将有效图电阻视为累积热耗散

Xiangrong Wang，[1,*] Xin Yu，[1] Zongze Wu，[1] 和 Yamir Moreno[2,3,†]

[1]机电与控制工程学院，
深圳大学，深圳，*518060*，中国

[2]生物计算与复杂系统物理研究所，
萨拉戈萨大学，西班牙萨拉戈萨，*50018*

[3]萨拉戈萨大学理论物理系，萨拉戈萨，*50009*，西班牙（日期：2026年1月5日）

arXiv:2601.00330v1 [physics.soc-ph] 1 Jan 2026

有效图电阻是网络科学中的一项基础结构指标，广泛用于量化全局连通性、比较网络架构，以及评估基于流的系统的鲁棒性。尽管它十分重要，现有公式仍主要依赖谱表示或拉普拉斯矩阵伪逆表示，因而难以揭示结构特征如何影响这一指标，也难以说明如何高效地对其进行优化。在此，我们确立了有效图电阻与拉普拉斯扩散动力学产生的累积热耗散之间精确且具有清晰物理意义的关系。我们证明，弛豫至平衡态过程中耗散的总热量恰好等于有效图电阻。这一动力学视角揭示了拉普拉斯谱的一种自然多尺度分解：早期热耗散由基于度的局部结构决定，中间阶段可分离出低于谱均值的特征值，而长时间尺度上的行为则由代数连通度主导。这些多尺度性质为调整网络结构和构建优化系综提供了连续且易于解释的策略，使得原本通过组合方法难以实现的NP难优化成为可能。我们的研究统一了网络连通性的结构与动力学视角，并为跨领域分析、比较和优化复杂网络提供了新工具。

* xiangrongwang88@gmail.com

† yamir.moreno@gmail.com

I 引言

有效图电阻源于电网络中的经典概念——有效电阻，如今已成为复杂系统中广泛使用的结构指标。由于它考虑了节点对之间所有可达路径（而不仅仅是最短路径），因此能够有效衡量任意两个节点之间的有效距离，并反映图的整体连通性。因此，有效图电阻已应用于多种场景，包括比较不同网络的结构 [1–3],实施网络稀疏化 [4–6], 促进网络搜索 [7, 8]以及优化易发生级联故障的拓扑结构 [9, 10]。事实证明，在评估基于流的系统的鲁棒性时，它尤其有力；在这类系统中，流动会沿多条并行路径自然传播，例如电力网、交通网络和在线社交网络 [11–13]。相关应用包括提升电力、供水和燃气基础设施、地铁系统及通信网络的韧性 [14–16], ；若不恰当地考虑多路径，对这些系统进行优化通常会导致布雷斯悖论现象 [8, 17–19]。

有效图电阻不仅是一种纯粹的结构描述量，还通过往返时间与网络上的随机游走过程密切相关，后者即 Kemeny 常数 [20, 21]。该常数衡量按照平稳分布选取的两个节点之间的期望距离，值得注意的是，它与游走的初始节点无关。大量研究致力于解释这种不变性的起源 [22–24]。近来，有效图电阻作为连接结构与动力学的桥梁，已显示出强大的应用能力：可用于根据结构构建脑功能连接 [25], 、评估同步脆弱性 [13], 、预测大流行病 [26], 、理解群体中集体智慧的涌现 [27] ，以及基于剪枝压缩神经网络 [28, 29], 。这些应用表明，有效图电阻在理解复杂网络化系统中的协调行为方面具有更广泛的潜力。

尽管应用广泛，现有的有效图电阻公式仍依赖于图拉普拉斯矩阵的伪逆，或拉普拉斯特征值倒数之和 [1,30]。这些谱表达式在数学上十分优雅，却难以揭示不同尺度的结构特征如何影响有效图电阻，也难以说明这一量会如何响应对网络拓扑的可控修改。因此，要通过连续调整网络连边来优化有效图

电阻 [4, 8, 9], ，即通过局部调整实现全局改善在计算上十分困难。更普遍地说，人们对网络结构及其所塑造的扩散动力学之间的关系仍缺乏充分理解。

本文通过建立有效图电阻这一结构量与拉普拉斯扩散动力学所产生的累积热耗散 之间的精确对应关系，提出了理解有效图电阻的一种全新动力学视角。具体而言，我们证明，有效图电阻等于系统弛豫至稳态过程中耗散的热量总和；等价地说，它等于扩散算子迹减去平稳模态后曲线下的面积。在微观层级，初始激活节点所耗散的累积热量，恰由该节点与所有其他节点之间的平均有效电阻决定。这为有效图电阻提供了直观的物理解释，并将两种传统上相互独立的视角统一起来：静态结构指标，以及网络上的动力学扩散过程。需要说明的是，下文为便于阐述，均以热扩散为例。不过，底层的拉普拉斯动力学描述的是网络上任何守恒标量的扩散，例如质量、概率或信息；本文提出的所有结果均普遍适用于线性扩散过程。

至关重要的是，热耗散表述揭示了拉普拉斯谱的不同区域如何共同作用于有效图电阻的多尺度分解。短扩散时间侧重于度等局部结构性质；中等扩散时间凸显低于谱均值的特征值；长扩散时间则主要受代数连通度支配。这些洞见自然而然地为有原则的拓扑修改和网络系综算法提供了依据，使其能够通过动力学而非纯粹组合的原理，近似实现对有效图电阻的连续优化——而这本身是一个 NP 难问题。

II 网络的有效图电阻

有效图电阻是一种广泛使用的图级指标，可用于比较网络结构，并评估或优化既有拓扑结构的鲁棒性。与纯局部指标或基于最短路径的指标不同，它考虑了任意一对节点之间的所有可达路径及其长度，因此尤其适用于流网络，因为其中的传输或相互作用通常会沿多条替代路径自然进行。

为使这一概念形式化，设 $G(N,\ L)$ 是一个具有 N 个节点和 L 条连边的无向连通图。其邻接矩阵 A 是一个 $N \times N$ 对称矩阵，其中的元素 $a_{ij} \in \{0,1\}$ 表示节点 i 和 j 之间是否存在连边。图拉普拉斯矩阵定义为 $L = \Delta - A$，其中 $\Delta = \mathrm{diag}(d_i)$ 是对角度矩阵，$d_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$。该图的平均度为 $E[D] = 2L/N$。由于 G 是无向图，L 是对称半正定矩阵，且其特征值均为实数且非负。特别地，其中一个特征值为零，对应的归一化特征向量为 $u/\sqrt{N}$，其中 u 是全1向量。拉普拉斯特征值按 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ 排序，ϕ_k 表示与特征值 λ_k 对应的特征向量。第二小特征值 λ_2 被称为代数连通度 [?], ，用于反映图的全局连通性。

节点对之间的有效电阻。有效电阻 R_{ij} 衡量在 G 对应的电网络表示中，于节点 i 注入单位电流并从节点 j 提取时所产生的电压降（图1A）。对于具有明确串并联结构的简单电路，可通过枚举所有并联路径来计算有效电阻：

$$\frac{1}{R_{ij}} = \sum_{P_k} \frac{1}{R_{P_k}}, \tag{1}$$

其中，R_{P_k} 是沿路径 P_k的电阻。然而，对于一般的复杂网络，由于交织路径导致组合爆炸，枚举所有路径在计算上不可行。因此，有效电阻通过拉普拉斯矩阵的 Moore–Penrose 伪逆计算：

$$R_{ij} = L^{\dagger}_{ii} + L^{\dagger}_{jj} - 2L^{\dagger}_{ij}. \tag{2}$$

图级有效电阻。对成对电阻进行汇总，可得有效图电阻：

$$R_G = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i} R_{ij}. \tag{3}$$

将公式（2）和（3）与拉普拉斯矩阵的谱性质结合，可得到众所周知的特征值公式：

$$R_G = N \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{\lambda_i}. \tag{4}$$

该表达式以简洁的谱特征描述刻画了 R_G：替代路径更多且更短的网络（即能够支持强扩散或流动过程的网络），其 R_G值更小。图1A展示了这一直观结论：增加并行路径会降低有效电阻。然而，尽管公式（2）–（4）很有用，这些公式对于结构组织与由此产生的有效图电阻之间的机制关系却未能提供太多洞见。具体而言，它们没有揭示结构修改如何影响 R_G，也没有提供将 R_G 与网络上的动力学过程联系起来的物理解释。下文将通过推导有效图电阻与网络上扩散动力学所产生的累积热耗散之间的精确联系，弥补这一不足。

III 有效图电阻作为扩散动力学的累积热耗散

为将有效图电阻与网络上的扩散过程联系起来，我们首先描述拉普拉斯扩散动力学。令 $x(t)$ 表示时间 t 时（图1B）各节点的热浓度向量，其中 $x_i(t)$ 是节点 i 处的热量。给定初始条件 $x_0 = x(t = 0)$，热量沿边流动，流量与浓度差成正比：

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\,(x_i - x_j). \tag{5}$$

对于整个系统，可得：

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Lx(t), \tag{6}$$

其解由扩散算子 e^{-tL}控制，即：

$$x(t) = e^{-tL}x_0. \tag{7}$$

由于 L 是对称且半正定的，系统会收敛至稳态 $x(\infty) = \frac{1}{N}u$，其中 u 是全1向量。

节点累积热耗散。为揭示其与有效电阻之间的微观联系，我们考虑一个示例情形：扩散从单个节点$x_0 = e_i$开始，其中（e_i）$_i = 1$ 且（e_i）$_{k\neq i} = 0$。随着扩散过程持续，热量从节点

i 通过多条路径扩散到其邻居节点及更远处的节点。现在，我们将时间 τ 时节点 i 处的剩余热量定义为扩散算子的对角元素：

$$Z_i(\tau) := (e^{-\tau L})_{ii}. \tag{8}$$

从节点 i到时间 t为止的累积热耗散，是从节点 i传递到网络其余部分的热量总和：

$$H_i(t) = \int_0^t Z_i(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

当系统在时间 t^*达到稳态时，任意节点对之间都不再交换热量。因此，累积热耗散等于剩余热量高于稳态值部分的积分：

$$H_i(t^*) = \int_0^{t^*} (x_i(\tau) - x_i(\infty))\, d\tau = \int_0^{\infty} (Z_i(\tau) - \tfrac{1}{N})\, d\tau,$$

