果表明，在适当的正则条件下，NKK 周期图依分布收敛于一个非标准极限，该极限表现为高斯随机向量的二次型，其协方差结构取决于该过程的记忆特性以及所选的小波滤波器。该结果为稳健小波周期图在具有重尾创新项的长记忆时间序列谱分析中的应用奠定了严格的理论基础。

数学学科分类号： 62M10; 62G35; 60F05.

关键词： 谐波回归；重尾分布；最小绝对偏差；谱分析；小波周期图；长程依赖。

1. 引言

具有长程依赖的时间序列统计分析，数十年来一直是一个活跃的研究领域，这源于其在经济学、金融学、水文学、电信和信号处理中的重要应用（例如，参见 [14], [2] [18], [9]）。长记忆过程的特征是自协方差呈双曲线衰减，且具有非标准的渐近行为，这大大增加了估计和推断的难度。早期的半参数方法主要在频域中发展，其中最具代表性的是 [8]提出的对数周期图回归估计量。尽管该估计量简单直观，但众所周知，它容易受到低频污染、重尾创新项以及偏离高斯性的影响。

此后，大量研究致力于分析并改进存在长记忆误差时的回归型估计量。关于渐近正态性和

*通讯作者：manganawn@gmail.com

稳健性问题已在各种依赖结构下得到研究；例如， [7], [22], 和 [23]。这些研究成果凸显了依赖强度、频域平滑与渐近分布之间微妙的相互作用。

受经典基于最小二乘的谱方法缺乏稳健性的启发，一些作者提出了基于稳健回归原理构造的替代性周期图。具体而言， [15]通过在经典周期图所依据的谐波回归中以最小绝对偏差取代最小二乘法，提出了拉普拉斯周期图。这种构造得到的谱估计量与过零谱密切相关，并且在重尾噪声和非线性失真下表现出很强的稳健性。最近，[5] 提出了 M 周期图，通过在周期图的回归形式中采用 M估计量，推广了这一思路。作者在长记忆情形下确立了该方法的渐近性质，并通过理论分析和模拟研究证明了其对加性离群值的抵抗能力。

基于小波的方法为经典傅里叶方法提供了一种强有力的替代方案，能够提供具有良好定位特性的联合时频表示。 [4] 和 [17], 奠定了小波理论和多分辨率分析的基础，随后一系列有影响力的研究强调了它们对长记忆过程的意义。特别是，研究表明，小波表示能够使长记忆过程在不同尺度上去相关，从而简化渐近行为并改善推断性质 [19]。

使用基于小波的对数周期图方法对长记忆参数进行半参数估计，已得到广泛研究，其中 [1], [22], 和 [19]作出了重要贡献。这些方法将小波的局部化特性与尺度域中的回归技术相结合，从而得到兼具灵活性与坚实理论基础的估计量。然而，经典的小波对数周期图估计量仍易受离群值和重尾创新项影响，因此有必要引入稳健的替代方法。

基于最小绝对偏差（LAD）的稳健估计程序已在回归情形中得到广泛研究，并被证明在误差非正态时具有理想的稳定性。最小绝对偏差估计量的渐近理论，包括其极限分布，已由 [11] 及相关研究进行了详细阐述。近年来，基于 LAD 的方法与小波表示相结合，以增强其在长记忆情形中的稳健性， [20]便是一个例证。

本文聚焦于基于小波的 NKK 周期图的渐近分布，为这一不断发展的研究领域作出贡献。该周期图由固定尺度下谐波分量的最小绝对偏差回归估计量构造而成。与现有大多数主要强调点估计或有限样本表现的研究不同，我们的分析侧重于 NKK 周期图本身的精确极限分布。确立这一结果是建立稳健的基于小波的长记忆估计量严格渐近理论的重要一步，也为后续研究相关 NKK 估计量的极限行为奠定了基础。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍小波框架，包括离散小波变换及其最大重叠变体。第 3 节推导最小绝对偏差估计量及其相关 NKK 周期图的极限分布。第 4 节介绍一项蒙特卡洛模拟研究。第 5 节总结全文。

2. 小波分析

小波分析提供了一种时标表示，使人们能够描述信号在不同分辨率层级下的局部演化。不同于依赖全局复指数的经典傅里叶变换，小波方法基于通过对母小波进行伸缩和平移而获得的局部化函数。这种构造能够以简洁的方式描述信号在时间和频率方面的局部结构。

在离散情形下，小波变换依赖于具有特定性质的数值滤波器。设

$$\{h_l\}_{l=0}^{L-1} \quad \text{and} \quad \{g_l\}_{l=0}^{L-1}$$

分别表示 Daubechies小波（高通）滤波器和尺度（低通）滤波器。离散小波变换的计算基于以下迭代所定义的金字塔算法:

$$\begin{cases} w_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l \, v_{j-1,(2t+1-l) \bmod T_{j-1}}, \\ v_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l \, v_{j-1,(2t+1-l) \bmod T_{j-1}}, \end{cases}$$

其中 $t = 0$、.....、$T_j - 1$、 $v_{0,\,t} = X_t$ 和 $T_j = T/2^j$。

系数 $\{w_{j,t}\}$表示第 j层的小波系数，而 $\{v_{j,t}\}$对应尺度系数。定义

$$w_j = \{w_{j,t},\, t = 0, \ldots, T_j - 1\}, \qquad v_j = \{v_{j,t},\, t = 0, \ldots, T_j - 1\},$$

当 $T = 2^J$ 时，经过 J 次迭代即可完成金字塔算法，从而得到系数集合

$$w_1, \ldots, w_J, v_J.$$

这种分解定义了完全离散小波变换（DWT）。

当序列 T 的长度是 2^{J_0} 的倍数时，可以进行部分离散小波变换。在这种情况下，时间序列

$$\{X_t,\, t = 0, \ldots, T - 1\}$$

可表示为以下加性分解

$$X = W^\top w = \sum_{j=1}^{J_0} W_j^\top w_j + V_{J_0}^\top v_{J_0} = \sum_{j=1}^{J_0} d_j + s_{J_0}.$$

