arXiv:2601.00331v1 [math.AP] 1 Jan 2026

受迫二维纳维–斯托克斯方程与耗散型表面准地转方程的尖锐非唯一性

FRANCISCO MENGUAL 和 MARCOS SOLERA

Abstract. 我们证明了受迫广义表面准地转方程的一个尖锐非唯一性结果。首先，由此可得低于 Miura–Ju 类的非唯一 $\dot{H}^s$-能量解。特别地，这表明 Resnick 和 Marchand 为耗散型表面准地转方程构造的解未必唯一。其次，这一结果确立了低于二维纳维–斯托克斯方程的 Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin 类，以及低于耗散型表面准地转方程的 Constantin–Wu 类和 Dong–Chen–Zhao–Liu 类时的非唯一性。

Contents

1. 引言与主要结果 2. 自相似坐标 1
3. 定理 1.1 的证明 4. 自相似不稳 10
定性 附录 A. 参考文献 11
13
16
17

1. Introduction and main results

本文采用维希克方法 [65, 66, 3, 13], ，结合我们先前与 [14]Castro 和 Faraco 合作的工作，以及 Golovkin 技巧 [36, 28], ，来探讨受迫二维纳维–斯托克斯方程和受迫耗散表面准地转（SQG）方程的非唯一性。

这两个系统都可以写成带分数阶耗散的广义表面准地转方程的特例（其中 $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$）：

$$\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta + \Lambda^\beta \theta = f, \tag{1a}$$

定义在 $[0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ 上，给定外力 $f(t,\ x)$ 和初始数据 $\theta^\circ(x)$

$$\theta|_{t=0} = \theta^\circ. \tag{1b}$$

速度 $v(t,\ x)$ 可通过 α-*Biot-Savart* 定律由 $\theta(t,\ x)$ 得到

$$v = -\nabla^\perp \Lambda^{\alpha-2} \theta. \tag{1c}$$

We 将系统（1）称为（$\alpha,\ \beta$）-表面准地转方程，参数范围为 s

$$0 \le \alpha \le 1, \qquad 0 < \beta < 3 + \alpha.$$

我们注意到，二维纳维–斯托克斯方程对应于如下取值 $\alpha = 0$。在这种情况下，(1c) 化为标准 Biot–Savart 定律，因此 $\theta = \nabla^\perp \cdot v$ 表示涡度 ω。标准二维纳维–斯托克斯方程对应于 $\beta = 2$，而 $\beta < 2$ 和 $\beta > 2$ 这两种情形通常分别称为弱耗散情形和超耗散情形。

Date: 2026年1月5日。

耗散型表面准地转方程对应于 $\alpha = 1$。中间范围 $0 < \alpha < 1$介于纳维–斯托克斯方程与表面准地转方程之间，通常称为广义表面准地转方程。此外，我们将无扩散的情形称为 α-表面准地转方程

$$\partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta = f, \tag{2}$$

并与初始条件（1b）以及 α–毕奥–萨伐尔定律（1c）耦合。在没有扩散的情况下，极端情形 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 分别对应于二维欧拉方程和表面准地转方程。

在近期具有开创性的研究中，[65, 66], 维希克成功证明了尤多维奇类以下受迫二维欧拉方程解的非唯一性（另可参见 [3], 中的清晰阐述，以及 [5] 关于消失黏性极限的讨论）。该证明基于 Jia 和 ˇ Sver´ak 为三维Navier–Stokes方程提出的自相似不稳定性情景 [40]。值得注意的是，Albritton、Bru`e 和 Colombo 在这些思路的基础上，构造出受迫三维Navier–Stokes方程的首批非唯一 Leray–Hopf解 [2]。最近，Hou、Wang 和 Yang 完成了无外力情形下首个严格（计算机辅助）证明 [39]。

在 [14], 中，我们与 Castro 和 Faraco 一起证明了 α–表面准地转方程的非唯一性（2）。为此，我们首先通过构造光滑且紧支撑的不稳定涡旋，简化了 [13] 中的维希克证明，随后将该论证仔细地推广到无扩散的广义表面准地转方程。

本文旨在说明，在 [14] 中构造的涡旋也可用于证明扩散情形下的非唯一性。首先，我们沿用维希克的谱论论证，将扩散视为一种扰动。其次，我们运用 Golovkin 技巧 [36], ——Dolce 和 Mescolini [28], 最近重新发现的一种方法——来绕过非线性不稳定性步骤。

1.1. **主要结果**。我们陈述关于（α, β）–表面准地转方程（1）的主要非唯一性定理，该定理在博赫纳空间 $L^p_t \dot{W}^{s,\,q} = L^p$（$[0,T]$, $\dot{W}^{s,\,q}(\mathbb{R}^2)$）中表述。回顾一下，$\theta \in \dot{W}^{s,\,q}$表示$\Lambda^s \theta \in L^q$。在这一初始版本（定理1.1）中，我们考虑参数的完整范围。在后续章节中，我们将推导出若干有趣的推论，作为特殊情形，并将其分为两组。精确定义和参考文献见第1.2 节和1.3 节。

(1) H^s-能量解，其中可积性指数固定（$p = \infty$ 和 $q = 2$），而正则性指数 s变化：

- 定理 1.3 给出了非唯一解 $\theta \in C_t \dot{H}^s \cap L^2_t \dot{H}^{s+\frac{\beta}{2}}$ 适用于 $s + \beta - \alpha < 1$。情形 $\alpha = 1$ 展示了 Miura–Ju 类的尖锐性：$s < 2 - \beta$。
- 定理 1.4 给出了非唯一解 $\theta \in C_t \dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}} \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}$适用于 $\beta < 2 + \frac{\alpha}{2}$。–情形 $\alpha = 0$ 恢复了 Leray–Hopf 非唯一性 $v \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}$，适用于 Albritton 和 Colombo 的弱耗散二维Navier–Stokes方程 [4]。–情形 $\alpha = 1$ 给出了 Marchand 非唯一解 $\theta \in C_t \dot{H}^{-\frac{1}{2}} \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta-1}{2}}$，适用于耗散型表面准地转方程，其中 $\beta < \frac{5}{2}$。
- 定理 1.5 给出了非唯一解 $\theta \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}$ 对于 $\beta < 1 + \alpha$。情形$\alpha = 1$ 表明，当 $\beta < 2$时，Resnick 解具有非唯一性。

(2) $L^p_t L^q$-解，其中正则性指数 s 固定（具体而言，$s = -1$，0，1），而 p 和 q 的可容许范围确定如下：

- 定理 1.6 给出了 $v \in L^p_t L^q$ 低于 Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin 类的二维纳维–斯托克斯方程（$\alpha = 0$, $\beta = 2$）的非唯一解：$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} > 1$。
- 定理 1.7 给出了 $\theta \in L^p_t L^q$ 低于 Constantin–Wu 类的耗散型表面准地转方程（$\alpha = 1$, $\beta < 4$）的非唯一解：$\frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > \beta - 1$。
- 定理 1.8 给出了广义表面准地转方程存在非唯一解 $\nabla\theta \in L^p_t L^q$（$0 \le \alpha \le 1$, $\beta < 3 + \alpha$），其正则性低于 Dong–Chen–Zhao–Liu 类：$\frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > \beta - \alpha + 1$。

