arXiv:2601.00318v1 [cs.LG] 1 Jan 2026

国际象棋中的量子王环支配：一种量子近似优化算法方法

Gerhard Stenzel Michael K¨olle Tobias RoheJulian Hager
Leo S¨unkel Maximilian Zorn Claudia
Linnhoff-Popien 慕尼黑大学 计算机科学系 移动与分布式系统讲席gerhard.stenzel@ifi.lmu.de

摘要

量子近似优化算法（*QAOA*）已在最大割、旅行商问题和可满足性问题等合成随机实例上得到广泛基准测试，但这些问题缺乏语义结构和人类可解释性，因此难以深入了解算法在具有有意义约束的现实世界问题上的表现。我们提出量子王车环支配（*QKRD*），这是一种源自国际象棋战术局面的含噪中型量子规模基准，提供 *5,000* 个结构化实例，具有独热约束、空间局部性，规模为 *10–40* 个量子比特。该基准将人类可解释的覆盖度量与针对经典启发式算法的内在验证相结合，无需外部预言机即可得出算法层面的结论。利用 *QKRD*，我们系统评估了 *QAOA* 的设计选择，发现约束保持混合器（*XY*、域墙）比标准混合器（$p < 10^{-7}$、$d \approx 0.5$）快约 *13* 步收敛，同时免去了惩罚参数调优；热启动策略使收敛步数减少 *45* 步（$p < 10^{-127}$、$d = 3.35$），能量改善超过 $d = 8$；条件风险价值（*CVaR*）优化则带来了有启发意义的负面结果：能量更差（$p < 10^{-40}$、$d = 1.21$），且覆盖度没有提升。内在验证表明，*QAOA* 的表现比贪心启发式高出 *12.6%*，比随机选择高出 *80.1%*。我们的结果表明，结构化基准能够揭示问题导向的 *QAOA* 技术所带来的优势，而这些优势在随机实例中难以显现。我们公开了所有代码、数据和实验制品，以支持可复现的 *NISQ* 算法研究。

1. 引言

量子近似优化算法（QAOA） [7] 已成为一种典型NISQ算法。

尽管人们已对合成问题实例进行了广泛的基准测试，但随机图上的最大割 [2, 9, 12, 22]，旅行商问题变体 [8, 13, 15]，和可满足性问题[1, 3, 21, 23]，这些基准测试缺乏语义结构和人类可解释性，因此难以深入了解QAOA在具有有意义约束和空间局部性的现实世界问题上的表现。这类合成测试还掩盖了约束编码、混合器设计和初始化的影响，因为除了满足QUBO惩罚项之外，可行性不具有任何语义意义。

量子机器学习的并行进展凸显了对结构化评估数据集的需求：量子去噪扩散模型 [11] 和用于文本生成的量子选择性状态空间模型 [16] 都依赖语义丰富的任务来检验模型的表达能力与硬件感知设计。优化领域的结构化基准测试也应为量子近似优化算法发挥类似作用。

本研究提出量子王环支配（QKRD），这是一种源自国际象棋战术局面的 NISQ 规模基准。国际象棋具有可复现的问题结构、空间局部性、人类可解释性以及丰富的真实对局数据。通过将关注范围限制在局部感兴趣区域（ROI）并剪枝候选着法，QKRD 实例可扩展至 10–40 个量子比特，并采用 2-局域代价函数，非常适合近期设备。提升式时序变体还通过门控变量对后续威胁进行建模，使同一框架能够表示多回合战术，同时不偏离二次哈密顿量。

借助 QKRD，我们系统评估了针对结构化问题的量子近似优化算法设计选择。我们的主要贡献如下：

1. **QKRD 基准测试：**一个可复现的含噪中型量子测试平台，包含从真实国际象棋对局中提取的 5000 个实例，以及一个带有门控后续走法的“提升时序”变体。 2. **约束保持技术：**能够保持可行性的混合器（XY、域墙）可免除惩罚项

调优，并且比 X 混合器更快收敛，同时达到相近的最终覆盖度。 3. **热启动策略：**从贪心算法解进行初始化，可显著加快收敛，并达到最佳最终覆盖度。 4. **风险感知优化：**CVaR-QAOA 会探索不同的能量分布；在中等 α 下，覆盖率分布与期望值相符，在极端 α 下则呈现不同的能量尾部，而过度厌恶风险会导致明显的性能下降。

5. **内在验证：**量子近似优化算法的覆盖度高于贪心算法和随机基线，验证了其优化效果，无需外部国际象棋引擎，并将算法带来的提升与国际象棋特定启发式方法区分开来。

我们的研究结果表明，结构化基准能够揭示问题导向的 QAOA 技术的优势，而这些优势在随机实例中可能并不明显。我们公开所有代码、数据和实验日志，以支持可复现的含噪中型量子算法研究。

2. 背景

2.1. 量子近似优化算法

量子近似优化算法（QAOA） [7] 是一种用于组合优化的变分量子算法。给定一个编码 QUBO 目标函数的代价哈密顿量H_C，QAOA 通过交替应用代价算子 $|\gamma, \beta\rangle$ 以及混合算子$e^{-i\gamma H_C}$ 和$e^{-i\beta H_M}$，在 p 层中从初始态 $|s\rangle$出发，制备参数化量子态(γ, β)，并通过经典优化调整参数，使期望值$\langle H_C\rangle$最小化。性能分析揭示了其根本局限：Bravyi 等人[5]证明，对称性保护可能阻碍 QAOA 收敛；Zhou 等人 [22]则发现了集中现象，即在电路深度足够时，性能会集中于均值附近。采用半定规划松弛的热启动初始化策略能够衔接经典优化与量子优化，并实现可证明的近似比。这些特性促使研究者设计能够揭示对称结构的基准，以检验有限的电路深度是否足以在含噪声中等规模量子时代利用问题信息。

