arXiv:2601.00314v1 [math.GR] 1 Jan 2026

可解 Baumslag–Solitar 群中的不动点与稳定子

OORNA MITRA 和 RAMYA NAIR

Abstract. 本文研究可解 Baumslag-Solitar 群 BS(1，n) $= \langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle$, $n > 1$ 在自同构和自同态下的不动点子群。我们还考察 BS(1，n) 子群的稳定子，将其分别视为自同构群的子群和 BS(1，n) 端同态幺半群的子幺半群。我们证明，自同构的不动点子群要么是无限循环群（此时可以计算出一个生成元），要么等于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，即一个无限生成阿贝尔群。我们进一步证明，BS(1，n) 中一个元素的稳定子子群要么是有限生成阿贝尔群，其秩等于 n 的不同素因子个数（此时可以计算出一个有限生成集），要么等于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。作为推论，我们证明，对所有 $k \in \mathbb{N}$，BS(1，n) 中的每个元素都有唯一的 k 次根。随后，我们考察端同态作用下不动点子群和稳定子的行为，并发现了类似的结果。我们证明，端同态的不动点子群仍然是无限循环群或 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，但稳定子子幺半群总是无限生成的。

1. Introduction

给定一个群 G 以及其上的自同构（或自同态） φ，不动点子群定义为 Fix(φ) $= \{g \mid \varphi(g) = g\}$，它是 G 的一个子群。不动点的研究最早在自由群的背景下受到广泛关注。1975 年，Dyer 和 Scott [7]提出了后来被称为 Scott 猜想的命题：有限生成自由群的自同构的不动点子群的秩不超过该群自身的秩。此猜想后来由 Bestvina 和 Handel [6]于 1992 年证明。此后，不动点子群在各种背景下得到研究，尤其是在具有负曲率的群中，包括双曲 [9] 和相对双曲群 [8]。近年来，不动点子群也在不具有负曲率的群中得到研究，例如 Artin 群 [10]。Jones 和 Logan [4]研究了广义 Baumslag-Solitar 群的不动子群的各种性质。关于其他群类中不动子群的结果，参见 [15], [16], [5], [17], [18]。

给定一个群 G，Aut(G) 表示 G 的自同构群，而 End(G) 表示 G. 的端同态幺半群。给定一个元素 $g \in G$, 我们定义稳定子 Stab(g) $= \{\varphi \in$Aut(G) $\mid \varphi(g) = g\}$，它是 g 的稳定子，结果表明它是 Aut(G) 的子群。我们还定义端同态稳定子 e-Stab(g) $= \{\varphi \in$ End(G) $\mid \varphi(g) = g\}$，它是 g 的端同态稳定子，是 End(G) 的子幺半群。

本文描述了 BS(1，n)。中自同构和自同态的不动子群。我们还描述了 BS(1，n) 中元素的稳定子，并将其视为自同构群的子群以及 BS(1，n) 的端同态幺半群的子幺半群。我们的研究主要依赖于

Key words and phrases. Baumslag–Solitar 群、不动子群、稳定子。1

O'Niell [3] 给出的关于 BS(1， n) $n > 2$ 的自同构和自同态的描述。我们证明中采用的技术本质上属于代数和组合学范畴。

本文组织如下。

在第 §2 节中，我们首先回顾群 BS(1, n) 的几种等价描述，并描述 BS(1, n) 的自同构和端同态，如 O'Niell [3] 所述。我们还遵循 [1] 的工作，介绍自同构群 Aut(BS(1, n)) 的各种描述。

在第 §3 节中，我们研究 $\varphi \in$ Aut((BS(1, n)) 的不动点集 Fix(φ)，以及 $g \in$ BS(1, n) 的稳定子 Stab(g)，。本节的主要定理如下。

定理 1.1。 设 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1, n))$ 为一个非平凡自同构，则或者有 不动点集 $\varphi \cong \mathbb{Z}$，或者有不动点集 $\varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。当不动点集 $\varphi \cong \mathbb{Z}$时，其生成元是可计算的。

定理 1.2。 设 g 是 $\mathrm{BS}(1, n)$ 的非平凡元素。那么，要么 稳定子(g) $\cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，要么 稳定子($g$) 是有限生成阿贝尔群，其秩等于 n 中不同素数的数量，并且可以计算出一个有限生成元集。

在本节中，我们还描述了 BS(1, n) 的自不动闭包，这是 Martino 和 Ventura 在 [11] 中引入的概念。我们注意到，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，稳定子(g) =稳定子(g^k)，。由此我们可以得出，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，BS(1, n) 中的每个元素都有唯一的 k 次根。

在第 §4 节中，我们研究自同态 φ ∈End(BS(1, n)) 的不动点子群 不动点集(φ)，以及元素 $g \in$ BS(1, n) 的稳定子子幺半群 e- 稳定子(g)。本节的主要定理将在此处陈述。

定理 1.3。 设 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathrm{BS}(1, n))$ 是一个非平凡自同态，则不动点集$\mathrm{Fix}\,\varphi \cong \mathbb{Z}$ 或$\mathrm{Fix}\ \varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 或 $\mathrm{Fix}(\varphi)$ 是平凡的。当$\mathrm{Fix}\ \varphi \cong \mathbb{Z}$时，其生成元是可计算的。

定理 1.4。 设 $g \in \mathrm{BS}(1, n)$ 是一个非平凡元素。那么 e-$\mathrm{Stab}(g)$ 是$\mathrm{End}(\mathrm{BS}(1, n))$的一个无限生成子幺半群。

本节中我们描述 BS(1, n) 的内自固定闭包。我们还证明，对于任意$\varphi \in$ End(BS(1, n)) $g \in$ BS(1, n),Fix(φ) = Fix(φ^k) 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立，并且 e- Stab(g) = e- Stab(g^k) 对所有$k \in \mathbb{Z}$成立

2. Preliminaries

Baumslag–Solitar 群 **群** BS(m, n)，其中 $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，由表示式定义

$$\mathrm{BS}(m, n) = \langle a, t \mid ta^m t^{-1} = a^n \rangle.$$

这些群为组合群论与几何群论中的许多新思想提供了试验场，例如参见 [12] [13] [14] 。其中，唯一的可解群具有 BS(1, n) 的形式；当 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 时如此。下面我们将给出群 BS(1, n) 的其他描述。

这些群是相对于子群 $\mathbb{Z}$ 和 $n\mathbb{Z}$的 $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$ HNN 扩张，且同构

$$\varphi : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}, \quad \varphi(a) = a^n.$$

存在一个定义良好的满同态 BS(1, n) $\to \mathbb{Z}$，由 $a \mapsto 0$ 和 $t \mapsto 1$给出，其核恰为由 a生成的正规闭包 $\langle\langle a \rangle\rangle$，且同构于 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. 因此 BS(1, n)

属于可分裂的短正合列 $1 \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \to \mathrm{BS}(1,n) \to \mathbb{Z} \to 1.$。这表明 BS(1, n) 是一个具有以下形式的亚交换群

$$\mathrm{BS}(1,n) \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \rtimes \mathbb{Z}.$$

本文始终采用 BS(1, n) 的半直积结构，BS(1, n) 的元素记作 (γ, c)，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 和 $c \in \mathbb{Z},$，运算定义为

$$(\gamma_1, c_1).(\gamma_2, c_2) := (\gamma_1 n^{c_2} + \gamma_2, c_1 + c_2). \tag{1}$$

对于任意满足 $n \neq \pm 1$ 的 $n \in \mathbb{Z}$，考虑单同态 BS(1, n) $\longrightarrow \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$，其定义为 $(\gamma, c) \longmapsto \begin{pmatrix} n^c & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$。由此可知，对于 $n \neq \pm 1$，群 BS(1, n) 可视为线性群。上述单同态还可用于证明，只要 $n \neq \pm 1.$，就有 BS(1, n) $\cong$BS(1, $-n$)。此后我们讨论 BS(1, n),，其中 $n \geq 2$。

下文将始终用到以下引理。

引理 2.1. 对于 $(\gamma, c) \in \mathrm{BS}(1, n)$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 和 $c \in \mathbb{Z}$，以下命题成立：

(1) $(\gamma, c)^{-1} = (-\gamma n^{-c}, -c)$;
(2) *For* $k \in \mathbb{Z}, (\gamma, c)^k = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, ck\right)$.