定理 1.1。 设 $0 \le \alpha \le 1$ 且 $0 < \beta < 3 + \alpha$。存在一个力 f，使得存在两个不同的解 θ_1 和 θ_2，它们满足 （α， β）-表面准地转方程 （1），且 $\theta^\circ = 0$。此外，

$$\Lambda^s \theta_j \in L_t^p L^q, \qquad \Lambda^r f \in L_t^a L^b, \tag{3}$$

对所有属于以下范围的 $r, s \ge -1$ 和 $1 \le a, b, p, q \le \infty$

$$\frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > s + \beta - \alpha, \qquad \frac{\beta}{a} + \frac{2}{b} > r + 2\beta - \alpha. \tag{4}$$

此外，对于 $p = \infty$，这些解在时间上连续

$$\Lambda^s \theta_j \in C_t L^q \quad for\ all \quad \frac{2}{q} > s + \beta - \alpha,$$

并属于临界空间

$$\Lambda^s \theta_j \in L_t^\infty L^{\frac{2}{s+\beta-\alpha}} \quad for\ all \quad s \le \alpha - \beta + 2.$$

注 1.2。 我们对定理*1.1*作出若干澄清和改进：

(i) 解在全时间范围内存在。然而，时间可积性会随着 $t \to \infty$ 而退化。因此，方程 (3) 必须理解为 $L^p([0,T]; L^q(\mathbb{R}^2))$ 对所有 $T > 0$ 都成立。

(ii) 对所有 $t > 0$，解都是光滑的。因此，它们在经典意义下满足 (α, β)-表面准地转方程 (1)。在时刻 $t = 0$，它们在弱意义下满足该方程：

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\theta \partial_t \phi + \theta v \cdot \nabla \phi - \theta \Lambda^\beta \phi + \Lambda^{-1} f \Lambda \phi)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^2} \theta^\circ(x) \phi(0,x)\, \mathrm{d}x,$$

对所有测试函数 $\phi \in C_c^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$。在我们的情形中，右端为零，因为$\theta^\circ = 0$。回顾一下，若满足 $\theta, \theta v, \Lambda^{-1} f \in L_{t,x}^1$，弱公式便有意义。首先，定理 *1.1* 直接给出 θ_j，$\Lambda^{-1} f \in L_{t,x}^1$。其次，我们断言 $\theta_j v_j \in L_{t,x}^1$。一方面，

$$\theta_j \in L_t^p L^q \quad for \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > \beta - \alpha.$$

另一方面，由于 $v_j \sim \Lambda^{\alpha-1} \theta_j$，我们有

$$v_j \in L_t^{p'} L^{q'} \quad for \quad \frac{\beta}{p'} + \frac{2}{q'} > \beta - 1.$$

通过施加 $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ 和 $\frac{1}{q'} = 1 = \frac{1}{q}$，我们得到条件 $\beta - \alpha < \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} < 3$；只要 $\beta < 3 + \alpha$，该条件便是可能的。

（*iii*）关于 $p = \infty$ 的论述源于以下事实： $\theta^\circ = 0$， 以及界

$$\|\Lambda^s \theta_j(t)\|_{L^q} \lesssim t^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{q} - s - \beta + \alpha\right)}.$$

（*iv*） （*iii*） 中的行为同样适用于其他函数空间。一般而言，对于任意超临界空间$\theta_j \in C_t Y$，有 Y；而对于任意临界空间 $\theta_j \in L_t^\infty Y \setminus C_t Y$，有$Y$。例如，定理*1.6* 中的受迫二维纳维–斯托克斯方程的两个不同解满足

$$v_j \in L_t^\infty BMO^{-1}.$$

这与 *Koch* 和 *Tataru* 针对小数据所证明的整体适定性并不矛盾 [45], ，因为连续性不成立，而且外力在 $t = 0$处过于奇异。值得注意的是，关于 BMO^{-1} 的非唯一性近期已得到证明——对于无外力的大数据情形——由 *Coiculescu* 和 *Palasek* 在$\mathbb{T}^3$ 上证明 [21], ，并由 *Cheskidov*、*Dai* 和 *Palasek* 在 $\mathbb{T}^2$ 上证明 [17]。

1.2. **能量解的非唯一性**。 本节考察参数的取值范围，在此范围内，定理1.1 中的非唯一解是 H^s-能量解：

$$\theta \in C_t\dot{H}^s \cap L^2_t\dot{H}^{s+\frac{\beta}{2}}.$$

也就是说，这些解在 H^s中连续，对应于 $p=\infty$ 和 $q=2$，并且由于扩散作用，正则性额外提高。与 H^s能量估计相关的强迫项的自然空间是

$$f \in L^1_t\dot{H}^s + L^2_t\dot{H}^{s-\frac{\beta}{2}}.$$

对于 $\alpha = 1$和 $0<\beta<2$，Miura [60] 和 Ju [41]证明了耗散型表面准地转方程在临界情形 $s=2-\beta$下的局部适定性：

$$\theta \in C_tH^{2-\beta} \cap L^2_t\dot{H}^{2-\frac{\beta}{2}}.$$

Dong 和 Du [31]将这一结果推广到了临界情形 $\beta=1$ 下的全局时间解。更早以前，Constantin、C´ordoba 和 Wu [23] 证明了对于具有 $\theta \in L^\infty_t H^1$ 且属于$\theta \in L^\infty_t H^2$ 类的小 L^∞ 初始数据，临界 SQG 方程的解具有整体存在性且唯一。

作为定理 1.1的推论，我们可得，只要 $s+\beta-\alpha<1$，就存在非唯一性。特别是，对于 $\alpha=1$，这表明 *Miura–Ju* 类是尖锐的，即 $s<2-\beta$。

定理 1.3 （H^s-能量解的非唯一性）。 设 $0\le\alpha\le1$ 且 $0<\beta<2+\alpha$。存在一个力 f，使得存在两个不同的解 θ_1 和 θ_2，它们满足（α，β）-表面准地转方程 （1），且 $\theta^\circ=0$ 满足

$$\theta_j \in C_t\dot{H}^s \cap L^2_t\dot{H}^{s+\frac{\beta}{2}}, \qquad f \in L^1_t\dot{H}^s \cap L^2_t\dot{H}^{s-\frac{\beta}{2}},$$

对所有 $s+\beta-\alpha<1$均成立。

证明。 这些非唯一解对应于定理 1.1 中构造的解，其中 $q=b=2$。首先，取 $p=\infty$ 和 $a=1$，可得

$$\Lambda^s\theta_j \in C_tL^2, \qquad \Lambda^s f \in L^1_tL^2,$$

只要 $\frac{\beta}{\infty}+\frac{2}{2} > s+\beta-\alpha$ 且 $\frac{\beta}{1}+\frac{2}{2} > s+2\beta-\alpha$。其次，取 $p=a=2$，可得

$$\Lambda^{s+\frac{\beta}{2}}\theta_j \in L^2_tL^2, \qquad \Lambda^{s-\frac{\beta}{2}} f \in L^2_tL^2,$$

只要 $\frac{\beta}{2}+\frac{2}{2} > (s+\frac{\beta}{2})+\beta-\alpha$ 且 $\frac{\beta}{2}+\frac{2}{2} > (s-\frac{\beta}{2})+2\beta=\alpha$。所有这些条件都等价于 $s+\beta-\alpha<1$。□

接下来，我们考察 α 和 β 的取值范围，在这些范围内，定理1.3 给出的非唯一解属于 Leray–Hopf 型。这里的意思是，这些解满足某种形式的能量不等式。我们区分两种众所周知的能量：

$$\mathcal{H}(t) := \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2_{L^2}. \tag{5}$$