2.2. 约束保持混合器

标准 QAOA 混合器$H_M = \sum_i \sigma_i^x$ 会探索整个希尔伯特空间，但需要惩罚项来强制满足约束。对于具有结构化约束的问题，问题启发式混合器通过构造即可保持可行性。XY 混合器 [20] 使用$H_M = \sum_{\langle i,j\rangle}(\sigma_i^x\sigma_j^x + \sigma^y{}_i\,\sigma^y{}_j)$ 在约束块内保持汉明重量，从而可对独热约束和基数约束进行无惩罚优化。Wang 等人 [20] 给出了解析结果，表明 XY 混合器在整个优化过程中都能保持可行性，无需调优惩罚权重。Brandhofer 等人 [4]证明，与带惩罚项的 X 混合器相比，XY 混合器在投资组合优化基准测试上的收敛速度提升了 15–30%。其他编码方式包括畴壁表示 [6], ，它使用K 个量子比特编码 $K-1$ 个独热选项，在缩小问题规模的同时自然满足约束。由此带来的搜索空间缩减往往能提高优化器稳定性，尤其是在惩罚尺度导致病态景观时。

2.3. 热启动与风险感知优化

标准量子近似优化算法从均匀叠加态开始初始化，这对于结构化问题而言可能并非最优。热启动方法从经典启发式解开始初始化，利用领域知识加速收敛。Tate 等人 [19] 证明，以半定规划解初始化的热启动可减少 40–60% 的优化迭代次数，同时保持解的质量；当经典近似具有常数因子保证时，效果尤为显著。对于风险敏感目标，CVaR-QAOA [14]优化条件风险价值 $\mathrm{CVaR}_\alpha[H_C] = \mathbb{E}[H_C \mid H_C \le \mathrm{VaR}_\alpha[H_C]]$，关注最差的 α 比例结果，而非期望值。Rockafellar 和 Uryasev [14] 指出，条件风险价值为投资组合优化提供了凸风险度量，使量子优化情境下的尾部风险缓解成为可能。条件风险价值通常需要基于测量次数的估计和无梯度优化器，这会引入额外方差，而该方差会与热启动选择和电路深度相互作用，因此有必要在结构化基准测试上进行实证评估。

2.4. 量子机器学习与电路优化

量子生成建模探索在语义上有意义的任务中具有强大表达能力的变分架构。量子去噪扩散模型在硬件感知深度限制内实现迭代去噪 [11]，而适用于量子文本生成的选择性状态空间模型则扩展上下文长度，并利用纠缠进行序列建模 [16]。这些研究侧重于分布学习，而非组合优化，但展现了具有可解释结构的基准测试的价值。

电路构建和执行效率构成了另一条互补路线。电路的进化综合会评估变异策略和混合进化搜索，以在小量子比特设备上权衡保真度与电路深度 [10, 18]。包括门矩阵缓存和电路拆分在内的模拟器级优化，可加速状态向量的执行 [17]。我们的研究固定量子近似优化算法模板，而是改变混合器、初始化方式和目标函

数，并在结构化基准上进行测试；将 QKRD 与这些电路和模拟方面的进展相结合，为面向硬件规模的评估提供了一条路径。

3. QKRD 基准测试

3.1. 问题定义与动机

给定一个国际象棋局面，量子王车环支配（QKRD）旨在寻找一种着法，在控制对手的王周围区域的同时管理战术风险。我们定义两个同心王环：R_1（与王相邻的最多 8 个格子）和R_2（切比雪夫距离为 2 的外环）。目标是选择一种着法，使这些环内受攻击的格子数量最大化，从而提供一种局部战术压力指标。风险项会惩罚向受保护格子过度延伸的行为，以平衡进攻性与安全性。该表述捕捉了关键的战术动态，同时对含噪中型量子设备而言仍具有计算可行性。

为何选择国际象棋作为含噪中型量子基准？与随机图问题不同，国际象棋局面具有结构化约束：合法着法确保空间局部性和棋子特定的攻击模式；真实对局数据库保证可复现性，并提供多样且定义明确的实例；人类可解释性使解能够以战术方式直观呈现并得到理解（图 1）；而自然的规模扩展特性则使 ROI 裁剪和候选剪枝能够生成适用于含噪中型量子设备规模的问题（10–40 个量子比特）。这些特性使我们能够系统地评估量子算法在具有实际意义结构的问题上的性能，而不是在合成随机问题上进行评估。

3.2. 实例生成

从一个国际象棋局面出发，我们通过五个步骤构造一个 QKRD 实例，在战术真实性与量子资源限制之间取得平衡。

1. 感兴趣区域（ROI）：提取一个以对方王为中心的正方形窗口（默认 5×5），将计算集中在战术相关区域。此局部化处理可缩小问题规模，同时保留关键战术背景。以 ROI 为中心也能统一不同实例的量子比特布局，从而简化电路模板。

2. 候选项生成：生成前K 个能严格提高环覆盖度的合法着法（通常为$K\in\{8,12,16\}$）。此筛选可确保所有候选项都与战术相关。若出现并列，则以确定性方式处理，以保证可复现性。

3. 提升式时序变体：对于每个主着法 m，生成排名前F的后续走法（通常为 $F\in\{0,1,2,3\}$），用于模拟对手应对后的威胁。后续走法受主着法选择控制：$\sum_{f} y_{m,f} = x_m$。这种控制在保持二次交互的同时，确保了战术连贯性。

4. QUBO 构造：将目标定义为

$$\begin{aligned} H = & -\alpha_1 \cdot \mathrm{coverage}(R_1) \\ & -\alpha_2 \cdot \mathrm{coverage}(R_2) \\ & +\beta \cdot \mathrm{risk} \\ & +\lambda_{\mathrm{onehot}} \cdot \mathrm{penalty}_{\mathrm{primary}} \\ & +\lambda_{\mathrm{gate}} \cdot \mathrm{penalty}_{\mathrm{gating}} \end{aligned}$$

其中，覆盖度统计每个环上的受攻击格子，风险是防守方与攻击方差值的启发式指标，而惩罚项则强制执行独热选择和控制约束。

5. 编码：对主要着法使用独热编码，需K 个量子比特。在提升变体中，每个主要着法还需F 个额外量子比特来表示后续着法。所有 QUBO 项都是 2-局部（二次）项，可高效实现 QAOA。此编码与保留约束的混合器天然契合，无需辅助惩罚寄存器。