证明。 对于 (i)，利用 1 中的复合规则，经过简单计算可得 $(\gamma, c).(-\gamma n^{-c}, -c) = (-\gamma n^{-c}, -c).(\gamma, c) = (0, 0)$，它是 BS(1, n) 的单位元。 因此，$(\gamma, c)^{-1} = (-\gamma n^{-c}, -c)$.

对于 (ii)，我们先考虑 $k \geq 0.$ 的情形。对于$k = 0, k = 1.$，该命题显然成立。假设 $(\gamma, c)^k = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, ck\right)$. 那么利用 1 中的复合规则，$(\gamma, c)^{k+1} = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, ck\right).(\gamma, c) = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma.n^c + \gamma, (k+1)c\right) = \left(\gamma\left(\frac{n^{c(k+1)}-n^c}{n^c-1} + 1\right), (k+1)c\right) = \left(\frac{n^{c(k+1)}-1}{n^c-1}\gamma, c(k+1)\right)$. 因此，对于所有 $k \geq 0.$，我们有 $(\gamma, c)^k = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, ck\right)$ ——

对于 $k < 0$，我们将上述结果用于 $-k \geq 0$，得到 $(\gamma, c)^k = ((\gamma, c)^{-1})^{-k} = (-\gamma n^{-c}, -c)^{-k} = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^{-c}-1}. - \gamma n^{-c}, ck\right) = \left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, ck\right)$. 这完成 l了证明h证明 f. □

下文将多次用到对 BS(1, n) 的有限生成子群的如下描述：

引理 2.2。 设 H 是 $\mathrm{BS}(1, n)$ 的有限生成子群。那么 H 是无限循环群或具有有限指数。

证明。令 $H = \langle(\gamma_1, k_1) \ldots, (\gamma_l, k_l)\rangle$。考虑满同态 ψ: $BS(1, n) \to \mathbb{Z}$，其中$a \mapsto 0$，$t \mapsto 1$。其像 $\psi(H)$ 是循环群，设由 k 生成。若 $k = 0$，则 H 是 ker $\psi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 的有限生成子群，因此是无限循环群。对于 $k \neq 0$，可写为 $H = \langle(\gamma, k), (\gamma_1', 0) \ldots, (\gamma_l', 0)\rangle$，其中某个 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 满足 $(\gamma_i', 0) \in$ker ψ 对所有$1 \leq i \leq l$均成立。由于 ker $\psi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 且 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 的每个有限生成子群都是循环群，我们得到$H = \langle(\gamma, k), (\gamma'', 0)\rangle$，其中某个 $(\gamma'', 0) \in$ker ψ.。若 $\gamma'' = 0$，则 H 是无限循环群。若 $\gamma'' \neq 0$，则根据 [2], 第 3 节中的讨论，子群 H 在 BS(1, n) 中具有有限指数，且 $H \cong$BS(1, n^k)。

□

现在我们将描述 BS(1， n) 的自同构，以及 O'Niell [3] 和 Mitra、Roy、Ventura [1] 给出的群 Aut(BS(1， n)) 的结构。对于 $n \neq \pm 1$，BS(1， n) 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n)) = \left\{\varphi_{\alpha,\beta} \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{n}]^*,\, \beta \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{n}]\right\},$$

其中 $\varphi_{\alpha,\beta}(0,1) = (\beta, 1)$，且 $\varphi_{\alpha,\beta}(1,0) = (\alpha, 0)$。这里， $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]^*$ 表示 $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$中的单位群，它与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$同构，其中 r 是 n中不同素数的个数。

对于任意元素 (γ, c)，其中 $\gamma = \frac{l}{n^k}$， $l, k \in \mathbb{Z}$， $k > 0$，我们有 $(\gamma, c) = (0,1)^c \cdot (0,1)^k \cdot (1,0)^l \cdot (0,1)^{-k}$。因此，$\varphi_{\alpha,\beta}(\gamma, c) = \varphi_{\alpha,\beta}\big((0,1)^c \cdot (0,1)^k \cdot (1,0)^l \cdot (0,1)^{-k}\big) = (\beta, 1)^c \cdot (\beta, 1)^k \cdot (\alpha, 0)^l \cdot (\beta, 1)^{-k}$。注意，$(\beta, 1)^m = \big(\beta(1 + n + \cdots + n^{m-1})\ m\big) = \left(\beta \frac{n^m - 1}{n-1}, m\right), \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，且 $(\alpha, 0)^l = (l\alpha, 0)$ $\forall l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

因此，

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,\beta}(\gamma, c) &= \left(\beta\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) \cdot \left(\beta\frac{n^k - 1}{n-1}, k\right) \cdot (l\alpha, 0) \cdot \left(\beta\frac{n^{-k} - 1}{n-1}, -k\right) \\
&= \left(\beta\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) \cdot \left(l\alpha + \beta\frac{n^k - 1}{n-1}, k\right) \cdot \left(\beta\frac{n^{-k} - 1}{n-1}, -k\right) \\
&= \left(\beta\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) \cdot \left(\alpha\frac{l}{n^k}, 0\right) \\
&= \left(\alpha\frac{l}{n^k} + \beta\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) \\
&= \left(\alpha\gamma + \beta\frac{n^c - 1}{n-1},\, c\right).
\end{aligned}$$

现在，若 $\varphi_{\alpha,\beta}, \varphi_{\alpha',\beta'} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n))$，则 $\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\alpha',\beta'}(\gamma, c) = \varphi_{\alpha,\beta}\left(\alpha'\gamma + \beta'\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) = \left(\alpha(\alpha'\gamma + \beta'\frac{n^c - 1}{n-1}) + \beta\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) = \left(\alpha\alpha'\gamma + (\alpha\beta' + \beta)\frac{n^c - 1}{n-1}, c\right) = \varphi_{\alpha\alpha',\alpha\beta'+\beta}(\gamma, c)$。因此我们有，$\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\alpha',\beta'} = \varphi_{\alpha\alpha',\alpha\beta'+\beta}$。

由上述复合规则可知，存在一个良定义的满同态 $\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n)) \to \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]^*$，它由 $\varphi_{\alpha,\beta} \mapsto \alpha$ 给出，其核为 $\{\varphi_{1,\beta} \mid \beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\}^- \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。因此 $\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n))$ 可纳入短正合列 $1 \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^- \to \mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n)) \to \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]^* \to 1.$，且该列分裂。这表明 $\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n))$ 也是形如

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n)) \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \rtimes \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]^*.$$

群 Aut(BS(1， n)) 的复合规则确保该群也可以视为一个线性群，其中单同态 $\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1, n)) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right])$ 由 $\varphi_{\alpha,\beta} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 给出。本文将采用 $\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1, n))$。的如下描述。

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]^*, \beta \in \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \right\}$$

其中复合规则由通常的矩阵乘法给出，而 Aut(BS(1， n)) 对 BS(1， n) 的作用由下式给出

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\gamma,c)=\left(\alpha\gamma+\beta\frac{n^c-1}{n-1},c\right)$$

详细计算请参见第 2.2 小节，其中标题为*BS(1, n)* 的自同构，见 [1] .

现在我们将描述 BS(1, n) 的自同态。根据 [3], 中的命题 2.1，自同态分为两种类型。

类型 *(i)*：我们将所有类型 *(i)*自同态的集合记为

$$\mathrm{End}^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,n)):=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]\setminus\{0\},\,\beta\in\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]\right\}$$

其中复合规则由通常的矩阵乘法给出，而 $\mathrm{End}^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,n))$ 在 BS(1, n) 上的作用由下式给出

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\gamma,c)=\left(\alpha\gamma+\beta\frac{n^c-1}{n-1},c\right)$$

类型 *(ii)*：我们将所有类型 *(ii)*自同态的集合记为

$$\mathrm{End}^{\mathrm{II}}(\mathrm{BS}(1,n)):=\left\{\varphi_{(\gamma,c)}\mid(\gamma,c)\in\mathrm{BS}(1,n)\right\},$$