T他的表示定义了序列 X 的多分辨率分析。该术语 m

$$d_j = W_j^\top w_j$$

表示层级 j 的小波细节，并描述了信号在尺度

$$\tau_j = 2^{j-1}.$$

该分量

$$s_{J_0} = V_{J_0}^\top v_{J_0},$$

称为层级 J_0的小波平滑项，与信号在尺度上的平均值相关

$$\tau_{J_0} = 2^{J_0}.$$

平滑分量 s_{J_0} 表示信号的潜在趋势，而小波细节 d_j（对于 $j = 1, \ldots, J_0$）则捕捉高频振荡。随着 j 减小，这些细节描述了围绕平滑趋势的日益细微的波动，从而突出了信号在不同分辨率下的局部结构。

然而，众所周知，离散小波变换（DWT）存在若干实际局限。首先，它是为样本量为 2 的幂次的时间序列而设计的,

这通常需要进行人工数据调整。其次，DWT 依赖于在每个分辨率层级对系数进行系统性下采样，导致系数数量从一个尺度到下一个尺度减半。这种抽取可能造成信息丢失，并使某些局部结构的分析更加复杂。此外，由于滤波器引起的相移，原始序列的时间特征与多分辨率分析得到的时间特征并不总能恰当对齐。最后，众所周知，某些基于 DWT 的统计估计量，尤其是方差估计量，可能表现有限（[4]; [17]）。

为克服这些局限，人们提出了 DWT 的一种改进版本：由 [21] 开发的最大重叠离散小波变换（MODWT）。MODWT算法执行与经典 DWT 相同的滤波操作，但不对系数进行抽取。因此，在每个分解层级，小波系数和尺度系数的数量都等于原始样本的大小。这种冗余提高了多分辨率分量在时间上的对齐程度，也便于对其进行解释。

部分变换和多分辨率分析的概念可自然地扩展到 MODWT 框架。在此背景下，小波细节和平滑分量与零相位滤波器相关联，从而确保原始序列中观察到的结构与小波分解揭示的结构直接对应。这些特性使 MODWT 特别适合分析任意长度的时间序列，并细致考察时间和频率上的局部现象。

接下来，我们利用这种多尺度表示，将给定尺度下的小波系数改写为谐波回归模型的形式，从而引入相应的最小绝对偏差估计量，并研究 NKK 周期图的极限分布。

3. NKK 周期图的渐近分布

设 $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ 为一个长度为 n的时间序列， $\{w_{j,q}\}$ 为对该时间序列应用最大重叠小波变换（MODWT）后得到的系数集合，其中$j = 0, 1, \ldots, J$表示尺度， $q = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$ 表示平移参数。设 $I_k^{(J)}$ 为尺度 J 处小波变换谱密度的周期图（参见 [12] 和 [13]），即，

$$I_k^{(J)} = \frac{1}{2\pi n} \sum_{q=0}^{n-1} \left| w_{J,q} \exp(i\lambda_k q) \right|^2, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

其中 $\lambda_k = \frac{2\pi k}{n}$， m 为所考虑的傅里叶频率数目。

该周期图也可写为谐波回归中最小二乘估计量的平方：

$$I_k^{(J)} = \frac{n}{8\pi} \left\| \widetilde{\beta}_n(\lambda_k) \right\|^2,$$

其中 $\widetilde{\beta}_n(\lambda_k)$满足

$$\widetilde{\beta}_n(\lambda_k) = \arg\min_{\beta \in \mathbb{R}^2} \sum_{q=0}^{n-1} \left(w_{J,q} - x_q^\top(\lambda_k)\beta \right)^2,$$

采用谐波回归量

$$x_q(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_k q) \\ \sin(\lambda_k q) \end{pmatrix}.$$

为提高稳健性， [20] 提出以最小绝对偏差（LAD）准则取代最小二乘准则，遵循 [15]和 [5]。相应的估计量为

$$\widehat{\beta}_n(\lambda_k) = \arg\min_{\beta\in\mathbb{R}^2} \sum_{q=0}^{n-1} \left| w_{J,q} - x_q^\top(\lambda_k)\beta \right|.$$

NKK 周期图定义如下：

$$N_k^{(J)} = \frac{n}{8\pi} \left\| \widehat{\beta}_n(\lambda_k) \right\|^2.$$

^研究其渐近分布，首先需要考察 $\beta_n(\lambda_k)$ 的渐近行为。

我们在最大尺度 J 下使用最大重叠离散小波变换（MODWT）。将尺度 J 下的小波系数改写为线性回归形式，可得：

$$w_{J,q} = x_q(\lambda_k)^\top \beta_0 + \varepsilon_q, \qquad q = 0, \ldots, n,$$

其中

$$x_q(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_k q) \\ \sin(\lambda_k q) \end{pmatrix}, \qquad \beta_0 = \begin{pmatrix} \beta_{1,0} \\ \beta_{2,0} \end{pmatrix}.$$

其中， β_0 是将小波系数与其正弦分量联系起来的真实参数，表示信号在频率 λ_k 处的余弦和正弦振幅。该估计量旨在通过最小化绝对值之和来恢复这些振幅。相应的误差为

$$\varepsilon_q = w_{J,q} - x_q(\lambda_k)^\top \beta_0.$$

最小绝对偏差估计量定义为

$$\widehat{\beta}_n(\lambda_k) = \arg\min_{\beta\in\mathbb{R}^2} \sum_{q=0}^{n-1} |\varepsilon_q(\beta)|,$$

其中 $\varepsilon_q(\beta) = w_{J,\ q} - x_q^\top \beta$。

我们从 LAD 目标函数开始：

$$g_n(\beta) = \sum_{q=0}^{n-1} \left| w_{J,q} - x_q^\top(\lambda_k)\,\beta \right| = \sum_{q=0}^{n-1} |\varepsilon_q(\beta)|.$$

为了研究该估计量的极限分布

$$\widehat{\beta}_n(\lambda_k) = \arg\min_{\beta\in\mathbb{R}^2} g_n(\beta),$$

我们进行变量替换

$$\beta = \beta_0 + \frac{u}{a_n}, \qquad a_n = \sqrt{n},$$

因此

$$\varepsilon_q(\beta) = \varepsilon_q\left(\beta_0 + \frac{u}{a_n}\right) = \varepsilon_q - \frac{x_q^\top u}{a_n}.$$

接下来，我们考虑中心化增量：

$$g_n\left(\beta_0+\frac{u}{a_n}\right)-g_n(\beta_0)=\sum_{q=0}^{n-1}\left[\left|\varepsilon_q-\frac{x_q^\top u}{a_n}\right|-|\varepsilon_q|\right].$$