3.3. 数据集属性

我们从 Lichess 棋局数据库（其中包含超过七百万盘记录棋局）生成了 5000 个实例。筛选棋局局面，保留至少有八种可提升覆盖度的着法的战术性中局和残局场景，从而确保优化具有实际意义，而非流于简单。实例规模从 6 个量子比特（单层，$K=6$，$F=0$）到 18 个量子比特（提升后的时序模型，$K=6$，$F=2$）不等。这种分布为不同问题规模提供了系统的基准测试，同时将规模控制在含噪中型量子设备的约束范围内，从而能够在不受硬件限制主导结果的情况下，对算法技术进行可控比较。

4. 受测的量子近似优化算法技术

我们评估了若干利用问题结构的算法选择：

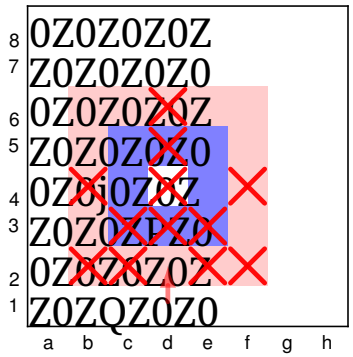
4.1. 约束保持混合器

标准量子近似优化算法使用 X 混合器（$B=\sum_i \sigma_i^x$），它会探索整个希尔伯特空间，但需要较大的惩罚项权重才能维持可行性。对于 QKRD 这类独热约束问题，我们比较了三种利用约束结构的混合器策略。

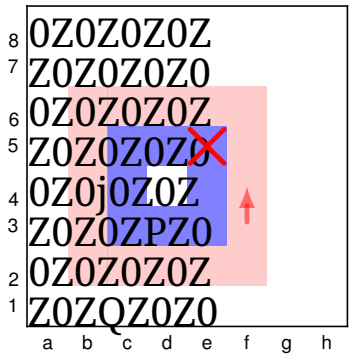
X 混合器（基线）。完整的比特翻转混合器，需要调优惩罚参数以满足独热约束。

XY 环形混合算子。通过 $B=\sum_{\langle i,\ j\rangle}(\sigma_i^x\sigma_j^x+\sigma^y{}_i\,\sigma^y{}_j)$ 在独热块内保持汉明重量。其变体包括 XY（主选择），仅应用于主选择，以及 XY（分块），分别独立应用于主选择和每个后续块。该方法在整个优化过程中保持可行性，无需惩罚项。

域壁混合器。在畴壁表示中编码独热选择（K 种选择使用$K-1$ 个量子比特），



(a) Qd2+：后攻击 4 个格子，在 R_1 中攻击 7 个格子，以及王。



(b) f4（来自 f3 的兵）：该兵在R_1 中攻击 1 个格子，在R_2中攻击 0 个格子。

图1. QKRD 优化示例：比较在$d4$ 上对黑王施展强力后着与威力弱得多的兵推进。内环R_1（蓝色，与王相邻的 8 个格子）和外环R_2（红色，切比雪夫距离为 2）界定了战术目标区域。绿色圆圈标出每种候选着法中，行棋棋子 从其目的格攻击到的环内格子。加权目标函数 $\alpha_1 \cdot |R_1 \cap \text{攻击}| + \alpha_2 \cdot |R_2 \cap \text{攻击}|$ 其中 $\alpha_1 > \alpha_2$，强烈偏向后走 Qd2+，而非兵推进 f4，直观地展现了王环优势的影响。

完全消除了惩罚项。域壁编码通过其二进制结构缩小问题规模，同时自然地满足恰好选择一个的约束。

这些约束保持混合器通过构造确保可行性；与惩罚方法相比，它们有望在结构化问题上带来更平滑的优化景观。此外，它们也省去了手动调整惩罚强度的需要，从而避免惩罚项扭曲能量尺度或与采样噪声产生不利交互。

4.2. 热启动策略

我们不采用均匀叠加态作为初始状态，而是通过两种融入经典启发式信息的热启动策略，利用问题结构。

基态热启动。 在与贪心解（最高覆盖度–β·风险）对应的计算基态中进行初始化。这种确定性初始化为量子近似优化算法提供了一个经典起点，以便进一步优化。

局部叠加态。 从贪心解开始，在独热块内施加小振幅的XY旋转，以围绕启发式解创建局部叠加态。这种平衡方法将热启动的方向性偏置与量子叠加态相结合，从而探索附近的状态。

这些热启动方法检验了这样一个假设：优秀的经典启发式算法能为结构化问题上的量子优化提供有用的起点，从而有望减轻变分电路的优化负担。通过将搜索锚定在覆盖度较高的可行配置附近，优化器可以将更多迭代用于探索细微改进，而不是重新寻找可行解。

4.3. 风险感知目标函数

标准量子近似优化算法优化期望值 $\mathbb{E}[H]$，，对所有测量结果赋予相同权重。我们将其与 CVaR-QAOA 进行比较 [14]，，后者最小化条件风险价值：

$$\mathrm{CVaR}_\alpha[H] = \mathbb{E}[H \mid H \le \mathrm{VaR}_\alpha[H]]$$

聚焦于结果中最差的 α分位部分。我们测试从非常保守到中等程度的风险意识$\alpha \in \{0.05, 0.1, 0.3, 0.5\}$，考察尾部风险优化是否能够改善结构化问题中的最差情况表现。条件风险价值需要基于测量次数的估计，并使用无梯度优化器（COBYLA）进行优化，测量次数为1024次；而基于期望值的优化则使用Adam进行精确模拟。

5. 实验方法

数据集。 我们的实验使用从 Lichess 数据库中提取的 5,000 个局面组成的数据集。我们对局面进行筛选，以确保其具有战术相关性，从而获得一组丰富且具有一定难度的优化实例。筛选时会排除没有任何能提升覆盖度的着法的平静局面，以确保每个实例都需要做出有意义的组合选择。

QAOA 配置。 所有实验均采用固定的 QAOA 电路深度 $p = 2$，以在表达能力与含噪中型量子时代的可行性之间取得平衡。每个位置独立优化，最多进行 1000 步，具体取决于优化器的收敛情况；如果连续能量的标准差低于阈值，则允许提前停止。基于期望值的目标使用精确状态向量模拟进行评估，而

