arXiv:2601.00319v1 [math.FA] 1 Jan 2026

与压缩算子相似的福格尔型算子

NILANJAN DAS、SOMA DAS 和 JAYDEB SARKAR

ABSTRACT. Pisier 关于 Halmos 的相似于压缩算子问题的著名反例，基于 2×2 上三角分块算子矩阵，其对角线上包含三个经典算子：前移算子和后移算子，非对角项中则包含 Hankel 算子。结合另一个经典对象，即 Toeplitz 算子，可以构造另一 $2^3 - 1 = 7$ 类 2×2 上三角分块算子矩阵，我们将其称为福格尔型算子。本文对这七种福格尔型算子何时与压缩算子相似给出了完整刻画。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 一般判据 3. Toeplitz 算子 4. Hankel 算子 5. Toeplitz 算子与 Hankel 算子 6. 例子 6.1. BMOA 函数 6.2. 希尔伯特-Hankel 矩阵 6.3. 一般性评述 1
参考文献 1

1. 引言

本文中， E 将视为一个任意但固定的$\mathbb{C}$上的可分希尔伯特空间， $\mathcal{B}(E)$表示所有有界线性算子 $T : E \to E$ 构成的空间，其范数为

$$\|T\| := \sup\{\|Tf\| : \|f\| = 1, f \in E\}.$$

若算子 $T \in \mathcal{B}(E)$满足 $\|T\| \leq 1$，则称其为一个压缩算子。等价地，

$$I - T^*T \geq 0.$$

这种正性在分析线性算子的结构时发挥着至关重要的作用。显然，并非所有算子都具有这样的正性。因此，一个自然的问题随之产生：能否通过在 E上使用一个等价范数，将一个非压缩算子变为压缩算子？这个问题等价于著名的相似性问题，它具体要求刻画一个给定算子何时与某个压缩算子相似。

2020 数学主题分类。 47B35, 32A37, 15B05, 47B38, 46E40, 30H10, 30H35。关键词和短语。 压缩算子、Toeplitz 算子、Hankel 算子、Hilbert-Hankel 矩阵、Hardy 空间、相似性、幂有界算子。

回顾一下，如果存在一个可逆算子 $X \in \mathcal{B}(E)$，使得 $T \in \mathcal{B}(E)$与某个压缩算子相似，则称其为

$$X^{-1}TX,$$

是一个压缩算子。这是一个经典问题，其根源可追溯至 Sz.-Nagy 于 1947年 发表的一篇论文，该文刻画了与酉算子相似的算子 [16]: $T \in \mathcal{B}(E)$ 与酉算子相似，当且仅当

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty.$$

在指出这一结果是相似性问题的起点时，Pisier 评论道[22]，Sz.-Nagy“几乎可以肯定是受到了他与 F. Riesz 在遍历理论方面合作成果的启发，在那里压缩算子发挥着关键作用。”1959年，这一结果促使 Sz.-Nagy [15] 考虑幂有界算子这一类，即满足以下条件的算子 $T \in \mathcal{B}(E)$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|T^n\| < \infty,$$

并由此引出一个自然的问题:

所有幂有界算子都与压缩算子相似吗?

在同一篇论文中，[15], Sz.-Nagy 对所有紧算子给出了这个问题的肯定答案。然而，1964年，Foguel [11] 在一般情形下对 Sz.-Nagy 的问题给出了否定答案（另见 Halmos [13]）。此外，鉴于冯·诺伊曼不等式 [24],，人们还注意到，“多项式有界性”是“幂有界性”的一种自然替代：若存在 $C > 0$，则称 $T \in \mathcal{B}(E)$ 是多项式有界的

$$\|p(T)\| \leq C \sup_{z\in\mathbb{D}} |p(z)|,$$

对于所有复多项式 p，其中 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{C}$中的开单位圆盘。在其著名的1970年论文 [14], 中，Halmos 提出了以下问题:

所有多项式有界算子是否都与压缩算子相似?

约25年后，Pisier [21]推翻了哈尔莫斯猜想。与此同时，Paulsen [17] 给出了一个刻画：一个算子与压缩算子相似，当且仅当它是完全多项式有界的。在此背景下，也可参阅 Aleksandrov 和 Peller [1], 以及布尔甘 [2]的相关工作。我们还推荐读者参阅优秀的综述文章 [8, 22]，以全面了解相似性问题。

记 $H^2_E(\mathbb{D})$ 为定义在 $\mathbb{D}$ [23] 上的 E值 Hardy 空间。对于每个 $X \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$，定义作用于 $H^2_E(\mathbb{D}) \oplus H^2_E(\mathbb{D})$ 上的分块算子矩阵 $M^{S^*_E}_{S_E}(X)$ 如下:

$$M^{S^*_E}_{S_E}(X) := \begin{bmatrix} S^*_E & X \\ 0 & S_E \end{bmatrix},$$

其中，S_E 表示作用于 $H^2_E(\mathbb{D})$ [23]上的移位算子。早在 Pisier 的反例出现之前，Foias、Williams [12] 和 Peller [19] 就提出了这一类特殊算子（在 $E = \mathbb{C}$的情形下），认为它们可能适用于研究 Halmos 的相似性问题。研究这类算子的一个动机来自福格尔的工作[11]。他针对 Sz.-Nagy 问题给出的反例是如下形式的算子

$$M^{S^*}_{S}(X) := \begin{bmatrix} S^* & X \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

它作用于 $H^2(\mathbb{D}) \oplus H^2(\mathbb{D})$，其中 $H^2(\mathbb{D})$表示取值为标量的 Hardy 空间（在此情形下，我们省略所有下标中的 $\mathbb{C}$ ）。值得指出的是，福格尔反例中的算子 X 是一个与稀疏序列相关联的特定正交投影。

在针对Halmos问题的反例中，Pisier考察了形如$M_{S_E}^{S_E^*}(X)$的算子，其中

$$\dim E = \infty,$$

X 是一个与反对易关系相关的Hankel 算子。他的例子（以及相关结果）表明， $M_{S_E}^{S_E^*}(X)$与压缩算子相似这一问题，其中 X 是一个Hankel 算子，是相当微妙的。事实上，对于哪些Hankel 算子 X 使得 $M_{S_E}^{S_E^*}(X)$与压缩算子相似，目前仍然没有明确的刻画。

沿着Foguel和Pisier的方法，本文考察如下定义的*Foguel* 型算子 与压缩算子的相似性:

$$M_Z^Y(X) = \begin{bmatrix} Y & X \\ 0 & Z \end{bmatrix},$$

作用于 $H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D})$上，其中

$$Y = S_E \quad \text{and} \quad Z = S_E \text{ or } S_E^*,$$

or

$$Y = Z = S_E^*,$$

以及

$$X = \text{ Toeplitz or Hankel operator},$$

包括 $Y = S_E^*$、 $Z = S_E$ 和 X =Toeplitz 算子的情形。我们给出了与压缩算子相似的 Foguel 型算子的完整刻画。因此，结合 Pisier 的反例所解决的情形，我们完成了对全部七种 2×2 对角项为前移位算子和后移算子、非对角项为 Toeplitz 算子或 Hankel 算子的上三角分块算子矩阵的相似性问题的分析。

在介绍本文得到的主要相似性结果之前，我们先引入一些记号。用 $L_E^2(\mathbb{T})$ 表示 E 值 L^2空间 $\mathbb{T}$ $(= \partial\mathbb{D})$。记 $L_{\mathcal{B}(E)}^\infty(\mathbb{T})$ 为所有取值于 $\mathcal{B}(E)$、本质有界且可测的函数在 $\mathbb{T}$ 上构成的 Banach 空间。此外，令 $H_{\mathcal{B}(E)}^\infty(\mathbb{D})$ 表示取值于 $\mathcal{B}(E)$ 的有界解析函数在 $\mathbb{D}$ 上构成的 Banach 空间。令 $\Phi \in L_{\mathcal{B}(E)}^\infty(\mathbb{T})$。乘法算子 $M_\Phi \in \mathcal{B}(L_E^2(\mathbb{T}))$ 定义为

$$M_\Phi(f) = \Phi f,$$

对所有$f \in L_E^2(\mathbb{T})$。Toeplitz 算子 $T_\Phi \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 Hankel 算子$H_\Phi \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$，其符号为 Φ ，定义为

$$T_\Phi = P_{H_E^2(\mathbb{D})} M_\Phi|_{H_E^2(\mathbb{D})} \text{ and } H_\Phi = P_{H_E^2(\mathbb{D})} M_\Phi J|_{H_E^2(\mathbb{D})},$$

分别为，其中 J: $L_E^2(\mathbb{T}) \to L_E^2(\mathbb{T})$ 是翻转算子，定义为 $(Jf)(z) = f(\bar{z})$，对所有 $f \in L_E^2(\mathbb{T})$ 和几乎处处的 $z \in \mathbb{T}$。