接下来 [11], 我们通过定义

$$Z_n(u)=\frac{a_n}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1}\left[\left|\varepsilon_q-\frac{x_q^\top u}{a_n}\right|-|\varepsilon_q|\right].$$

$Z_n(\cdot)$ 的极小化点因此恰好为

$$\widehat{u}_n=a_n\left(\widehat{\beta}_n-\beta_0\right).$$

因此，研究 $\beta_n(\cdot)$ 的极限分布完全归结为分析凸过程 $\{Z_n(u)\}_{u\in\mathbb{R}^2}$。

现在陈述推导 $\beta_n(\cdot)$ 的极限分布所需的假设。

假设

(A1) 序列 $\{\varepsilon_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ 严格平稳，且中位数为零。其分布函数 $F_\varepsilon(\cdot)$ 在 0 处连续，并且存在密度 $f_\varepsilon(\cdot)$，且该密度在 0 处有限。

(A2) 存在一个对称正定矩阵 Q，使得

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}x_q(\lambda_k)\,x_q(\lambda_k)^\top\xrightarrow[n\to\infty]{}Q,\qquad \det(Q)>0.$$

对于谐波回归量

$$x_q(\lambda_k)=\begin{pmatrix}\cos(q\lambda_k)\\ \sin(q\lambda_k)\end{pmatrix},$$

有 $Q=\frac{1}{2}I_2$，其中 I_2 表示 2×2 单位矩阵。

(A2') 回归变量一致有界，即

$$\sup_{q\in\mathbb{Z}}\|x_q(\lambda_k)\|<\infty.$$

特别地，对于谐波回归量

$$x_q(\lambda_k)=\begin{pmatrix}\cos(q\lambda_k)\\ \sin(q\lambda_k)\end{pmatrix},$$

有 $\|x_q(\lambda_k)\|^2\equiv 1$。

（A3）设

$$\eta_q=\operatorname{sign}(\varepsilon_q)=\mathbf{1}_{\{\varepsilon_q>0\}}-\mathbf{1}_{\{\varepsilon_q<0\}},\qquad q\in\mathbb{Z}.$$

序列 $\{\eta_q\}$是平稳的，且其协方差绝对可和：

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma_\eta(h)|<\infty,\qquad \gamma_\eta(h)=\operatorname{Cov}(\eta_0,\eta_h).$$

（A4）对于每个 $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left|\varepsilon_q - \frac{x_q^\top u}{a_n}\right| - |\varepsilon_q|\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(u), \qquad a_n = \sqrt{n},$$

对于某个凸函数 τ。

本文采用的假设受到 [11]为最小绝对偏差型估计量所建立的渐近框架的启发。与通常依赖独立误差的经典情形不同，我们允许创新序列 $\{\varepsilon_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ 严格平稳且可能存在相关性。为适应这种更一般的依赖结构，我们引入假设 (A2′) 和 (A3) 作为附加条件。

定理 3.1。 在假设 (A1)–(A4) 下，最小绝对偏差估计量

$$\widehat{\beta}_n(\lambda_k) = \arg\min_{\beta\in\mathbb{R}^2}\sum_{q=0}^{n-1}\left|w_{J,q} - x_q(\lambda_k)^\top\beta\right|$$

满足

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\beta}_n(\lambda_k) - \beta_0(\lambda_k)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, V\big),$$

with

$$V = A^{-1}BA^{-1}, \qquad A = 2f_\varepsilon(0)Q, \qquad B = \frac{1}{2}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_\eta(h)\,R(\lambda_k h),$$

其中

$$R(\lambda_k h) = \begin{pmatrix} \cos\lambda_k h & \sin\lambda_k h \\ -\sin\lambda_k h & \cos\lambda_k h \end{pmatrix}$$

且 $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛（见 [16]）。

证明： 按照 [11] 的方法并将其调整至我们的框架，定义 $\beta = \beta_0 +$ ^{u} 的重整化目标函数，其中 $a_n = \sqrt{n}$：a_n —

$$Z_n(u) := \frac{a_n}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1}\Big\{\,|\varepsilon_q - x_q^\top u/a_n| - |\varepsilon_q|\,\Big\}.$$

由于 $a_n = \sqrt{n}$ 前因子为 $\frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$，因此等价地

$$Z_n(u) = \sum_{q=0}^{n-1}\Big\{\,|\varepsilon_q - x_q^\top u/a_n| - |\varepsilon_q|\,\Big\}.$$

最小绝对偏差估计量满足（见 [11]）

$$\widehat{u}_n \;=\; a_n\big(\widehat{\beta}_n - \beta_0\big) \;=\; \arg\min_{u\in\mathbb{R}^2} Z_n(u),$$

因此，只需研究凸过程 $Z_n(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的紧集上的弱收敛。

对于任意实数 x, t （其中 $x \neq 0$），我们有精确恒等式（见 [11]）

$$|x-t|-|x| = -t\,\mathrm{sign}(x) + 2\int_0^t \{\mathbf{1}_{\{x\le s\}} - \mathbf{1}_{\{x\le 0\}}\}\,ds.$$

应用 $x = \varepsilon_q$ 和 $t = x_q^\top u/a_n$，我们得到分解

$$Z_n(u) = Z_n^{(1)}(u) + Z_n^{(2)}(u),$$

其中

$$Z_n^{(1)}(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1}(x_q^\top u)\,\eta_q, \qquad \eta_q := \mathrm{sign}(\varepsilon_q),$$

and

$$Z_n^{(2)}(u) = 2\sum_{q=0}^{n-1}\int_0^{x_q^\top u/a_n} \left\{\mathbf{1}_{\{\varepsilon_q\le s\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon_q\le 0\}}\right\} ds.$$

注意

$$Z_n^{(1)}(u) = -\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1}(x_q^\top u)\,\eta_q = -u^\top\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1} x_q\eta_q\right), \tag{1}$$

其中我们定义

$$W_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{q=0}^{n-1} x_q\eta_q.$$