在无黏情形下，它们分别对应于哈密顿量和 L^2-Casimir，因为当 $f=0$时它们守恒。在有黏情形下，标准的能量估计表明，(α,β)–表面准地转方程 (1) 的经典解对 $s=\frac{\alpha-2}{2}$ 和 $s=0$都满足能量恒等式

$$\frac{1}{2}\|\theta(t)\|^2_{\dot{H}^s} + \int_0^t \|\theta\|^2_{\dot{H}^{s+\frac{\beta}{2}}}\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|\theta^\circ\|^2_{\dot{H}^s} + \int_0^t \langle f,\theta\rangle_{\dot{H}^s}\,\mathrm{d}t'. \tag{6}$$

对于通过适当正则化机制取极限得到的弱解，能量恒等式以不等式的形式成立。

1.2.1. $\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}$–能量解。 我们先讨论较为熟悉的二维纳维–斯托克斯方程情形。对于 $\alpha = 0$，涡度 $\omega := \nabla^{\perp} \cdot v$ 起到温度 θ的作用，而（无散）速度场 v 满足（分数阶）纳维–斯托克斯方程

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \Lambda^{\beta} v = -\nabla p + g, \tag{7}$$

其中 p 为压力， g 为外力。对动量方程（7）取旋度，得到涡量形式

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + \Lambda^{\beta} \omega = f, \tag{8}$$

其中 $f = \nabla^{\perp} \cdot g$。注意， （8）只是将（1a）中的 θ 替换为 ω。回想一下， v 和 g 分别通过毕奥–萨伐尔定律由 ω和 f恢复得到： $v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega$和 $g = \nabla^{\perp}\Delta^{-1} f$。

在著名的论文中， [48], Leray 证明了标准纳维–斯托克斯方程（$\beta = 2$）的解的整体存在性

$$v \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^1,$$

通过为（7）构造一个正则化序列，然后利用能量不等式所提供的紧性取极限

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla v\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}t' \le \frac{1}{2}\|v^{\circ}\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle g, v\rangle_{L^2}\,\mathrm{d}t'. \tag{9}$$

这些解通常称为*Leray–Hopf*解，同时也承认Hopf在有界区域情形下的贡献 [38]。注意，(9)对应于(6)，但对$\alpha = 0$ 和 $s = -1$取不等式，因为哈密顿量可以写成

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\omega\|^2_{\dot{H}^{-1}} = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2}.$$

此外，对于 $\beta = 2$ ，量

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\|\omega\|^2_{L^2} = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2}$$

对应于涡量平方积分，它在二维情形下满足带不等式的(6)，即

$$\frac{1}{2}\|\omega(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\nabla \omega\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}t' \le \frac{1}{2}\|\omega^{\circ}\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle f, \omega\rangle_{L^2}\,\mathrm{d}t'. \tag{10}$$

这一控制使得可以得出结论：对于 $\beta = 2$，纳维–斯托克斯方程在Leray–Hopf类中整体适定。然而，如前所述，Leray–Hopf解的唯一性

$$v \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}, \tag{11}$$

不再 适用于弱耗散情形 $\beta < 2$，至少在存在外力 [4]时如此 .

对于耗散型表面准地转方程（其中 $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\theta\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}$），Marchand 在 [54] 证明了 Leray 存在定理在该类中的自然推广

$$\theta \in C_t \dot{H}^{-\frac{1}{2}} \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta-1}{2}}, \tag{12}$$

我们将这类解称为 *Marchand* 解。

作为定理 1.3的推论，我们推出 $\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}$-能量解的非唯一性，其中 $\beta < 2 + \frac{\alpha}{2}$。一方面，这推广了 Albritton 和 Colombo 关于弱耗散二维Navier–Stokes方程 [4]的 Leray–Hopf解（11）非唯一性的结果。另一方面，这表明，当 $\beta < \frac{5}{2}$ 时，Marchand 解（12）未必唯一。这个指数与 Lions 为三维Navier–Stokes方程 [49], 引入的唯一性阈值一致，这一点也得到了 Luo 和 Titi [53], 以及 Khor、Miao 和 Su [42]的非唯一性结果的印证。

定理 1.4 （Leray–Hopf解和 Marchand 解的非唯一性）。 设

$$0 \le \alpha \le 1, \qquad 0 < \beta < 2 + \frac{\alpha}{2}.$$

存在一个力 f，使得存在两个不同的解 θ_1 和 θ_2，它们满足 (α,β)-表面准地转方程(1)，且 $\theta^\circ = 0$ 满足

$$\theta_j \in C_t \dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}} \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}, \qquad f \in L^1_t \dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}} \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\alpha-\beta-2}{2}}. \tag{13}$$

此外，它们满足能量恒等式 (6)，其中 $s = \frac{\alpha-2}{2}$。 ——

证明。 这些非唯一解对应于定理1.3中构造的解，且 $s = \frac{\alpha-2}{2}$。由于这些解在 $t > 0$上是经典解，因此它们满足能量恒等式 (6)

$$\frac{1}{2}\|\theta_j(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}} + \int_{t_0}^{t} \|\theta_j\|^2_{\dot{H}^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}}\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|\theta_j(t_0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}} + \int_{t_0}^{t} \langle f, \theta_j\rangle_{\dot{H}^{\frac{\alpha-2}{2}}}\,\mathrm{d}t', \tag{14}$$

对所有 $0 < t_0 < t$均成立。令 $t_0 \to 0$ 并利用 (13)，即可得到 $t_0 = 0$的相同恒等式。 □

Colombo、De Lellis 和 De Rosa $\mathbb{T}^3$构造了无外力弱耗散 Navier–Stokes 方程的非唯一 Leray–Hopf 解，定义在 [22] 上，其中 $0 < \beta < \frac{2}{5}$；随后 De Rosa 于 $0 < \beta < \frac{2}{3}$ 将其改进为 [27]。Buckmaster、Shkoller 和 Vicol $\mathbb{T}^2$ 也证明了定义在 ¨上的耗散型表面准地转方程存在非唯一性，条件是 $\Lambda^{-1}\theta$具有适当的 H [9], older 正则性；Dai 和 Peng [25]则在有外力的情形下证明了这一点。此前，Buckmaster 和 Vicol [10] 构造了 Navier–Stokes 方程的首批非唯一解 $v \in C_t L^2 \cap L^2_t H^\gamma$——对于某些较小的 $\gamma > 0$——定义在$\mathbb{T}^3$ (另见 [52, 53, 11, 8, 57, 43, 37, 63, 20])。这些研究基于凸积分；De Lellis 和 Sz´ekelyhidi 将凸积分引入流体力学，用于研究 Euler 方程 [26]。最近，Palasek 和 Coiculescu 将这一方法与二进模型结合，证明了临界 Navier–Stokes 初值存在非唯一性 [21] (另见 [17])。

如引言中所述，Albritton、Bru`e 和 Colombo 已在受力情形 [2], 下证明了 $\mathbb{R}^3$ 中纳维–斯托克斯方程的 Leray–Hopf 解具有非唯一性；而最近，Hou、Wang 和 Yang 则在无力情形 [39]下证明了这一点。