给定 Hilbert空间 H的闭子空间 L ，我们用 P_L 表示从 H 到 L的正交投影。在此语境下，请注意，在上文的讨论中，我们将 $H_E^2(\mathbb{D})$视为 $L_E^2(\mathbb{T})$ [23]的闭子空间。下文中，只要语境

明确， E 都将被视为 $H^2_E(\mathbb{D})$的闭子空间。为简洁起见，我们将频繁使用记号 ΦP_E 表示算子 $M_\Phi P_E$，也就是说，

$$M_\Phi P_E = \Phi P_E,$$

对每个 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。此外，为了方便地陈述结果，我们引入类 $zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，它由满足以下条件的 $\Phi \in \overline{L^\infty_{\mathcal{B}(E)}}(\mathbb{T})$ 构成：

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \Phi_n,$$

其中，对所有 $n \geq 1$， $\Phi_n \in \mathcal{B}(E)$。以下总结了本文关于福格尔型算子的主要相似性结果：

定理 1.1. 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。有如下结论：

(1) $M^{S_E}_{S^*_E}(T_\Phi)$ 与某个压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi \in (1 - \bar{z}^2) L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}),$$

and

$$\Phi^* + \widetilde{\Phi}^* \in (1 - z^2)(H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}),$$

$\widetilde{\ }$其中 $\Phi(z) = \Phi(\bar{z}),\ \ z \in \mathbb{T}$ 几乎处处成立。

(2) $M^{S_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$H_\Phi D_E \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D})),$$

并且存在 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$ 使得

$$(H_\Phi D_E S_E)^* P_E = \Psi P_E,$$

其中 D_E 表示作用在 E值多项式空间上的微分算子。

(3) $M^{S_E}_{S_E}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi = 0.$$

(4) $M^{S_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi \in (z - \bar{z}) L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

(5) $M^{S^*_E}_{S_E}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi \in (\bar{z} - z) L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}).$$

这些结果都是新的，即使对于 $E = \mathbb{C}$ 也是如此。不过，对于 Pisier 所考察的 $M^{S^*_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 的相似性问题，我们尚不知道如何应用本文的方法。因此，这种情况既未列入上面的清单，也未列入 Foguel 型算子的定义清单。其余两种情况，即 $M^{S^*_E}_{S^*_E}(T_\Phi)$ 和 $M^{S^*_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$，可由上述结果推出，并已在第 5 节中概述。

我们指出，正如后续证明中将显而易见的，除$M^{S_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$和$M^{S_E}_{S_E}(T_\Phi)$的情形外，前述所有结果都揭示了其与 Toeplitz + Hankel 算子理论之间一种颇为出乎意料的联系。这是一个新兴且本身颇具研究价值的领域，已有多位数学家对此进行了研究（参见 [6, 9, 10]）。

可以合理地认为，本文为支持 Toeplitz +Hankel 算子的适用性向前迈出了一步。

关于 $M_{S_E}^{S_E^*}(H_\Phi)$ 与压缩算子的相似性问题，我们注意到，Aleksandrov 和 Peller [1]解决了 $E = \mathbb{C}$ 的情形，而 Davidson 和 Paulsen 的工作 [7] 讨论了 $\dim(E) < \infty$ 时的情形。

我们将部分结果应用于具体情形，例如 $E = \mathbb{C}$。例如，我们证明，对于 Hilbert-Hankel 算子 H_ψ，相应的 Foguel 型算子$M_{S^*}^S(H_\psi)$ 永远不会与压缩算子相似。回顾一下，Hilbert-Hankel 算子 H_ψ 的矩阵表示为：

$$H_\psi = \left[\frac{1}{i+j+1}\right]_{i,j\geq 0}.$$

需要指出的是，文献中已有一些一般性结果，尤其是，它们也根据与压缩算子的相似性对 Foguel 型算子进行了分类。例如， [4, 推论 4.2] 断言

$$M_{S_E^*}^{S_E}(X) \text{ is similar to contraction if and only if it is power bounded.} \tag{1.1}$$

此外，我们还有以下一般性结果，称为 Foia¸s-Williams 判据（[12],另见 [3] ，同见 [18, 推论 5.15] 中的同调证明）：设 E 和 E_* 为希尔伯特空间，且设 $Y \in \mathcal{B}(E)$ 和 $Z \in \mathcal{B}(E_*)$。假设 Y 和 Z 与压缩算子相似，并且 Y 是余等距算子或 Z 是等距算子。那么，$M_Z^Y(X)$ 在 $E \oplus E_*$ 上与压缩算子相似，当且仅当存在有界线性算子 $A : E_* \to E$，使得

$$YA - AZ = X. \tag{1.2}$$

证明定理 1.1（特别是第 (1) 部分和第 (2) 部分）的一个关键步骤，是在 (1.1) 的背景下改进 (1.2)；我们也将其视为本文的主要结果之一（见定理 2.2）：给定 $X \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$，以下命题等价：

(1) $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与一个压缩算子相似。(2) 存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$A^*P_E = \Psi P_E \text{ and } X = A - S_E^* A S_E^*.$$

(3) 存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$AP_E = XP_E, A^*P_E = \Psi P_E, \text{ and } XS_E = AS_E - S_E^* A.$$

这一结果已在下一节中得到证明；事实上，它通过一种截然不同的方法推广了 [4], 中的命题 5.5 和注 5.6。

本文其余部分安排如下：第 3 节给出与相似于压缩算子的 Toeplitz 算子相关的 Foguel 型算子的刻画，第 4 节则对 Hankel 算子作同样的处理。第 5 节通过考察涉及 Toeplitz 算子和 Hankel 算子的 Foguel 型算子的所有其余情形，完成我们所讨论情境中的相似性问题。最后一节给出例子并作一些一般性评述。

2. A general criterion

该 p urp本节的目的是对如下形式的算子给出一般性刻画

$$M_{S_E^*}^{S_E}(X) = \begin{bmatrix} S_E & X \\ 0 & S_E^* \end{bmatrix} : H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D}) \to H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D}),$$

对于某些与压缩算子相似的 $X \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$。根据 (1.1)，已知这样的算子 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与压缩算子相似，当且仅当它是幂有界的。然而，就幂有界性而言，这个答案似乎并未为相似性问题提供令人满意的解答。本节将讨论这两个刻画问题。我们需要一个引理。

给定上述算子 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$，我们定义

$$X_n = S_E^{n-1}X + S_E^{n-2}XS_E^* + S_E^{n-3}XS_E^{*^2} + \cdots + XS_E^{*^{n-1}} \tag{2.1}$$

对每个 $n \geq 1$。这一概念的思路来自以下计算：

$$\left(M_{S_E^*}^{S_E}(X)\right)^n = \begin{bmatrix} S_E^n & X_n \\ 0 & S_E^{*n} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

对所有 $n \geq 1$。[5] 中提到，$M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 的幂有界性等价于序列 $\{\|X_n\|\}_n$ 有界。由于目前没有现成的证明，为完整起见，我们在下文给出一个证明，以证明 (2) 和 (3) 等价。(1) 和 (2) 等价可由 (1.1) 得出。

引理 2.1. 设 $X \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$。以下条件等价：

(1) $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与压缩算子相似。(2) $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 幂有界。(3) $\sup_n \|X_n\| < \infty$。

证明。 我们需要证明 (2) 和 (3) 等价。设 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 幂有界。则存在 $M > 0$ ，使得

$$\sup_n \left\| \left(M_{S_E^*}^{S_E}(X)\right)^n \right\| \leq M.$$

固定 $f \in H_E^2(\mathbb{D})$ 和 $n \geq 1$。由 (2.2) 可知，

$$\left(M_{S_E^*}^{S_E}(X)\right)^n = \begin{bmatrix} S_E^n & X_n \\ 0 & S_E^{*n} \end{bmatrix},$$

对所有 $n \geq 1$ 均成立。于是

$$\begin{aligned} \|X_n f\|^2 &\leq \|X_n f\|^2 + \|S_E^* f\|^2 \\ &= \left\| \left(M_{S_E^*}^{S_E}(X)\right)^n \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\leq \left\| \left(M_{S_E^*}^{S_E}(X)\right)^n \right\|^2 \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\leq M^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

也就是说， $\|X_n\| \leq M$。这证明了 $\{\|X_n\|\}_n$ 有界。反过来，假设对于某个 $M > 0$, $\sup_n \|X_n\| \leq M$。令

$$M_1 = \max\{1, M\}.$$

那么，对于 $H_E^2(\mathbb{D})$ 中任意的 f_1 和 f_2，有

$$\begin{aligned}
\left\| \left(M_{S_E^*}^{S_E}(X) \right)^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} S_E^n f_1 + X_n f_2 \\ S_E^{*n} f_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= \|S_E^n f_1 + X_n f_2\|^2 + \|S_E^{*n} f_2\|^2 \\
&\leq \left(\|S_E^n f_1\| + \|X_n f_2\| \right)^2 + \|S_E^{*n} f_2\|^2 \\
&\leq \left(\|f_1\| + M\|f_2\| \right)^2 + \|f_2\|^2 \\
&\leq M_1^2 \left(\|f_1\| + \|f_2\| \right)^2 + M_1^2 (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2) \\
&\leq 2M_1^2 \left(\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \right) + M_1^2 (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2) \\
&= 3M_1^2 \left\| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right\|^2 .
\end{aligned}$$