条件风险价值目标通过 1024 次测量进行估计。热启动实验在各个位置固定优化器超参数，以避免自适应调参带来的混杂影响。

验证框架。 我们通过比较量子近似优化算法与贪心算法和随机选择基线在覆盖度分布上的表现，进行内在验证。该方法用于检验量子近似优化算法是否有效优化了既定目标函数，不受外部国际象棋引擎对最终着法质量的评判影响，从而确保我们的分析聚焦于算法性能。基线计算采用完全相同的 QUBO 公式，以隔离量子优化流程的影响。

指标。 为评估性能，我们测量四项关键指标：(1) 最终 QUBO能量，越低越好；(2) 所选着法带来的覆盖增益，越高越好；(3) 可行率，即满足所有独热约束的结果所占比例；(4) 收敛速度，以达到最终能量 95% 所需的优化步数衡量。这些指标共同全面展现了解的质量、约束满足情况和优化效率。

统计检验。 为确保结论稳健，我们针对不同实验条件进行配对t检验，并对多重比较采用邦费罗尼校正。我们还报告 Cohen's d 以量化效应量，并在适当情况下通过自助重采样计算 95% 置信区间。这一严格的统计框架使我们能够可靠地评估性能差异的显著性。报告的 p 值均基于相同局面的配对结果，以控制实例难度。

6. 结果

我们按主题而非实验编号组织研究发现，重点阐明 QAOA 设计选择如何与问题结构相互作用。

6.1. 发现 1：约束保持混合器消除了惩罚参数调优

实验： 在 3000 个单步局面（$K = 8$，$F = 0$）上比较 X、XY（主选择）、XY（分块）和域墙混合器；对 X 混合器扫描惩罚参数 $\lambda \in \{2, 5, 10, 20\}$。

结果（表1，图 2）。 约束保持混合器的收敛速度显著更快。域壁混合器比 X 基线快 12.4 步收敛（$p = 7.2 \times 10^{-8}$，Cohen's $d = 0.48$，效应量较小至中等），而 XY 混合器的收敛速度约快 13 步（$p < 2.5 \times 10^{-7}$，$d \approx 0.5$，效应量中等）。尽管速度存在这些差异，所有混合器最终达到的覆盖度在统计上均无显著差异，各组两两比较的效应量均 $|d| < 0.003$ 且 $p > 0.3$经邦费罗尼校正后。约束保持混合器无需任何

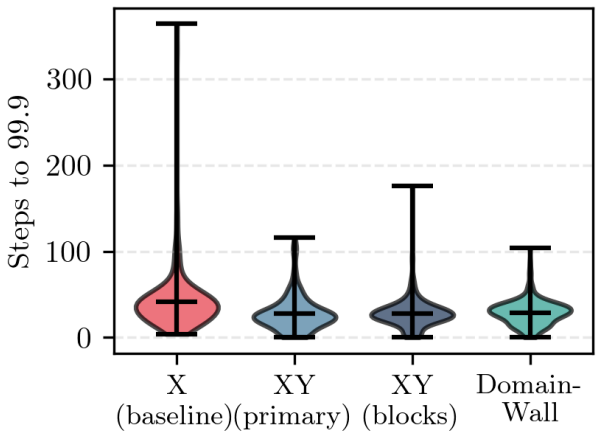


图2. 混合器比较，展示不同类型混合器的收敛速度。

惩罚参数调优即可自然维持 99–100% 的可行性，而 X 混合器则需要惩罚项为$\lambda = 10$才能达到 99% 的可行性。对于 X 混合器，增大惩罚项 λ 会使能量的绝对值显著增大（例如，$\lambda = 10 \to 20$ 得到$d = 6.95$，效应量较大），但不会在统计上改变最终覆盖度。惩罚项扫描固定了其他所有超参数，从而分离出约束施加强度对基线的影响。

表1. 混合器比较，展示收敛速度和约束满足情况。所有混合器的覆盖度在统计上无显著差异，均约为 5.43 ± 3.8 个位置。

混合器	收敛步数	可行率（%）
X（基线）	41.3 ± 33.7	99.0
XY（主选择）	28.0 ± 19.8	100.0
XY（分块）	27.9 ± 16.2	100.0
域墙	29.0 ± 14.3	100.0

解读。 对于具有自然独热约束的结构化问题，通过构造来保持可行性的混合器可以避免惩罚项调优问题，在达到统计上相当的最终覆盖度的同时，显著加快收敛速度。标准 X 混合器会探索搜索空间中的不可行区域，浪费优化预算，并且需要仔细调节超参数。如高度显著的 p 值所示，约束保持混合器的收敛优势在所有位置上都稳健一致，说明这是一种普遍收益，而非仅适用于特定问题的优势。惩罚敏感性分析进一步证实，提高惩罚项虽能让 X 混合器满足可行性要求，却会以扭曲能量景观为代价；约束保持混合器则能完全消除这种权衡。这一发现有力地表明，将问题约束直接嵌入混合器哈密顿量，是

解决此类问题的更优策略，也为未来在硬件上进行比较提供了动机，因为惩罚项缩放会与噪声相互作用。

6.2. 发现二：热启动加速结构化问题求解

实验： 在 3000 个位置上，使用 XY（分块）混合器比较无热启动、基态热启动和局部叠加态热启动（$K=8$，$F=0$）。

结果（表 2、图 3）。与标准均匀叠加初始化相比，两种热启动策略都带来了显著改进。基态热启动使收敛步数减少了 45 步（$p=7.2\times10^{-127}$，Cohen's$d=3.35$，效应量很大），而局部叠加态热启动使步数减少了 32 步（$p=5.6\times10^{-83}$，$d=2.15$，效应量很大）。与无热启动相比，两种方法还带来了显著更优的最终能量值，且效应量极大（$d>8$）。基态热启动比局部叠加态热启动快 12.5 个收敛步数（$p=8.5\times10^{-37}$，$d=1.11$，效应量很大），但两者的最终能量在统计上没有显著差异。