在假设（A3）和（A4）下，弱相关平稳序列的中心极限定理适用（参见 [10]）

$$W_n \xrightarrow{d} W,$$

其中 W 是一个中心化高斯向量。

此外， W 的协方差矩阵为

$$\mathrm{Var}(W) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} x_q x_r^\top \mathrm{Cov}(\eta_q,\eta_r) = \sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1-h} x_q x_{q+h}^\top\right)\mathrm{Cov}(\eta_q,\eta_{q+h}).$$

因此，对于任意 $u\in\mathbb{R}^2$,

$$Z_n^{(1)}(u) \xrightarrow{d} -u^\top W.$$

Write $Z_n^{(2)}(u) = \sum_{q=0}^{n-1} Z_{n,q}^{(2)}(u)$ with

$$Z_{n,q}^{(2)}(u) = 2\int_0^{x_q^\top u/a_n} \left\{\mathbf{1}_{\{\varepsilon_q\le s\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon_q\le 0\}}\right\} ds.$$

So

$$\mathbb{E}\big[Z_{n,q}^{(2)}(u)\big] = 2\int_0^{x_q^\top u/a_n} \big(F_\varepsilon(s) - F_\varepsilon(0)\big)\,ds$$

利用 F_ε 在 0 处的泰勒展开以及 $a_n = \sqrt{n}$,

$$F_\varepsilon(s) - F_\varepsilon(0) = f_\varepsilon(0)s + o(s), \qquad s \to 0,$$

因此，当 n较大时,

$$\mathbb{E}\big[Z_{n,q}^{(2)}(u)\big] = 2\int_0^{x_q^\top u/a_n} \big(F_\varepsilon(s) - F_\varepsilon(0)\big)\, ds = 2 \cdot \frac{1}{2} f_\varepsilon(0)\, \frac{(x_q^\top u)^2}{a_n^2} + o\big(a_n^{-2}\big).$$

因此

$$\mathbb{E}\big[Z_{n,q}^{(2)}(u)\big] = f_\varepsilon(0)\, \frac{(x_q^\top u)^2}{a_n^2} + o(a_n^{-2}).$$

对 q 求和并使用 $a_n^2 = n$ ，得到

$$\sum_{q=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[Z_{n,q}^{(2)}(u)\big] = \frac{n}{a_n^2}\, f_\varepsilon(0) \cdot \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (x_q^\top u)^2 + o(1) \longrightarrow f_\varepsilon(0)\, u^\top Q u,$$

因此，我们定义确定性二次极限

$$\tau(u) := f_\varepsilon(0)\, u^\top Q u.$$

现在我们证明中心化余项

$$\sum_{q=0}^{n-1} \Big(Z_{n,q}^{(2)}(u) - \mathbb{E}\big[Z_{n,q}^{(2)}(u)\big] \Big)$$

的方差为 $o(1)$，这意味着它依概率收敛到零。

根据方差的定义以及协方差算子的双线性性质，我们有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{q=0}^{n-1} \big(Z_{n,q}^{(2)}(u) - \mathbb{E} Z_{n,q}^{(2)}(u) \big) \right) = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{Cov}\big(Z_{n,q}^{(2)}(u),\, Z_{n,r}^{(2)}(u) \big)\,.$$

回想一下，$Z_{n,q}^{(2)}(u)$ 具有如下形式

$$Z_{n,q}^{(2)}(u) = \int_0^{x_q^\top u/a_n} \Big(\mathbf{1}_{\{\varepsilon_q \le s\}} - \mathbf{1}_{\{\varepsilon_q \le 0\}} \Big)\, ds, \qquad a_n = \sqrt{n}.$$

这种表示使我们能够利用指示函数积分项的基本界来控制协方差。

按照 [11]，中的论证，并结合柯西–施瓦茨不等式和标准协方差不等式，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\big|\mathrm{Cov}\big(Z_{n,q}^{(2)}(u), Z_{n,r}^{(2)}(u)\big)\big| \;\le\; C\, \frac{|x_q^\top u|}{a_n}\, \mathbb{E}\big[Z_{n,r}^{(2)}(u)\big],$$

一致地对 q， r 成立。

对 q 和 r 求和，可得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{q=0}^{n-1} \big(Z_{n,q}^{(2)}(u) - \mathbb{E} Z_{n,q}^{(2)}(u) \big) \right) \le C\, \frac{\max_{0 \le q \le n-1} |x_q^\top u|}{a_n} \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[Z_{n,r}^{(2)}(u)\big].$$

根据假设（A2’），回归变量一致有界，因此

$$\max_{0\le q\le n-1} |x_q^\top u| = O(1).$$

此外，由假设（A4），

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[Z_{n,r}^{(2)}(u)\big] \;\longrightarrow\; \tau(u),$$

因此为 $O(1)$。

由于$a_n = \sqrt{n}$，我们最终得到

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{q=0}^{n-1}\left(Z_{n,q}^{(2)}(u) - \mathbb{E}Z_{n,q}^{(2)}(u)\right)\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot O(1) = o(1).$$

因此，中心化余项依概率收敛于零，从而得出

$$Z_n^{(2)}(u) = \sum_{q=0}^{n-1} Z_{n,q}^{(2)}(u) \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau(u).$$

结合前两个极限，对于每个固定的 u ，我们有（参见 [11]中的定理1）

$$Z_n(u) = Z_n^{(1)}(u) + Z_n^{(2)}(u) \xrightarrow{d} Z(u) := -u^\top W + \tau(u).$$

$Z_n(\cdot)$的凸性和紧性论证给出了紧集上的函数收敛。若随机极限函数 $Z(u)$几乎必然存在唯一极小值点 $\widehat{u}^*$，则由argmin定理（[6]）可得

$$\widehat{u}_n \xrightarrow{d} \widehat{u}^*, \qquad \text{hence} \qquad \sqrt{n}\left(\widehat{\beta}_n - \beta_0\right) \xrightarrow{d} \widehat{u}^*.$$

函数 $Z(u) = -u^\top W + \tau(u)$ 是关于 u 的随机二次函数，其中 $\tau(u) = f_\varepsilon(0)\, u^\top Q u$。极小化解 $\widehat{u}^*$ 的一阶最优性条件为

$$-W + \nabla\tau(\widehat{u}^*) = 0 \quad\Longrightarrow\quad -W + 2f_\varepsilon(0)\, Q\, \widehat{u}^* = 0.$$