其中，由于 $Z_i(\tau)$ 在 t^*之后呈指数衰减，上限可以替换为 ∞ 。

利用 L 的谱分解以及将有效电阻与特征值对联系起来的恒等式（见方法），可以得到精确关系：

$$\lim_{t\to t^*} H_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} R_{ij} - \frac{R_G}{N^2} = E[R_{i\cdot}] - \frac{E[R_{ij}]}{2}. \tag{10}$$

这里，$E[R_{i\cdot}]$ 是从节点 i 到所有其他节点的平均有效电阻，而 $E[R_{ij}] = 2R_G/(N(N-1))$ 是全网络平均值。公式（10）提供了一个具有物理意义且透明的解释：节点 i 在扩散过程中耗散的总热量，编码了其相对于网络的平均有效电阻。需要特别强调的是，$H_i(t)$ 并不简单等于 $x_i(0) - x_i(t)$：热量在任何时刻都是守恒的（$x(t)^\top u = 1$），并且热量可能暂时从邻居节点流回。累积积分捕捉了来自节点 i的所有传递，而不仅仅是净损失，从而揭示了扩散路径的多步传播结构。

图级累积热耗散。对所有节点求和式（9），可得总累积热耗散：

$$H(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{N} (e^{-\tau L})_{ii}\, d\tau. \tag{11}$$

将图级剩余热量记为：

$$Z(\tau) := \sum_{i=1}^{N} (e^{-\tau L})_{ii} = \sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i \tau}, \tag{12}$$

其中，第二个等式由 L 的谱分解得出，即 $H(t) = \int_0^t Z(\tau)\, d\tau$。当 $t \to t^*$ 时，取 $H(t)$ 的极限，便得到我们的主要理论结果：当扩散达到稳态时，累积热耗散等于按网络规模缩放后的有效图电阻：

$$\lim_{t \to t^*} H(t) = \frac{R_G}{N}. \tag{13}$$

对于所有连通图，这一恒等式都是精确成立的，并为 R_G 提供了一种新的动力学解释（推导见补充信息）。与公式 (4) 中按 $1/\lambda_i$ 对特征值加权的经典特征值表达式相比，热耗散视角将 R_G 表示为 $e^{-\lambda_i \tau}$ 随时间的积分。这一重构使每个特征值的贡献具有时间分辨性，从而能够在不同扩散尺度下进行比较，并阐明拉普拉斯谱的哪些部分主导有效图电阻。图 2–3（另见补充信息中的图 S1）表明，对于广泛的合成网络和真实网络，累积热耗散确实精确收敛于 R_G/N。

IV 累积热耗散的多尺度性质

现在，我们分析累积热耗散的多尺度特征，并展示其如何实现对有效图电阻的准确预测。关键量是图级剩余热量，

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N} (e^{-tL})_{ii} = \sum_{k=1}^{N} e^{-t\lambda_k},$$

其变化率揭示了拉普拉斯谱的不同区域如何在不同扩散时间产生贡献。

局部、中间和全局扩散尺度。由式（12）可得，节点 i 处剩余热量的导数为

$$\frac{d}{dt}(e^{-tL})_{ii} = -\sum_{k} \lambda_k e^{-t\lambda_k} (\phi_k)_{ii}^2. \tag{14}$$

在扩散时间极短时，$t \to 0$，对所有 k，指数因子均满足 $e^{-t\lambda_k} \approx 1$，因此式 (14) 化简为一个纯粹的局部结构量：

$$\frac{d}{dt}(e^{-tL})_{ii} = -\sum_{k} \lambda_k (\phi_k)_{ii}^2 = -d_i, \qquad t \to 0. \tag{15}$$

因此，热耗散的初始速率仅反映节点 i 的度。对于较大但仍适中的时间 $t > 0$，指数项开始抑制大特征值的贡献，导数展开为加权混合

$$\frac{d}{dt}(e^{-tL})_{ii} = -\sum_k (\phi_k)_{ii}^2 \, \lambda_k e^{-t\lambda_k}. \tag{16}$$

这确立了从局部机制（由高频模态主导）向中间状态的转变，在中间状态下，只有低于某一阈值的特征值 λ_k 才有显著贡献。

图级多尺度结构。在图层级，对 $Z(t)$ 求导可得

$$Z'(t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(e^{-tL})_{ii} = -\sum_{k=1}^{N}\lambda_k e^{-t\lambda_k}. \tag{17}$$

此外，为了量化不同特征值对 $Z(t)$ 斜率的贡献，我们考察 $|Z'(t)|$ 对每个特征值的敏感度：

$$\frac{\partial |Z'(t)|}{\partial \lambda_k} = e^{-t\lambda_k}(1 - t\lambda_k), \tag{18}$$

由此得到临界阈值

$$\frac{\partial |Z'(t)|}{\partial \lambda_k} \begin{cases} \geq 0 & \text{if } t \leq 1/\lambda_k, \\ < 0 & \text{if } t > 1/\lambda_k. \end{cases}$$

因此，在早期，所有特征值均有贡献；而在中间状态，只有满足 $\lambda_k < 1/t$ 的特征值产生正贡献。最后，在晚期，只有 λ_2 仍然活跃。这一结果自然地呈现出一种谱滤波机制。由此自然产生三种典型的扩散机制：

i）局部机制（$t \to 0$）：由于 $e^{-t\lambda_k} \approx 1$，所有特征值的贡献相似，因此 $Z'(0) = -\sum_k \lambda_k = -E[D]\, N$。所以，热耗散仅反映边的总数。

ii）中间 t区域：在此区域中，高特征值会受到指数级抑制，从而分离出低于平均值的特征值所作的贡献。若定义 $t_1 = \frac{1}{E[\lambda]} = \frac{1}{E[D]}$，则对于 $t > t_1$，只有满足 $\lambda_k < E[\lambda]$ 的项仍然相关。

iii）全局区域（$t \gg 1/\lambda_2$）：最小非零特征值 λ_2 占主导，因为所有其他模式都已衰减，即 $Z'(t) \approx -\lambda_2\, e^{-t\lambda_2}, \qquad t \gg 1/\lambda_2$。

这些转变如图 **4A**所示，其中 $Z(t)$ 从快速的、由度驱动的衰减演变为缓慢的全局衰减，而后者由 λ_2支配。随后，我们分析从局部尺度到中间尺度的转变，即 $t_1 = 1/E[\lambda] = 1/E[D]$附近的性质。对于 $t < t_1$，所有特征值对 $Z(t)$衰减的贡献相似，因此有效图电阻 R_G 由完整谱决定。然而，对于 $t > t_1$，大特征值的贡献受到指数级抑制，动力学实际上由满足 λ_k^{below}低于平均值 的特征值子集支配，即 $\lambda_k^{\text{below}} < E[\lambda] = E[D]$。高于平均值的特征值对于预测有效图电阻几乎没有影响。此外，对于具有相同（N、 L）的不同图，从时间 0 到 t_1 的 $Z(t)$ 面积几乎无法区分；当度序列固定时，这种相似性更加显著。对于 $t > t_1$，对 R_G 的预测贡献由以下部分捕获:

$$R_G^{\text{pre}} \propto \sum_k \left(\frac{1}{\lambda_k^{\text{below}}} - \frac{1}{E[D]} \right), \tag{19}$$

其中求和遍历特征值 $\lambda_k^{\text{below}} < E[\lambda]$。如图 4 所示，公式（19）对有效图电阻的预测效果良好。

为进一步分析从中间尺度向全局尺度的转变，即 $t_2 = 1/\lambda_2$ 附近的性质，我们考虑以下针对 R_G 的预测形式:

$$R_G^{\text{pre}} \propto \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda_k < E[\lambda],\, \lambda_k \neq \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_k^{\text{below}}} - \frac{1}{E[\lambda]} \right), & \text{if } \displaystyle\sum_k e^{-\lambda_k^{\text{below}}/\lambda_2} \gg 1, \\ \dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{1}{E[\lambda]}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{20}$$

其依据如下。当我们考察预测量如何依赖于 λ_2，即依赖于$\partial R_G^{\text{pre}}/\partial(1/\lambda_2)$时，低于平均值的特征值对其贡献会发生转变。这种依赖关系的一种典型形式为

$$\frac{\partial}{\partial 1/\lambda_2} \sum_{\lambda_k < E[\lambda]} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_k^{\text{below}}/\lambda_2}}{\lambda_k^{\text{below}}} - \frac{1}{E[\lambda]} \right) = 1 - e^{-1} + \sum_{\lambda_k < E[\lambda]} e^{-\lambda_k^{\text{below}}/\lambda_2}. \tag{21}$$

When

$$\sum_k e^{-\lambda_k^{\text{below}}/\lambda_2} \gg 1, \tag{22}$$

增大 λ_2 会协同加快整个特征值带 λ_k^{below}的衰减，从而使 R_G显著减小。相反，当条件 (22) 不满足时， λ_2单独主导对 R_G的预测。尽管每个 λ_k^{below}都决定了任意给定时间切片中 $Z(t)$的曲率，但 λ_2 与其他特征值 λ_k^{below}之间确实存在加速效应，它主导着从中间扩散 regime 向全局扩散 regime 的转变。