因此,

$$\left\| \left(M_{S_E^*}^{S_E}(X) \right)^n \right\| \leq \sqrt{3} M_1,$$

因此 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 是幂有界的。这就完成了该引理的证明。 □

有了上述引理，我们现在可以陈述并证明本节的主要定理，该定理给出了算子 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与压缩算子相似的 Foia̧s-Williams 型判据。

定理 2.2。 设 $X \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$。那么以下条件等价:

(1) $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与压缩算子相似。(2) 存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H_{\mathcal{B}(E)}^{\infty}(\mathbb{D})$，使得

$$A^* P_E = \Psi P_E,$$

and

$$X = A - S_E^* A S_E^*.$$

(3) 存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H_{\mathcal{B}(E)}^{\infty}(\mathbb{D})$，使得

$$AP_E = XP_E \text{ and } A^* P_E = \Psi P_E,$$

and

$$XS_E = AS_E - S_E^* A.$$

证明。 我们首先证明 (2) 和 (3) 等价。假设 (2) 成立，则存在$A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H_{\mathcal{B}(E)}^{\infty}(\mathbb{D})$，使得 $A^* P_E = \Psi P_E$，并且

$$X = A - S_E^* A S_E^*.$$

上述条件立即表明

$$XS_E = AS_E - S_E^* A.$$

同样，$X = A - S_E^* A S_E^*$ 给出

$$XP_E = (A - S_E^* A S_E^*)P_E = AP_E - S_E^* A S_E^* P_E = AP_E,$$

如 $S_E^* P_E = 0$。因此，我们有 $XP_E = AP_E$。反之，若 (3) 成立，则存在$A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得 $AP_E = XP_E$, $A^* P_E = \Psi P_E$，并且

$$XS_E = AS_E - S_E^* A.$$

鉴于 $I = P_E + S_E S_E^*$，我们计算得

$$\begin{aligned} X &= X(P_E + S_E S_E^*) \\ &= AP_E + (AS_E - S_E^* A)S_E^* \\ &= A(P_E + S_E S_E^*) - S_E^* A S_E^* \\ &= A - S_E^* A S_E^*. \end{aligned}$$

这就完成了 (2) 与 (3) 等价性的证明。现在我们着手证明 (1) 与 (2) 等价，这需要进行更复杂的计算。首先，假设 (1) 成立。特别地，$M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 是幂有界的，因此由引理 2.1 可得

$$\sup_n \|X_n\| < \infty,$$

其中 X_n, $n \geq 1$ 的定义如 (2.1) 所示：

$$X_n = S_E^{n-1} X + S_E^{n-2} X S_E^* + S_E^{n-3} X S_E^{*2} + \cdots + X S_E^{*n-1}.$$

暂且固定一个自然数 n。注意到

$$S_E X_n = S_E^n X + S_E^{n-1} X S_E^* + S_E^{n-2} X S_E^{*2} + \cdots + S_E X S_E^{*n-1},$$

and

$$X_n S_E^* = S_E^{n-1} X S_E^* + S_E^{n-2} X S_E^{*2} + S_E^{n-3} X S_E^{*3} + \cdots + X S_E^{*n}.$$

将上述各量相减，得到

$$S_E X_n - X_n S_E^* = S_E^n X - X S_E^{*n}.$$

两边乘以 S_E^{*n}，得到

$$S_E^{*n-1} X_n - S_E^{*n} X_n S_E^* = X - S_E^{*n} X S_E^{*n},$$

也就是说,

$$S_E^{*n-1} X_n - S_E^* \left(S_E^{*n-1} X_n \right) S_E^* = X - S_E^{*n} X S_E^{*n}.$$

我们希望对上述结论应用极限论证，更具体地说，是针对一个子序列。我们按如下方式进行。由于 $\{\|X_n\|\}_n$ 有界，因此序列 $\{\|S_E^{*n-1} X_n\|\}_n$ 也有界（注意，对所有 $m \in \mathbb{Z}_+$, $\|S_E^{*m}\| = 1$ ）。此外，根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，$\mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 的闭单位球在弱算子拓扑下是紧的。因此，存在一个子序列，我们将其记为 $\{S_E^{*n_j - 1} X_{n_j}\}$，它在弱算子拓扑下收敛。令

$$WOT - \lim_n S_E^{*n_j - 1} X_{n_j} = A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D})).$$

结合 $S_E^{*n} \to 0$ 在强算子拓扑下趋于 $n \to \infty$ 这一事实，最终可得所需的极限性质:

$$A - S_E^* A S_E^* = X. \tag{2.3}$$

将上述结果代入 X_n 的表达式，得到

$$X_n = S_E^{n-1}(A - S_E^* A S_E^*) + S_E^{n-2}(A - S_E^* A S_E^*)S_E^* + \cdots + (A - S_E^* A S_E^*)S_E^{*n-1}.$$

由于 $S_E S_E^* = I - P_E$，我们有

$$X_n = S_E^{n-1}A - S_E^{n-2}(I-P_E)AS_E^* + S_E^{n-2}AS_E^* - S_E^{n-3}(I-P_E)AS_E^{*2} + \cdots + AS_E^{*n-1} - S_E^* A S_E^{*n}.$$

将其写作

$$X_n = S_E^{n-1}A - S_E^* A S_E^{*n} - S_E^{n-1}P_E A + Q_n,$$

其中

$$Q_n := S_E^{n-1}P_E A + S_E^{n-2}P_E AS_E^* + S_E^{n-3}P_E AS_E^{*2} + \cdots + P_E AS_E^{*n-1}.$$

由于

$$\|S_E^{n-1}A - S_E^* A S_E^{*n} - S_E^{n-1}P_E A\| \le 3\|A\|,$$

$\{\|X_n\|\}_n$ 的有界性保证了 $\{\|Q_n\|\}_n$ 也有界。因此，数列 $\{\|Q_n^*\|\}_n$ 也有界。注意

$$Q_n^* = A^* P_E S_E^{*n-1} + S_E A^* P_E S_E^{*n-2} + S_E^2 A^* P_E S_E^{*n-3} + \cdots + S_E^{n-1}A^* P_E. \tag{2.4}$$

现在假设 $\|Q_n^*\| \le C$，其中 $C > 0$为某个常数。固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $e \in E$。利用后移算子 S_E^*的性质，我们有

$$Q_n^*(z^k e) = \begin{cases} z^{n-k-1}A^* e & \text{if } 0 \le k \le n-1 \\ 0 & \text{if } k \ge n. \end{cases}$$

给定一个取值于 E的多项式

$$\mathbf{p} = e_0 + ze_1 + z^2 e_2 + \cdots + z^{n-1}e_{n-1} \in H_E^2(\mathbb{D}),$$

其中对所有 $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$，均有 $e_i \in E$，定义

$$\tilde{\mathbf{p}} = e_{n-1} + ze_{n-2} + +z^2 e_{n-3} + \cdots + z^{n-1}e_0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} Q_n^*(\tilde{\mathbf{p}}) &= Q_n^*(e_{n-1}) + Q_n^*(ze_{n-2}) + Q_n^*(z^2 e_{n-3}) + \cdots + Q_n^*(z^{n-1}e_0) \\ &= z^{n-1}A^* e_{n-1} + z^{n-2}A^* e_{n-2} + z^{n-3}A^* e_{n-3} + \cdots + A^* e_0. \end{aligned}$$

定义

$$R(\mathbf{p}) := \sum_{i=0}^{n-1} z^i A^* e_i,$$

如上所述的取值于 E的多项式$\mathbf{p}$ 。现在显然可知

$$\|R(\mathbf{p})\| = \|Q_n^*(\tilde{\mathbf{p}})\| \le C\|\tilde{\mathbf{p}}\| = C\|\mathbf{p}\|. \tag{2.5}$$