因此

$$\widehat{u}^* = \big(2f_\varepsilon(0)\, Q\big)^{-1} W.$$

由于 $W \sim \mathcal{N}(0, B)$，我们得到

$$\widehat{u}^* \sim \mathcal{N}\big(0,\ (2f_\varepsilon(0)\, Q)^{-1} B (2f_\varepsilon(0)\, Q)^{-1}\big).$$

回顾 $\widehat{u}_n = \sqrt{n}(\widehat{\beta}_n - \beta_0)$，可得渐近正态性

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\beta}_n - \beta_0\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0,\ V\big), \qquad V = A^{-1}BA^{-1},$$

with

$$A = 2f_\varepsilon(0)\, Q, \qquad B = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma_h, \qquad \Gamma_h = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1-|h|} x_q x_{q+|h|}^\top\, \gamma_\eta(h).$$

现在我们明确计算 Q、 $M(h)$ 和 Γ_h。

定义

$$Q_n := \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} x_q x_q^\top, \qquad x_q = \begin{pmatrix}\cos(\lambda_k q)\\ \sin(\lambda_k q)\end{pmatrix}, \qquad \lambda_k = \frac{2\pi k}{n}.$$

Then

$$Q_n = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos^2(\lambda_k q) & \cos(\lambda_k q)\sin(\lambda_k q)\\ \cos(\lambda_k q)\sin(\lambda_k q) & \sin^2(\lambda_k q)\end{pmatrix}.$$

利用三角恒等式

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}, \qquad \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \qquad \cos t \sin t = \frac{\sin(2t)}{2},$$

我们得到

$$Q_n = \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2n}\sum_{q=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos(2\lambda_k q) & \sin(2\lambda_k q)\\ \sin(2\lambda_k q) & -\cos(2\lambda_k q)\end{pmatrix}.$$

由于 $\lambda_k = \frac{2\pi k}{n}$，这些和$n$

$$\sum_{q=0}^{n-1}\cos(2\lambda_k q), \qquad \sum_{q=0}^{n-1}\sin(2\lambda_k q)$$

是复指数的有限几何级数，并满足

$$\sum_{q=0}^{n-1} e^{i2\lambda_k q} = \sum_{q=0}^{n-1}\left(e^{i4\pi k/n}\right)^q = \frac{1-e^{i4\pi k}}{1-e^{i4\pi k/n}} = 0,$$

对所有整数 $k \not\equiv 0$ （模 $n/2$）均成立。因此，

$$\sum_{q=0}^{n-1}\cos(2\lambda_k q) = 0, \qquad \sum_{q=0}^{n-1}\sin(2\lambda_k q) = 0.$$

因此，振荡项恰好消失，我们得到

$$Q_n = \frac{1}{2}I_2 \quad \text{for all } n, \qquad \text{hence} \qquad Q = \lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{1}{2}I_2.$$

现在我们详细说明 $M_n(h)$ 的计算。
对于固定滞后 $h \in \mathbb{Z}$，定义

$$M_n(h) := \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1-|h|} x_q x_{q+|h|}^\top, \qquad x_q = \begin{pmatrix}\cos(q\lambda_k)\\ \sin(q\lambda_k)\end{pmatrix}.$$

我们首先展开矩阵乘积

$$x_q x_{q+h}^\top = \begin{pmatrix}\cos(q\lambda_k)\cos((q+h)\lambda_k) & \cos(q\lambda_k)\sin((q+h)\lambda_k)\\ \sin(q\lambda_k)\cos((q+h)\lambda_k) & \sin(q\lambda_k)\sin((q+h)\lambda_k)\end{pmatrix}.$$

利用标准的积化和差三角恒等式

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(a-b)+\cos(a+b)\big],\\
\sin a\sin b &= \tfrac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big],\\
\cos a\sin b &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(b+a)+\sin(b-a)\big],\\
\sin a\cos b &= \tfrac{1}{2}\big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\big],
\end{aligned}$$

结合 $a = q\lambda_k$ 和 $b = (q+h)\lambda_k$，我们得到

$$x_q x_{q+h}^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(h\lambda_k) + \cos((2q+h)\lambda_k) & \sin(h\lambda_k) + \sin((2q+h)\lambda_k) \\ -\sin(h\lambda_k) + \sin((2q+h)\lambda_k) & \cos(h\lambda_k) - \cos((2q+h)\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

对 q 求和并除以 n，得到

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1-|h|} x_q x_{q+h}^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(h\lambda_k) & \sin(h\lambda_k) \\ -\sin(h\lambda_k) & \cos(h\lambda_k) \end{pmatrix} + R_n(h),$$

其中，余项矩阵 $R_n(h)$为

$$R_n(h) = \frac{1}{2n}\sum_{q=0}^{n-1-|h|} \begin{pmatrix} \cos((2q+h)\lambda_k) & \sin((2q+h)\lambda_k) \\ \sin((2q+h)\lambda_k) & -\cos((2q+h)\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

现在我们 证明 $R_n(h) = o(1)$。 $R_n(h)$ 的每个元素都是如下形式的归一化和

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} e^{i(2q+h)\lambda_k} = \frac{e^{ih\lambda_k}}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(e^{i2\lambda_k}\right)^q.$$

这是一个公比为 $e^{i2\lambda_k}$ 的几何和。在非退化条件

$$2\lambda_k \notin 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{equivalently } k \not\equiv 0 \pmod{n/2}),$$

成立时，我们有 $e^{i2\lambda_k} \neq 1$，因此

$$\sum_{q=0}^{n-1}\left(e^{i2\lambda_k}\right)^q = \frac{1 - e^{i2n\lambda_k}}{1 - e^{i2\lambda_k}} = O(1).$$

因此，

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1} e^{i(2q+h)\lambda_k} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

实部和虚部也满足相同的界。因此，

$$R_n(h) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

我们得出

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1-|h|} x_q x_{q+h}^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(h\lambda_k) & \sin(h\lambda_k) \\ -\sin(h\lambda_k) & \cos(h\lambda_k) \end{pmatrix} + o(1),$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} M_n(h) = \frac{1}{2}R(\lambda_k h).$$

根据假设（A3），我们有 $\gamma_\eta(h) = \mathrm{Cov}(\eta_0, \eta_h)$，定义

$$\Gamma_h = \gamma_\eta(h)\, M(h) = \frac{1}{2}\,\gamma_\eta(h)\, R(\lambda_k h),$$