V 基于累积热的连续网络系综优化

优化网络拓扑以最小化其有效图电阻，通常是一个 NP 难问题。通过迭代搜索要添加或重连的“最佳”连边的贪心方法，计算成本高昂，难以随系统规模扩展，而且经常陷入次优配置。此外，式 (4) 中 R_G 的谱表达式并未揭示在不同拓扑尺度下哪些结构修改最有效。上一节揭示的多尺度结构提供了一种有理论依据的替代方法：通过考察累积热耗散随时间的衰减，可以获得一种连续且易于理解的表示，说明结构变化如何影响整个拉普拉斯谱，进而影响有效图电阻。

考虑剩余热量 $Z(t) = \sum_{i=1}^{N}(e^{-tL})_{ii} = \sum_{k=1}^{N} e^{-t\lambda_k}$。在 $t = 0$ 时，扩散过程给出 $Z(0) = N$、 $Z'(0) = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = -2L$，它们由节点数和连边数决定。因此，所有具有相同 $(N,\ L)$ 的网络都共享一个相同的局部尺度锚点：$t \lesssim 1/E[D]$ 时 $Z(t)$ 的初始衰减。度序列相同的网络共享的局部尺度锚点则更加严格，因为 $\sum_i d_i$ 是固定的。因此，结构优化无法通过操纵 $Z(t)$ 的早期行为来实现：在这一阶段，所有此类网络几乎无法区分。

如前所示，扩散时间 $t \in [t_1, t_2]$ 会筛选出低于平均值$\lambda_k^{\text{below}} < E[\lambda] = E[D]$的特征值，因为较大的特征值会受到指数级抑制。因此，调整结构使这些特征值彼此靠近（即收窄低频带），可以降低对 R_G 的中间尺度贡献。在此情形下，预测形式

$$R_G^{\text{pre}} \propto \sum_{\lambda_k < E[\lambda]} \left(\frac{1}{\lambda_k^{\text{below}}} - \frac{1}{E[\lambda]} \right),$$

表明，最优的重连策略应致力于：i）使低频谱围绕其均值收缩，ii）消除低于 $E[\lambda]$ 的离群特征值，以及 iii）促进中观尺度的结构规律性。实际上，这些转变对应于减少结构瓶颈、提高中观尺度群组间连接的同质性，并减轻会造成低频扩散的显著度波动。例如，对于由随机块模型生成的网络（包含 N 个节点和 L 条连边），我们考虑两个大小各为一半 $N/2$的块，块间和块内的连接概率分别为 $p_{\text{intra}} = p/2 - \Delta p$、$p_{\text{inter}} = p/2 + \Delta p$。调整 Δp 时，我们通过减少瓶颈、提高中观尺度的同质性以及压缩低频模态，持续优化有效图电阻（见补充信息中的图 S4）。

最后，当扩散时间进入全局区域 $t > t_2 = 1/\lambda_2$时，最小非零特征值 λ_2 主导了 $Z(t)$ 的衰减。因此，增大 λ_2 会减少 R_G在后期的贡献。然而，在上一节中，我们已经说明，这一贡献并非仅由 λ_2决定。当满足协同条件

$$\sum_k e^{-\lambda_k^{\text{below}}/\lambda_2} \gg 1$$

时，调整 λ_2 会加速多个低频模态的衰减，而不仅仅是加速其自身的衰减。这种“加速效应”在降低 R_G 方面带来的收益，比单独改变 λ_2更大。因此，当满足协同条件时，全局尺度优化问题应尽可能提高 λ_2，并构造图结构，使 λ_2 对整个低频带产生强烈影响。这相当于创建代数连通度高、低频特征值紧密聚集，且低于 $E[\lambda]$的模态之间谱间隙最小的网络。

图5表明，对于固定的节点数和连边数（N，L）（例如，$N = 500$和 $E[D] = 4$），可能的网络结构涵盖了广泛的知名类别：从循环正则图，到小世界网络，再到Erdős–Rényi随机图、无标度网络，最后是富社团结构。当度分布也固定时，会形成更严格的配置：在这种情况下，剩余热量的初始行为相同，而重连只会影响特征值从高于平均值向低于平均值的偏移，使低频带更加紧凑。这可以通过特征值分布的主体部分加以直观呈现。在这些多样的网络结构中，有效图电阻所编码的信息比传统的结构描述符更加丰富

。具有相同平均度、度方差、聚类系数、平均最短路径距离或特征值比的网络 λ_N/λ_2 ，其 R_G仍可能存在显著差异。特别是，由于均匀选取的节点对之间的平均最短路径长度始终大于平均有效电阻距离，

$$E[s] > \frac{2R_G}{N(N-1)} = E[R_{ij}],$$

仅用标准结构指标无法充分解释有效图电阻。

然而，累积热耗散的多尺度性质为优化有效图电阻提供了连续且易于理解的策略。要最小化 R_G ，就需要增大最小非零特征值 λ_2 （即代数连通度），该值反映图的全局连通性。然而，一旦 λ_2 足够大，仅改变 λ_2 就不再能决定 R_G （见补充信息中的图 6 和图 S3）。在这种状态下，若要进一步降低有效图电阻，就需要缩小低于平均值的特征值 λ_k^{below}与平均特征值 $E[\lambda]$之间的差距。这对应于特定类别的结构构型，在这些构型中，较高的代数连通度与紧凑的低频谱得以同时实现。同样的原理也自然适用于电网、水或燃气配送系统、交通网络和在线社交网络等真实世界网络，如补充信息中的图 S1 所示。利用累积热耗散的多尺度行为，可以根据这些系统的第二小和第三小特征值绘制其分布图，从而揭示特征性的谱态。特别是，某些网络构型可能会促进快速的类流行病传播（因为 λ_2 较小），同时抑制类扩散输运或流动（因为 R_G 较大，或特征扩散时间 τ_c较短）。这些谱特征揭示了结构脆弱性，并可为有针对性的改造提供指导，如补充信息中的图 S3 所示。

VI 结论

我们通过建立有效图电阻与拉普拉斯扩散过程所产生的累积热耗散之间精确且具有直观物理意义的联系，提出了关于有效图电阻的新视角。这一动力学观点推广了经典的伪逆和谱表述，并提供了直接的物理解释：有效

图电阻等于网络从初始的局域激发状态弛豫至稳态过程中耗散的热量总和。从这个意义上说，有效图电阻连接了两个传统上相互独立的领域： –网络上的静态结构指标与动力学扩散过程。

除了这一概念性贡献外，我们的分析还揭示了累积热耗散中一种自然的多尺度结构，这种结构由拉普拉斯谱的不同区域驱动。局部扩散时间反映基于度的结构属性；中间时间尺度则筛选出低于谱均值的特征值；全局时间尺度则由代数连通度决定 λ_2。这些多尺度见解直接阐明了结构修改如何影响有效图电阻；更重要的是，它们使连续拓扑优化策略的设计成为可能，而若仅采用组合方法，这类优化将是 NP 难问题。

本文提出的框架能够构建由扩散引导的网络系综，在保持局部结构约束的同时，逐步优化中尺度和全局尺度的谱特征。这包括生成保留早期扩散模式的“轻模型”系综（例如，与社交网络中的回音室形成相关的模式 [**?**]），以及增强全局扩散性的“交织型”或高阶系综 [**?**]。此外，该方法还能识别出网络容易受到类流行病传播影响、却不利于类扩散输运的结构状态（低于协同条件），从而为理解现实系统的脆弱性提供实用见解。

总而言之，通过将有效图电阻与累积热耗散联系起来，我们为跨学科理解、比较和优化复杂网络的结构与功能开辟了新的途径。本研究既为分析各种自然系统和工程系统中的鲁棒性、流动效率及结构重构提供了理论基础，也提供了实用工具。

VII 方法

通过特征谱分解对有效电阻进行分解，可得

$$R_{ij} = (e_i - e_j)^T L^{\dagger} (e_i - e_j) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \left((\phi_k)_i - (\phi_k)_j \right)^2 \tag{23}$$

对其他节点求和后， j 可得

$$\sum_j R_{ij} = N \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (\phi_k)_i^2 + \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \tag{24}$$

由此

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k} (\phi_k)_i^2 = \frac{\sum_j R_{ij}}{N} - \frac{R_G}{N} \tag{25}$$

剩余 节点 i 在时间 τ 的热量可按特征谱分解如下

$$\left(e^{-\tau L}\right)_{ii} = \sum_k e^{-\tau \lambda_k} (\phi_k)_i^2 \tag{26}$$

对时间 τ 积分至时间 t，得到

$$H_i(t) = \int_0^t \left(e^{-\tau L}\right)_{ii} d\tau = \sum_k (\phi_k)_i^2 \int_0^t e^{-\tau \lambda_k} d\tau = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (\phi_k)_i^2 - \sum_k \frac{e^{-t\lambda_k}}{\lambda_k} (\phi_k)_i^2 \tag{27}$$

随着系统在时间 t^*趋于稳态，我们得到

$$\lim_{t \to t^*} H_i(t) = \int_0^{t^*} \left(e^{-\tau L}\right)_{ii} d\tau = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (\phi_k)_i^2 \tag{28}$$