1.2.2. L^2–能量解。 在 Marchand 的存在性定理之前，Resnick 已经运用 Leray 型论证——该论证依据能量 $\mathcal{E}$ 而非 $\mathcal{H}$——推导出耗散型表面准地转方程解的存在性

$$\theta \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}, \tag{15}$$

我们称之为*Resnick* 解。在亚临界区域 $\beta > 1$，正如 Constantin 和 Wu [24]所证明的那样，这些解会立即变得光滑。在临界情形 $\beta = 1$，Caffarelli 和 Vasseur 证明了这类解在正时间 [12]上至少是 H¨older 连续的。值得强调的是，这些结果并不能推出唯一性。对于光滑初始数据，Kiselev、Nazarov 和 Volberg [44] 证明了存在唯一的全局光滑解 $\theta \in L^\infty_t W^{1,\infty}$。

作为定理 1.3的推论，我们推出在 L^2-能量解的情形下存在非唯一性$\beta < 1 + \alpha$。对于 $\alpha = 1$，这表明 Resnick 解（15）对于 $\beta < 2$ 不一定唯一。

定理 1.5 （Resnick 解的非唯一性）。 设

$$0 \le \alpha \le 1, \qquad 0 < \beta < 1 + \alpha.$$

存在一个力 f，使得有两个不同的解 θ_1 和 θ_2，它们满足(α,β)-表面准地转方程(1)，且 $\theta^\circ = 0$ 满足

$$\theta_j \in C_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}, \qquad f \in L^1_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{-\frac{\beta}{2}}.$$

此外，它们满足能量恒等式 (6)，其中 $s = 0$。

证明。 由此可 类似于定理 1.4 的证明，取 $s = 0$ 代替 $s = \alpha -$ $\frac{2}{2}$. □

1.3. **中的非唯一性空间。** 在上一节中，我们看到，在自然的能量解类中，唯一性不一定成立。对于纳维–斯托克斯方程，Prodi [62], Serrin [64], 和 Ladyzhenskaya [47]的经典工作表明，如果进一步假设解属于适当的 $L_t^p L^q$ 空间，则可以恢复唯一性。后来，人们也为广义表面准地转方程建立了类似的判据。

在本节中，我们解释定理 1.1 如何针对 s 的特定取值导出尖锐非唯一性结果。我们注意到，定理1.1中所出现参数范围的补集可以解释为广义的 Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin 条件。尽管已知这类条件在某些参数范围内能够保证唯一性（参见本节中的参考文献），但唯一性是否在整个范围内成立，仍是一个有趣的开放问题。

我们首先讨论较为熟悉的标准二维纳维–斯托克斯方程情形，然后转而讨论广义表面准地转方程。

1.3.1. 该 N 纳维–斯托克斯情形。对于 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 2$，纳维–斯托克斯方程（7）写作 a s

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p + \Delta v + g. \tag{16}$$

Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin（LPS）判据断言，若纳维-斯托克斯方程（ v_1 和 v_2 的两个解（16）在维数 $d \geq 2$ 下满足

$$v_j \in L_t^p L^q \quad \text{with} \quad \frac{2}{p} + \frac{d}{q} \leq 1,$$

对于下文将讨论的某些 q 取值范围，则必有 $v_1 = v_2$。

这一唯一性判据最早在 [62, 64] 中得到证明，当时采用了更强的假设，即这些v_j是 Leray 解（后来在 [47]中证明了其光滑性）；也就是说，它们在 $d < q < \infty$取值范围内满足能量不等式（9）。临界端点 $q = d$和 $p = \infty$ 的推广则借助于Kozono 和 Sohr 的唯一性结果 [46], ，其相应的光滑性由 Escauriaza、Ser¨egin 和 ˇSver´ak 在 [33]中确立。

不假设 Leray 条件（9），Fabes、Jones 和 Rivi`ere [34]证明了 $d < q < \infty$ 的相同唯一性判据。临界端点 $q = d$ 和 $p = \infty$ 则更为微妙：还必须额外施加时间连续性，即

$$v \in C_t L^d,$$

对于 $d = 2$，3，而不只是 $v \in L_t^\infty L^2$ （例如参见 [35, 56, 61, 50]）。有趣的是，对于维数$d \geq 4$，不再需要这一时间连续性假设 [50]。

作为定理 1.1的推论，我们可以推出，对于受迫二维纳维–斯托克斯方程，低于*Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin* 类 时存在非唯一性。只需在定理 $s = -1$ 1.1中取 即可将结论推广到广义表面准地转方程。

定理 1.6 （低于 Ladyzhenskaya–Prodi–Serrin 类时的非唯一性）。存在一个力

$$g \in L_t^1 L^b \quad \textit{for all} \quad 1 \leq b < 2,$$

使得存在两个不同的解 v_1 和 v_2 满足二维纳维–斯托克斯方程 (16)且初始数据为 $v^\circ = 0$ 使得

$$v_j \in L_t^p L^q \quad \textit{for all} \quad \frac{2}{p} + \frac{2}{q} > 1.$$

此外，对于 $p = \infty$ ，有

$$v_j \in C_t L^q \cap L_t^\infty L^2 \quad \textit{for all} \quad 1 \leq q < 2.$$

证明。对于 $\alpha = 0$， $\beta = 2$，我们在定理 $r = s = -1$ 中取 $a = 1$ 和 $a = 1$ 。回忆由 Biot-Savart 定律可得 $v_j \sim \Lambda^{-1}\omega_j$ 和 $g \sim \Lambda^{-1} f$。 □

注意，定理 1.6 中的解不可能是 Leray–Hopf解。一方面，我们有 $g \notin L^1_t L^2$ 和 $v_j \notin C_t L^2$。另一方面，取 $p = q = 2$ 和 $\gamma = 1 + s$，我们得到 $v_j \in L^2_t \dot{H}^\gamma$ 对所有 $\gamma < 1$均成立，而 $v_j \notin L^2_t \dot{H}^1$。类似地， $g \notin L^2_t \dot{H}^{-1}$。

通过调整参数，可以在其他函数空间中描述这些解和强迫项。例如，取 $s = 0$ 和 $p = 1$，我们对所有 $q < \infty$得到 $\omega_j \in L^1_t L^q$ ，因此它们恰好位于 Beale–Kato–Majda类之下。

无外力纳维–斯托克斯方程在 $\mathbb{T}^d$ 中低于 LPS类的非唯一性，最早由 Cheskidov 和 Luo 在以下端点情形中证明： $L^p_t L^\infty$ 其中 $p < 2$ 以及 $d \geq 2$ 在 [18], , 以及在$C_t L^q$ 其中 $q < 2$ 以及 $d = 2$ 在 [19] （另见 [58, 59]）。情形 $L^2_t L^q$ 其中 $q < \infty$ 以及 $d \geq 2$ 最近在 [17]中得到确立。

据我们所知，在无外力二维情形中，对于 $p \neq 2$， ∞ 和 $q \neq \infty$，低于 LPS类的尖锐非唯一性仍是一个开放问题。值得注意的是， $\mathbb{R}^3$中的非唯一 Leray-Hopf解最近在 [39] 中构造出来，它们恰好位于 LPS类之下。

1.3.2. 广义*SQG*情形。 在后续研究中，人们针对 α的其他取值也建立了类似的唯一性判据。对于耗散型表面准地转方程（$\alpha = 1$），Constantin 和 Wu [24]证明，在亚临界区域 $1 < \beta \leq 2$内，当解还满足 LPS 型条件时，具有强迫项 $f \in L^2_t H^{-\frac{\beta}{2}}$的 Resnick 解 $\theta \in L^\infty_t L^2 \cap L^2_t H^{\frac{\beta}{2}}$是唯一的。

$$\theta \in L^p_t L^q \quad \text{with} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} = \beta - 1, \quad q \geq 1.$$