其中 $\varphi_{(\gamma,c)}(1,\ 0)=(0,\ 0)\varphi_{(\gamma,c)}(0,\ 1)=(\gamma,\ c)$。
对于 (γ,c)、$(\gamma',c')\in$BS(1, n) $\varphi_{(\gamma,c)}\circ\varphi_{(\gamma',c')}(1,0)=(0,0)\varphi_{(\gamma,c)}\circ\varphi_{(\gamma',c')}(0,1)=\varphi_{(\gamma,c)}(\gamma',c')$。现在，设 $\gamma'=\frac{l}{n^k},l,k\in\mathbb{Z},\ k>0$，我们有 $(\gamma',c')=(0,1)^{c'}\cdot(0,1)^k\cdot(1,0)^l\cdot(0,1)^{-k}$。因此，$\varphi_{(\gamma,c)}(\gamma',c')=\varphi_{(\gamma,c)}\left((0,1)^{c'}\cdot(0,1)^k\cdot(1,0)^l\cdot(0,1)^{-k}\right)=(\gamma,c)^{c'}=\left(\frac{n^{cc'}-1}{n^c-1}\gamma,cc'\right)$，由引理 2.1 得出。
因此，类型 (ii) 自同态的复合规则如下

$$\varphi_{(\gamma,c)}\circ\varphi_{(\gamma',c')}=\varphi_{\left(\frac{n^{cc'}-1}{n^c-1}\gamma,cc'\right)}$$

注 2.3. $\mathrm{End}^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,n))$ 和 $\mathrm{End}^{\mathrm{II}}(\mathrm{BS}(1,n))$ 是幺半群 End(BS(1, n)) 的两个互不相交的子集，并且在复合运算下封闭。

3. Fixed subgroups of automorphisms and stabilizers

定义 3.1. 设 G 是一个群，Aut(G) 是它的自同构群。令 $\varphi\in$Aut(G)，则 φ 的不动子群记为 Fix φ，定义为 Fix $\varphi=\{g\in G|\varphi(g)=g\}$

显然，Fix φ 构成一个群。

定理 3.2. 设 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathrm{BS}(1,n))$ 是一个非平凡自同构，则要么 不动点集 $\varphi\cong\mathbb{Z}$，要么不动点集 $\varphi\cong\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。当不动点集 $\varphi\cong\mathbb{Z}$ 时，其生成元是可计算的。
证明。 设 $\varphi=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，其中 $\alpha\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$ 且 $\beta\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$.。若 $(\gamma,c)\in$不动点集 φ，则 $\varphi(\gamma,c)=(\gamma,c)$，也就是说，$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\gamma,c)=(\gamma,c)$，由此得到 $\left(\overline{\alpha\gamma+\beta\frac{n^c-1}{n-1}},c\right)=(\gamma,c)$，因此

$$(\alpha-1)\gamma+\beta\frac{n^c-1}{n-1}=0. \tag{2}$$

现在我们将讨论两种情形。

情形 *(i)*: $\alpha = 1$

若 $\alpha = 1$，则由于 φ 非平凡且 $\beta \frac{n^c-1}{n-1} = 0$，$\beta \neq 0$ $\frac{n^c-1}{n-1} = 0 \implies c = 0$。这意味着 $\frac{n^c-1}{n-1} = 0 \implies c = 0$。因此，对于 $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，不动点集 $\varphi = \{(\gamma, 0) | \gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\} \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。

情形（*ii*）：$\alpha \neq 1$

对于 $\alpha \neq 1$，由方程 2，映射 BS(1，n) $\longrightarrow \mathbb{Z}$，其中 $(\gamma, c) \longmapsto c$，限制在不动点集 φ 上时是单射，因此不动点集 Fix$\varphi \leq \mathbb{Z}$。若要使 (γ, c) 属于不动点集 Fixφ，则 $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^c-1}{n-1}$（由方程 2）。令 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} .. p_r^{k_r}$，其中 $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$，则由于 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$，$\alpha = \prod_{j=1}^{r} p_j^{s_j}$，其中 $s_j \in \mathbb{Z}\ \forall j$。令 $J_- := \{j : s_j < 0\}$，$J_+ := \{j : s_j > 0\}$，以及 $J_0 := \{j : s_j = 0\}$。将 $\alpha = \prod_{j=1}^{r} p_j^{s_j}$ 代入 $\gamma = \frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^c-1}{n-1}$ 得到

$$\gamma = \frac{\beta\,(n^c-1)}{\left(\prod_{j=1}^{r} p_j^{s_j} - 1\right)(n-1)}.$$

现在，将分子和分母同时乘以 $\prod_{j\in J_-} p_j^{-s_j}$，得到

$$\gamma = \beta\,\frac{\left(\prod_{j\in J_-} p_j^{-s_j}\right)(n^c-1)}{\left(\prod_{j\in J_+} p_j^{s_j} - \prod_{j\in J_-} p_j^{-s_j}\right)(n-1)}.$$

现在，要使 (γ, c) 属于不动点集 φ, γ必须属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。换言之，我们必须找到一个$c$的取值，使得 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。令 $Q = \left(\prod_{j\in J_+} p_j^{s_j} - \prod_{j\in J_-} p_j^{-s_j}\right)$。注意，对于因式分解 α 中出现的所有素数 p_j，都有 gcd$(Q, p_j) = 1$，也就是说，对于所有满足 $j \in J_+ \bigcup J_-$ 的 p_j 都成立。因此 $Q = \left(\prod_{j\in J_0} p_j^{s_j}\right) Q'$，其中乘积遍历所有出现在 n 的因式分解中、但未出现在 α 的因式分解中的素数 p_j，且 $s_j \geq 0$。因此，gcd$(Q', n) = 1$。于是，对于某个$\beta = \frac{l}{n^q}$，以及某个满足 $q \geq 0$ 的 $l, q \in \mathbb{Z}$，

$$\gamma = \frac{l\,(n^c-1)}{n^q\left(\prod_{j\in J_0} p_j^{s_j}\right) Q'\,(n-1)}.$$

注意，$n^q\left(\prod_{j\in J_0} p_j^{s_j}\right)$ 在 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$中可逆。此外，gcd$(n-1, n) = 1$ 且 gcd$(Q', n) = 1$，因此 $(n-1)Q'$ 不可逆。由于 $(n-1)Q'$ 与 n互素，同余方程$n^c \equiv 1 (\text{mod } (n-1)Q')$对 c 有非零解（例如欧拉函数），记为 c_0。对于 Fixφ中的所有元素，c 都唯一确定 γ（由方程 2 可知）。因此，我们可以检查 c_0的所有因数，判断 $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^{c_0}-1}{n-1}$是否属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。设 $c = \tilde{c}$是 c_0的最小因数，且满足 $-\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^{\tilde{c}}-1}{n-1} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。那么 Fix$\varphi = \langle(\tilde{\gamma}, \tilde{c})\rangle$，其中 $\tilde{\gamma} = -\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^{\tilde{c}}-1}{n-1}$。

□

现在我们将讨论 BS(1，n) 在其自同构作用下的稳定子 s.

定义 3.3。设 H 是群 G的一个子群。那么，H 的稳定子记作 Stab(H)，定义为集合 $\{\varphi \in \text{Aut}(G) \mid \varphi(h) = h$ 对所有 $h \in H\}$.

显然，Stab(H) 是 Aut(G) 的一个子群。注意，若 $H = \langle g \rangle$，其中 $g \in G$则，Stab(H) $=\{\varphi \in$ Aut(G) $\mid \varphi(g) = g\}$。在这种情况下，我们将 Stab(H) 记作 Stab(g)。我们还注意到，Stab(g) = Stab(g^{-1})。

定理 3.4. 设 (γ, c) 是 $\mathrm{BS}(1,n)$中的非平凡元素。那么 稳定子$(\gamma, 0) \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，并且如果$c \neq 0$，那么稳定子$(\gamma, c)$ 是有限生成阿贝尔群，其秩等于 n 中不同素数的个数，且可计算出一个有限生成元集。

证明. 设 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$稳定子$(\gamma, c)$，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$，且 $\beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 是 BS(1, n)的一个非恒等自同构。那么 $\varphi(\gamma, c) = (\gamma, c)$蕴含 $(\alpha - 1)\gamma + \beta\frac{n^c-1}{n-1} = 0$，这与 2 相同。由于稳定子$(g)$ = 稳定子(g^{-1})，我们可以假设 $c \geq 0$。

情形 *(i)*: $c = 0$。
将 $c = 0$ 代入 2，得到 $(\alpha - 1)\gamma = 0$.。由于 (γ, c) 是 BS(1, n) 的非平凡元素，因此有$\alpha = 1$。所以 Stab$(\gamma, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \right\} \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，它是一个无限生成阿贝尔群。