结合式（25），我们可以证明

$$\lim_{t \to t^*} H_i(t) = \frac{\sum_j R_{ij}}{N} - \frac{R_G}{N} \tag{29}$$

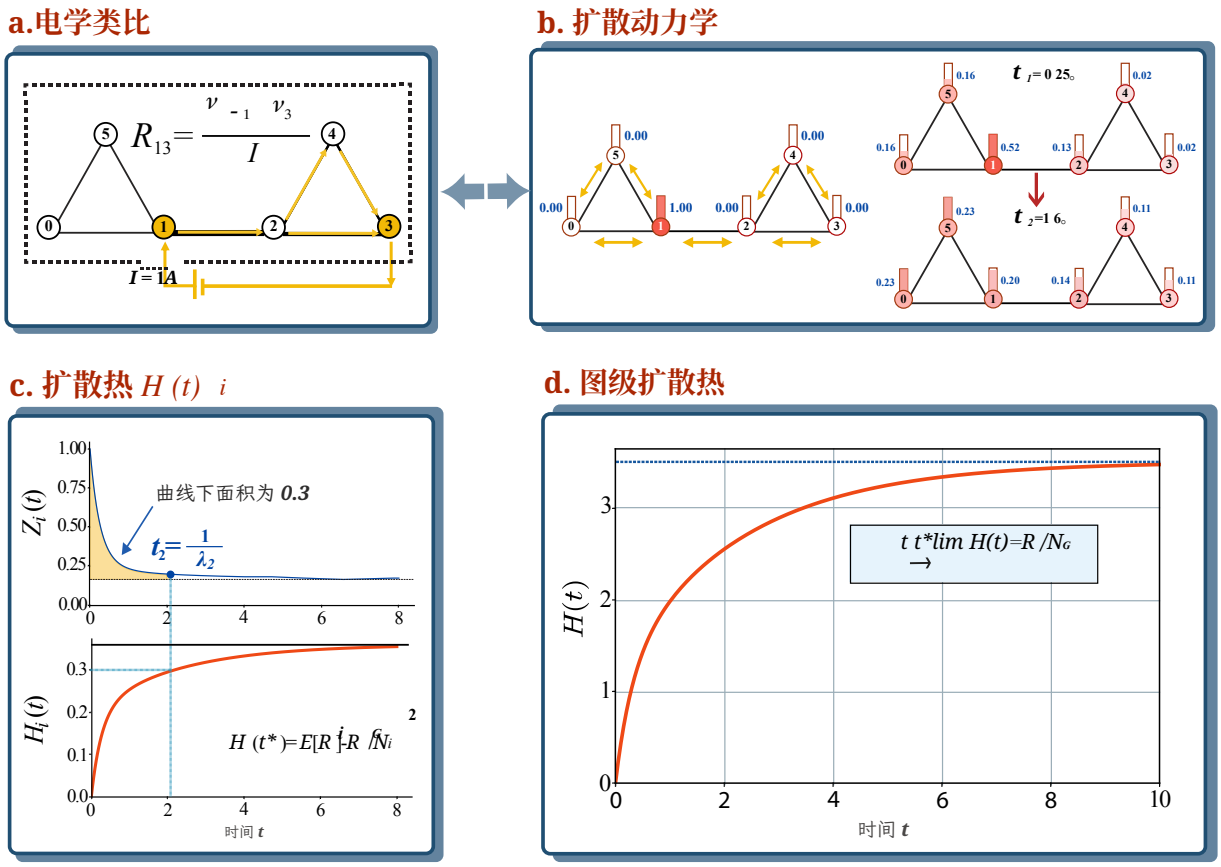

图 1。**有效图电阻作为扩散动力学的累积热耗散**。图 A 展示了电网络中的有效电阻：节点对之间越多且越短的替代路径，会导致越低的有效图电阻。图 B 展示了网络上的扩散动力学，其中节点热浓度 $x(t)$从单个最初被激活的节点 $x_0 = e_1$ 出发，沿多条路径扩散。图 C 展示了图 B 中扩散过程所对应的累积热耗散 $H_i(t)$。随着系统松弛至稳态， $H_i(t)$ 收敛于节点 i 与网络其余部分之间的平均有效电阻。图 D 表明，图级累积热耗散收敛于按网络规模缩放后的有效图电阻。

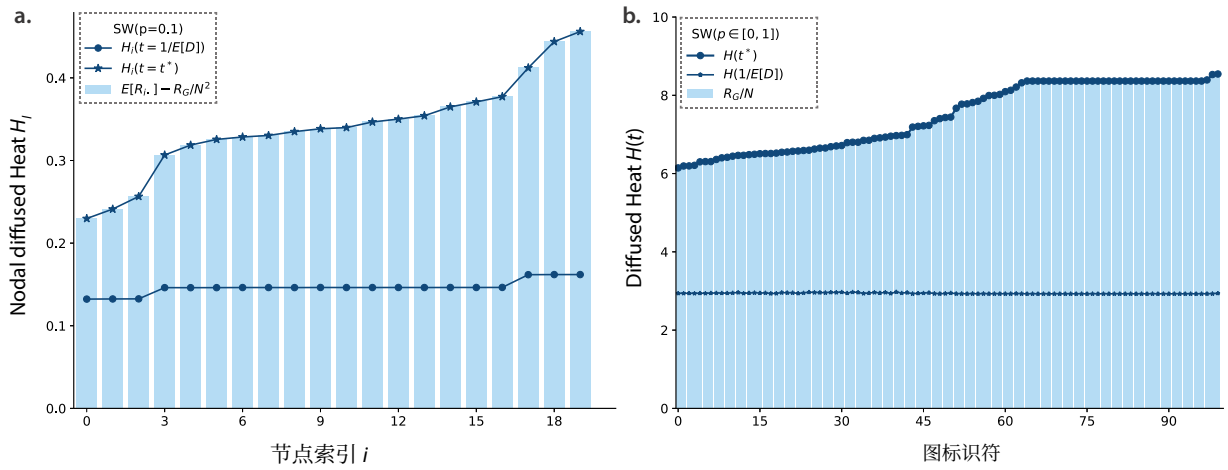

图 2. **扩散动力学的累积热耗散 $H(t)$ 等于有效图电阻 R_G/N，即 $\lim_{t\to t^*} H(t) = R_G/N$。** 面板**A** 展示节点平均有效电阻（柱高），实线及其标记表示节点 i 弛豫至稳态时的累积热耗散$H_i(t^*)$。面板**B** 展示图级累积热耗散（实线）和有效图电阻（柱高）。面板**A**对应于 $N = 20$、$E[D] = 4$ 且链路重连概率为 $p = 0.1$的 Watts–Strogatz 小世界网络。面板**B**对应于一个由 100 个小世界网络组成的系综，其中 $N = 20$、$E[D] = 4$，链路重连概率为 $p \in [0, 1]$。