这意味着， R 是从取值于 E的多项式空间到$H_E^2(\mathbb{D})$的良定义有界线性算子。由于取值于 E的多项式构成$H_E^2(\mathbb{D})$的稠密子空间，算子 R 有唯一的有界线性延拓，使其成为 $\mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$中的一个元素，我们仍将其称为 R。此外，容易看出

$$S_E R(\mathbf{p}) = RS_E(\mathbf{p}),$$

对于每个取值于 E的多项式$\mathbf{p} \in H^2_E(\mathbb{D})$。现在取$f \in H^2_E(\mathbb{D})$。选取一个取值于$E$的多项式序列 $\{\mathbf{q}_n\} \subseteq H^2_E(\mathbb{D})$，使得

$$\lim_n \mathbf{q}_n = f,$$

在$H^2_E(\mathbb{D})$中。通过标准极限论证，我们有

$$S_E R(f) = S_E \lim_{n\to\infty} R(\mathbf{q}_n) = \lim_{n\to\infty} S_E R(\mathbf{q}_n) = \lim_{n\to\infty} RS_E(\mathbf{q}_n) = RS_E(f),$$

也就是说， $S_E R = RS_E$。因此， R 是一个解析 Toeplitz 算子，也就是说，存在一个解析符号 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得（参见 [23, 推论 3.20]）

$$R = T_\Psi.$$

根据 R的定义，我们看到

$$A^* e = Re = T_\Psi e = \Psi e,$$

对所有 $e \in E$均成立。结合（2.3），这一事实证实了（2）的有效性。另一方面，假设（2）成立。那么存在 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$X = A - S_E^* A S_E^*,$$

且 $A^* P_E = T_\Psi P_E$。要证明在此假设下（1）成立，只需证明

$$\sup_n \|X_n\| < \infty,$$

其中 X_n 如（2.1）中所给出（见引理 2.1）。利用等式 $X = A - S_E^* A S_E^*$，现在可以完全按照（2.3）之后的计算步骤进行计算，从而得到 X_n 的表达式:

$$X_n = S_E^{n-1} A - S_E^* A S_E^{*n} - S_E^{n-1} P_E A + Q_n.$$

因此，证明 $\{\|X_n\|\}_n$ 有界，就相当于证明 $\{\|Q_n^*\|\}_n$ 有界（如前文所述，其中 Q_n^* 在（2.4）中定义）。固定 $f = \sum_{i=0}^\infty z^i e_i \in H^2_E$（$\mathbb{D}$），并注意到

$$\begin{aligned}
\|Q_n^*(f)\| &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} Q_n^*(z^i e_i) + \sum_{i=n}^{\infty} Q_n^*(z^i e_i) \right\| \\
&= \|z^{n-1} A^* e_0 + z^{n-2} A^* e_1 + \cdots + A^* e_{n-1}\| \\
&= \|z^{n-1} \Psi e_0 + z^{n-2} \Psi e_1 + \cdots + \Psi e_{n-1}\| \\
&= \|T_\Psi(z^{n-1} e_0 + z^{n-2} e_1 + \cdots + e_{n-1})\| \\
&\leq \|T_\Psi\| \|z^{n-1} e_0 + z^{n-2} e_1 + \cdots + e_{n-1}\| \\
&\leq \|\Psi\|_\infty \|f\|,
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

上述定理对一般情况下 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 与压缩算子相似这一问题，给出了一个多少令人满意的答案。然而，当算子 X 更为自然且与移位算子相关时，尤其是在 Toeplitz 算子和 Hankel 算子的情形下，人们或许会期待一个更具体的答案。接下来的两节将围绕这一主题展开。

3. Toeplitz operators

本节旨在对符号 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 给出一个具体刻画，使得 $M^{S_E}_{S_E^*}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似。在此，我们将考察定理 2.2 中各条件等价这一结论在 Toeplitz 算子背景下的应用价值。

我们需要回顾一些关于 Toeplitz + Hankel 算子的结果。设 $T,\ H \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$. 那么，当且仅当 T 是 Toeplitz 算子时，

$$S_E^* T S_E = T.$$

并且，当且仅当 H 是 Hankel 算子时，

$$S_E^* H = H S_E.$$

若存在符号Φ，$\Omega \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 使得，则称算子 $X \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 是$Toeplitz + $***Hankel*** 算子

$$X = T_\Phi + H_\Omega.$$

在这种情况下，我们简单地称 X 是 Toeplitz + Hankel 算子。下文将使用 [6,定理 2.2] 中建立的 Toeplitz + Hankel 算子的以下刻画：

定理 3.1。 设 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$。以下条件等价：

(1) A是 ***Toeplitz +Hankel*** 算子。(2)
$AS_E - S_E^* A$ 是 ***Toeplitz*** 算子。(3)
$S_E^* A S_E - A$ 是 ***Hankel*** 算子。(4)
$AS_E + S_E^{*2} A S_E = S_E^* A + S_E^* A S_E^2$。

回忆一下，

$$\overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})} = \{\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) : \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \Phi_n, \Phi_n \in \mathcal{B}(E), n \geq 1\}.$$

˜还要回忆一下，对于每个 $\Psi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，我们定义 $\Psi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 为

$$\widetilde{\Psi}(z) = \Psi(\bar{z}),$$

对 $z \in \mathbb{T}$ 几乎处处成立。此外，根据 Toeplitz 算子的定义，我们有以下关系：

$$T_\Phi P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})} M_\Phi|_{H^2_E(\mathbb{D})} P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})} M_\Phi P_E,$$

根据我们的约定，可以更简洁地写作

$$T_\Phi P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})} \Phi P_E.$$

换句话说，对于每个 $e \in E$，我们有

$$(T_\Phi P_E)(e) = (P_{H^2_E(\mathbb{D})} \Phi P_E)(e) = P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Phi e).$$

有了这一结论，我们现在继续讨论本节的主要结果。

定理 3.2。 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。那么 $M^{S_E}_{S_E^*}(T_\Phi)$ 相似于一个压缩算子，当且仅当

$$\Phi \in (1-\bar{z}^2)L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}),$$

and

$$\Phi^* + \widetilde{\Phi}^* \in (1-z^2)(H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}).$$

证明。 首先，假设 $M^{S_E}_{S_E^*}(T_\Phi)$ 与一个压缩算子相似。根据定理 2.2 的第 (3) 部分，存在 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$T_\Phi S_E = AS_E - S_E^* A,$$

其中 $AP_E = T_\Phi P_E$ 且 $A^* P_E = \Psi P_E$。由于 $S_E = T_z \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 且 z 是解析的，我们有 $T_\Phi S_E = T_{z\Phi}$，因此，第一个恒等式给出

$$T_{z\Phi} = AS_E - S_E^* A.$$

根据定理 3.1， A是一个 Toeplitz $+$ Hankel 算子，也就是说，存在符号Θ，$\Omega \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，使得

$$A = T_\Theta + H_\Omega.$$

将 A的这个值代入恒等式 $T_{z\Phi} = AS_E - S_E^* A$，再利用 Hankel 性质 $S_E^* H_\Omega = H_\Omega S_E$，我们得到:

$$\begin{aligned} T_{z\Phi} &= (T_\Theta + H_\Omega)S_E - S_E^*(T_\Theta + H_\Omega) \\ &= T_\Theta S_E - S_E^* T_\Theta \\ &= T_{(z-\bar{z})\Theta}. \end{aligned}$$

在上文中，我们使用了关系 $T_\Theta S_E = T_{z\Theta}$ 和 $S_E^* T_\Theta = T_{\bar{z}\Theta}$ （再次回顾，$S_E = T_z$）。因此，根据 Toeplitz 算子的符号的唯一性，我们有

$$z\Phi = (z-\bar{z})\Theta,$$

这意味着 $\Phi = (1-\bar{z}^2)\Theta \in (1-\bar{z}^2)L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，因此

$$\Theta = \frac{\Phi}{1-\bar{z}^2}.$$

由于 $AP_E = T_\Phi P_E$，我们进一步得到

$$\begin{aligned} P_{H^2_E(\mathbb{D})}\Phi P_E &= P_{H^2_E(\mathbb{D})} M_\Phi P_E \\ &= T_\Phi P_E \\ &= AP_E \\ &= (T_\Theta + H_\Omega)P_E \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\Theta P_E + P_{H^2_E(\mathbb{D})}\Omega P_E \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{\Phi}{1-\bar{z}^2}P_E\right) + P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\Omega P_E\right). \end{aligned}$$

这里我们用到了如下事实：$H_\Omega P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})} M_\Omega J P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})} M_\Omega P_E$。由上可得,

$$P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\left(\Phi - \frac{1}{1-\bar{z}^2}\Phi\right)P_E\right) = P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\Omega P_E\right),$$

因此

$$P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\Phi P_E\right)=P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\Omega P_E\right).$$

Set

$$\Upsilon:=\Omega-\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\Phi\in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}).$$