情形 *(ii)*: $c > 0$。
如前所述，要使 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 属于 Stab(γ, c)，α，β 必须满足方程 2。因此，由于 α 唯一确定 β 的值，我们有一个单同态 Stab$(\gamma, c) \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$，它将 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha$ 映至。由于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$，其中 r 是 n 中不同素数的个数，我们得出结论：Stab(γ, c) 是一个秩为 $\leq r$. 的有限生成阿贝尔群。现在，我们给出一个算法，用于计算 Stab(γ, c) 的有限生成元集。在方程 2 中，令$\frac{n^c-1}{n-1} = \mu$。于是，我们有 $(\alpha-1)\gamma+\mu\beta = 0$，其中 α，β 是未知数。由于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 是一个欧几里得整环，存在 $d \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，其中 d 是 γ，μ 的最大公因子（在相差一个单位的意义下唯一）；将两边除以 d 并清除分母后，得到一个方程

$$(\alpha - 1)\gamma' + \mu'\beta = 0 \tag{3}$$

其中 $\mu' \in \mathbb{Z}$，且最大公约数$(\mu', n) = 1$（即最大公约数$(\mu, n) = 1$）。显然，$(\alpha - 1) = D\mu'$ 和 $\beta = -D\gamma'$ where$D \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 都是方程 3 的解。考虑部分 $(\alpha - 1) = D\mu'$。这意味着 $\alpha = 1 + D\mu' = 1 + \frac{x}{n^y}\mu' = \frac{n^y+x\mu'}{n^y}$其中 x，$y \in \mathbb{Z}$且 $y \geq 0$。由于，α，$n^y \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$，$n^y + x\mu'$也应当可逆。注意到 $n^y + x\mu' \in \mathbb{Z}$。因此我们有，$n^y + x\mu' = \prod_{j=1}^{r} p_j^{z_j}$ 其中 $z_i \geq 0$。这意味着

$$n^y \equiv \prod_{j=1}^{r} p_j^{z_j} \pmod{\mu'} \tag{4}$$

注意，μ', p_i 的最大公约数为 $= 1$，对于 $1 \leq i \leq r$，这意味着 $\exists o(p_i) \in \mathbb{N}$，使得 $p^{o(p_i)}{}_i \equiv 1$(模 μ') 对于 $1 \leq i \leq r$。另外，注意，μ', n 的最大公约数为 $= 1$，这意味着 $\exists o(n) \in \mathbb{N}$，使得 $n^{o(n)} \equiv 1$(模 μ')。

现在，对于 $1 \leq j \leq o(n)-1$，定义

$$\mathcal{L}^j = \left\{ (s_1, .., s_r) \middle| 0 \leq s_i \leq o(p_i) - 1 \, \forall 1 \leq i \leq r \text{ such that } \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i} \equiv n^j (\mathrm{mod}\, \mu') \right\}.$$

我们声称，集合 $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\gamma}{\mu}(\\ 0 & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \alpha - 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \in$) Aut(BS(1, n)) $\Big| \alpha \in \mathcal{S} \Big\}$ 生成 Stab(γ, c)，其中

$$\mathcal{S} = \left\{ p_i^{o(p_i)} \middle| 1 \leq i \leq r \right\} \bigcup \left\{ n^{o(n)} \right\} \bigcup \bigcup_{j=0}^{o(n)-1} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}}{n^j} \middle| (s_1, ..., s_r) \in \mathcal{L}^j \right\}.$$

设 $\varphi \in$ Stab(γ, c) $\leq$ Aut(BS(1, n)), 其中 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 其中 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$。根据前述讨论，我们知道 $\alpha = \frac{n^y + x\mu'}{n^y}$，并且由 4 可知，$n^y \equiv \prod_{i=1}^{r} p_i^{z_i}$(模 μ') $\Longrightarrow$ $n^{j+\lambda o(n)} \equiv \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i+\lambda_i o(p_i)}$ (模 μ')，对于某些 λ，$\overline{\lambda_1, ...}$，$\lambda_r \in \mathbb{Z}$ $\Longrightarrow$ $n^j \equiv \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$(模 μ') $\Longrightarrow$ $(s_1, ..., s_r) \in \mathcal{L}^j$ 以及

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{z_i}}{n^y} = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i+\lambda_i o(p_i)}}{n^{j+\lambda o(n)}} = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}}{n^j} \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{o(p_i)}\right)^{\lambda_i} \left(\frac{1}{n^{o(n)}}\right)^{\lambda}.$$

我们还需要验证生成元是否稳定 (γ, c)。我们知道，任意 $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ Stab(γ, c) 当且仅当 α, β 满足 2。因此，为了证明我们的结论，只需检查对于 $\alpha \in \mathcal{S}$,$\beta = -\frac{\gamma}{\mu}(\alpha - 1) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。当 $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}}{n^j}$, $\beta = -\frac{\gamma}{\mu}\left(\frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}}{n^j} - 1\right) = -\frac{\gamma'}{\mu'}\left(\frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i} - n^j}{n^j}\right)$ 时。由于，$(s_1, .., s_r) \in \mathcal{L}^j$, $\exists x \in \mathbb{Z}$ 使得 $\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i} - n^j = x\mu' \implies x = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i} - n^j}{\mu'} \in \mathbb{Z}$。因此，$\beta = -\frac{\gamma'}{n^j} x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。如果 $\alpha = p_i^{o(p_i)}$, $\beta = -\frac{\gamma}{\mu}(p^{o(p_i)}{}_i - 1)$。与上一个情形一样，我们有一个整数 $t = \frac{p_i^{o(p_i)} - 1}{\mu'}$，因此，$\beta = -\gamma' t \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$.。类似的计算表明，对于 $\alpha = n^{o(n)}$, $\beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。因此，集合 $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{\gamma}{\mu}(\\ 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \alpha - 1 \\ 1 \end{matrix} \right) \in$) Aut(BS(1, n)) $\Big| \alpha \in \mathcal{S} \Big\}$ 生成了 Stab(γ, c)，显然是一个有限集。现在，我们知道 Stab(γ, c)) 的秩小于或等于 r。注意，生成集的子集 $\left\{ \begin{pmatrix} p^{o(p_i)}{}_i & -\frac{\gamma}{\mu} p_i^{o(p_i} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| 1 \leq i \leq r \right\}$ ( )) 线性无关，且秩为 r。因此，当 $c \neq 0$ 时，Stab(γ, c) 是一个秩为 r 的阿贝尔群。 □

推论 3.5. 设 H 是$\mathrm{BS}(1, n)$的一个有限生成子群。那么$\mathrm{Stab}(H)$ 要么是平凡群，要么是$\mathrm{Stab}(H) \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$；或者它是一个有限生成阿贝尔群，其秩等于 n 中不同素数的个数；在这种情况下，可以计算出一个有限生成元集。

证明. 设 H 是 BS(1, n) 的一个有限生成子群。根据引理 2.2，需要考虑两种情况。

情形 *(i)*: H 是 BS(1, n) 的有限指数子群。令 $\varphi \in$ Stab(H)，则 $H \leq$ Fix(φ) $\leq$ BS(1, n)。由于 H 是 BS(1, n) 的有限指数子群，Fix(φ) 也是 BS(1, n) 的有限指数子群。但根据定理 3.2，Fix $\varphi \cong \mathbb{Z}$ 或 Fix $\varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，二者都不是 BS(1, n) 的有限指数子群。因此，Fix(φ) = BS(1, n)，这意味着 φ 是

恒等自同构。因此，在这种情况下，Stab(H) 是平凡群。

情形（*ii*）： $H = \langle g \rangle$ 是无限循环的，其中 $g \in \mathrm{BS}(1,\ n)$。在此情形下，Stab(H) $=$Stab(g), 根据定理 3.7，它是$\cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，或者是一个有限生成阿贝尔群，其秩等于 n中不同素数的个数；在此情形下，可计算出一个有限生成元集。

□

沿用 [5]，中的术语， G 中 H 的自不动闭包记为 Cl(H)，它是由以下方式定义的 G 的子群

$$\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Stab}(H)) = \bigcap_{\substack{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \\ H \leq \mathrm{Fix}\,\varphi}} \mathrm{Fix}\,\varphi.$$

定理 3.6。设 H 是 $\mathrm{BS}(1,n)$ 的有限生成子群。
(i) 若 稳定子(H) 是平凡的，则 $\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{BS}(1,n)$*(ii)* 若 稳定子($H$) $\cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，则 $\mathrm{Cl}(H) = \{(\gamma,\ 0) \mid \gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\}$*(iii)* 若 稳定子($H$) 是有限生成阿贝尔群，则$\mathrm{Cl}(H) \cong \mathbb{Z}$，且可计算出一个生成元。