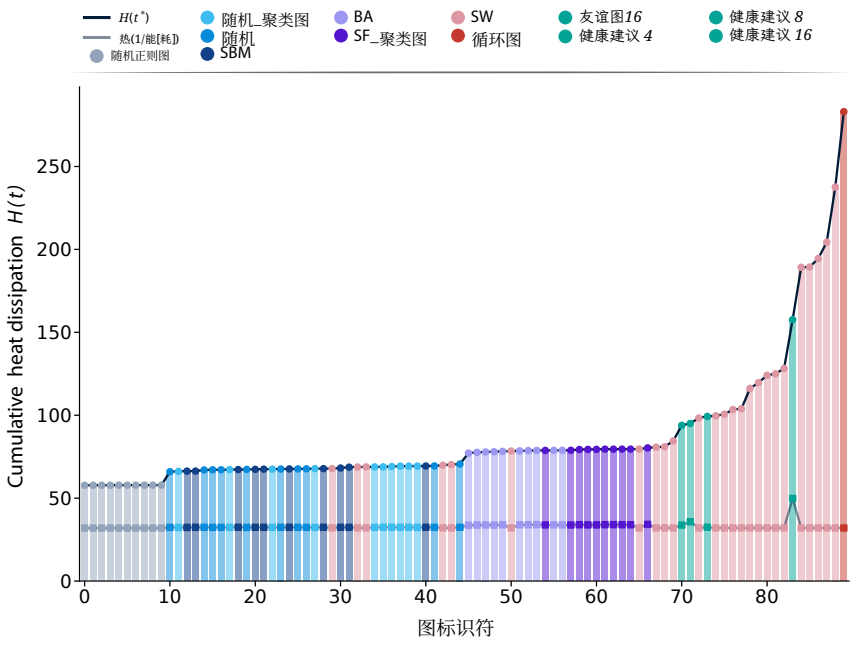

图3. 在广泛的网络中，包括循环图规则网络、小世界网络、随机网络、无标度网络和社区丰富的合成网络，以及真实世界网络，累积热耗散等于有效图电阻 R_G/N 。

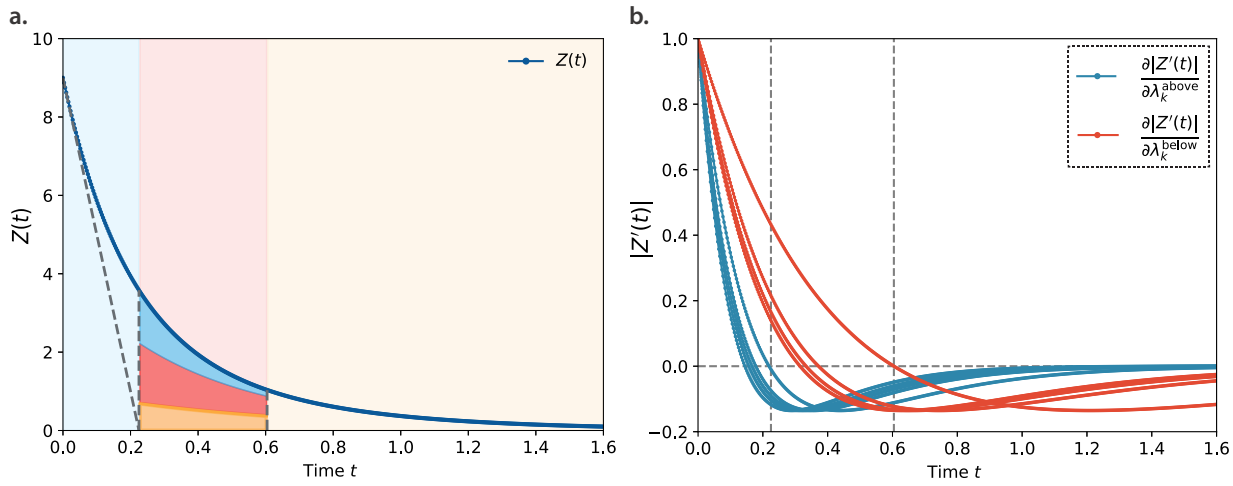

图 4. **与累积热耗散相关的多尺度性质** $H(t)$。面板

A 展示了每个时间切片处 $Z(t)$的曲率，它决定了累积热耗散 $H(t)$的瞬时增长率。面板**B** 展示了各个拉普拉斯特征值对 $Z'(t)$变化率的贡献。特征值贡献的变化自然揭示了不同的扩散机制：在局部机制中 $t \to 0$, $Z'(0) = -\sum_k \lambda_k$，且 $H(t) = \int_0^t Z(\tau)\, d\tau$仅反映边数等局部结构性质。在中间状态$t > 1/E[D]$，只有低于谱均值的特征值有显著贡献。在全局区域$t > 1/\lambda_2$，动力学由最小非零特征值 λ_2主导。

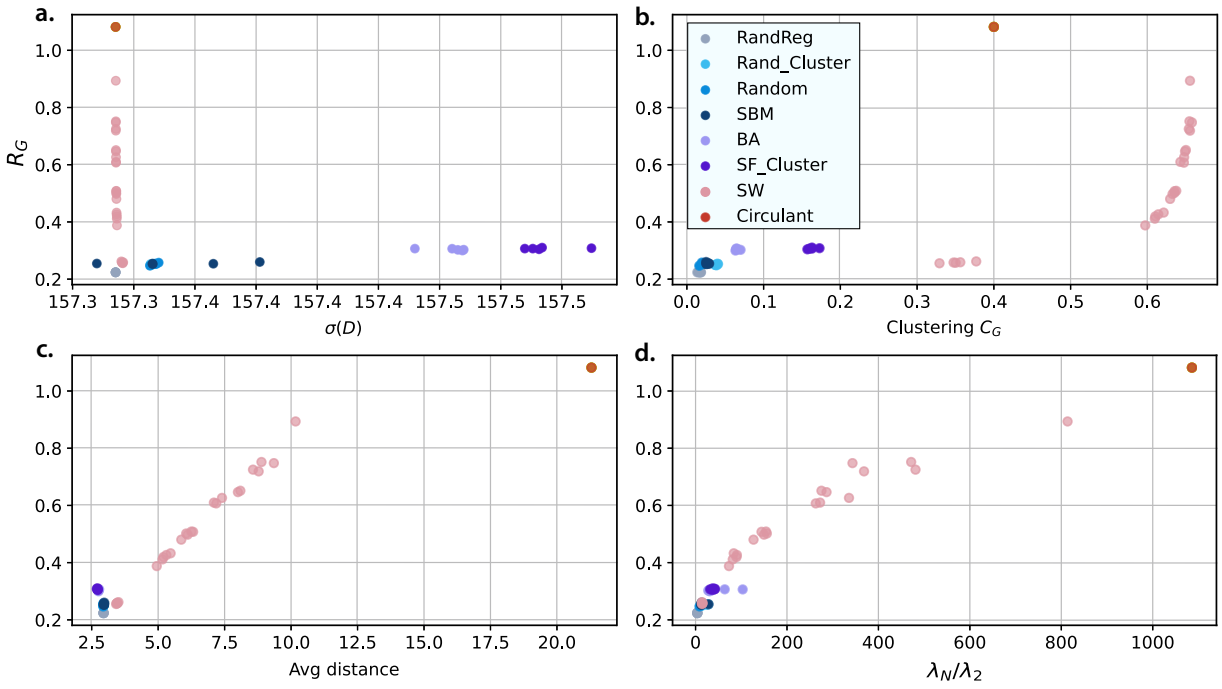

图 5. 有效图电阻所编码的信息比标准结构描述符更丰富，例如平均度、度标准差、聚类系数、平均最短路径距离和特征值比 λ_N/λ_2。

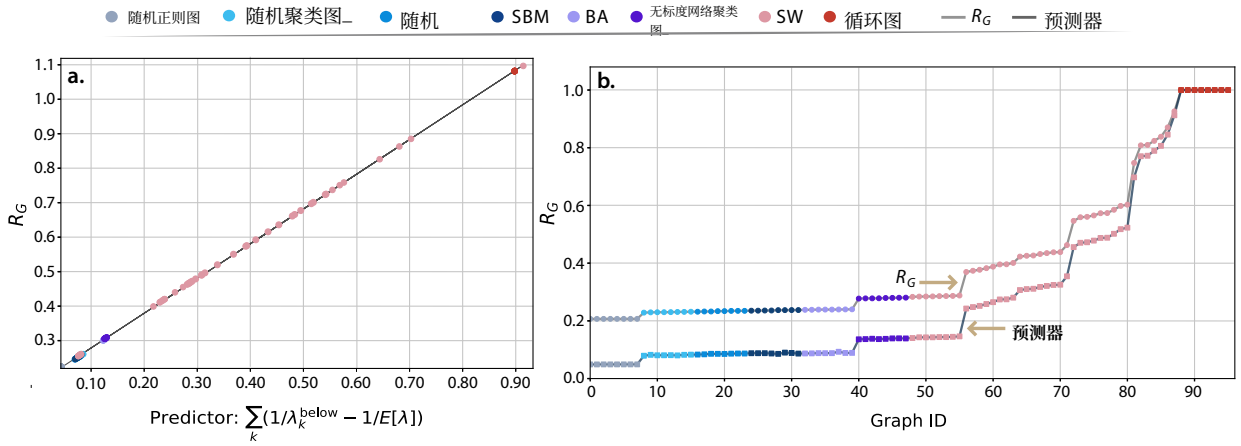

图 6. **累积热耗散的多尺度性质能够准确预测有效图电阻**。面板 **A**显示，对于具有相同（N， L）的网络，为便于可视化，将有效图电阻 R_G按 R_G 的最大值归一化后，估计量 R_G^{pre} 能够很好地根据公式（19）进行预测。面板 **B**显示，对于具有相同（N， L）的图，低频谱越紧凑，有效图电阻就会持续降低。

[1] D. J. Klein 和 M. Randi´c，电阻距离，《数学化学杂志》**12**，81（1993）。[2] W. Xiao 和 I. Gutman，电阻距离与拉普拉斯谱，《理论化学论丛》**110**，284（2003）。[3] W. Ellens、F. M. Spieksma、P. Van Mieghem、A. Jamakovic 和 R. E. Kooij，有效图电阻，《线性代数及其应用》**435**，2491（2011）。[4] D. A. Spielman 和 N. Srivastava，通过有效电阻进行图稀疏化，载于美国计算机协会第*14*届计算理论年度研讨会论文集（2008），第563–568页。[5] A. Forrow、F. G. Woodhouse 和 J. Dunkel，利用设计的拉普拉斯谱对网络动力学进行功能控制，《物理评论X》**8**，041043（2018）。[6] A. Kirkley，加权图稀疏化中网络骨干结构的快速非参数推断，《物理评论X》**15**，031013（2025）。[7] V. Latora 和 M. Marchiori，小世界网络的高效行为，《物理评论快报》**87**，198701（2001）。[8] G. Gounaris 和 E. Katifori，最优探索物理网络中的布雷斯悖论类比，《物理评论快报》**133**，067401（2024）。[9] A. Ghosh、S. Boyd 和 A. Saberi，最小化图的有效电阻，《SIAM评论》**50**，37（2008）。[10] X. Wang、E. Pournaras、R. E. Kooij 和 P. Van Mieghem，通过有效图电阻提高复杂网络的鲁棒性，《欧洲物理学杂志B辑》**87**，1（2014）。[11] A. E. Motter 和 Y.-C. Lai，针对复杂网络的级联攻击，《物理评论E》**66**，065102（2002）。[12] X. Wang、Y. Ko͡c、S. Derrible、S. N. Ahmad、W. J. Pino 和 R. E. Kooij，地铁网络的多准则鲁棒性分析，《物理学A辑：统计力学及其应用》**474**，19（2017）。[13] M. Tyloo、T. Coletta 和 P. Jacquod，复杂网络同步性的鲁棒性与广义基尔霍夫指数，《物理评论快报》**120**，084101（2018）。[14] M. Kurant 和 P. Thiran，分层复杂网络，《物理评论快报》**96**，138701（2006）。