于是我们有 $P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Upsilon P_E)=0$。这意味着

$$\Upsilon\in\overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

注意到 $H^*_\Omega=H_{\widetilde{\Omega}^*}$，并且

$$M^*_\Theta=M_{\frac{\Phi^*}{1-z^2}}.$$

此外，将 Ω 改写为

$$\Omega=\Upsilon+\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\Phi.$$

于是由条件 $\Psi P_E=A^*P_E$，可得

$$\begin{aligned}\Psi P_E&=(T^*_\Theta+H^*_\Omega)P_E\\&=P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(M^*_\Theta P_E\right)+P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(M_{\widetilde{\Omega}^*}P_E\right)\\&=P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{1}{1-z^2}\Phi^*P_E\right)+P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\widetilde{\Upsilon}^*P_E+\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\widetilde{\Phi}^*P_E\right)\\&=P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{1}{1-z^2}\Phi^*P_E\right)+P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\widetilde{\Phi}^*P_E\right).\end{aligned}$$

若设

$$\Lambda=\frac{1}{1-z^2}\Phi^*+\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2-1}\widetilde{\Phi}^*-\Psi\in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}),$$

于是，上述恒等式转化为

$$P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\Lambda P_E\right)=0,$$

这意味着 $\Lambda\in\overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}$，因此

$$\frac{1}{1-z^2}\Phi^*+\frac{1}{1-z^2}\widetilde{\Phi}^*=\Lambda+\Psi.$$

这便得到了我们所需的条件：

$$\Phi^*+\widetilde{\Phi}^*\in(1-z^2)(H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})+\overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}).$$

反过来，假设 $\Phi\in(1-\bar{z}^2)L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 且

$$\Phi^*+\widetilde{\Phi}^*\in(1-z^2)(H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})+\overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}).$$

存在 $\Theta\in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$、$\Psi\in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$ 和 $\Upsilon\in zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}\overline{(\mathbb{D})}$，使得

$$\Phi=(1-\bar{z}^2)\Theta,$$

and

$$\Phi^*+\widetilde{\Phi}^*=(1-z^2)(\Psi+\Upsilon).$$

定义

$$\Omega = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2 - 1}\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}).$$

注意， $\Theta + \Omega = \Phi$。令

$$A = T_\Theta + H_\Omega.$$

再次利用 Hankel 算子 $H_\Omega S_E = S_E^* H_\Omega$ 的性质，我们得到

$$\begin{aligned} AS_E - S_E^* A &= (T_\Theta + H_\Omega)S_E - S_E^*(T_\Theta + H_\Omega) \\ &= T_\Theta S_E - S_E^* T_\Theta \\ &= T_{(z-\bar{z})\Theta} \\ &= T_{z\Phi} = T_\Phi S_E. \end{aligned}$$

此外，

$$AP_E = (T_\Theta + H_\Omega)P_E = P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left((\Theta + \Omega)P_E\right) = P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\Phi P_E\right) = T_\Phi P_E,$$

也就是说， $AP_E = T_\Phi P_E$。最后，由于

$$\begin{aligned} A^* P_E &= (T_\Theta + H_\Omega)^* P_E \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left((\Theta^* + \widetilde{\Omega}^*)P_E\right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\frac{1}{1-z^2}(\Phi^* + \widetilde{\Phi}^*)P_E\right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left((\Psi + \Upsilon)P_E\right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\Psi P_E \\ &= \Psi P_E, \end{aligned}$$

根据定理 2.2，我们得出 $M^{S_E}_{S_E^*}(T_\Phi)$ 与一个压缩算子相似。因此，证明完毕。□

在后面的某一节中，我们将看到这一结果的 $E = \mathbb{C}$ 情形的一个应用 .

4. Hankel operators

本节将刻画使 Foguel 型算子$M^{S_E}_{S_E^*}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似的符号 Φ。当然，我们的目标是验证定理 2.2 的适用性，就像上一节对 Toeplitz 算子所做的那样。我们需要微分算子的概念。

对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $e \in E$，定义

$$D_E(z^n e) = \begin{cases} nz^{n-1}e & \text{if } n \geq 1 \\ 0 & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

空间上取值于 E 的多项式的微分算子 D_E ，将D_E 在取值于 E 的单项式上的作用扩展了。因此，对所有的 $\mathbf{p} = \sum_{n=0}^M z^n e_n \in H^2_E(\mathbb{D})$，我们有

$$D_E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}',$$

其中 $\mathbf{p}' = \sum_{n=1}^M nz^{n-1}e_n$。需要明确的是，对于 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$，其中 A 最初定义在多项式上，我们所指的是， A 可以唯一延拓为一个有界

线性算子，作用于整个空间$H^2_E(\mathbb{D})$。完成这些准备工作后，我们现在可以对与压缩算子相似的 Foguel 型算子 $M^{S_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$ 进行刻画：

定理 4.1. 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。那么 $M^{S_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$ 与某个压缩算子相似，当且仅当

$$H_\Phi D_E \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D})),$$

并且存在 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$ 使得

$$(H_\Phi D_E S_E)^* P_E = \Psi P_E.$$

证明。 假设 $M^{S_E}_{S^*_E}(H_\Phi)$ 与某个压缩算子相似。由定理 2.2，存在 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 和 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$H_\Phi S_E = AS_E - S^*_E A,$$

其中 $AP_E = H_\Phi P_E$ 且 $A^* P_E = \Psi P_E$。由于 $D_E S_E P_E = P_E$，可得

$$AP_E = H_\Phi P_E = H_\Phi D_E S_E P_E.$$

To 运用数学归纳法，固定一个自然数 m 并假设 t

$$A(z^m e) = H_\Phi D_E S_E (z^m e),$$

对所有 $e \in E$。固定 $e \in E$。再次由条件 $H_\Phi S_E = AS_E - S^*_E A$ 可得

$$\begin{aligned} H_\Phi(z^{m+1}e) &= H_\Phi S_E(z^m e) \\ &= (AS_E - S^*_E A)(z^m e) \\ &= A(z^{m+1}e) - S^*_E A(z^m e) \\ &= A(z^{m+1}e) - S^*_E H_\Phi D_E S_E(z^m e), \end{aligned}$$

因为 $A(z^m e) = H_\Phi D_E S_E(z^m e)$。利用 Hankel 算子的性质，即 $H_\Phi S_E = S^*_E H_\Phi$，可得

$$H_\Phi(z^{m+1}e) = A(z^{m+1}e) - H_\Phi S_E D_E(z^{m+1}e) = A(z^{m+1}e) - (m+1)H_\Phi(z^{m+1}e),$$

因此

$$A(z^{m+1}e) = (m+2)H_\Phi(z^{m+1}e) = H_\Phi D_E S_E(z^{m+1}e).$$

由数学归纳法，最终可得

$$A(z^n e) = H_\Phi D_E S_E (z^n e),$$

对所有 $n \geq 1$ 和 $e \in E$。因此，

$$A(\mathbf{p}) = H_\Phi D_E S_E(\mathbf{p}),$$

对所有 E值多项式 $\mathbf{p} \in H^2_E(\mathbb{D})$。由于 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$，从 E值多项式空间到 $H^2_E(\mathbb{D})$ 的线性算子$H_\Phi D_E S_E$ 是有界的。回顾一下，这些多项式构成了 $H^2_E(\mathbb{D})$ 的稠密子空间，因此 $H_\Phi D_E S_E$ 存在唯一的有界线性延拓，使其成为 $\mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 中的一个元素，我们仍将其称为

$$H_\Phi D_E S_E.$$

换句话说，

$$A = H_\Phi D_E S_E,$$

在所有的 $H^2_E(\mathbb{D})$ 上，因此，条件 $A^*P_E = \Psi P_E$ 得出

$$(H_\Phi D_E S_E)^* P_E = \Psi P_E.$$

现在我们需要证明，最初定义在 E 值多项式上的 $H_\Phi D_E$，也可以唯一地延拓为 $\mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 中的一个元素。为此，对于一个 E 值多项式$\mathbf{p} \in H^2_E(\mathbb{D})$，我们计算

$$(H_\Phi D_E S_E) S_E^*(\mathbf{p}) = H_\Phi D_E S_E S_E^*(\mathbf{p}) = H_\Phi D_E (I - P_E)(\mathbf{p}) = H_\Phi D_E(\mathbf{p}).$$

由于 $H_\Phi D_E S_E$ 和 S_E^* 在 $H^2_E(\mathbb{D})$ 上都有界，因此 $H_\Phi D_E$ 可延拓为 $H^2_E(\mathbb{D})$ 上的有界线性算子。

反过来，假设 $H_\Phi D_E \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$，且存在函数 $\Psi \in H^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})$，使得

$$(H_\Phi D_E S_E)^* P_E = \Psi P_E.$$

于是我们定义

$$A := H_\Phi D_E S_E \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D})).$$