证明。 我们将考虑几种情形。

情形 *(i)*：稳定子(H)是平凡的。
在这种情形下，

$$\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Stab}(H)) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Id}) = \mathrm{BS}(1,n).$$

情形（*ii*）：稳定子(H) $\cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。
根据 3.7 的证明，我们注意到 $H \leq H'$，其中 $H' = \left\{(\gamma,\ 0) \middle| \gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right\}$ 且稳定子$(\gamma,\ 0) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right\} \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，对任意 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。因此

$$\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Stab}(H)) = \mathrm{Fix}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\right) = H'.$$

情形（*iii*）：$\mathrm{Stab}(H)$ 是一个有限生成阿贝尔群，其秩等于出现在 n 中的不同素数的数量。
在这种情况下，稳定子(H) $= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$，其中 $\alpha_i \neq 1 \forall 1 \leq i \leq r.$所以

$$\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Stab}(H)) = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathrm{Fix}\left(\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

现在，根据定理 3.2，我们有 $\mathrm{Fix}\left(\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \cong \mathbb{Z}$，且生成元 (γ_i, c_i) 是可计算的。然后

$$\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Stab}(H)) = \bigcap_{1\le i\le r} \mathrm{Fix}\left(\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \langle(\gamma_k, c_k)\rangle \cong \mathbb{Z},$$

其中 $c_k = \mathrm{lcm}(c_1、\ldots\ldots、 c_r)$，且 γ_k 由 c_k 唯一确定。 □

我们对稳定子也有与定理 4.4 类似的结果。

定理 3.7。对于 $(\gamma, c) \in \mathrm{BS}(1, n)$，稳定子$(\gamma, c)$ = 稳定子$(\gamma, c)^k$，对于所有 $k \ge 1$.

证明。我们将考虑两种情形。

情形 *(i)*：$c = 0$.注意，由引理 2.1，$(\gamma, 0)^k = (k\gamma, 0)$。根据定理 3.7 的证明，我们看到，对于所有 $\gamma \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n}].$，稳定子$(\gamma, 0) = \left\{\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right\}$。因此，对于所有 $k \ge 1.$，稳定子$(\gamma, 0)$ = 稳定子$(\gamma, 0)^k$,

情形（ii）：$c > 0$.令 $\varphi \in$ 稳定子$(\gamma, c) \implies \varphi(\gamma, c) = (\gamma, c) \implies \varphi^k(\gamma, c) = (\gamma, c)$，对所有 $k \ge 1 \implies (\gamma, c) \in$稳定子$(\gamma, c)^k$，对所有 $k \ge 1$.因此，稳定子$(\gamma, c) \subseteq$稳定子$(\gamma, c)^k$，对所有 $k \ge 1$.现在令 $\varphi = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in$稳定子$(\gamma, c)^k$。再次由引理 2.1，$(\gamma, c)^k = \left(\gamma\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}, kc\right)$.现在，$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\gamma\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}, kc\right) = \left(\gamma\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}, kc\right) \implies \alpha\gamma\frac{n^{ck}-1}{n^c-1} + \beta\frac{n^{ck}-1}{n-1} = \gamma\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}$。由于 $ck \ne 0$，我们有，$\alpha\gamma\frac{1}{n^c-1} + \beta\frac{1}{n-1} = \gamma\frac{1}{n^c-1}$。等式两边乘以 $n^c - 1$，得到 $\alpha\gamma + \beta\frac{n^c-1}{n-1} = \gamma \implies \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\gamma, c) = (\gamma, c) \implies \varphi \in$稳定子$(\gamma, c) \implies$稳定子$(\gamma, c)^k \subseteq$稳定子$(\gamma, c)$。因此，稳定子$(\gamma, c)$ = 稳定子$(\gamma, c)^k$，对所有 $k \ge 1$.

□

下面的推论是上述定理的一个有趣推论。尽管这一结果此前已有（见引理 2.5, [2]），但我们将在下文给出另一种证明。

推论 3.8. $\mathrm{BS}(1, n)$ 具有唯一根性质，也就是说，对于任意 $g_1, g_2 \in \mathrm{BS}(1, n)$ 以及任意$k \in \mathbb{N}$, $g_1^k = g_2^k \implies g_1 = g_2$。

证明. 设 $\exists g_1, g_2 \in$BS$(1, n)$，满足 $g_1^k = g_2^k = g$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$。由定理 3.7 可知，Stab(g_1) = Stab(g_1^k) 且 Stab(g_2) = Stab(g_2^k)，因此 Stab(g_1) = Stab(g_2)。令 i_{g_1} 表示内自同构 $i_{g_1}(x) = g_1 x g_1^{-1}$，并注意到 $i_{g_1} \in$ Stab(g_1)。这意味着$i_{g_1} \in$Stab$(g_2) \implies i_{g_1}(g_2) = g_2 \implies g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 \implies g_1 g_2 = g_2 g_1$。现在，考虑 $(g_1 g_2^{-1})^k = (g_1)^k (g_2)^{-k} = gg^{-1} = 1$。由于 BS$(1, n)$ 是无挠的，我们有 $g_1 g_2^{-1} = 1 \implies g_1 = g_2$。 □

4. Fixed subgroups of endomorphisms and endo-stabilizers

定义 4.1。设 G 为一个群，End(G)为其自同态构成的幺半群。设 $\varphi \in$End(G)，则 φ的不动子群记作 Fixφ，定义为 Fix $\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = g\}$

显然，Fixφ 构成一个群。下面的定理是定理 3.2 在自同态情形下的类似结果。

定理 *4.2.* 设 $\varphi \in$ *End(BS(1, n))* 是一个非恒等自同态。则 *Fix* $\varphi \cong \mathbb{Z}$ 若 $\varphi \in$ *End*^{I}*(BS(1, n))* 且 $\alpha \neq 1$，或者若 $\varphi \in$ *End*^{II}*(BS(1, n))* 且 $\varphi = \varphi_{(\gamma,1)}$，其中 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，此时 *Fix* $\varphi = \langle$*(*γ*, 1)*$\rangle$。当 $\varphi \in$ *End*^{I} *(BS(1, n))* 且 $\alpha = 1$ 时，*Fix* $\varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$；对于任何不属于类型 $\varphi_{(\gamma,1)}$ 的 $\varphi \in$ *End*^{II}*(BS(1, n))*，*Fix* $\varphi = \{$*(0, 0)*$\}$。

证明。情况 *i*：当 $\varphi \in$ 自同态幺半群^{I}(BS(1, n)) 且 $\alpha = 1$ 时，证明与 $\varphi \in$ Aut(BS(1, n)) 的情形相同。因此，我们有不动点集 $\varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。

情况 ii。假设 $\varphi \in$ 自同态幺半群^{I}(BS(1, n)) 且 $\alpha \neq 1$。证明与 $\varphi \in$ Aut(BS(1, n)) 的情形类似；唯一的区别是，此处为 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，而非 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]^*$。由方程 (2)，映射 BS(1, n)$\vdash \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(\gamma, c) \longmapsto c$ 限制在不动点集 φ 上时是单射，因此不动点集 $\varphi \leq \mathbb{Z}$。若元素 (γ, c) 属于不动点集 φ，方程 (2) 给出 $\gamma = \frac{\beta}{\alpha - 1}\frac{n^c - 1}{n - 1}$，且它必须属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。因此，我们必须确定使 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 成立的 c 的取值。由于 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，我们可以将 $\alpha = \frac{l}{n^p}$ 写成某些满足 $p > 0$ 的 $l, p \in \mathbb{Z}$，类似地，将 $\beta = \frac{m}{n^q}$ 写成某些满足 $q > 0$ 的 $m, q \in \mathbb{Z}$。将这些表达式代入 α 和 β，得到 $\gamma = -\frac{(n^c - 1)mn^p}{(n-1)(n^p - l)n^q} = -\left(\frac{n^c - 1}{n - 1}\right)\frac{mn^{p-q}}{(\prod_j p_j^{s_j})^{n-1} A}$，其中我们记 $n^p - l = \prod_j p_j^{s_j} A$，$p_j$ 遍历 n, $s_j \geq 0$ 的素因子，且 gcd(n, A) $= 1$。采用与自同构情形相同的论证，我们得出不动点集 $\varphi \cong \mathbb{Z}$。