且长期协方差矩阵为

$$B = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma_h = \frac{1}{2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_\eta(h)\, R(\lambda_k h).$$

由于 $A = 2f_\varepsilon(0)Q$ 和 $Q = \frac{1}{2}I_2$，我们有 $A = f_\varepsilon(0)I_2$。因此

$$V = A^{-1}BA^{-1} = \frac{1}{f_\varepsilon(0)^2}\, B = \frac{1}{2f_\varepsilon(0)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_\eta(h)\, R(\lambda_k h).$$

证明至此完成。 □

上述建立的最小绝对偏差估计量的极限分布是一项关键的中间结果，因为它为推导 NKK 周期图的渐近行为提供了概率基础，而该渐近行为将在下述定理中陈述。

定理3.2。 假设假设 (A1)–(A4) 成立。设 $\lambda_k \in (0,\ \pi)$ 为一个傅里叶频率。定义 NKK 周期图为

$$N_k^{(J)} = \frac{n}{8\pi} \left\| \widehat{\beta}_n(\lambda_k) \right\|^2,$$

其中 $\widehat{\beta}_n(\lambda_k)$ 是与谐波回归量相对应的最小绝对偏差估计量

$$x_q(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \cos(q\lambda_k) \\ \sin(q\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

那么，当 $n \to \infty$ 时，

$$N_k^{(J)} \xrightarrow{d} \frac{1}{8\pi} Z^\top Z,$$

其中 Z 是一个协方差矩阵为

$$\Sigma = \frac{1}{2f_\varepsilon(0)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_\eta(h)\, R(\lambda_k h), \qquad \gamma_\eta(h) = \mathrm{Cov}(\eta_0, \eta_h),$$

and

$$R(\lambda_k h) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k h & \sin \lambda_k h \\ -\sin \lambda_k h & \cos \lambda_k h \end{pmatrix}.$$

等价地，极限分布可以写成

$$N_k^{(J)} \xrightarrow{d} \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\, \chi^2_{1,j},$$

其中 λ_1，λ_2 表示 Σ 的特征值，$\chi^2_{1,\,1}$，$\chi^2_{1,\,2}$ 是相互独立的自由度为 1 的卡方随机变量。

证明： 回顾一下，NKK 周期图定义为

$$N_k^{(J)} = \frac{n}{8\pi} \left\| \widehat{\beta}_n(\lambda_k) \right\|^2,$$

其中 $\widehat{\beta}_n(\lambda_k)$ 表示与谐波回归量相关的最小绝对偏差估计量

$$x_q(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \cos(q\lambda_k) \\ \sin(q\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

根据定理 3.1，在假设 (A1)–(A4) 下，我们有

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\beta}_n(\lambda_k) - \beta_0(\lambda_k)\big) \xrightarrow{d} Z, \qquad Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

其中渐近协方差矩阵为

$$\Sigma = \frac{1}{2 f_\varepsilon(0)^2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_\eta(h)\, R(\lambda_k h),$$

其中 $\gamma_\eta(h) = \mathrm{Cov}(\eta_0, \eta_h)$，且

$$R(\lambda_k h) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k h & \sin \lambda_k h \\ -\sin \lambda_k h & \cos \lambda_k h \end{pmatrix}.$$

在频率 λ_k 处不存在周期分量的原假设下，我们有 $\beta_0(\lambda_k) = 0$，因此

$$\sqrt{n}\,\widehat{\beta}_n(\lambda_k) \xrightarrow{d} Z.$$

将范数平方并乘以 n，得到

$$n \left\|\widehat{\beta}_n(\lambda_k)\right\|^2 = \left\|\sqrt{n}\,\widehat{\beta}_n(\lambda_k)\right\|^2.$$

由于映射 $x \mapsto \|x\|^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，根据连续映射定理可得

$$n \left\|\widehat{\beta}_n(\lambda_k)\right\|^2 \xrightarrow{d} Z^\top Z.$$

将两边乘以确定性常数 $(8\pi)^{-1}$，并应用斯卢茨基定理，得到

$$N_k^{(J)} = \frac{n}{8\pi} \left\|\widehat{\beta}_n(\lambda_k)\right\|^2 \xrightarrow{d} \frac{1}{8\pi} Z^\top Z.$$

令 λ_1, λ_2 表示正定矩阵 Σ 的特征值。由于 $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$，该二次型 $Z^\top Z$ 具有如下谱表示

$$Z^\top Z \overset{d}{=} \lambda_1\, \chi^2_{1,1} + \lambda_2\, \chi^2_{1,2},$$

其中 $\chi^2_{1,1}$ 和 $\chi^2_{1,2}$ 是相互独立的、自由度为 1 的卡方随机变量。因此，

$$N_k^{(J)} \xrightarrow{d} \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\, \chi^2_{1,j}.$$

证明至此完成。 □

在适当的正则条件下建立了 NKK 周期图的渐近分布后，我们现在开展蒙特卡罗研究，以评估该统计量的有限样本行为，并说明理论结果在实践中的相关性。

4. 模拟研究

在本节中，我们通过实证评估数据由具有重尾的长记忆过程生成时 NKK 周期图的渐近行为。不同于经典的高斯框架，我们仅考虑服从 Student 分布的创新项，以分析该方法在非高斯情形下的稳健性。

我们考虑两类分数积分自回归滑动平均过程 ARFIMA（参见 [3]）。

第一类模型对应于纯分数过程，其定义如下：

$$(1-L)^d Z_t = \varepsilon_t,$$

其中，L 表示滞后算子，$d \in (0,\ 1\ 2)$为长记忆参数，$\{\varepsilon_t\}$ 是一列服从 Student 分布的独立同分布随机变量，

$$\varepsilon_t \sim t_\nu,$$

其中 $\nu = 5$，这保证了有限方差，同时引入了重尾。

分数 $I(d)$ 过程通过级数表示生成：

$$Z_t = \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(d)_k}{k!}\, u_{t-k}, \qquad (d)_k = d(d+1)\cdots(d+k-1),$$

其中 $\{u_t\}$为学生 t 白噪声。

模拟分别针对 $d = 0.1$ 和 $d = 0.3$ 进行（见图1和图2），样本量为 $n = 1024$。

第二个模型引入了短期动态，其定义为

$$(1-\phi L)(1-L)^d Z_t = (1+\theta L)\varepsilon_t,$$

whe其中，ϕ 和 θ 分别为自回归参数和滑动平均参数 .