显然,

$$A^* P_E = (H_\Phi D_E S_E)^* P_E = \Psi P_E.$$

另一方面，由于对所有 $e \in E$ 都有 $D_E S_E e = e$ ，因此可得

$$A P_E = H_\Phi D_E S_E P_E = H_\Phi P_E.$$

最后，对于一个取值于 E 的多项式 $\mathbf{p} \in H^2_E(\mathbb{D})$，我们计算得

$$\begin{aligned} A S_E(\mathbf{p}) - S_E^* A(\mathbf{p}) &= (H_\Phi D_E S_E)(z\mathbf{p}) - S_E^*(H_\Phi D_E S_E)(\mathbf{p}) \\ &= H_\Phi(2z\mathbf{p} + z^2\mathbf{p}') - S_E^* H_\Phi(\mathbf{p} + z\mathbf{p}') \\ &= H_\Phi(2z\mathbf{p} + z^2\mathbf{p}') - H_\Phi S_E(\mathbf{p} + z\mathbf{p}') \\ &= H_\Phi(z\mathbf{p}) \\ &= H_\Phi S_E(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

利用 A 的有界性以及取值于 E 的多项式在 $H^2_E(\mathbb{D})$ 中的稠密性，我们得出

$$A S_E(f) - S_E^* A(f) = H_\Phi S_E(f)$$

对所有 $f \in H^2_E(\mathbb{D})$ 都成立。根据定理 2.2，我们现在得出 $M^{S_E}_{S_E^*}(H_\Phi)$ 与一个压缩算子相似。证明完毕。□

我们将在后文以定理 6.1 的形式讨论上述结果的 $E = \mathbb{C}$ 情形，以及它的一些应用。

我们还要指出，在 [7] 中，形如 $M^{S_E^*}_{S_E}(X)$ 的算子的相似性问题背景下也出现过微分算子。

5. Toeplitz and Hankel operators

在前两节中，我们已经回答了 $M_{S_E^*}^{S_E}(X)$ 的相似性问题，其中 X 是 Toeplitz 算子或 Hankel 算子。在本节中，当

$$Y = Z = S_E,$$

or

$$Y = Z = S_E^*,$$

且 X 是 Toeplitz 算子或 Hankel 算子。我们还将完整分析剩余的情形 $M_{S_E}^{S_E^*}(X)$，其中 X 是 Toeplitz 算子。

我们首先指出一个关于前四类算子的约化结果。根据 Foiaş-Williams 判据 (1.2)，可得以下事实：

$$M_{S_E}^{S_E}(X) = \begin{bmatrix} S_E & X \\ 0 & S_E \end{bmatrix} : H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D}) \to H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D})$$

与压缩算子相似，当且仅当存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 使得

$$S_E A - A S_E = X. \tag{5.1}$$

同样，

$$M_{S_E^*}^{S_E^*}(X) = \begin{bmatrix} S_E^* & X \\ 0 & S_E^* \end{bmatrix} : H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D}) \to H_E^2(\mathbb{D}) \oplus H_E^2(\mathbb{D})$$

当且仅当存在 $A' \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$ 使得其与一个压缩算子相似

$$S_E^* A' - A' S_E^* = X. \tag{5.2}$$

显然， A' 满足（5.2）当且仅当 $A = -A'^*$ 满足（5.1），其中将 X 替换为 X^*。因此，$M_{S_E^*}^{S_E^*}(X)$ 与压缩算子相似当且仅当 $M_{S_E}^{S_E}(X^*)$ 与压缩算子相似。现在，考察我们的选择 $X = T_\Phi$ 和 H_Φ，我们注意到， T_Φ^* 和 H_Φ^* 再次分别是 Toeplitz 算子和 Hankel 算子。

因此，只需关注算子 $M_{S_E}^{S_E}(X)$，其中 X 是 Toeplitz 算子或 Hankel 算子。下面我们证明，第一类算子是平凡的。

定理 5.1。 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。则 $M_{S_E}^{S_E}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi = 0.$$

证明。 若 $\Phi = 0$，则 $M_{S_E}^{S_E}(T_\Phi)$ 本身就是一个压缩算子。现在假设 $M_{S_E}^{S_E}(T_\Phi)$ 与某个压缩算子相似。由 (5.1) 可知，存在 $A \in \mathcal{B}(H_E^2(\mathbb{D}))$，使得

$$S_E A - A S_E = T_\Phi.$$

在等式两边左乘S_E^*，得到

$$A - S_E^* A S_E = T_{\bar{z}\Phi}.$$

根据 Toeplitz 算子的性质，我们知道

$$S_E^{*\,n-1} T_{\bar{z}\Phi} S_E^{n-1} = T_{\bar{z}\Phi},$$

进而得到

$$\begin{aligned} {S_E^*}^{n-1} A S_E^{n-1} - {S_E^*}^n A S_E^n &= {S_E^*}^{n-1}(A - S_E^* A S_E) S_E^{n-1} \\ &= {S_E^*}^{n-1} T_{\bar{z}\Phi} S_E^{n-1} \\ &= T_{\bar{z}\Phi}, \end{aligned}$$

对所有 $n \geq 1$。固定 $n \geq 1$ 并写作

$$A - {S_E^*}^n A S_E^n = \sum_{k=1}^{n} \left({S_E^*}^{k-1} A S_E^{k-1} - {S_E^*}^k A S_E^k \right).$$

现在可得

$$A - {S_E^*}^n A S_E^n = n T_{\bar{z}\Phi},$$

因此

$$n\|\Phi\|_\infty = n\|T_{\bar{z}\Phi}\| = \|A - {S_E^*}^n A S_E^n\| \leq 2\|A\|,$$

对所有 $n \geq 1$。因此，$\Phi = 0$。 □

根据上述结果以及本节开头的观察，我们有如下结论：设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。那么 $M_{S_E^*}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi = 0.$$

在继续之前，我们需要建立一些关于 Toeplitz 算子与 Hankel 算子的基本恒等式。为求完整起见，我们倾向于给出这些恒等式的完整证明，尽管它们在标量情形中广为人知，在一般的向量值情形中也可能为专家所熟悉。回想一下，对于每个 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，我们定义 $\widetilde{\Phi} \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 为

$$\widetilde{\Phi}(z) = \Phi(\bar{z}).$$

引理 5.2。设 $\Phi, \Psi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。以下两个恒等式成立：

(1) $T_{\Phi\Psi} - T_\Phi T_\Psi = H_{\bar{z}\Phi} H_{\bar{z}\widetilde{\Psi}}$。

(2) $H_{\bar{z}\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}} = H_{\bar{z}\widetilde{\Phi}} T_\Psi + T_{\widetilde{\Phi}} H_{\bar{z}\widetilde{\Psi}}$.

证明。我们先指出

$$J P_{H^2_E(\mathbb{D})} J = M_z (I - P_{H^2_E(\mathbb{D})}) M_{\bar{z}},$$

在 $L^2_E(\mathbb{T})$ 的标准正交基上很容易验证这一点，因此它对 $L^2_E(\mathbb{T})$ 中的任意元素都成立。利用这一点，对于任意 $f \in H^2_E(\mathbb{D})$，有：

$$\begin{aligned} T_{\Phi\Psi}(f) - T_\Phi T_\Psi(f) &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Phi\Psi f) - P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Phi P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Psi f)) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})} \left(\Phi (I - P_{H^2_E(\mathbb{D})}) \Psi f \right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})} \left(\Phi M_{\bar{z}} J P_{H^2_E(\mathbb{D})} J M_z \Psi f \right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})} \left(\bar{z}\Phi J P_{H^2_E(\mathbb{D})} \left(\bar{z}\Psi(\bar{z}) J f \right) \right) \\ &= P_{H^2_E(\mathbb{D})} \left(\bar{z}\Phi J H_{\bar{z}\Psi(\bar{z})}(f) \right) \\ &= H_{\bar{z}\Phi} H_{\bar{z}\widetilde{\Psi}}(f). \end{aligned}$$

这就证明了第一个恒等式。对于第二个恒等式，我们对每个 $f \in H^2_E(\mathbb{D})$ 计算：

$$\begin{aligned}
H_{\bar{z}\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}}(f) - H_{\bar{z}\widetilde{\Phi}}T_{\Psi}(f) &= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}Jf\right) - P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}JP_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Psi f)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}J(\Psi f)\right) - P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}JP_{H^2_E(\mathbb{D})}(\Psi f)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}J(I - P_{H^2_E(\mathbb{D})})(\Psi f)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}JM_{\bar{z}}JP_{H^2_E(\mathbb{D})}JM_z(\Psi f)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\bar{z}\widetilde{\Phi}M_zJ^2P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\bar{z}\widetilde{\Psi}Jf)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\widetilde{\Phi}P_{H^2_E(\mathbb{D})}(\bar{z}\widetilde{\Psi}Jf)\right) \\
&= P_{H^2_E(\mathbb{D})}\left(\widetilde{\Phi}H_{\bar{z}\widetilde{\Psi}}(f)\right) \\
&= T_{\widetilde{\Phi}}H_{\bar{z}\widetilde{\Psi}}(f).
\end{aligned}$$

这就完成了该引理的证明。 □

有了上述信息，我们继续求解 $M^{S_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 的相似于压缩算子问题。