[15] A. Tejedor、A. Longjas、D. A. Edmonds、I. Zaliapin、T. T. Georgiou、A. Rinaldo 和 E. Foufoula-Georgiou，河流三角洲中的熵与最优性，美国国家科学院院刊**114**，11651（2017）。[16] A. Tejedor、A. Longjas、P. Passalacqua、Y. Moreno 和 E. Foufoula-Georgiou，多重网络：通过耦合网络理论研究多过程、多尺度连通性的框架——以河流三角洲为例，《地球物理研究快报》**45**，9681（2018）。[17] J. E. Cohen 和 P. Horowitz，机械网络与电网络的悖论行为，《自然》**352**，699（1991）。[18] D. Braess、A. Nagurney 和 T. Wakolbinger，论交通规划中的一个悖论，《交通科学》**39**，446（2005）。[19] B. Sch¨afer、T. Pesch、D. Manik、J. Gollenstede、G. Lin、H.-P. Beck、D. Witthaut 和 M. Timme，理解电网中的布雷斯悖论，《自然通讯》**13**，5396（2022）。[20] A. K. Chandra、P. Raghavan、W. L. Ruzzo 和 R. Smolensky，图的电阻刻画了其通勤时间和覆盖时间，载于*ACM*第二十一届计算理论年度研讨会论文集（1989），第574–586页。[21] X. Wang、J. L. Dubbeldam 和 P. Van Mieghem，Kemeny常数与有效图电阻，《线性代数及其应用》**535**，231（2017）。[22] J. G. Kemeny，基本矩阵的推广，《线性代数及其应用》**38**，193（1981）。[23] M. Levene 和 G. Loizou，Kemeny常数与随机游走者，《美国数学月刊》**109**，741（2002）。[24] J. J. Hunter，Kemeny常数在马尔可夫链性质中的作用，《统计学通讯：理论与方法》**43**，1309（2014）。[25] F. Abdelnour、H. U. Voss 和 A. Raj，网络扩散准确地模拟了结构性脑连通网络与功能性脑连通网络之间的关系，《神经影像》**90**，335（2014）。[26] A. Mercier、S. Scarpino 和 C. Moore，抵御大流行病的有效电阻：用于高保真度流行病模拟的移动网络稀疏化，《PLOS计算生物学》**18**，e1010650（2022）。[27] N. Horsevad、D. Mateo、R. E. Kooij、A. Barrat 和 R. Bouffanais，从简单传染到复杂传染的集体决策转变，《自然通讯》**13**，1442（2022）。

[28] H. Zenil、N. A. Kiani、A. A. Zea 和 J. Tegn´er，算法生成模型实现的因果反卷积，Nature Machine Intelligence 1，58（2019）。[29] A. Balwani、A. Q. Wang、F. Najafi 和 H. Choi，通过 Dale反向传播和拓扑信息引导的剪枝构建生物学约束循环神经网络，Science Advances11，eadw4970（2025）。[30] P. Van Mieghem，复杂网络的图谱 （剑桥大学出版社，2011）。

《有效图电阻作为累积热耗散》的补充材料

A 累积热耗散收敛于有效图电阻

在此，我们通过明确建立图级累积热耗散与图级有效电阻（即有效图电阻）之间的联系，对正文内容作补充。首先，将给定时间 τ 的所有节点的节点剩余热量 $Z_i(\tau)$ 求和，得到图级剩余热量 $Z(\tau)$：

$$Z(\tau) := \sum_{i=1}^{N} (e^{-\tau L})_{ii} = \sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i \tau}. \tag{A1}$$

当扩散系统达到稳态时，节点对之间不再交换热量。因此，图层级的累积热耗散等于所有节点高于稳态的剩余热量对时间的积分：

$$\lim_{t \to t^*} H(t) = \int_0^{t^*} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i(\tau) - x_i(\infty) \right) d\tau. \tag{A2}$$

鉴于扩散系统收敛至稳态 $x_i(\infty) = 1/N$，且剩余热量 $Z(\tau)$ 在弛豫时间 t^* 之后呈指数衰减，累积热耗散可进一步写为

$$\lim_{t \to t^*} H(t) = \int_0^{t^*} \left(Z(\tau) - 1 \right) d\tau = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i \tau} - 1 \right) d\tau. \tag{A3}$$

利用恒等式 $\int_0^{\infty} e^{-\lambda_i \tau} d\tau = 1/\lambda_i$，可知累积热耗散恰好收敛至按网络规模缩放的有效图电阻：

$$\lim_{t \to t^*} H(t) = \frac{R_G}{N}. \tag{A4}$$

图7A-C进一步表明，微观节点层级的累积热耗散收敛于该节点的平均有效电阻，即 $H_i(t^*) = E[R_{i\cdot}] - R_G/N^2$，这与正文中的推导一致。图7D显示，图层级的累积热耗散恰好收敛于 R_G/N，与公式 A4 一致。我们在多种现实世界中的流导向系统 [1–8], 上执行扩散过程，包括交通网络（伦敦街道网络、欧洲航空网络）、电网（美国西部

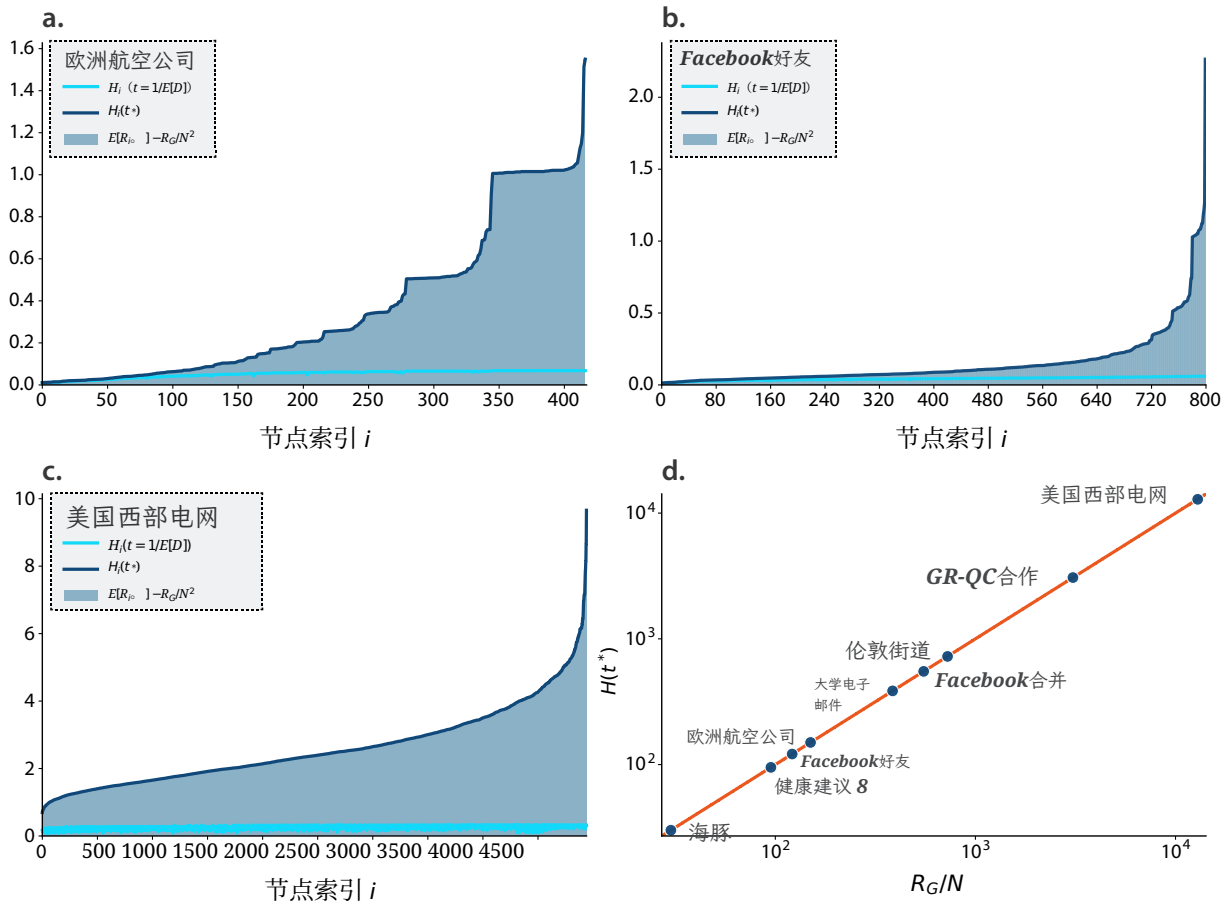

图7. 节点层级和图层级的累积热耗散分别收敛于节点有效电阻和有效图电阻。A–C面板显示，每个节点 i 的$H_i(t^*)$都收敛于该节点的平均有效电阻 $E[R_{i\cdot}] - R_G/N^2$。D面板显示，对于现实世界中的流导向网络（包括社交网络、交通网络和电力网络），图级累积热耗散 $H(t^*)$恰好等于 R_G/N 。

电网）和社交网络（Facebook、电子邮件和协作网络）。在这些多样化的网络结构和应用领域中，累积热耗散准确地恢复了微观（节点）层级和宏观（图）层级的有效电阻。

B 累积热耗散的多尺度性质

我们分析累积热耗散的多尺度性质；当对图级剩余热量 $Z(t)$ 随时间积分时，这些性质便自然显现。关键量

是剩余热量的曲率变化 $Z'(t)$，以及各个拉普拉斯特征值如何对这一变化作出贡献。这一视角使我们能够描述由特征值贡献的变化所产生的多尺度结构，并确定标志着从局部扩散机制转向全局扩散 regime 的特征时间。

每个特征值 λ_k 对 $Z(t)$变化率的贡献由$\partial Z'(t)/\partial\lambda_k$进行量化，其表达式为

$$\frac{\partial Z'(t)}{\partial \lambda_k} = (\lambda_k t - 1)e^{-\lambda_k t} \begin{cases} \leq 0, & \text{if } t \leq 1/\lambda_k, \\ > 0, & \text{if } t > 1/\lambda_k. \end{cases} \tag{B1}$$