定理 1.1 的下述推论表明，耗散型表面准地转方程的 Constantin–Wu 类尖锐。注意， [24] 所考虑的 $0 < \beta \leq 2$区域不同于定理 1.7 中允许的 $0 < \beta < 4$。此外，当 $0 < \beta < 2$ 时，此处构造的解属于 Resnick 类。

我们指出，定理表述为 $\alpha = 1$ 是为了便于与 [24]进行比较。取定理 $s = 0$ 中的 1.1，即可将结果推广到广义表面准地转方程。对于 $\alpha = 0$，这可以理解为对 $\nabla v \in L^p_t L^q$的控制。鉴于 Beir˜ao da Veiga 的唯一性判据，这在三维情形下可能具有研究意义。

定理 1.7 (Constantin–Wu 类以下的非唯一性)。 设 $\alpha = 1$ 且 $0 < \beta < 4$。存在一个力 f ，使得存在两个不同的解 θ_1 和 θ_2 ，它们满足 $(1, \beta)$-表面准地转方程 (1)，且 $\theta^\circ = 0$ 满足

$$\theta_j \in L^p_t L^q \quad \textit{for all} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > \beta - 1.$$

此外，对于 $p = \infty$ ，有

$$\theta_j \in C_t L^q \cap L^\infty_t L^{\frac{2}{\beta-1}} \quad \textit{for all} \quad \frac{2}{q} > \beta - 1.$$

此外，如果 $\beta < 2$，那么 $\theta_j \in L^\infty_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}$和 $f \in L^1_t L^2 \cap L^2_t \dot{H}^{-\frac{\beta}{2}}$。–

证明。 对于 $\alpha = 1$，我们在定理 1.1中取 $s = 0$ 。对于 $\beta < 2$，定理 1.5 保证它们是L^2-能量解。 □

后来，在 $0 < \beta \leq 2$这一范围内，Dong 和 Chen [29, 30] 通过控制梯度建立了另一个唯一性判据，即满足以下 LPS 型条件

$$\nabla\theta \in L^p_t L^q \quad \text{with} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} = \beta, \quad \frac{2}{\beta} < q < \infty.$$

Re此类解的正则性此前已由 Chae [15] 证明。

随后，Zhao 和 Liu 将这一唯一性判据推广 [67] 至广义表面准地转方程（$0 < \alpha \leq 1$）的情形 $0 < \beta < 2\alpha$。在这种情况下，他们假设

$$\nabla\theta \in L_t^p L^q \quad \text{with} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} = 1 + \beta - \alpha, \quad \frac{2}{1+\beta-\alpha} < q < \infty.$$

下面这个定理 1.1的推论表明了 *Dong–Chen–Zhao–Liu* 类的尖锐性。请注意， [29, 30, 67] 所考虑的区域为 $0 < \beta < 2\alpha$，而在定理 1.7 中我们允许$0 < \beta < 3 + \alpha$。此外，对于 $0 < \beta < 1 + \alpha$，我们的解属于 Resnick 类。

定理 1.8（Dong–Chen–Zhao–Liu 类以下的非唯一性）。 设 $0 \leq \alpha \leq 1$ 且 $0 < \beta < 3 + \alpha$。存在一个力 f，使得存在两个不同的解 θ_1 和 θ_2，它们满足 （α，β）-表面准地转方程 （1），并且 $\theta^\circ = 0$ 满足

$$\nabla\theta_j \in L_t^p L^q \quad \textit{for all} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} > 1 + \beta - \alpha.$$

此外，对于 $p = \infty$，有

$$\nabla\theta_j \in C_t L^q \cap L_t^\infty L^{\frac{2}{1+\beta-\alpha}} \quad \textit{for all} \quad \frac{2}{q} > 1 + \beta - \alpha.$$

此外，若 $\beta < 1 + \alpha$，则 $\theta_j \in L_t^\infty L^2 \cap L_t^2 \dot{H}^{\frac{\beta}{2}}$和 $f \in L_t^1 L^2 \cap L_t^2 \dot{H}^{-\frac{\beta}{2}}$。 –

证明。 对于 $\alpha = 1$，我们在定理 $s = 1$ 中取 $s = 1$ 定理 1.1。对于 $\beta < 1 + \alpha$，定理 1.5 保证它们是 L^2-能量解。 □

1.3.3. 其他唯一性判据。 我们指出，在 [30], Dong 和 Chen 证明了L^2-耗散型表面准地转方程的能量解，其结果适用于更广泛的 Besov 类，即

$$\nabla\theta \in L_t^p B_{q,\infty}^0 \quad \text{with} \quad \frac{\beta}{p} + \frac{2}{q} = \beta, \quad \frac{2}{\beta} < q < \infty.$$

此前，Abidi 和 Hmidi [1] 证明了临界 SQG 方程在 Besov 类 $\theta \in C_t \dot{B}_{\infty,1}^0 \cap L_t^1 \dot{B}_{\infty,1}^1$. 中的唯一全局解存在性。更多关于 Besov 空间框架中的唯一性判据，请参见 [6, 16] 。

尽管我们预期非唯一解也恰好不属于这些函数类，但为避免引入额外的参数和记号，我们选择用勒贝格空间和索博列夫空间来表述结果。感兴趣的读者可以像第2节中那样，根据定理1.1计算解的尺度，并验证相应的贝索夫空间范围。

最后提及，针对广义表面准地转方程，人们还提出了若干其他唯一性判据。我们回顾 Koch 和 Tataru 关于纳维–斯托克斯方程在临界类 [45] BMO^{-1}中小初值适定性的经典结果。如备注 1.2(iv)所述，定理1.6 中构造的受迫二维纳维–斯托克斯方程的两个不同解满足 $v_j \in L_t^\infty BMO^{-1}$。另请参阅 Coiculescu 和 Palasek [21],以及 Cheskidov、Dai 和 Palasek [17]近期的研究。

对此，Marchand 在 [55] 中证明， $\theta \in L_t^2 L^2 \cap L_t^\infty \dot{H}^{-\frac{1}{2}}$耗散型表面准地转方程的解在 $L_t^\infty BMO$中足够小时是唯一的。因此，对于定理1.4中构造的 Marchand 非唯一解，小性条件必定不成立。

此外，Liu、Jia 和 Dong [51] 证明，对于 $\alpha = 1$ 和 $0 < \beta < 2$，若初始数据 $\theta^\circ \in H^{2+\beta}$满足 $\theta \in L_t^\infty L^2 \cap L_t^2 H^{\frac{\beta}{2}}$，并且还满足 $\nabla\theta \in L_t^1 BMO$,– 则解是唯一的。因此，定理 1.4中构造的解不属于这一类。

2. Self-similar coordinates

我们考虑自相似变量

$$X = \frac{x}{t^{1/\beta}}, \qquad \tau = \frac{1}{\nu}\log t, \tag{17}$$

用参数 $\nu > 0$ 表示，待定。选择字母 ν 是因为它稍后会出现在分数阶拉普拉斯算子前面，因此代表某种黏度。

命题 2.1。 由变量代换给出的这一对 (θ, f)

$$\theta(t,x) = \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\nu}\Theta(\tau, X), \tag{18a}$$

$$f(t,x) = \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-2}}{\nu^2}F(\tau, X), \tag{18b}$$

是 (α,β)-表面准地转方程 (1) 的解，当且仅当这一对 (Θ, F) 满足 自相似 α,β)-表面准地转方程

$$\partial_\tau \Theta + V\cdot\nabla\Theta + \nu J\Theta = F, \tag{19}$$

其中 $J = J_{\alpha,\beta}$ 由下式给出

$$J\Theta = \Lambda^\beta\Theta + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\Theta - \frac{1}{\beta}X\cdot\nabla\Theta.$$

相应的速度满足以下关系

$$v(t,x) = \frac{t^{\frac{1}{\beta}-1}}{\nu}V(\tau, X), \tag{20}$$

也就是说，(v, V) 可通过 α-*Biot–Savart* 定律(1c)分别从(θ,Θ) 中恢复 .