定理 5.3. 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。则 $M^{S_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi \in (z-\bar{z})L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

证明。 设 $M^{S_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似。根据 (5.1)，存在 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 使得

$$S_EA - AS_E = H_\Phi, \tag{5.3}$$

因此

$$A - S_E^*AS_E = S_E^*H_\Phi = H_{\bar{z}\Phi}.$$

根据定理 3.1，我们知道 A 是一个 Toeplitz +Hankel 算子，也就是说，存在符号 Θ, $\Omega \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，使得

$$A = T_\Theta + H_\Omega.$$

将 A 的这个值代入 $A - S_E^*AS_E = H_{\bar{z}\Phi}$，得到

$$H_\Omega - S_E^*H_\Omega S_E = H_{\bar{z}\Phi}.$$

将 Hankel 性质 $S_E^*H_\Omega = H_\Omega S_E$ 应用于上式，得到

$$H_{(1-\bar{z}^2)\Omega} = H_{\bar{z}\Phi},$$

这意味着

$$(1-\bar{z}^2)\Omega = \bar{z}\Phi + \widehat{\Psi},$$

对于某个

$$\widehat{\Psi} = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{z}^n\Psi_{n-1} \in \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

由此可得

$$(z-\bar{z})\Omega = \Phi + z\widehat{\Psi},$$

可改写为

$$(z-\bar{z})\Omega = \Phi + (z-\bar{z})\widehat{\Psi} + \bar{z}\widehat{\Psi}.$$

因此,

$$\Phi = (z-\bar{z})(\Omega - \widehat{\Psi}) - \bar{z}\widehat{\Psi} \in (z-\bar{z})L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

反过来，设 $\Phi \in (z-\bar{z})L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}$。换言之，存在 $\Omega \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$ 和 $\Psi \in \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}$，使得

$$\Phi = (z-\bar{z})\Omega + \Psi.$$

Set

$$\Theta(z) = -\bar{z}^2\widetilde{\Omega}.$$

显然，$\Theta \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。由引理 5.2，得

$$T_{z\Theta} - T_z T_\Theta = H_{I_E} H_{\bar{z}\widetilde{\Theta}},$$

and

$$T_z H_\Omega = H_{z\Omega} - H_{I_E} T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}.$$

这里，I_E 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中的恒等算子。利用上述信息以及 $H_{I_E} = P_E$ 这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned} S_E(T_\Theta + H_\Omega) - (T_\Theta + H_\Omega)S_E &= (T_z T_\Theta - T_{z\Theta}) + (T_z H_\Omega - H_\Omega T_z) \\ &= -H_{I_E} H_{\bar{z}\widetilde{\Theta}} + H_{z\Omega} - H_{I_E} T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}} - H_{\bar{z}\Omega} \\ &= -H_{I_E} H_{\bar{z}\widetilde{\Theta}} + H_{(z-\bar{z})\Omega} - H_{I_E} T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}} \\ &= P_E H_{z\Omega} + H_\Phi - P_E T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}, \end{aligned}$$

也就是说,

$$S_E(T_\Theta + H_\Omega) - (T_\Theta + H_\Omega)S_E = H_\Phi + \left(P_E H_{z\Omega} - P_E T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}\right). \tag{5.4}$$

对于每个 $e \in E$，现在有

$$H^*_{z\Omega}(e) = H_{z\widetilde{\Omega}^*}(e) = P_{H^2_E(\mathbb{D})}(z\widetilde{\Omega}^* e),$$

并且还有

$$T^*_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}(e) = T_{z\Omega(\bar{z})^*}(e) = P_{H^2_E(\mathbb{D})}(z\widetilde{\Omega}^* e).$$

因此，我们有 $H^*_{z\Omega}P_E = T^*_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}P_E$，或者等价地,

$$P_E H_{z\Omega} = P_E T_{\bar{z}\widetilde{\Omega}}.$$

因此，由 (5.4) 可得:

$$S_E(T_\Theta + H_\Omega) - (T_\Theta + H_\Omega)S_E = H_\Phi,$$

也就是说，$A = T_\Theta + H_\Omega \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 是算子方程 (5.3) 的一个解。根据 Foiaş-Williams 判据（再次参见 (5.1)），我们得出结论：$M^{S_E}_{S_E}(H_\Phi)$ 与一个压缩算子相似。证明至此完成。□

鉴于 (5.2) 后的讨论以及定理 5.3，我们注意到， $M_{S_E^*}^{S_E^*}(H_\Phi)$ 与一个压缩算子相似，当且仅当

$$\widetilde{\Phi}^* \in (z-\bar{z})L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})},$$

或者，等价地

$$\Phi \in (z-\bar{z})L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}) + \overline{zH^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{D})}.$$

换句话说，$M_{S_E}^{S_E}(H_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当 $M_{S_E^*}^{S_E^*}(H_\Phi)$ 也与压缩算子相似。

我们通过讨论相似性问题的剩余情形来结束本节，即 $M_{S_E}^{S_E^*}(X)$ 与压缩算子的相似性，其中 X 是一个 Toeplitz 算子。请注意，在这种情况下，Foia̧s-Williams 判据（见 (1.2)）中 $M_{S_E}^{S_E^*}(X)$ 与压缩算子相似这一条件，等价于存在一个算子 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$，使得

$$S_E^* A - A S_E = X.$$

这里我们再次使用 Toeplitz-Hankel 算子的刻画，正如之前在若干处所做的那样。

定理 5.4。 设 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$。那么 $M_{S_E}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\Phi \in (\bar{z}-z)L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}).$$

证明。 在 $X = T_\Phi$ 的情况下，如上所述，Foia̧s-Williams 判据指出， $M_{S_E}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与一个压缩算子相似，当且仅当存在 $A \in \mathcal{B}(H^2_E(\mathbb{D}))$ 使得

$$S_E^* A - A S_E = T_\Phi.$$

现在，假设 $M_{S_E}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与一个压缩算子相似。定理 3.1 中给出的 Toeplitz+Hankel 算子的刻画由此保证存在符号Θ 和 Ω，属于 $L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，使得

$$A = T_\Theta + H_\Omega.$$

由于 $S_E^* H_\Omega = H_\Omega S_E$，可得

$$T_\Phi = S_E^*(T_\Theta + H_\Omega) - (T_\Theta + H_\Omega)S_E = T_{(\bar{z}-z)\Theta},$$

由此得到

$$\Phi = (\bar{z}-z)\Theta \in (\bar{z}-z)L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T}).$$

反过来，假设存在一个符号 $\Theta \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，使得 $\Phi = (\bar{z}-z)\Theta$。那么很容易看出

$$S_E^* T_\Theta - T_\Theta S_E = T_\Phi.$$

同样，如上所述，Foia̧s-Williams 判据保证 $M_{S_E}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与一个压缩算子相似，从而完成本定理的证明。□

我们指出，作为一般定理的推论， [4, 第 5 节中1] 已观察到，形如 $M_{S_E}^{S_E}(X)$ 的算子相似于一个压缩算子，当且仅当它相似于一个等距算子。

6. Examples

在本节最后一节中，我们通过一些具体例子，重点考察标量情形，来展示迄今为止得到的结果。我们还给出一些一般性评论。当 $E = \mathbb{C}$ 时，我们将省略 Hardy 空间、有界解析函数及相关对象记号中的下标。例如，我们将简单地写作

$$H^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D}),$$

并且

$$S_{\mathbb{C}} = S.$$

我们先给出定理 3.2 的一个简单应用。取一个函数 $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$，并令

$$\varphi(z) = (1 - \overline{z}^2)\theta(\overline{z}),$$

对于 $z \in \mathbb{T}$-几乎处处成立。显然，$\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$。容易看出

$$\varphi \in (1 - \overline{z}^2)L^\infty(\mathbb{T}).$$

对于 $z \in \mathbb{T}$-几乎处处，我们还计算得

$$\begin{aligned}(\varphi^* + \widetilde{\varphi}^*)(z) &= (1 - z^2)\overline{\theta(\overline{z})} + (1 - \overline{z}^2)\overline{\theta(z)} \\ &= (1 - z^2)\left(\overline{\theta(\overline{z})} - \overline{z}^2\overline{\theta(z)}\right),\end{aligned}$$

这意味着

$$\varphi^* + \widetilde{\varphi}^* \in (1 - z^2)\left(H^\infty(\mathbb{D}) + \overline{zH^\infty(\mathbb{D})}\right).$$