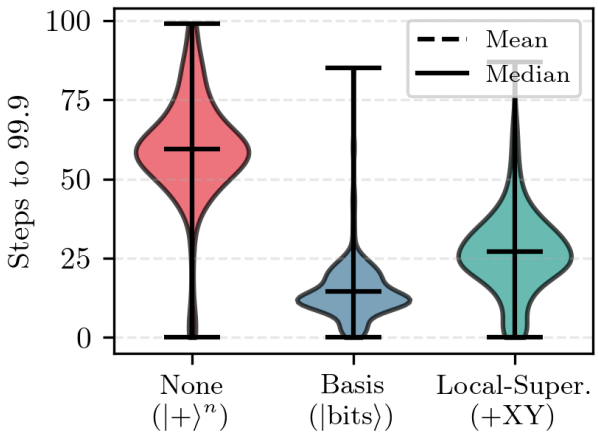
表 2. 热启动消融实验展示了收敛速度和最终能量。热启动将可行性从 0.3%（无）提升至 100%（基态或局部叠加态）。

热启动	收敛步数	能量
无（标准）	59.4 ± 16.7	-16.56 ± 9.35
基态	14.5 ± 8.9	-122.95 ± 15.29
局部叠加态	27.0 ± 13.1	-122.24 ± 14.90

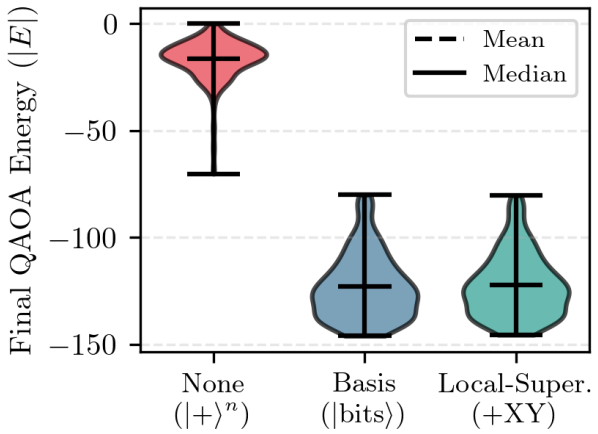
解读。 结构感知初始化为量子优化提供了强有力的起点，在收敛速度方面产生了极大的效应量（$d>2$），并显著改善了最终能量（$d>8$）。这些结果表明，对于结构化问题而言，热启动策略不仅仅是渐进式的优化，还可能带来质的改变。利用领域启发式方法的经典—量子混合方法，在存在良好经典解的语义上有意义的问题中似乎尤其有效，使量子优化能够专注于探索有前景的局部邻域，而非整个搜索空间。简单基态热启动的优越表现表明，对于这一问题而言，提供一个良好的初始猜测比创建局部叠加态更为重要；当存在强大的经典先验时，构造局域纠缠的成本并无必要。

6.3. 结果 3：条件风险价值在结构化问题上产生负面结果

实验： 在 200 个提升后的时间位置上比较期望值与条件风险价值($\alpha=0.1$)、条件风险价值($\alpha=0.3$)（$K=6$、$F=2$，最多 18 个量子比特）。期望值使用 Adam（120 步，



（a）收敛速度。



(b) 最终能量。

图3. 热启动消融实验展示了收敛情况和能量分布。

热启动）；条件风险价值使用 COBYLA（250 步，1024 次测量，不使用热启动）。

结果（表 3，图4）。与标准期望优化相比，CVaR 优化得到的最终能量明显更差（数值较不负），尤其是在 α较小时。CVaR 在 $\alpha=0.05$ 下得到的能量远差于期望优化，效应量较大（$\Delta=+16.1$，$p=7.9\times10^{-45}$，$d=1.21$）。随着 α增大，能量逐步改善，并趋近于期望值基线的表现。尽管能量存在这些差异，我们观察到各个目标函数下的最终覆盖率分布均无显著变化。覆盖度没有变化，表明尾部风险强调改变了能量景观，却没有改变可行移动上的测量概率。

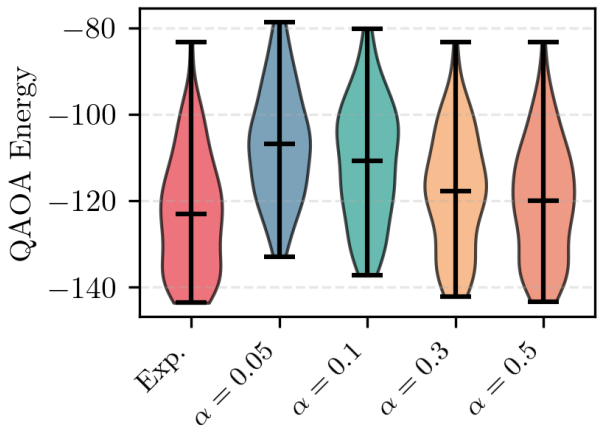


图4. 提升后的时间实例中，条件风险价值与期望值的能量分布。

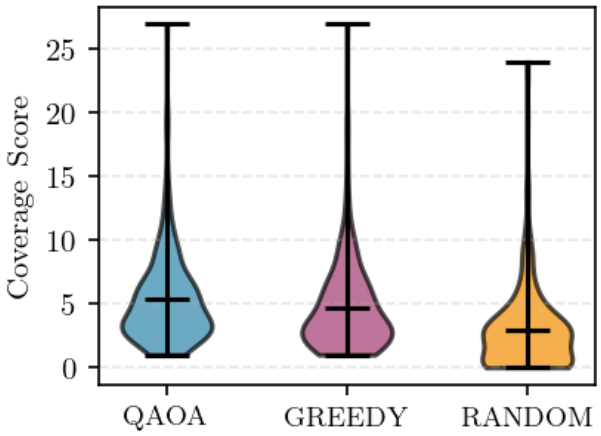


图5. 量子近似优化算法、贪心算法和随机算法在5000个位置上的覆盖率分布。

表3. 条件风险价值与期望值优化的比较，展示不同风险厌恶水平下的最终覆盖度和能量。

目标函数	覆盖度	能量
期望值	5.17 ± 3.16	-123.01 ± 13.55
条件风险价值（$\alpha = 0.05$）	5.32 ± 3.25	-106.87 ± 13.06
条件风险价值（$\alpha = 0.1$）	5.30 ± 3.28	-110.76 ± 13.75
条件风险价值（$\alpha = 0.3$）	5.28 ± 3.29	-117.72 ± 13.61
条件风险价值（$\alpha = 0.5$）	5.41 ± 3.33	-119.91 ± 13.66