证明。直接计算可得

$$\partial_t\theta = \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-2}}{\nu^2}\left(\partial_\tau\Theta + \nu\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\Theta - \frac{\nu}{\beta}X\cdot\nabla\Theta\right).$$

此外，利用引理A.2，还可得到（20），以及

$$v\cdot\nabla\theta = \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-2}}{\nu^2}V\cdot\nabla\Theta,$$

and

$$\Lambda^\beta\theta = \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-2}}{\nu}\Lambda^\beta\Theta.$$

证明至此完成。 □

命题 2.2。成立

$$\|\Lambda^s\theta\|_{L^p_t L^q} = \frac{1}{\nu}\left(\int_0^T t^{p\left(\frac{\alpha-s}{\beta}+\frac{2}{\beta q}-1\right)}\|\Lambda^s\Theta(\tau)\|^p_{L^q}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中回顾一下 $\tau = \frac{1}{\nu}$对数t。

证明。 利用引理 A.2，我们计算得

$$\Lambda^s\theta = \frac{t^{\frac{\alpha-s}{\beta}-1}}{\nu}\Lambda^s\Theta.$$

因此，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\Lambda^s \theta|^q \,\mathrm{d}x = \frac{t^{q\left(\frac{\alpha-s}{\beta}-1\right)+\frac{2}{\beta}}}{\nu^q} \int_{\mathbb{R}^2} |\Lambda^s \Theta|^q \,\mathrm{d}X.$$

证明至此结束。 □

类似地，我们得到力的缩放关系。

命题 2.3。成立

$$\|\Lambda^r f\|_{L_t^a L^b} = \frac{1}{\nu^2} \left(\int_0^T t^{a\left(\frac{\alpha-r}{\beta}+\frac{2}{\beta b}-2\right)} \|\Lambda^s F(\tau)\|_{L^q}^a \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{a}},$$

其中回顾一下 $\tau = \frac{1}{\nu}$ 对数 t。

注意到，只要满足2.2 和2.3 中的条件，命题中的积分就是有限的

$$p\left(\frac{\alpha-s}{\beta}+\frac{2}{\beta q}-1\right) > -1, \qquad a\left(\frac{\alpha-r}{\beta}+\frac{2}{\beta b}-2\right) > -1,$$

这与（4）中的情形一致。

3. Proof of Theorem 1.1

我们的目标是构造一族互不相同的解 θ_ϵ，其由参数 $\epsilon \geq 0$确定，满足（α, β）-表面准地转方程（1），其中外部强迫项为 f。根据命题2.1，我们可以在自相似坐标（17）中将这些解表示为

$$\theta_\epsilon(t,x) := \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}}{\nu} \Theta_\epsilon(\tau, X), \tag{21a}$$

$$f(t,x) := \frac{t^{\frac{\alpha}{\beta}-2}}{\nu^2} F(\tau, X), \tag{21b}$$

对于某些解 Θ_ϵ，它们满足带有外部强迫 F的自相似（α, β）-表面准地转方程（19），其中 F待定。我们将这些解拆分为

$$\Theta_\epsilon := \bar{\Theta} + \epsilon \tilde{\Theta}, \tag{22}$$

$\bar{\Theta}$对于某个与 τ无关的温度 Θ 以及一个偏差 $\tilde{\Theta}$，我们要求它们满足

$$\tilde{\Theta}|_{\tau=-\infty} = 0.$$

自相似　类似的（α，β）-表面准地转方程（19）用这一分解（22）表示为　　s

$$\bar{V} \cdot \nabla \bar{\Theta} + \nu J \bar{\Theta} + \epsilon(\partial_\tau - L_\nu)\tilde{\Theta} + \epsilon^2 \tilde{V} \cdot \nabla \tilde{\Theta} = F, \tag{23}$$

$\bar{\Theta}$　$\tilde{\Theta}$　$\bar{\Theta}$　$\tilde{\Theta}$其中，速度 V和 V由 Θ 和 Θ分别通过 α-Biot-Savart 定律（1c）求得，而$L_\nu = L_{\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \bar{\Theta}}$是自相似（$\alpha$，$\beta$）-表面准地转方程（19）在稳态温度$\bar{\Theta}$附近的线性化：

$$L_\nu \Theta := -\bar{V} \cdot \nabla \Theta - V \cdot \nabla \bar{\Theta} - \nu J \Theta. \tag{24}$$

注意到 L_0 形式上对应于原坐标系中 α-表面准地转方程（2）（不含耗散项）的线性化。

我们的目标是证明，上述外力 F 可以选取为与 ϵ无关。我们先关注 ϵ 中的一阶项，它对应于线性演化方程

$$(\partial_\tau - L_\nu)\Theta^{\mathrm{lin}} = 0.$$

通过分离变量法，我们推导出

$$\Theta^{\mathrm{lin}}(\tau, X) = \Re(e^{\lambda\tau} W(X)),$$

对于满足以下条件的某个特征对 $(\lambda,\ W)$

$$L_\nu W = \lambda W. \tag{25}$$

在第 4 节中，我们证明存在一个自相似不稳定涡旋 Θ，这意味着 $L_{\nu,\bar{\Theta}}$具有一个满足 $\Re\lambda > 0$ 的特征对。这保证了

$$\Theta^{\mathrm{lin}}|_{\tau=-\infty} = 0.$$

为此，我们将 Vishik 的谱论论证 [65, 66] 应用于[14]中构造的不稳定涡旋。主要的新意在于，我们将扩散作为一种扰动纳入其中。

定理 3.1 (自相似不稳定性)。 设 $0 \le \alpha \le 1$ 且 $0 < \beta < 3 + \alpha$。存在一个$\Theta \in C_c^\infty$零均值涡旋，使得对于某个 $\nu > 0$，存在 $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re\lambda_\nu > 0$ 且$W_\nu \in H^k(\mathbb{R}^2)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$，满足特征值问题 (25) 关于 $L_\nu = L_{\alpha,\ \beta,\ \nu,\ \bar{\Theta}}$ 见 (24)。

在一篇近期预印本中 [28], ，Dolce 和 Mescolini 重拾了 Golovkin 的一个巧妙技巧 [36] ，该技巧在线性层面确立自相似不稳定性后，便可用于证明非唯一性。Golovkin 技巧的做法很简单，就是将偏差取为

$$\tilde{\Theta} = \Theta^{\mathrm{lin}},$$

这要求取如下的力

$$F = \bar{V} \cdot \nabla\bar{\Theta} + \nu J\bar{\Theta} + V^{\mathrm{lin}} \cdot \nabla\Theta^{\mathrm{lin}}.$$

显然，二者均（$\epsilon = \pm 1$）

$$\Theta_+ = \bar{\Theta} + \Theta^{\mathrm{lin}}, \qquad \Theta_- = \bar{\Theta} - \Theta^{\mathrm{lin}},$$