情形 iii：当 $\varphi \in$ 自同态幺半群^{II}(BS(1, n)) 时，$\varphi = \varphi_{(\gamma,c)}$ 对于某个 $(\gamma, c) \in$ BS(1, n)。若 $(\gamma', c') \in$ 不动点集 φ，则 $\varphi_{(\gamma,c)}(\gamma', c') = (\gamma', c') \implies \left(\frac{n^{cc'} - 1}{n^c - 1}\gamma, cc'\right) = (\gamma', c') \implies c = 1$ 且 $\frac{n^{cc'} - 1}{n^c - 1}\gamma = \gamma'$。首先，这意味着不动点集 $\varphi \neq \emptyset \implies c = 1$，也就是说，若 $\varphi = \varphi_{(\gamma,1)}$ 对于某个 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。这也意味着 $\left(\frac{n^{c'} - 1}{n - 1}\gamma, c'\right) \in$ 不动点集 φ 对于所有 $c' \in \mathbb{Z}$，特别地，$(\gamma, 1) \in$ 不动点集 φ。因此，不动点集 $\varphi = \langle(\gamma, 1)\rangle$，因为 c'唯一确定了 γ'（由 2）。所以，我们得出：不动点集 $\varphi \neq \emptyset$ 当且仅当 $\varphi = \varphi_{(\gamma,1)}$ 对于某个 $\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，在此情形下，不动点集 $\varphi = \langle(\gamma, 1)\rangle \cong \mathbb{Z}$。

□

定义 4.3. 设 G 为一个群，End(G) 为 G的端同态幺半群。设$\varphi \in$End(G)，定义其周期子群为

$$\mathrm{Per}(\varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(\varphi^k).$$

注意，Per(φ) 确实是一个子群，因为 $x \in$ Fix(φ^k) 且 $y \in$ Fix($\varphi^{k'}$) 意味着 $xy \in$ Fix($\varphi^{kk'}$)。

定理 4.4. 设 $\varphi \in \mathrm{End}(\mathrm{BS}(1, n))$ 为一个自同态，则 $\mathrm{Per}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi)$。事实上，$\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi^k)$ $\forall k \geq 1$.

证明。显然，当 ϕ 是恒等映射时，上述结论成立。现在我们将分别讨论类型 *(i)* 和类型 *(ii)* 自同态的情形。

情形 *(i)*： $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ 自同态幺半群$^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,\ n))$ 对于某些 $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \setminus \{0\}$、 $\beta \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 是一个非恒等自同态。

我们将考虑两个子情形。

子情形 *(i)*: $\alpha = 1$.

由于 φ是一个非恒等自同态， $\beta \neq 0$. 。简单计算可知，若 $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$\varphi^k = \begin{pmatrix} 1 & k\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。令 $(\gamma,$ $c) \in$不动点集(φ^k)。那么 $\begin{pmatrix} 1 & k\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\gamma, c) = (\gamma, c)$，这意味着 $k\beta\frac{n^c-1}{n-1} = 0$。由于 $k, \beta \neq 0,$ 我们有 $c = 0$. 因此，对所有 $k \in \mathbb{N}$，不动点集$(\varphi^k) = \{(\gamma, 0)|\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\}$。于是周期点集$(\varphi) = \{(\gamma,$ $0)|\gamma \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\} =$不动点集$(\varphi)$。子情形 （*ii*） ： $\alpha \neq 1$.

在这种情况下，通过一个简单的归纳论证，可以证明 $\varphi^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & \beta\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。现在，若 $(\gamma, c) \in$不动点集(φ^k)，则 $\begin{pmatrix} \alpha^k & \beta\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\gamma, c) = (\gamma, c)$，这意味着 $(\alpha^k - 1)\gamma = -\frac{n^c-1}{n-1}\beta\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}$。由于 $k \geq 1,$ 我们有 $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^c-1}{n-1}$。

注意，在最后一个定理的证明中（情形（ii）），我们看到 $\left(-\frac{\beta}{\alpha-1}\frac{n^c-1}{n-1}, c\right) \in$不动点集$(\varphi)$。因此，对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有不动点集$(\varphi^k) \subset$ 不动点集(φ)，并且对所有 $k \in \mathbb{Z}.$，不动点集$(\varphi) \subset$ 不动点集(φ^k) 始终成立。因此，对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有不动点集$(\varphi^k) =$ 不动点集(φ)，也就是说，周期点集$(\varphi) =$ 不动点集(φ)。

情形 （*ii*） ： $\varphi = \varphi_{(\gamma,c)} \in$自同态幺半群$^{\mathrm{II}}(\mathrm{BS}(1, n))$，其中某个 $(\gamma, c) \in \mathrm{BS}(1, n)$。

根据第 §2 节中描述的此类自同态的复合规则，我们注意到 $\varphi^k = \varphi_{(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, c^k)}$ 我们再次考虑两个子情形。

子情形 (i)：c=1

代入 $c = 1,$，得到 $\varphi^k = \varphi_{(\gamma,c)} = \varphi$。显然，对所有 $k \in \mathbb{N}$，Fix$(\varphi^k) =$ Fix(φ)，也就是说，Per$(\varphi) =$ Fix(φ)。

子情形 (ii)： $c \neq 1$在此情形下， $c^k \neq 1$。因此 $\varphi^k = \varphi_{(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma, c^k)} \neq \varphi_{(\gamma,1)}$. 由最后一个定理可知，对所有 $k \in \mathbb{N}$，Fix $\varphi^k = \{(0,0)\} =$Fix φ 。因此 Per$(\varphi) =$ Fix(φ)。

□

注 4.5。 特别地，若 φ 是 BS(1， n) 的自同构，则 Fix$(\varphi) =$ Fix(φ^k) $\forall k \geq 1$，且 Per$(\varphi) =$Fix(φ)。

现在，我们讨论 BS(1， n) 中元素在 End(G)（而非上一节中的 Aut(G)）内的稳定子。

定义 4.6. 设 G 为一个群。对于任意元素 $g \in G,$ g 的端稳定子记为e- 稳定子(g)，定义为 e- 稳定子$(g) = \{\varphi \in$ 自同态幺半群$(G)|\varphi(g) = g\}$.

注意， e-稳定子(g)是自同态幺半群(G)的子幺半群。由于自同态幺半群^{I}(BS(1, n))和自同态幺半群^{II}(BS(1, n))是幺半群 End(BS(1, n))的两个不相交子集，因此我们有

$$e\text{-}\operatorname{Stab}(\gamma,c)=\operatorname{Stab}^{\mathrm{I}}(\gamma,c)\bigcup\operatorname{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma,c)$$

其中

$$\operatorname{Stab}^{\mathrm{I}}(\gamma,c)=\left\{\varphi\in\operatorname{End}^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,n))\middle|\varphi(\gamma,c)=(\gamma,c)\right\}$$

and

$$\operatorname{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=\left\{\varphi\in\operatorname{End}^{\mathrm{II}}(\mathrm{BS}(1,n))\middle|\varphi(\gamma,c)=(\gamma,c)\right\}$$

分别是 End^{I}(BS(1， n)) 和 End^{II}(BS(1， n) 的不相交子集。

定义 4.7. 设 H 是群 G的子群。那么， H 的稳定子记为 e- Stab(H)，定义为集合 $\{\varphi\in$End(G) $\mid\varphi(h)=h$ 对所有 $h\in H\}$.

注意， e- Stab(H) 是 End(G) 的子幺半群。注意，若 $H=\langle g\rangle$，其中 $g\in G$ 那么，e- Stab(H) $=\{\varphi\in$End(G) $\mid\varphi(g)=g\}$。在这种情况下，我们将 e- Stab(H) 记作 e- Stab(g)。我们还注意到， e- Stab(g) $=e$- Stab(g^{-1})。

定理 *4.8.* 设 $(\gamma,c)\in BS(1,n)$，其中 $\gamma=\frac{l}{n^p}$，$l,p\in\mathbb{Z}$ 且 $p\geq 0,l\neq 0$ 和 $\mu=\frac{n^c-1}{n-1}$。则， e-稳定子(γ,c) 是自同态幺半群 $End(BS(1,n))$ 的一个无限生成子幺半群。特别地，对于 $c>0$， $Stab^{\mathrm{I}}(\gamma,c)\cong\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 且 $Stab^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=\left\{\varphi\left(\frac{\gamma}{\mu},1\right)\right\}$ 若 $\mu\mid l$，并且 $Stab^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=\emptyset$ 若 $\mu\nmid l$