模拟中考虑的参数配置如下

$$(\phi, \theta, d, \nu) \in \{(0.3, -0.2, 0.1, 5),\ (0.3, -0.2, 0.3, 5)\},$$

样本量为 $n = 2048$，分别见图3和图4。创新项 ε_t 也服从自由度为 $\nu = 5$ 的 Student 分布。

对于每条模拟轨迹，我们使用 `LA8` 小波（见 [4]）进行最大重叠离散小波变换（MODWT），这种变换非常适合分析长程依赖。

在每个尺度上，使用最小绝对偏差（LAD）估计傅里叶系数，以构建 NKK 周期图。最终的周期图通过对所有考察的尺度取平均得到。

对于研究的每种配置：

- 1000 生成独立重复试验；

- 统计量 $N^{(J)}_k$ 在最低频率 ($k = 1$) 处计算;
- 将经验分布与下式给出的理论渐近密度进行比较

$$\frac{1}{8\pi}\chi^2(2).$$

结果通过比较 NKK 周期图的基于核的经验密度估计与相应的理论渐近密度来呈现。

所得密度曲线表明，NKK 周期图的经验行为与其理论渐近分布吻合良好，即使创新项服从重尾 Student 分布时也是如此（见图 1 至图 4）。

对于 ARFIMA(0, d,0) 过程（见图 1 和图 2），在中等样本量下，两者的吻合尤其令人满意。在 ARFIMA(1, d,1) 情形中引入 ARMA 结构，并不会显著改变该统计量的渐近行为（见图 3 和图 4），不过，正如存在非高斯创新时所预期的那样，分布尾部可能会出现轻微差异。

总体而言，这些结果证实，NKK 周期图对于重尾、短期依赖的存在以及长记忆参数 d 的变化具有稳健性。

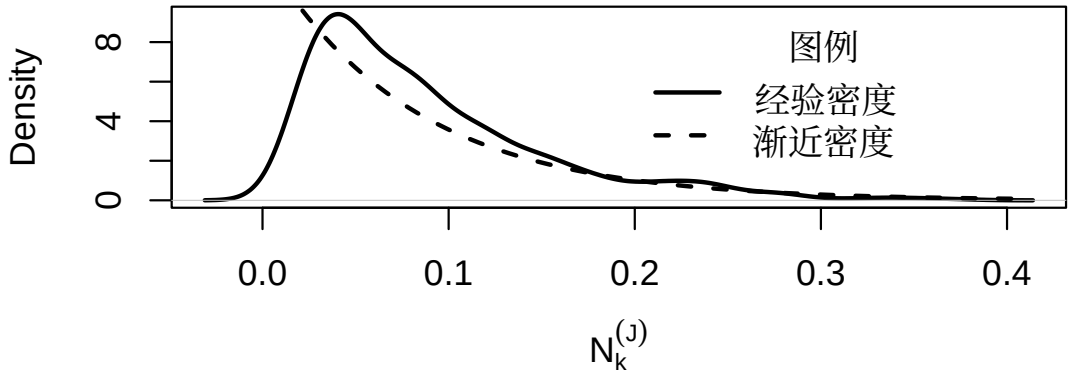

图 1：具有 Student 创新的 ARFIMA(0, 0.1,0) 过程的 NKK 周期图经验密度和渐近密度（$\nu = 5$）。

模拟结果为理论发现提供了有力的实证支持，并为下一节的总结性讨论提供了依据。

5. 结论

本文研究了在固定尺度下，由最小绝对偏差（LAD）谐波回归构造的基于小波的 NKK 周期图的渐近行为。通过利用小波系数的多分辨率性质以及频域中的基于回归的表示，本文在适当的正则性条件和依赖条件下，建立了 NKK 周期图的非退化极限分布。分析突出了