在临界时间 $t = 1/\lambda_k$，特征值的贡献发生转变。负贡献意味着增大该特征值会单调降低 $Z(t)$，从而加深 $Z(t)$的曲率。在对 $Z(t)$进行无穷小时间切片积分时，这一负贡献进一步体现为累积热耗散 $H(t)$较低的增长率。换言之，特征值 λ_k 在时间范围 $t < 1/\lambda_k$内仍可用于预测累积热耗散。

超过临界时间后，该贡献变为正值，这意味着 $Z(t)$的曲率变化很小。因此，超过其特征时间后，该特征值对累积热耗散 $H(t > 1/\lambda_k)$的影响呈指数衰减。

因此，三种特征时间尺度自然涌现，将不同拉普拉斯特征值的作用区分开来：局部机制 $t \to 0$、中间时间机制 $t_1 = 1/E[\lambda]$ =$1/E[D]$以及全局区域 $t_2 = 1/\lambda_2$:

- 局部机制： $Z'(0) \simeq \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = NE[D]$。在短时间极限 $H(t \to 0)$ 下，所有特征值汇聚为边的总数，并共同决定累积热耗散。

- 中间时间机制：特征时间 $t_1 = 1/E[\lambda]$ 在确定累积热耗散 $H(t)$ 时，会滤除高频特征值（即高于谱均值 $E[\lambda]$ 的特征值）。在时间窗口 $t > 1/E[\lambda]$ 但 $t < 1/\lambda_2$ 内，只有低于谱均值的特征值仍具有预测作用，因为它们直接决定了 $Z(t)$在每个时间切片处的曲率。

- 全局区域：当时间超过 $t_2 = 1/\lambda_2$ 后，第二小特征值 λ_2 主导累积热耗散，成为衰减最慢的模态。

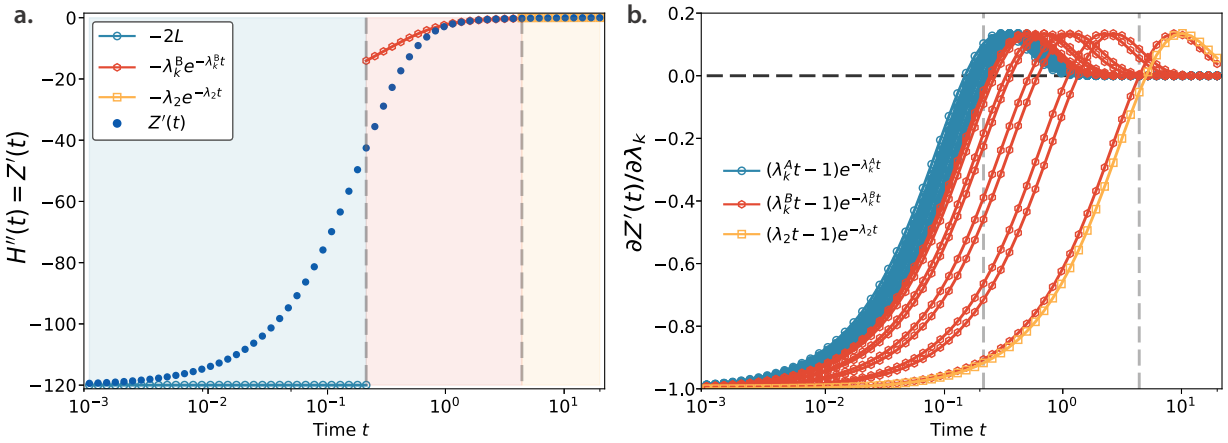

图 8. **累积热耗散的局部、中间和全局机制**。 图 A 展示了局部、中间和全局机制下剩余热量 $Z'(t)$ 的变化率，这些机制由时间尺度 $t_1 = 1/E[D]$ 和 $t_2 = 1/\lambda_2$ （垂直虚线）表征。在每种机制下，$Z'(t)$ 由经过筛选的拉普拉斯特征值组合决定：局部机制下的所有特征值、中间机制下低于谱均值 $\lambda_k^{\mathrm{B}} = \lambda_k^{\mathrm{below}}$的特征值，以及全局机制下的第二小特征值 λ_2 。图 B 展示了特征值组如何在局部、中间和全局扩散机制下，从对 $Z'(t)$ 的负贡献转变为正贡献。

为描述累积热耗散的整个演化过程，可将多尺度结构概括如下：

$$H''(t) = Z'(t) = \begin{cases} -\sum_k \lambda_k = -2L, & t \to 0, \\ -\sum_k \lambda_k^{\mathrm{below}} e^{-\lambda_k^{\mathrm{below}} t}, & t > 1/E[D], \\ -\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, & t \gg 1/\lambda_2, \end{cases} \tag{B2}$$

其中， $\lambda_k^{\mathrm{below}}$表示低于谱均值的特征值。

累积热耗散的多尺度性质揭示了在不同时间尺度下控制扩散过程的拉普拉斯特征值构成。局部机制由所有特征值通过边的总数来控制；中间机制筛选出低于谱均值的特征值；全局机制则由第二小特征值主导。相应地，特征时间标志着扩散从局部受限过渡到介观扩散，最终达到全局扩散。

图 8 展示了公式所定义的累积热耗散的多尺度结构

公式见公式 B2，其根本上源于特征值贡献模式的变化。

C 预测有效图电阻的多尺度性质

上述累积热耗散与有效图电阻之间的联系，使得我们能够利用多尺度扩散性质来预测有效图电阻。反过来，这为修改网络结构和组装优化网络提供了一个可解释的框架。

为建立一种由多尺度驱动的有效图电阻预测方法，我们分析特征时间 $t_1 = 1/E[D]$ 和 $t_2 = 1/\lambda_2$处的累积热耗散，其表达式为

$$H\left(t_1 = \frac{1}{E[D]}\right) = \int_0^{1/E[D]} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i(\tau) - x_i(\infty)\right)\, d\tau = \int_0^{1/E[D]} \sum_{i=2}^{N} e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau, \tag{C1}$$

类似地，时间 t_2 处的累积热耗散遵循

$$H\left(t_2 = \frac{1}{\lambda_2}\right) = \int_0^{1/\lambda_2} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i(\tau) - x_i(\infty)\right)\, d\tau. \tag{C2}$$

因此，在中间时间窗口 $t \in [1/E[D],\, 1/\lambda_2]$内累积的热耗散为

$$H(t_2) - H(t_1) = \int_{1/E[D]}^{1/\lambda_2} \sum_{i=2}^{N} e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau = \sum_{i=2}^{N} \frac{e^{-\lambda_i/E[D]} - e^{-\lambda_i/\lambda_2}}{\lambda_i}. \tag{C3}$$

同样，全局区域 $t \in [1/\lambda_2,\, t^*]$ 内累积的热耗散为

$$H(t^*) - H(t_2) = \sum_{i=2}^{N} \frac{e^{-\lambda_i/\lambda_2} - e^{-\lambda_i t^*}}{\lambda_i}. \tag{C4}$$

此外，采用广为认可的近似 $1-x \simeq e^{-x}$ for $x < 1$and $e^{-x} \to 0$for $x \gg 1$，我们得到

$$H(t^*) - H(t_1) \simeq \sum_{\lambda_i < E[D]} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{E[D]}\right). \tag{C5}$$

由于 $H(t_1) - H(0) \simeq 1/E[D]$，对于节点数和连边数相同的网络而言，这一点几乎无法区分，因此有效图电阻的预测因子可表示为

$$R_G^{\mathrm{pre}} \simeq \sum_{\lambda_i < E[D]} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{E[D]}\right). \tag{C6}$$

从中间时间机制到全局区域转变期间的协同条件。我们进一步分析从中间时间机制到全局区域的转变，该转变由第二小特征值 λ_2 表征。在特征时间 $t_2 = 1/\lambda_2$，调整 λ_2 会同时影响中间时间机制和全局区域中的累积热耗散，但权重不同：

$$\frac{\partial\left(H(t_2) - H(t_1)\right)}{\partial(1/\lambda_2)} = 1 - e^{-1} + \sum_{\lambda_i < E[D]} e^{-\lambda_i/\lambda_2} = 1 - e^{-1} + c, \tag{C7}$$

$$\frac{\partial\left(H(t^*) - H(t_2)\right)}{\partial(1/\lambda_2)} = e^{-1} - \sum_{\lambda_i < E[D]} e^{-\lambda_i/\lambda_2} = e^{-1} - c, \tag{C8}$$

其中我们定义

$$c := \sum_{\lambda_i < E[D]} e^{-\lambda_i/\lambda_2}. \tag{C9}$$

因此，$c \gg 1$被确定为一种协同条件。在此条件下，λ_2 在塑造全局区域的累积热耗散时所起的作用显著减弱[式 C8]，而中间状态则由低频谱主导 $\lambda_i < E[D]$，而非 λ_2 [式 C7]。由此得出两项相互关联的推论：（i）低频谱共同决定有效图电阻；（ii）压缩$1/\lambda_2$会加速多个低频模态的衰减，从而更大幅度地降低有效图电阻。

协同条件也有几何学上的解释。将累积热耗散视为梯形的面积，高度 $1/\lambda_2 - 1/E[D]$ 和曲线 $Z(t)$ 构成两条非平行边。调整 λ_2 会同时降低高度并使 $Z(t)$ 的曲率变陡，从而加速所围面积的缩小。

I相比之下，由方程 C7–C8 得出的另一种极端情况出现在

$$\sum_{\lambda_i < E[D]} e^{-\lambda_i/\lambda_2} < e^{-1}.$$

在此状态下，λ_2 表现为离群值，并主导中尺度和全局热耗散。因此，仅凭第二小特征值 λ_2 即可预测有效图电阻。

总之，累积热耗散的多尺度性质导出了公式 C6 中的预测器，能够准确预测有效图电阻（图 9A）。此外，当满足协同条件 $c \gg 1$时（图 9B），调整 λ_2 会引发加速