证明。我们将考虑两种情形。

情形 (i): 当 $c=0$ 时，方程 2 变为 $(\alpha-1)\gamma=0$，这意味着 $\alpha=1$，因为 $\gamma\neq 0$。于是 Stab$^{\mathrm{I}}(\gamma,0)=\left\{\begin{pmatrix}1&\beta\\0&1\end{pmatrix}\middle|\beta\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right\}\cong\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。若 $\varphi\in$Stab$^{\mathrm{II}}(\gamma,0)$，则对于某个 $(\gamma',c')\in$BS(1， n)，有 $\varphi=\varphi_{(\gamma',c')}$，且 $\varphi_{(\gamma',c')}(\gamma,0)=(\gamma,0)\implies\left(\frac{n^{0.c'}-1}{n^{c'}-1}\gamma',0.c'\right)=(\gamma,0)$。这意味着 $\gamma=0$，矛盾。因此，Stab$^{\mathrm{II}}(\gamma,0)=\emptyset$。

情形（ii）：如果 $c>0$ 和 $\varphi\in$稳定子$^{\mathrm{I}}(\gamma,c)$，那么 $\varphi\in$自同态幺半群^{I}(BS(1, n))，因此 $\varphi=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&1\end{pmatrix}$ 对于α、$\beta\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。由于 $\varphi\in$稳定子$^{\mathrm{I}}(\gamma,c)$， α、β满足 2。与自同构的情形一样， α唯一确定了 β。将 $\mu=\frac{n^c-1}{n-1}$ 代入 2，得到 $(\alpha-1)\gamma+\mu\beta=0\implies 1-\alpha=\frac{\mu}{\gamma}\beta$。我们需要$\alpha\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。但是 $\alpha\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\iff 1-\alpha\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，这反过来意味着 $\frac{\mu}{\gamma}\beta\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。令 $\beta=\frac{x}{n^y}$，其中x、$y\in\mathbb{Z}$和 $y\geq 0$ 是未知数。将所有值代入 $\frac{\mu}{\gamma}\beta$，得到 $\frac{\mu x n^b}{l n^y}$。由于 n^{b-y}是 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$中的一个单位， $\frac{\mu}{\gamma}\beta\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\iff\frac{\mu x}{l}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。令 $l=\prod_{j=1}^{k}p_j^{s_j}A$，其中 $s_j\geq 0$且 gcd(n, A) $=1$。由于， p_j是出现在 n的因式分解中的素数， $\prod_{j=1}^{k}p_j^{s_j}$是 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$中的一个可逆元素。因此， $\frac{\mu x}{l}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\iff\frac{\mu x}{A}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。注意， μ、$A\in\mathbb{Z}$满足 gcd(μ, n) $=1=$gcd(A, n)，而 $x\in\mathbb{Z}$是未知的。因此， $\frac{\mu x}{A}\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\iff\frac{\mu x}{A}\in\mathbb{Z}$。然后，对于任意 $k\in\mathbb{Z}$， $x=\frac{kA}{\gcd(\mu,A)}$ 确保 $\alpha\in\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。将 x的值代入 $\alpha=1-\frac{\mu}{\gamma}\beta$，得到 $\alpha=1-\frac{\mu}{\gamma}\frac{kA}{\mu A}\frac{}{\gcd(\,,\,)n^y}$，其中$\beta=\frac{kA}{\gcd(\mu,A)n^y}$。容易验证，$\begin{pmatrix}1-\frac{\mu}{\gamma}\frac{kA}{\mu A}\frac{}{\gcd(\,,\,)}&\frac{}{n^y}\\0&1\end{pmatrix}\frac{kA}{\mu A}\frac{}{n^y}\gcd(\,,\,)$ 确实对所有情况都固定 (γ,c)

k的值， $y \in \mathbb{Z}$ ，其中 $y \geq 0$。因此我们有

$$\mathrm{Stab}^{\mathrm{I}}(\gamma, c) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu}{\gamma} \frac{kA}{\gcd(\mu, A) n^y} & \frac{kA}{\gcd(\mu, A) n^y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z}, y \geq 0 \right\} \cong \frac{A}{\gcd(\mu, A)} \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right].$$

接下来计算 $\mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c)$。若 $\varphi \in \mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c)$，则 $\varphi \in \mathrm{End}^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1, n))$，且$\varphi(\gamma, c) = (\gamma, c)$。也就是说，对于某个 $(\gamma', c') \in \mathrm{BS}(1, n)$，有 $\varphi = \varphi_{(\gamma', c')}$，并且 $\varphi_{(\gamma', c')}(\gamma, c) = (\gamma, c) \implies \left(\frac{n^{cc'} - 1}{n^{c'} - 1} \gamma, cc' \right) = (\gamma, c)$ $\implies c' = 1$ 且 $\frac{n^{cc'} - 1}{n^{c'} - 1} \gamma' = \gamma$。令 $\frac{n^c - 1}{n - 1} = \mu$，则若要使 $\varphi_{(\gamma', c')}$ 属于 $\mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c)$， $\gamma' = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{l}{n^p \mu}$ 必须属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。由于 n^p 在 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 中可逆，且 $\gcd(\mu, n) = 1$，$\frac{l}{n^p \mu} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] \iff \frac{l}{\mu} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$。因此，$\mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c) \neq \emptyset \iff \mu \mid l$。若 $\mu \mid l$，则 $\mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c) = \left\{ \varphi_{\left(\frac{\gamma}{\mu}, 1\right)} \right\}$，且当 $\mu \nmid l$ 时，$\mathrm{Stab}^{\mathrm{II}}(\gamma, c) = \emptyset$。□

推论 4.9. 设 H 是$\mathrm{BS}(1, n)$的有限生成子群。那么 e- 稳定子(H) 要么是平凡的，要么是$\mathrm{End}(\mathrm{BS}(1, n))$的无限生成子幺半群。

证明。 设 H 是 $\mathrm{BS}(1, n)$ 的有限生成子群。那么根据引理 2.2，需要考虑两种情形。

情形 *(i)*： H 在$\mathrm{BS}(1, n)$中具有有限指数。
证明与自同构情形相同。为完整起见，我们将其写出。设$\varphi \in e$- 稳定子(H)，则 $H \leq$不动点集$(\varphi) \leq \mathrm{BS}(1, n)$。由于 H在 $\mathrm{BS}(1, n)$ 中具有有限指数，不动点集(φ)在 $\mathrm{BS}(1, n)$ 中也具有有限指数。但根据定理 4.2，我们知道它要么是平凡的，要么是 $\mathrm{Fix}\,\varphi \cong \mathbb{Z}$或 $\mathrm{Fix}\,\varphi \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$，这些都不是 $\mathrm{BS}(1, n)$ 中的有限指数子群。因此不动点集 $(\varphi) = \mathrm{BS}(1, n)$，这意味着 φ 是恒等端同态。因此，在这种情形下， e- 稳定子 (H) 是平凡的。

情形 （*ii*） ： $H = \langle g \rangle$ 是无限循环，其中 $g \in \mathrm{BS}(1, n)$。
在这种情况下， e- 稳定子$(H) = e$-稳定子(g)，根据定理 4.8，它是自同态幺半群 $\mathrm{End}(\mathrm{BS}(1, n)$ 的一个无限生成子幺半群。

□

与自同构的情形类似，我们可以定义 H 在 G [5]中的内自固定闭包，记作e-$\mathrm{Cl}(H)$，它是 G 的子群，定义如下：

$$e\text{-}\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(e\text{-}\mathrm{Stab}(H)) = \bigcap_{\substack{\varphi \in \mathrm{End}(G) \\ H \leq \mathrm{Fix}\,\varphi}} \mathrm{Fix}\,\varphi.$$

类似于定理 3.6，我们有关于内自固定闭包的如下定理。

定理 4.10。 设 H 是$\mathrm{BS}(1, n)$的一个有限生成子群。那么 $e\text{-}\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{BS}(1, n)$ ，或者$e\text{-}\mathrm{Cl}(H) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ ，或者 $e\text{-}\mathrm{Cl}(H) \cong \mathbb{Z}$。

证明。 我们将考虑两种情形。

情形 *(i)*：当 H 具有有限指数时，根据推论 *4.9*， e-稳定子(H) 是平凡的。在这种情形下，

$$e\text{-}\mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Fix}(e\text{-}\mathrm{Stab}(H)) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Id}) = \mathrm{BS}(1, n).$$

情形 （*ii*） 当 H是无限循环时，根据推论 4.9，对于某个 $g \in$ $\mathrm{BS}(1$， n， e- 稳定子$(H) = e$- 稳定子$(g))$