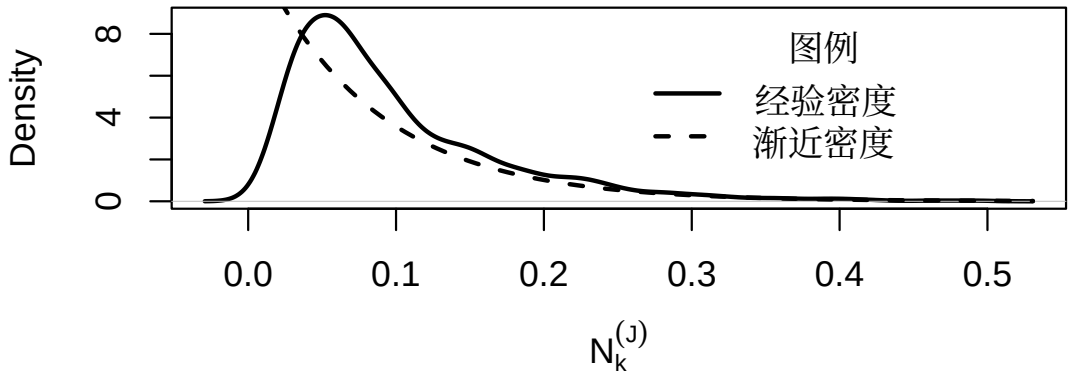

图 2：具有 Student 创新项（$\nu = 5$）的 ARFIMA(0，0。3，0) 过程的 NKK 周期图经验密度和渐近密度。

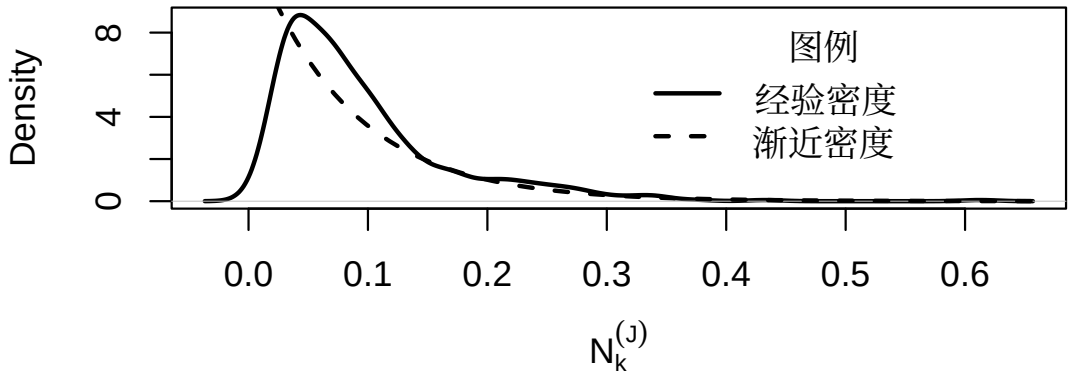

图 3：具有 Student 创新项（$\nu = 5$）的 ARFIMA(1，0。1，1) 过程的 NKK 周期图经验密度和渐近密度。

小波变换所诱导的尺度间去相关的作用，并阐明了谐波结构和频率选择对周期图渐近行为的影响。

所推导的极限定理为在长记忆时间序列分析中使用稳健的小波周期图提供了严格的理论基础。与经典的对数周期图方法不同，本文研究的 NKK 周期图在重尾创新项和长程依赖条件下具有明确的渐近性质，同时仍兼容基于回归的构造。

蒙特卡洛模拟进一步证实了理论结果，表明 NKK 周期图的经验分布与其渐近极限高度吻合，即使存在重尾创新项和短期依赖也是如此。这些发现支持了所提出方法的稳健性，并凸显了其在长记忆过程谱分析中的实际意义

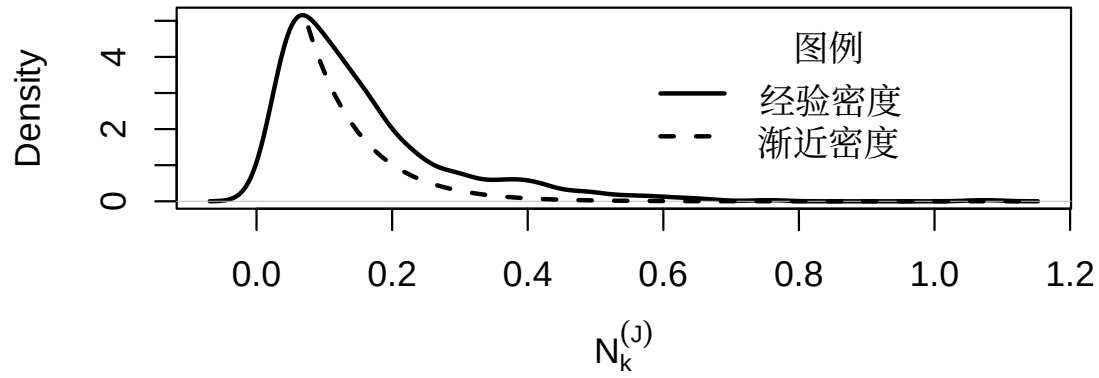

图 4：具有 Student 创新项的 ARFIMA(1，0。3，1) 过程的 NKK 周期图的经验密度和渐近密度 ($\nu = 5$)。

中的应用。

参考文献

[1] P. Abry 和 D. Veitch，长程依赖流量的小波分析，*IEEE* 信息论汇刊 **44***(1998)，2–15*。[2] R. T. Baillie，长记忆过程与计量经济学中的分数阶积分，计量经济学杂志**73***(1996)，5–59*。[3] J. Beran、Y. Feng、S. Ghosh 和 R. Kulik，《长记忆过程》，施普林格，*2013*。[4] I. Daubechies，《小波十讲》，*SIAM，1992*。[5] F. A. Fajardo、V. A. Reisen、C. L´evy-Leduc 和 M. S. Taqqu，用于分析长程依赖时间序列的 M 周期图，统计学 **52***(2018)，665–683*。[6] C. J. Geyer，关于凸随机优化的渐近性质，未发表手稿（*1996*）。[7] L. Giraitis、H. L. Koul 和 D. Surgailis，具有长记忆误差的回归估计量的渐近正态性，《统计与概率快报》 **29***(1996)，317–335*。[8] J. Geweke 和 S. Porter-Hudak，长记忆时间序列模型的估计与应用，《时间序列分析杂志》 **4***(1983)，221–237*。[9] H. E. Hurst，水库的长期储水能力，《美国土木工程师学会汇刊》 **116***(1951)，770–799*。[10] I. A. Ibragimov 和 Yu. V. Linnik，《独立平稳随机变量序列》，*Wolters-Noordhoff*，格罗宁根，*1971*。[11] K. Knight，一般条件下回归估计量的极限分布，《统计年刊》 **26***(1998)，755–770*。

[12] J. Lee，长记忆随机波动模型中对数周期图回归的小波变换，计量经济学会2004年远东会议，第682号。[13] J. Lee，美国通货膨胀率记忆参数的估计，《经济学快报》87(2005)，207–210。[14] W. E. Leland、M. S. Taqqu、W. Willinger 和 D. V. Wilson，关于以太网流量的自相似性，《IEEE/ACM网络汇刊》2(1994)，1–15。[15] W.-H. Li，用于时间序列分析的拉普拉斯周期图，《美国统计学会杂志》103(2008)，757–768。[16] G. S. Lo、T. A. Kpanzou、M. Ngom 和 A. B. Niang，《弱收敛（IA）：随机向量序列》，SPAS丛书，卡尔加里，2021。[17] S. Mallat，多分辨率信号分解理论：小波表示，《IEEE模式分析与机器智能汇刊》11(1989)，674–693。[18] B. B. Mandelbrot 和 J. W. Van Ness，分数布朗运动、分数噪声及其应用，《SIAM评论》10(1968)，422–437。[19] E. Moulines、F. Roueff 和 M. S. Taqqu，长记忆时间序列小波系数的谱密度及其在记忆参数对数回归估计中的应用，《时间序列分析杂志》28(2007)，155–187。[20] M. N’Daam、T. A. Kpanzou 和 E. Katchekpele，利用稳健对数周期图估计随机波动模型中的长记忆参数，《巴库数学杂志》4(2025)，191–208。[21] D. B. Percival 和 A. T. Walden，《时间序列分析的小波方法》，剑桥大学出版社，2000。[22] P. M. Robinson，长程依赖的高斯半参数估计，《统计年刊》23(1995)，1630–1661。[23] D. Surgailis，长程依赖与 Appell秩，《概率论及相关领域》118(2000)，193–212。