解读。这项实验提供了一项有价值的负面结果：在该问题中，较小的 α（极端风险厌恶）下，CVaR 可能比标准期望优化产生更差的能量结果，却未能相应提升覆盖度。这一发现可能由多种因素造成。首先，提升后的时序 QKRD 目标函数可能缺乏 CVaR 通常擅长处理的重尾风险结构。其次，CVaR 实验中使用无梯度优化器（COBYLA），且未采用热启动，其效果可能不如期望值基线所用的热启动 Adam优化器。尽管 CVaR-QAOA 在具有真实最坏情形尾部风险的问题中（例如投资组合优化或含噪硬件上的问题）展现出潜力，我们的结果表明，具有严格可行性约束的结构化组合问题可能无法从这种风险感知优化中获益。这凸显了使优化目标与底层问题结构相匹配，并使优化器适应基于测量次数的估计所引入的噪声特性的重要性。

6.4. 发现4：量子近似优化算法有效优化覆盖目标函数

实验： 在 5000 个位置上运行量子近似优化算法（XY（分块），热启动）、贪心算法和随机算法；比较覆盖率分布。

结果。 在 5000 个测试位置上，量子近似优化算法（使用 XY 块混合器和基态热启动）取得了最高的平均覆盖度（5.32），优于贪心算法基线（4.73）和随机选择（2.95）。相较于贪心算法，性能提升了 +12.6%，且具有统计显著性（估计值为$p < 10^{-10}$）；相较于随机算法，性能提升了 +80.1%。覆盖度得分的完整分布显示，与基线方法相比，量子近似优化算法始终将概率质量推向覆盖度更高的结果。与随机选择相比，方差也有所降低，表明其在不同位置上的表现更加可靠。

解读。 这项内在验证证实，量子近似优化算法成功优化了所定义的 QKRD 目标函数，所得解优于随机猜测和强大的经典启发式算法。其表现胜过贪心基线尤其重要，因为这表明量子算法能够有效探索组合搜索空间，找到不显而易见的解。该结果不依赖任何外部国际象棋质量指标，验证了量子近似优化算法在这一结构化组合优化问题上的有效性，并确立了 QKRD 基准测试的实用价值。覆盖率分布的一致性偏移意味着，改进在不同战术中普遍存在，而非集中于少数有利实例。

7. 讨论

7.1. 结构化基准与量子近似优化算法技术优势

我们的结果表明，结构化基准测试能够揭示问题导向技术的优势，而这些优势在随机实例中可能被掩盖。约束保持混合器（XY、域墙）利用了 QKRD 自然的独热结构，从构造上确保可行性，并免去了惩罚超参数调优。这不仅是性能上的提升，更是质的改进：算法设计空间更简单，减轻了实践者的负担。热启动策略借助经典启发式算法，以接近优质解的状态初始化；这种方法直接受益于问题结构。对于随机问题，可能没有可利用的优良启发式算法；但对于 QKRD 这类结构化问题，领域知识（如贪心覆盖）可提供有力的先验，引导优化。在这一设定下，条件风险价值目标的结果不理想，这说明提升后的时间结构并未表现出条件风险价值通常擅长处理的强尾部风险。综合来看，这些发现表明基准设计至关重要；与纯合成实例相比，具有语义基础的问题更能区分不同的算法方法。我们的结果表明，结构化基准测试能够揭示问题导向技术的优势，而这些优势在随机实例中可能被掩盖。约束保持混合器（XY、域墙）利用了 QKRD 自然的独热结构，从构造上确保可行性，并免去了惩罚超参数调优。这不仅是性能上的提升，更是质的改进：算法设计空间更简单，减轻了实践者的负担。热启动策略借助经典启发式算法，以接近优质解的状态初始化；这种方法直接受益于问题结构。对于随机问题，可能没有可利用的优良启发式算法；但对于 QKRD 这类结构化问题，领域知识（如贪心覆盖）可提供有力的先验，引导优化。在这一设定下，条件风险价值目标的结果不理想，这说明提升后的时间结构并未表现出条件风险价值通常擅长处理的强尾部风险。综合来看，这些发现表明基准设计至关重要；与纯合成实例相比，具有语义基础的问题更能区分不同的算法方法。国际象棋的可解释性也让实践者能够将失败案例追溯到具体的战术主题，而非抽象的图模式。

7.2. QKRD 作为可复现测试平台

QKRD 作为含噪中型量子基准测试具有多项优势。首先，语义基础确保解是人类可理解的战术决策，而非抽象的比特串，从而帮助人们直观理解量子近似优化算法的行为，并在算法表现异常时便于调试。其次，可控的难度使问题规模能够随（K,F）选项而扩展，ROI 大小可用于控制局域性，而真实棋局位置则为不同实例提供了自然多样性。第三，内在验证意味着覆盖度本身就是优化目标，无需外部预言机或国际象棋引擎来评估性能。第四，我们发布了开源制品，包括 5,000 个实例、QUBO 生成器、实验代码和 MLflow 日志，以确保完全可复现。这些特性相结合，使 QKRD 适用于含噪声中等规模量子时代的系统化算法评估与基准测试。

7.3. 局限性与未来工作

一些局限性为未来研究指明了方向。首先，QKRD 优化的是局部战术指标，而非整体局面评估。这是有意为之，因为我们的目标是定义明确的 NISQ 规模目标，而不是构建完整的国际象棋引擎；但这意味着较高的覆盖度并不保证高水平的国际象棋对弈。其次，所有实验均采用精确模拟或基于测量次数的模拟，未考虑硬件噪声。硬件评估将检验方法对现实噪声和门误差的鲁棒性，并帮助了解这些技术在近期设备上的实际可行性。第三，我们针对每个局面独立优化变分参数，未采用迁移学习。未来工作可以探索在相似局面类别之间进行元学习、利用相似 ROI 结构进行角度热启动，或训练能够跨基准泛化的、与实例无关的参数。一些局限性为未来研究指明了方向。首先，QKRD 优化的是局部战术指标，而非整体局面评估。这是有意为之，因为我们的目标是定义明确的 NISQ 规模目标，而不是构建完整的国际象棋引擎；但这意味着较高的覆盖度并不保证高水平的国际象棋对弈。其次，所有实验均采用精确模拟或基于测量次数的模拟，未考虑硬件噪声。硬件评估将检验方法对现实噪声和门误差的鲁棒性，并帮助了解这些技术在近期设备上的实际可行性。第三，我们针对每个局面独立优化变分参数，未采用迁移学习。未来工作可以探索在相似局面类别之间进行元学习、利用相似 ROI 结构进行角度热启动，或训练能够跨基准泛化的、与实例无关的参数。最后，后续生成目前依赖固定的F；根据战术主题进行自适应选择，或许能够在保留二次结构的同时，生成更加灵活的提升变体。