求解该23式 F。解的光滑性使我们能够通过 Sobolev 缩放（命题1.1 和2.2 以及2.3）得出定理

注3.2。或者，也可以考虑维希克力项

$$F = \bar{V} \cdot \nabla\bar{\Theta} + \nu J\bar{\Theta}.$$

这要求将偏差分解为

$$\tilde{\Theta} = \Theta^{lin} + \epsilon\Theta^{cor},$$

其中修正项必须满足

$$(\partial_\tau - L_\nu)\Theta^{cor} = -\tilde{V} \cdot \nabla\tilde{\Theta}.$$

为确保解彼此不同，需要验证存在满足渐近行为的此类 Θ^{cor}

$$\Theta^{cor} = o(e^{\lambda\tau}), \qquad \tau \to -\infty.$$

这一论证更为复杂，但能够从相同的初始数据和相同的径向强迫出发，构造的不只是两个解，而是无穷多个不同的解。要完成 *Jia–Sverˇak* 计划的最后一步，就是找到一个自相似不稳定的 Θ，使得$F = 0$。

4. Self-similar instability

本节证明定理 3.1 适用于任意固定的参数对 (α,β)，且满足条件 $0\le\alpha\le 1$ 和 $0<\beta<3+\alpha$。我们考虑径向对称稳态温度 Θ这一特殊情形，称为涡旋。在极坐标 $X=Re^{i\phi}$下，这对应于

$$\bar{\Theta}(X)=\bar{\Theta}(R). \tag{26}$$

我们在具有零均值的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 涡旋空间 U_0 中工作，

$$U_0:=\left\{\bar{\Theta}\in L^2 : \bar{\Theta}(X)=\bar{\Theta}(R)\,,\ \int_0^\infty \bar{\Theta}(R)R\,\mathrm{d}R=0\right\}. \tag{27}$$

在此背景下，给定 $0\neq n\in\mathbb{Z}$，自然会在纯 n重对称 温度空间中寻找特征函数，

$$U_n:=\{W\in L^2 : W(X)=W_n(R)e^{in\phi}\}. \tag{28}$$

注意，U_n 中的任意元素都具有零均值。由于 $U_{-n}=U_n^*$，不失一般性，我们考虑 $n\in\mathbb{N}$的情形。容易看出，空间 U_n 在 L_ν 下是不变的（见引理 A.1）。

定义 4.1。若存在某个 $n\in\mathbb{N}$，使得存在满足 $L_{0,\,\bar{\Theta}}W=\lambda W$ 且满足 $\Re\lambda>0$ 的 $0\neq W\in U_n$，则称涡旋 Θ 是不稳定的 。类似地，若存在某个 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\nu>0$，使得存在满足 $L_{\nu,\,\bar{\Theta}}W_\nu=\lambda_\nu W_\nu$且满足 $\Re\lambda_\nu>0$ 的 $0\neq W_\nu\in U_n$，则称 Θ 是自相似不稳定的 。

回顾一下 [14, 定理 3。3], 该定理证明了 α–表面准地转方程（2）（无耗散）存在不稳定涡旋。注意，这等价于按照定义 4.1的含义成为不稳定涡旋，因为当 $\nu=0$时，扩散项消失。

定理 4.2。设 $0\le\alpha\le 1$。对于每个 $n\ge 2$，都存在一个不稳定涡旋 $\Theta\in C_c^\infty\cap U_0$，使得相应的特征函数满足 $W\in C_c^\infty\cap U_n$。

为了证明定理 Θ 中的不稳定涡旋 4.2 也是自相似不稳定的，我们遵循 Vishik 的谱论论证。这需要将作用于 L_ν 上的 U_n算子分解为

$$L_\nu=A_\nu+C,$$

其中，(A_ν) 是一族生成压缩半群并且关于参数 ν 具有某种连续性的线性算子，而 C 是紧的。根据经典算子理论，这意味着谱 $\sigma(L_\nu)$ 满足：对于任意 $\nu\ge 0$ 和 $w>0$,

$$\sigma(L_\nu)\cap\{\Re\lambda>w\}$$

是有限的，并且由孤立特征值组成。现在，定理 4.2 给出了一个特征值 λ_0，其对于 $\nu=0$具有正实部。然后，利用关于参数 ν的连续性，可以证明，当 $\nu>0$充分小时，还必然存在特征值 λ_ν 接近 λ_0。

命题 4.3。假设以下条件成立：

(1) 设 $(A_\nu)_{\nu\ge 0}$ 是某个希尔伯特空间 H 上生成压缩半群的一族线性算子。假设对于任意固定的 $\tau\ge 0$ 和 $W\in H$，映射

$$\nu\mapsto e^{\tau A_\nu}W \tag{29}$$

从 $[0,\infty)$ 到 H连续。

(2) 设 C 是 H上的紧算子。

(3) 设 $L_\nu=A_\nu+C$。假设存在 $\lambda_0\in\mathbb{C}$，使得 $\Re\lambda_0>0$ 和 $W_0\in D(L_0)$，满足

$$L_0W_0=\lambda_0W_0.$$

于是，对于每个 $\nu_0>0$，都存在满足 $\Re\lambda_\nu>\frac{\Re\lambda_0}{2}$ 和 $W_\nu\in D(L_\nu)$ 的 $\lambda_\nu\in\mathbb{C}$，使得对于某个 $0<\nu\le\nu_0$,

$$L_\nu W_\nu=\lambda_\nu W_\nu.$$

证明。证明请参见 [14, 第 6 节。2] 。 □

在我们的情形中，我们考虑 $H = U_n$ ，并将算子 L_ν 分解为

$$L_\nu = \nu\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + T_\nu - \nu\Lambda^\beta + K, \tag{30}$$

其中

$$T_\nu\Theta = -\bar{V}_\nu \cdot \nabla\Theta \quad \text{with} \quad \bar{V}_\nu = \bar{V} - \frac{\nu}{\beta}X,$$

$$K\Theta = -V \cdot \nabla\bar{\Theta}.$$

回顾一下，速度（V, V）分别通过 Θ, Θ）由（ α-Biot-Savart 定律（ 1c）恢复。注意， K 的定义域为 $D(K) = U_n$， Λ^β 的定义域为 $D(\Lambda^\beta)$， $= U_n \cap H^\beta$ 而 T_ν 和 L_ν 的定义域为

$$D(T_\nu) = \{\Theta \in U_n : \operatorname{div}(\bar{V}_\nu\Theta) \in U_n\} \quad \text{and} \quad D(L_\nu) = D(T_\nu) \cap H^\beta.$$

因此，所讨论的算子在 U_n中是闭且稠密定义的 .