子情形 (i)： $g=(\gamma,\ c)$，其中 $c=0$. 在这种情况下，

$$e\text{-Cl}(H)=\operatorname{Fix}(e\text{-}\operatorname{Stab}(\gamma,0))=\operatorname{Fix}\left(\left\{\begin{pmatrix}1&\beta\\0&1\end{pmatrix}\middle|\beta\in\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]\right\}\right)$$

由 4.8 中情形 (i) 的证明

$$=\left\{(\gamma,0)\middle|\gamma\in\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]\right\}\cong\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right]$$

根据 3.2 中情形 (i) 的证明。

子情形（ii）： $g=(\gamma,\ c)$，其中 $c\neq 0$.

$$e\text{-Cl}(H)=\operatorname{Fix}((e\text{-}\operatorname{Stab}(\gamma,c))=\bigcap_{\varphi\in e\text{-}\operatorname{Stab}(\gamma,c)}\operatorname{Fix}\varphi.$$

注意，如果 $\varphi\in$ e-稳定子(γ,c) 是非平凡的，那么不动点集$(\varphi)\ncong\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. 因为如果不动点集$(\varphi)\cong\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 且 $\varphi\in$ e-稳定子(γ,c)，那么根据定理 4.2，$\varphi\in$稳定子$^{\mathrm{I}}(\mathrm{BS}(1,n))=\left\{\begin{pmatrix}1-\mu&{}^{kA}_{\mu\ A}\text{最大公约数}(\ ,\ )\\0&n^y\end{pmatrix}\middle|k\in\mathbb{Z}\right.$ $\left.-\frac{{}^{kA}_{\mu\ A}\ n^y}{1}\right)\Big|k\in\mathbb{Z}\overline{\text{最大公约数}(\ ,\ )},\ y\geq 0\Big\}$ 并且 $\varphi=\begin{pmatrix}1&\beta\\0&1\end{pmatrix}$。这意味着 ${}^{\mu}_{\gamma}$ ${}^{kA}_{\mu\ A}$最大公约数$(\ ,\ )$ $n^y=0$。现在 $c\neq 0$ 意味着 ${}^{\mu}_{\gamma}\neq 0$. 因此 ${}^{kA}_{\mu\ A}$最大公约数$(\mu,A)_{n^y}=0$。所以 φ 必定是 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，矛盾。

现在，由于对于所有 $\varphi\in e$-稳定子(γ,c)，$\langle(\gamma,c)\rangle\leq$不动点集$(\varphi)$。因此，对于所有 $\varphi\in e$-稳定子(γ,c)，$\mathbb{Z}\leq$不动点集(φ) 且不动点集$(\varphi)\ncong\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$。这意味着 e-Cl$(H)=\bigcap_{\varphi\in e\text{-}\operatorname{Stab}(\gamma,c)}$不动点集 $\varphi\cong\mathbb{Z}$.

□

定理 4.11。对于任意 $(\gamma,c)\in\mathrm{BS}(1,n)$，$e$-稳定子$(\gamma,c)=e$-稳定子$(\gamma,c)^k$，对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 均成立。

证明。由于 e-稳定子$(g)=e$-稳定子(g^{-1})，只需对 $k>0$ 证明该定理。现在e-稳定子$(\gamma,c)=$稳定子$^{\mathrm{I}}(\gamma,c)\bigcup$稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)$。根据定理 3.7 证明中的计算，我们可以得出，对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，稳定子$^{\mathrm{I}}(\gamma,c)=$稳定子$^{\mathrm{I}}(\gamma,c)^k$。当 $c=0$ 时，稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=\emptyset$。因此，对于 $(\gamma,0)$，对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，我们有 e-稳定子$(\gamma,0)=e$-稳定子$(\gamma,0)^k$。此外，注意到对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，e-稳定子$(\gamma,c)\subseteq e$-稳定子$(\gamma,c)^k$。设 $\gamma={}^{l}_{n^p}$，其中 $l,p\in\mathbb{Z}$ 满足 $p>0$ 且 $\mu=\frac{n^c-1}{n-1}$。现在，假设$\varphi\in$稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)^k$。由引理 2.1 可知，$(\gamma,c)^k=\left(\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}\gamma,ck\right)$。于是，根据定理 4.8，我们有 $\mu_k=\frac{n^{ck}-1}{n-1}$ 整除 $l_k=\frac{n^{ck}-1}{n^c-1}l$，即 ${}^{l_k}_{\mu_k}\in\mathbb{Z}$，且稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)^k=\left\{\varphi_{\left({}^{l_k}_{\mu_k},1\right)}\right\}$。但是，${}^{l_k}_{\mu_k}=\frac{l}{\mu}\in\mathbb{Z}$，因此稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=\left\{\varphi({}^{l}_{\mu},1)\right\}$。但是，$\varphi_{\left({}^{l_k}_{\mu_k},1\right)}=\varphi({}^{l}_{\mu},1)$，因此对于所有 $k>0$，稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)=$稳定子$^{\mathrm{II}}(\gamma,c)^k$。因此，定理得证。
□

Acknowledgements

作者谨向 Amritanshu Prasad 教授、Parameswaran Sankaran 教授和 Enric Ventura 教授致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议。第一作者也感谢 IMSc 在她访问期间给予的热情接待；本次合作的大部分工作是在访问期间完成的。她还谨向印度政府科学技术部（DST）的 INSPIRE 教师奖学金表示感谢。

References

[1] O. Mitra、M. Roy 和 E. Ventura, *Twisted conjugacy in* BS(n, 1), arXiv:2508.04397 [math.GR], 2025。[2] O. Bogopolski, *Abstract commensurators of solvable Baumslag–Solitar groups*, 《Communications in Algebra》40（2012），第7期，2494–2502。[3] J. C. O'Neill, *Test elements in solvable Baumslag–Solitar groups*, 《New York Journal of Mathematics》25（2019），889–896。[4] O. Jones 和 A. Logan, *Fixed subgroups of generalised Baumslag–Solitar groups*, arXiv: 2510 12716 [ ], . 2025 math.GR .[5] M. Roy 和 E. Ventura, *Fixed subgroups and computation of auto-fixed closures in free-abelian times free groups*, 《Journal of Pure and Applied Algebra》224（2020），第4期，106210。[6] M. Bestvina 和 M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, 《Annals of Mathematics》（第2辑）135（1992），第1期，1–51。[7] J. L. Dyer 和 G. P. Scott, *Periodic automorphisms of free groups*, 《Communications in Algebra》3（1975），第3期，195–201。[8] A. Minasyan 和 D. Osin, *Fixed subgroups of automorphisms of relatively hyperbolic groups*, 《Quarterly Journal of Mathematics》63（2012），第3期，695–712。[9] W. D. Neumann, *The fixed group of an automorphism of a word hyperbolic group is rational*, 《Inventiones Mathematicae》110（1992），第1期，147–150。[10] O. Jones, *Fixed points of automorphisms of torus knot groups*, arXiv:2309.10648，2023。[11] A. Martino 和 E. Ventura, *On automorphism-fixed subgroups of a free group*, 《Journal of Algebra》230（2000），596–607。[12] G. Baumslag 和 D. Solitar, *Some two generator one-relator non-Hopfian groups*, 《Bulletin of the American Mathematical Society》68（1962），199–201。[13] B. Farb 和 L. Mosher, *A rigidity theorem for the solvable Baumslag–Solitar groups*, 《Inventiones Mathematicae》131（1998），419–451，附有 D. Cooper 撰写的附录。[14] B. Farb 和 L. Mosher, *Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag–Solitar groups II*, 《Inventiones Mathematicae》137（1999），613–649。[15] B. Jiang、F. Wang、S. Wang 和 H. Zheng, *Fixed subgroups of 3-manifold group automorphisms*, 《Topology and its Applications》297（2021），论文编号 107708，共5页。[16] J. Lei 和 Q. Zhang, *Explicit bounds for fixed subgroups of endomorphisms of free products*, 《Journal of Algebra》633（2023），773–787。[17] M. Sykiotis, *On the automorphisms of the fundamental group of a graph of groups and their fixed points*, 《Algebra Colloquium》9（2002），第4期，445–454。[18] J. Wu 和 Q. Zhang, *The group fixed by a family of endomorphisms of a surface group*, 《Journal of Algebra》417（2014），412–432。

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Kolkata, Mohanpur, Nadia - 741246, West Bengal, India.

Email address: urna.mitra@gmail.com

The Institute of Mathematical Sciences, CIT Campus, Tharamani, Chennai-600113, Tamil Nadu, India.

Email address: ramyanair59@gmail.com