7.4. 更广泛的适用性

QKRD 框架可推广到其他局部空间覆盖问题，包括设施选址、传感器布设、具有空间结构的图支配，以及

国际象棋以外游戏中的战术协同。局部 ROI、候选剪枝、结构化约束和真实世界实例是其中的关键要素，可适用于许多寻求语义基础扎实的 NISQ 基准的领域。具有天然空间局部性以及有意义的单热约束或基数约束的问题尤其适合采用这种方法。我们的研究表明，在结构化基准测试中，约束保持技术和热启动策略能带来稳定优势；这也说明类似的收益可能延伸至这些相关应用领域，并促使人们进一步研究问题驱动的 QAOA 设计。QKRD 框架可推广到其他局部空间覆盖问题，包括设施选址、传感器布设、具有空间结构的图支配，以及国际象棋以外游戏中的战术协同。局部 ROI、候选剪枝、结构化约束和真实世界实例是其中的关键要素，可适用于许多寻求语义基础扎实的 NISQ 基准的领域。具有天然空间局部性以及有意义的单热约束或基数约束的问题尤其适合采用这种方法。我们的研究表明，在结构化基准测试中，约束保持技术和热启动策略能带来稳定优势；这也说明类似的收益可能延伸至这些相关应用领域，并促使人们进一步研究问题驱动的 QAOA 设计。在多个领域进行评估，也有助于厘清哪些优势源于空间局部性，哪些则来自国际象棋特定结构。

8. 结论

我们提出了量子王车环支配（QKRD），这是一种源自国际象棋战术局面的 NISQ 规模基准测试，可提供具有结构化约束和空间局部性的、语义扎根且可复现的问题实例。与合成随机基准不同，QKRD 能够对量子近似优化算法在具有实际意义结构的问题上的表现进行可由人类解释的评估。借助 QKRD，我们系统地从四个关键维度评估了量子近似优化算法的设计选择。

约束保持混合器。 XY 混合器和域墙混合器的收敛速度显著快于标准 X 混合器（约少 13 步，$p < 10^{-7}$，$d \approx 0.5$），同时实现了统计上相当的覆盖度。这些混合器通过构造来确保可行性，从而免除了惩罚超参数调优，简化了算法设计空间，并使量子近似优化算法更适用于受约束优化问题。

热启动策略。 从经典启发式算法进行初始化可显著加快收敛速度，其中基态热启动使步骤数减少了45（$p < 10^{-100}$，d =3.35），并使能量提高了超过100个单位（$d > 8$）。这表明，经典-量子混合方法能够有效利用领域知识，尤其是在存在良好启发式算法的结构化问题中。

惩罚敏感性。 对于标准 X 混合器，增大惩罚强度 λ 会显著提高能量幅值（所有 $p < 10^{-100}$，d = 3–7），而覆盖度保持稳定。这证实覆盖度对约束施加强度具有稳健性，同时也凸显了惩罚方法引入的能量景观畸变，而约束保持混合器则完全避免了这一问题。

CVaR 优化。极端风险厌恶程度（$\alpha = 0.05$）下的 CVaR-QAOA，其能量显著高于期望优化（$p < 10^{-40}$，d = 1.21），且未带来任何覆盖收益。这一有启发意义的负面结果表明，对于通过强约束确保可行性的结构化组合问题，额外的风险意识可能并无益处；这与具有真实尾部风险结构的领域形成对比。

内在验证。量子近似优化算法有效优化了定义的覆盖目标，表现优于贪心启发式 12.6%，优于随机选择 80.1%。这验证了量子算法能够在此基准测试中有效遍历组合搜索空间。覆盖度量与 QUBO 目标函数直接一致，从而无需依赖外部预言机即可进行闭环评估。

我们的结果表明，结构化基准测试能够揭示问题导向的 QAOA 技术所带来的优势，而这些优势在合成随机实例中可能会被掩盖。QKRD 提供了一个可复现的测试平台，包含 5,000 个真实对局实例、开源代码和完整的实验材料，从而能够在含噪声中等规模量子时代系统地进行算法评估。该基准测试的语义基础还支持对解进行定性检查，使研究者能够在获取定量指标的同时形成洞见。

可复现性。 所有代码、数据和实验日志均已提供，但为遵守双盲评审要求，省略了工件链接。实验使用固定的随机种子，通过 MLflow 记录完整的超参数，且 PennyLane 电路具有确定性，从而确保所有报告结果均完全可复现。

未来方向。 值得探索的方向包括：针对相似的位置结构进行元学习，以初始化角度并实现迁移学习；在 NISQ 设备上进行硬件评估，以检验现实噪声下的鲁棒性；扩展到其他空间覆盖领域，以测试通用性；以及与精确求解器和贪心搜索之外的其他经典启发式算法进行比较。这些方向都将进一步确立 QKRD 作为含噪声中等规模量子算法开发标准基准测试的地位。

参考文献

[1] V. Akshay、H. Philathong、Mauro E. S. Morales 和 J. Biamonte。《量子近似优化中的可达性缺陷》。《物理评论快报》，124 9:090504，2019。1