由定理 3.2 可知，$M^S_{S^*}(T_\varphi)$ 与一个压缩算子相似。

6.1. BMOA 函数。 现在我们将重点讨论 Hankel 算子 $H_\varphi \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$、$\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$。为此，我们先介绍 BMOA 函数（参见 [20]）。用 m 表示 $\mathbb{T}$ 上的归一化 Lebesgue 测度。设 I 是 $\mathbb{T}$ 的一个子弧，f 是定义在 $\mathbb{T}$ 上的绝对可积函数。定义

$$f_I = \frac{1}{m(I)}\int_I f\, dm.$$

若 f 满足

$$\sup_I \frac{1}{m(I)}\int_I |f - f_I|\, dm < \infty.$$

这类函数构成的空间称为 BMO。我们感兴趣的 BMO 解析子空间为

$$BMOA = BMO \cap H^2(\mathbb{D}),$$

其元素称为有界平均振荡解析函数。众所周知，

$$BMOA = \{P_{H^2(\mathbb{D})}(\varphi) : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\}.$$

现在取 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$，并定义

$$f := P_{H^2(\mathbb{D})}(\varphi).$$

根据 [7], 的定理 4.4、推论 4.5 和 4.7，可以立即看出，f' 属于 BMOA 等价于

$$H_\varphi D \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D})).$$

现在考虑 f 在 $\mathbb{T}$ 上的傅里叶展开:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n z^n.$$

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们计算

$$\begin{aligned}\left\langle (H_\varphi DS)^*(1), z^k \right\rangle &= \left\langle 1, (H_\varphi DS)(z^k) \right\rangle \\ &= \left\langle 1, (k+1)\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k} \right\rangle \\ &= (k+1)a_k.\end{aligned}$$

这意味着

$$(H_\varphi DS)^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n z^n = (zf)'.$$

鉴于上述讨论，我们立即看到，定理 4.1 对于 $E = \mathbb{C}$ 可表示为以下形式:

定理 6.1。 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$。那么 $M_{S^*}^S(H_\varphi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\left(P_{H^2(\mathbb{D})}(\varphi)\right)' \in BMOA,$$

and

$$\left(zP_{H^2(\mathbb{D})}(\varphi)\right)' \in H^\infty(\mathbb{D}).$$

特别地，我们可以选择 φ 为复多项式，或者，对于每个 $|\alpha| > 1$，我们可以将 φ 选择为

$$\varphi(z) = \frac{1}{\alpha - z},$$

对所有 $z \in \mathbb{T}$。对于这样的符号选择 φ，由定理 6.1 可得$M_{S^*}^S(H_\varphi)$ 与一个压缩算子相似。

6.2. **希尔伯特-Hankel 矩阵**。考虑希尔伯特-Hankel 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots \end{bmatrix}.$$

这是定义在 $l^2(\mathbb{Z}_+)$ 上的线性算子，其有界性由希尔伯特证明。这个经典矩阵表示与符号 $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ 对应的 Hankel 算子，其定义如下:

$$\psi(e^{it}) = ie^{-it}(\pi - t),$$

对所有 $t \in [0, 2\pi)$ 。更具体地说，我们观察到

$$P_{H^2(\mathbb{D})}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} \in \mathrm{BMOA}.$$

然而，

$$\big(P_{H^2(\mathbb{D})}(\psi)\big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} z^{n-1} \notin H^2(\mathbb{D}),$$

作为定理 6.1 的推论，我们得到以下结果：

推论 6.2。$M_{S^*}^{S}(H_\psi)$ 不与压缩算子相似。

对于算子 $M_S^{S^*}(H_\psi)$，同样的结论也成立，因为由 [1, 定理 4.1 和 4.2] 可知，算子 $M_S^{S^*}(H_\psi)$ 与压缩算子相似，当且仅当

$$\big(P_{H^2(\mathbb{D})}(\psi)\big)' \in \mathrm{BMOA}.$$

然而，在当前情形下，我们已经看到

$$\big(P_{H^2(\mathbb{D})}(\psi)\big)' \notin \mathrm{BMOA}.$$

6.3. **一般性说明**。在希尔伯特函数空间理论中，研究 Foguel 型算子的相似性问题是一个自然且重要的问题。此外，我们指出，Paulsen 将“与压缩算子相似”问题与完全多项式有界性的概念联系起来 [17]，凸显了刻画与压缩算子相似的算子所固有的困难。事实上，完全多项式有界性要求在所有矩阵层级上进行验证，因为它涉及任意大小的算子值多项式矩阵的压缩性。从这些角度来看，我们认为，本文所报告的结果都具有具体性，也将对不同目的的研究具有参考价值。

我们以一个关于定理 5.3 和 5.4 的有趣观察来结束本文：给定 $\Phi \in L^\infty_{\mathcal{B}(E)}(\mathbb{T})$，如果 $M_{S_E}^{S_E^*}(T_\Phi)$ 与某个压缩算子相似，那么 $M_{S_E}^{S_E}(H_\Phi)$ 也如此。

致谢： 第一作者获得由印度 Anusandhan 国家研究基金会提供的国家博士后奖学金（N-PDF）资助（档案编号：PDF/2025/000089）。第二作者的研究获得由印度国家高等数学委员会（NBHM）提供的博士后奖学金资助（批文编号：0204/16(8)/2024/R&D-II/6760，日期：2024 年 5 月 9 日）。第三作者的研究部分获得印度政府科学技术部（DST）旗下 ANRF 的资助（档案编号：ANRF/ARGM/2025/000130/MTR）。

References

[1] A. B. Aleksandrov 和 V. V. Peller，*Hankel* 算子与压缩算子相似，《国际数学研究通知》6（1996），263–275。[2] J. Bourgain，关于多项式有界算子的相似性问题，《以色列数学杂志》54（1986），227–241。[3] J. F. Carlson、D. N. Clark、C. Foiaş 和 J. P. Williams，投影 *Hilbert* $A(\mathbb{D})$-模，《纽约数学杂志》1（1994），26–38。[4] G. Cassier，广义 *Toeplitz* 算子、不变子空间上的限制与相似性问 题，《算子理论杂志》53（2005），49—89。[5] G. Cassier 和 D. Timotin，等距算子的一些扰动的幂有界性及其与压缩算子的相似性，《数学分析及其应用杂志》293（2004），160–180。[6] N. Das、S. Das 和 J.Sarkar，成对的 *Toeplitz* + *Hankel* 算子，可见 arXiv:2404.05435。即将在《以色列数学杂志》发表。[7] K. R. Davidson 和 V. I. Paulsen，多项式有界算子，《纯粹与应用数学杂志》487（1997），153–170。

[8] K. R. Davidson，多项式有界算子：综述，《北约高级科学研究所系列 C：数学与物理科学》，495，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1997，145–162。[9] P. Deift、A. Its 和 I. Krasovsky，具有 Fisher-Hartwig 奇点的 Toeplitz、Hankel 及 Toeplitz+Hankel 行列式的渐近性质，《数学年刊》（第 2 辑）174（2011），1243–1299。[10] T. Ehrhardt、R. Hagger 和 J. Virtanen，有界且紧的 Toeplitz + Hankel 矩阵，《数学研究》260（2021），103–120。[11] S. R. Foguel，Sz.-Nagy 问题的一个反例，《美国数学会会刊》15（1964），788–790。[12] C. Foia¸s 和 J. Williams，关于一类多项式有界算子，约 1980 年预印本，未发表。[13] P. R. Halmos，关于 Foguel 对 Nagy 问题的回答，《美国数学会会刊》 15 （ 1964 ），791–793。[14] P. R. Halmos，Hilbert 空间中的十个问题，《美国数学会通报》76（1970），887-933。[15] B. Sz.-Nagy，具有一致有界迭代的完全连续算子，《匈牙利科学院数学研究所公报》4（1959），89–93。[16] B. Sz.-Nagy，关于 Hilbert空间中的一致有界线性变换，《塞格德大学学报：数学科学辑》11（1947），152–157。[17] V. I. Paulsen，每个完全多项式有界算子都与压缩算子相似，《泛函分析杂志》55（1984），第 1 期，1–17。[18] V. I. Paulsen，算子空间的相对 Yoneda 上同调，《泛函分析杂志》157（1998），358–393。[19] V. V. Peller，Hilbert空间中幂有界算子的函数估计，《算子理论杂志》7（1982），341–372。[20] V. V. Peller，Hankel 算子及其应用，Springer 数学专著，Springer-Verlag，纽约，（2003）。[21] G. Pisier，Hilbert空间上的一个多项式有界算子，它不与压缩算子相似，《美国数学会杂志》10（1997），第 2 期，351–369。[22] G. Pisier，Halmos 相似问题，《算子理论进展与应用》207，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2010，325–339。[23] H. Radjavi、P. Rosenthal，不变子空间，多佛出版社，米尼奥拉，纽约州，2003，xii+248页。[24] J. von Neumann，关于单位 ¨ary 空间的一般算子的谱理论，《数学通讯》4（1951），48–131。

Indian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560059, India电子邮箱：nilanjand7@gmail.comIndian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road,Bangalore, 560059, India电子邮箱：dsoma994@gmail.com
Indian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road, Bangalore, 560059, India电子邮箱：jay@isibang.ac.in, jaydeb@gmail.com