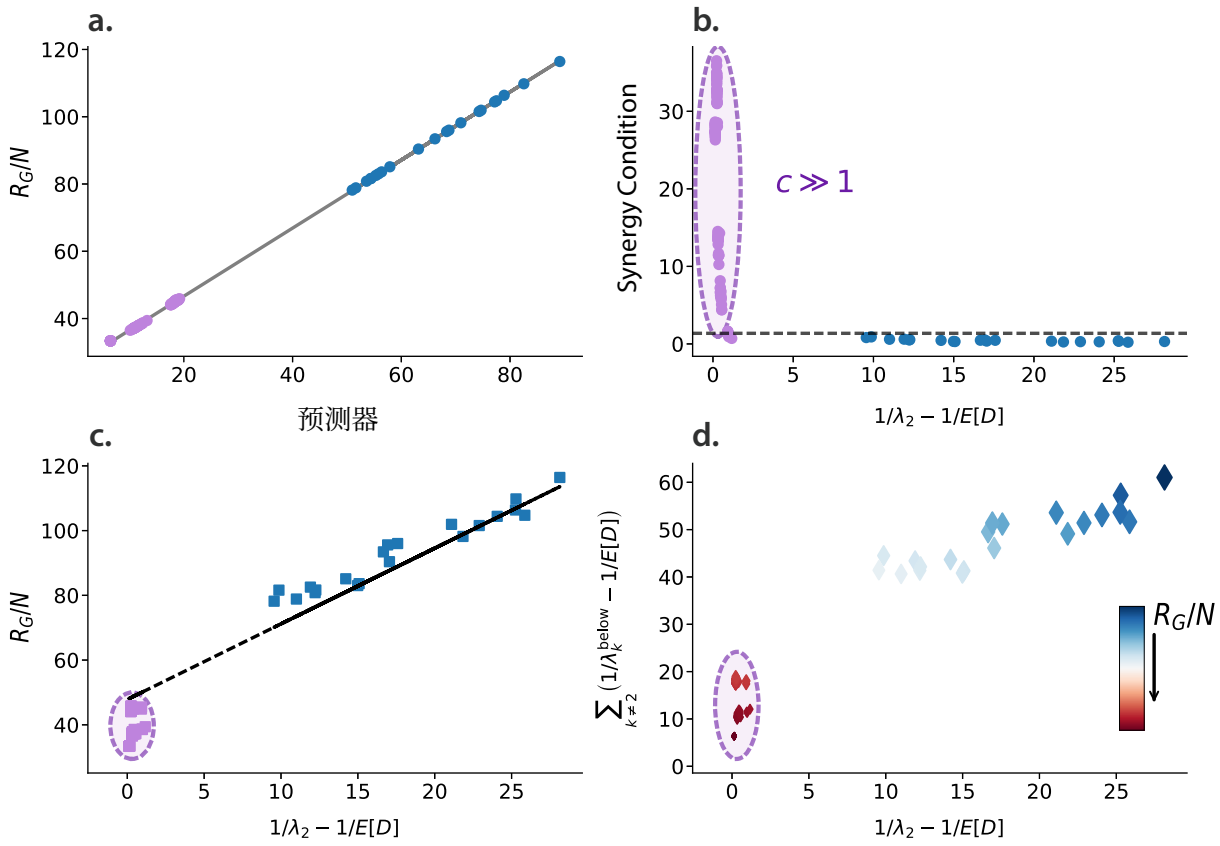

图 9. 多尺度性质驱动的有效图电阻预测。图 A 显示，有效图电阻可由估计量 $\sum_{\lambda_i<E[D]}($ $1/\lambda_i - 1/E[D])$ 准确预测。图 B–D 显示，当满足协同条件时，有效图电阻的降低幅度大于仅由 λ_2 所预测的幅度。在此协同区域中，其他低频模态也能预测 R_G。相比之下，在 $c < e^{-1}$区域中，仅第二小特征值λ_2 可预测 R_G。

效应，从而进一步降低有效图电阻（图 9C）。当 λ_2处于加速区域时，除 λ_2 之外的低频模态主导有效图电阻的预测；而当 λ_2 是离群值时，它本身就具有预测作用（图 9D）。

D 基于累积热量的网络优化示意图

在正文中，我们表明，累积热耗散的多尺度性质使得有效图电阻预测器得以构建，如式 C6 所示。该

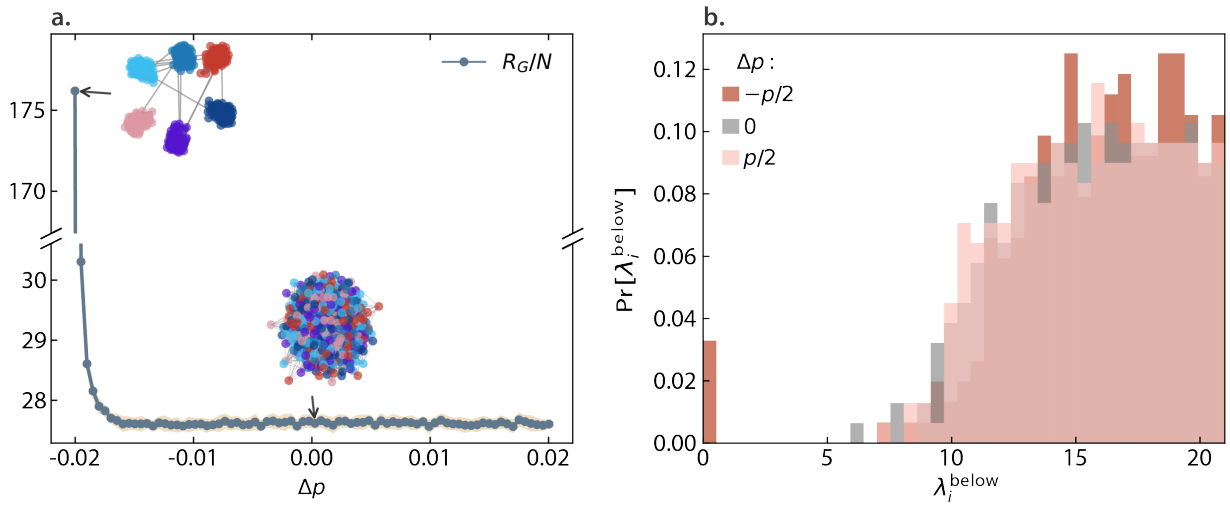

图 10. 通过调节随机块模型中的块间与块内连边不对称性 Δp，展示基于累积热量的优化。图 A 展示缩放后的有效图电阻 R_G/N随 Δp变化的情况。图 B 展示与 $\Delta p = -p/2$ 和$\Delta p = 0$相对应的低频谱。结果基于包含 $N = 500$ 个节点、平均度为 10 的随机块模型得出。

预测器指出，优化策略应着眼于三个方面：i）将低频谱压缩至均值附近；ii）消除低于 $E[\lambda]$的离群特征值；iii）促进介观结构规则性。下面，我们举例说明如何实现此类网络构型。

我们使用随机块模型生成包含 N 个节点和 L条连边的网络。我们考虑 k 个大小相等的块，每块包含 $N_k = N/k$个节点。两个节点之间存在连边的概率为 $p = L/(N($ $N-1)/2)$。这种构造使我们能够设定不同的块间和块内连接概率，分别定义为 $p_{\text{inter}} = p/2 + \Delta p$和 $p_{\text{intra}} = p/2 - \Delta p$。可调参数 $\Delta p \in (-p/2,\ p/2)$控制块间与块内连接的不对称性，从而调节网络结构，使低频谱从紧凑状态逐渐转变为出现离群小特征值。

图 10 显示，对于由多个块组成的网络，通过调节不对称参数 Δp，可以持续优化有效图电阻。这种行为与多尺度预测指标一致；该指标表明，减少离群值、促进介观层面的规律性并压缩低频谱，会导致更低的有效图电阻。

[1] D. Lusseau、K. Schneider、O. J. Boisseau、P. Haase、E. Slooten 和 S. M. Dawson，《疑湾宽吻海豚社区具有很大比例的长期关联：地理隔离能否解释这一独特特征？》，行为生态学与社会生物学**54**，396（2003）。[2] J. Leskovec、J. Kleinberg 和 C. Faloutsos，《图演化：致密化与直径缩小》，ACM《数据知识发现汇刊》（TKDD）**1**，2（2007）。[3] G. F. Chami、S. E. Ahnert、N. B. Kabatereine 和 E. M. Tukahebwa，《社交网络碎片化与社区健康》，美国国家科学院院刊**114**，E7425（2017）。[4] R. Guimera、L. Danon、A. Diaz-Guilera、F. Giralt 和 A. Arenas，《人类互动网络中的自相似社区结构》，《物理评论E》**68**，065103（2003）。[5] P. Crucitti、V. Latora 和 S. Porta，《城市街道空间网络中的中心性度量》，《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》**73**，036125（2006）。[6] A. Cardillo、J. G´omez-Gardenes、M. Zanin、M. Romance、D. Papo、F. d. Pozo 和 S. Boccaletti，《多重性产生网络特征》，《科学报告》**3**，1344（2013）。[7] J. Leskovec 和 J. Mcauley，《学习发现自我中心网络中的社交圈》，《神经信息处理系统进展》**25**（2012）。[8] P. Sapiezynski、A. Stopczynski、D. D. Lassen 和 S. Lehmann，《来自哥本哈根网络研究的互动数据》，《科学数据》**6**，315（2019）。