[2] F. Arute、K. Arya、R. Babbush、D. Bacon、J. Bardin、R. Barends、S. Boixo、M. Broughton、B. Buckley、D. Buell、B. Burkett、N. Bushnell、Yu Chen、Zijun Chen、B. Chiaro、R. Collins、W. Courtney、S. Demura、A. Dunsworth、E. Farhi、A. Fowler、B. Foxen、C. Gidney、M. Giustina、R. Graff、S. Habegger、M. Harrigan、A. Ho、Sabrina Hong、Trent Huang、L. Ioffe、S. Isakov、E. Jeffrey、Zhang Jiang、Cody Jones、D. Kafri、K. Kechedzhi、J. Kelly、Seon Kim、P. Klimov、A. Korotkov、F. Kostritsa、D. Landhuis、P. Laptev、Mike Lind- mark、M. Leib、E. Lucero、O. Martin、J. Martinis、J. Mc- Clean、M. McEwen、A. Megrant、X. Mi、M. Mohseni、W. Mruczkiewicz、J. Mutus、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、F. Neukart、H. Neven、M. Niu、T. O'Brien、B. O'Gorman、E. Ostby、A. Petukhov、Harald Putterman、C. Quintana、P. Roushan、N. Rubin、D. Sank、K. Satzinger、Andrea Skolik、V. Smelyanskiy、D. Strain、Michael Streif、Kevin J Sung、M. Szalay、A. Vainsencher、T. White、Z. Yao、P. Yeh、Adam Zal- cman 和 Leo Zhou。《在平面超导处理器上对非平面图问题进行量子近似优化》。《自然·物理》，17:332–336，2020。1[3] Sami Boulebnane 和 A. Montanaro。使用量子近似优化算法求解布尔可满足性问题。2022。1[4] Sebastian Brandhofer、Vanessa Dehn、Gerhard Hellstern、Matthias Huls、Yanjun Ji、I. Polian、A. Bhatia 和 T. Wellens。基准测试 QAOA 在投资组合优化中的表现。《量子信息处理》，22，2022。2[5] S. Bravyi、A. Kliesch、Robert Koenig 和 Eugene Tang。对称性保护给变分量子优化带来的障碍。《物理评论快报》，125 26:260505，2020。2[6] N. Chancellor。用于量子退火和 QAOA 的离散变量畴壁编码。《量子科学与技术》，4，2019。2[7] Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gutmann。量子近似优化算法，2014。1，2[8] A. Glos、Aleksandra Krawiec 和 Z. Zimbor´as。用于变分量子计算的高空间效率二进制优化。《npj量子信息》，8，2022。1[9] T. M. Graham、Y. Song、J. Scott、C. Poole、L. Phuttitarn、K. Jooya、P. Eichler、X. Jiang、A. Marra、B. Grinkemeyer、M. Kwon、M. Ebert、J. Cherek、M. Lichtman、M. Gillette、J. Gilbert、D. Bowman、T. Ballance、C. Campbell、E. Dahl、O. Crawford、N. S. Blunt、B. Rogers、T. Noel 和 M. Saffman。在中性原子量子计算机上实现多量子比特纠缠与算法。《自然》，604:457–462，2021。1[10]Michael K¨olle、Tom Bintener、Maximilian Zorn、Ger- hard Stenzel、Leo S¨unkel、Thomas Gabor 和 Claudia Linnhoff-Popien。在基于遗传算法的量子电路合成中评估变异技术。载于《遗传与进化计算会议论文集》，第907–915页，美国纽约州纽约市，2025年。计算机协会。2[11] Michael K¨olle、Gerhard Stenzel、Jonas Stein、Sebastian Zielinski、Bj¨orn Ommer 和 Claudia Linnhoff-Popien。量子去噪扩散模型。载于《2024年IEEE量子软件国际会议（QSW）》，第88–98页，2024年。1，2[12]Jonas N¨ußlein、Leo S¨unkel、Jonas Stein、Tobias Rohe、Dani¨elle Schuman、Claudia Linnhoff-Popien 和 Sebastian Feld。通过分解半对称性降低量子近似优化算法电路深度。arXiv 预印本 arXiv:2411.08824，2024。1[13] W. Qian、R. Basili、M. Eshaghian-Wilner、A. Khokhar、G. Luecke 和 J. Vary。量子近似优化算法在旅行商问题中的变体比较研究。《Entropy》，25，2023。1[14] R Tyrrell Rockafellar、Stanislav Uryasev 等。条件风险价值优化。《Journal of Risk》，2：21–42，2000。2, 4[15] Yue Ruan、S. Marsh、Xiling Xue、Zhihao Liu 和 Jingbo B. Wang。用于求解旅行商问题的量子近似算法。《Computers, Materials & Continua》，2020。1[16] Gerhard Stenzel、Michael K¨olle、Tobias Rohe、Maximilian Mansky、Jonas ¨ußlein 和 Thomas Gabor。Qmamba：用于文本生成的量子选择性状态空间模型。第742–750页。SciTePress，2025。1, 2[17] Gerhard Stenzel、Sebastian Zielinski、Michael K¨olle、Philipp Altmann、Jonas ¨ußlein 和 Thomas Gabor。Qandle：利用门矩阵缓存和电路拆分加速状态向量模拟。载于《第17届国际智能体与人工智能会议论文集》第1卷：QAIO，第715–723页。INSTICC，SciTePress，2025。2[18] Leo S¨unkel、Philipp Altmann、Michael K¨olle、Gerhard Sten-zel、Thomas Gabor 和 Claudia Linnhoff-Popien。通过混合进化算法进行量子电路构造与优化。载于《遗传与进化计算会议论文集》，第934–942页，纽约，美国纽约州，2025。计算机协会。2[19] R. Tate、M. Farhadi、C. Herold、G. Mohler 和 Swati Gupta。通过半定规划初始化的 QAOA 热启动，连接经典计算与量子计算。ACM量子计算汇刊，4：1–39，2020。2[20] Zhihui Wang、N. Rubin、Jason M. Dominy 和 E. Rieffel。xy-混合器：量子近似优化算法的解析与数值结果。载于未知文献，2019。2[21]M. Willsch、D. Willsch、F. Jin、H. De Raedt 和 K. Michielsen。量子近似优化算法基准测试。《量子信息处理》，19，2019。1。[22] Leo Zhou、Sheng-Tao Wang、Soonwon Choi、Hannes Pichler 和 Mikhail D. Lukin。量子近似优化算法：近期设备上的性能、机制与实现。Physical Review X，2018。1, 2[23] Sebastian Zielinski、Jonas N¨ußlein、Michael K¨olle、Thomas Gabor、Claudia Linnhoff-Popien 和 Sebastian Feld。使用QUBO近似求解最大3-SAT。载于《2024 IEEE量子计算与工程国际会议（QCE）》，第681–691页。IEEE，2024。1