O另一方面， T_ν 是一个满足以下引理的输运算子。

引理 4.4. 算子 T_ν 生成压缩半群 $(e^{\tau T_\nu})_{\tau\geq 0}$ ，满足

$$\|e^{\tau T_\nu}\|_{\mathcal{L}} = e^{-\frac{\nu}{\beta}\tau}, \tag{31}$$

对所有 $\tau \geq 0$均成立。此外，对于任意 $\tau \geq 0$ 和 $\Theta \in U_n$，映射

$$\nu \mapsto e^{\tau T_\nu}\Theta$$

是从 $[0, \infty)$ 到 U_n的连续映射。

证明. 参见 [14, 引理 6.1] 中的证明。 □

另一方面，当 $0 \leq \alpha < 1$时， K 是一个紧算子；而当 $\alpha = 1$ 时，它可以分解为一个斜伴随算子和一个交换子。更多细节请参见接下来的几个小节。

4.1. **情形** $0 \leq \alpha < 1$**.** 本节将证明 Θ 在以下情形下是自相似不稳定的$0 \leq \alpha < 1$。为此，我们将把命题 4.3 应用于

$$A_\nu = \nu\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + T_\nu - \nu\Lambda^\beta, \qquad C = K.$$

注意，在 [14, 引理 6.5] 中，我们证明了 K 在 U_n 上是紧的，其中 $0 \leq \alpha < 1$。因此，接下来只需验证 $(A_\nu)_{\nu\geq 0}$ 满足命题1中的条件 (4.3。

引理 4.5。算子族$(A_\nu)_{\nu\geq 0}$ 满足命题(1) 中的条件，即命题*4.3*中的条件。

证明。由于 A_ν 是一个输运-扩散算子（相差一个由恒等算子的倍数给出的时间平移），它生成一个强连续半群。具体而言，对于任意 $\Theta_0 \in L^2_n \cap C^\infty_c$，存在唯一的全局解 $\Theta = e^{\tau A_\nu}\Theta_0$ 满足

$$\partial_\tau\Theta = A_\nu\Theta, \qquad \Theta|_{\tau=0} = \Theta_0.$$

利用这些恒等式（请记住，散度$(V_\nu) = -2\frac{\nu}{\beta}$） –

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta T_\nu\Theta \,\mathrm{d}X = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \bar{V}_\nu \cdot \nabla|\Theta|^2 \,\mathrm{d}X = -\frac{\nu}{\beta}\int_{\mathbb{R}^2} |\Theta|^2 \,\mathrm{d}X,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta\Lambda^\beta\Theta \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} |\Lambda^{\frac{\beta}{2}}\Theta|^2 \,\mathrm{d}x \geq 0,$$

t以下能量估计表明， A_ν 生成一个压缩半群

$$\partial_\tau \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta|^2 \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta A_\nu \Theta \,\mathrm{d}X = \frac{\nu}{\beta}(\alpha - \beta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta|^2 \,\mathrm{d}X \leq 0.$$

我们指出，通过稠密性，在整个定义域上也可得到相同的不等式。输运-扩散方程中的连续性$\nu \geq 0$ 是众所周知的。□

4.2. **情形** $\alpha = 1$。 我们先回顾算子 K 关于 $\alpha = 1$的以下分解。

命题 4.6。有如下结论

$$K = S + C,$$

其中， S 是一个斜伴随算子，而 C 是交换子

$$C\Theta = \frac{1}{2}[\Lambda^{-1}\nabla^\perp, \nabla\bar{\Theta}]\Theta. \tag{32}$$

此外， C 在 U_n 中是紧的。

证明。参见 [14, 命题 6.3 和引理 6。6]中的证明。 □

现在我们应用命题 4.3来

$$A_\nu = \nu\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + T_\nu - \nu\Lambda^\beta + S, \qquad C = K - S.$$

首先，我们回顾强连续半群在有界扰动下的稳定性，相关内容见 [32, 第三章，有界扰动定理]。

命题 4.7。设 A 是希尔伯特空间 H 上的线性算子，且生成一个强连续半群，并设 $B \in \mathcal{L}.$ 。则， $A + B$ 生成一个强连续半群。

引理 4.8。算子族$(A_\nu)_{\nu\geq 0}$ 满足命题 (1) 中的条件 *4.3*。

证明。应用引理 4.5 以及 $S = K - C \in \mathcal{L}$，命题 4.7 推出 A_ν生成一个强连续半群。与引理4.5的证明类似，但现在利用 S 是斜自伴的这一事实，即:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta S \Theta \,\mathrm{d}x = 0,$$

关于 $\Theta = e^{\tau A_\nu}\Theta_0$ 的以下能量估计表明， A_ν 生成一个压缩半群

$$\partial_\tau \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta|^2 \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta A_\nu \Theta \,\mathrm{d}X = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(A_\nu - S)\Theta \,\mathrm{d}X = \frac{\nu}{\beta}(\alpha - \beta - 1) \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta|^2 \,\mathrm{d}X \leq 0.$$

关于 $\nu \geq 0$ 的连续性与引理 4.5 中的结论相同，因为 K 不依赖于 ν。 □

我们已经看到，对于所有 $0 \leq \alpha \leq 1$ 和 $0 < \beta < 3 + \alpha$，命题 4.3 的条件均已满足。这保证了 $\nu > 0$ 的存在，使得线性化算子 L_ν 存在一个特征对（λ_ν， W_ν），其中 $\Re\lambda_\nu > 0$且 $W_\nu \in D$（L_ν）。最后，我们验证该特征函数是光滑的。

命题 4.9。对于所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $W_\nu \in H^k$（$\mathbb{R}^2$）。

证明。 无扩散的情形见 [14, 命题 6。4]。在此，借助（分数阶）拉普拉斯算子，可以通过标准的自举论证推导出特征函数的正则性。 □

Appendix A.

引理 A.1。 对于每个 $W = W_n e^{in\phi} \in U_n$，都有

$$T_\nu W = \left(\frac{\nu}{\beta} R\partial_R - in\frac{\bar{V}_\phi}{R}\right) W_n e^{in\phi},$$
$$KW = -in\frac{V_{n,\alpha}[W_n]}{R}\partial_R\bar{\Theta}e^{in\phi},$$
$$\Lambda^\beta W = T_{n,\beta}[W_n]e^{in\phi},$$

是

$$V_{n,\alpha}[W_n](R) = C_\alpha \int_0^\infty I_{n,\alpha}\left(\frac{R}{S}\right) W_n(S) S^{1-\alpha}\,\mathrm{d}S,$$
$$T_{n,\beta}[W_n](R) = \mathcal{H}_n[(\cdot)^\beta \mathcal{H}_n[W_n](\cdot)](R),$$

其中 $C_\alpha = \frac{2^\alpha\,\Gamma}{2\pi\,\Gamma\underline{\quad}\frac{(1+\frac{\alpha}{2})}{-}\frac{-(1-\frac{\alpha}{2})}{}} > 0$、 $I_{n,\ \alpha}$是核函数

$$I_{n,\alpha}(\sigma) = \frac{\sigma}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\beta)\sin(n\beta)}{|\sigma - e^{i\beta}|^{2+\alpha}}\,\mathrm{d}\beta,$$

且 $\mathcal{H}_n[f]$ 是 阶数为 n的汉克尔变换，作用于 f （此处 J_n 是阶数为 n的贝塞尔函数）：

$$\mathcal{H}_n[f](R) = \int_0^\infty f(\rho)J_n(\rho R)\rho\,d\rho.$$

证明。 前两个方程的推导与 [14, 推论 23]中的相同。第三个方程的推导如下。利用傅里叶变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x,$$

并在极坐标下写作 $X = (R,\ \phi)$ 和 $\xi = (\rho,\ \varphi)$，我们计算得到

$$\widehat{W}(\rho,\varphi) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} W_n(R)e^{in\phi}e^{-iR\rho\cos(\phi-\varphi)}R\,d\phi\,dR.$$

作变量代换 $\psi = \phi - \varphi$，得到

$$\widehat{W}(\rho,\varphi) = e^{in\varphi}\int_0^\infty W_n(R)R\left(\int_0^{2\pi} e^{in\psi}e^{-iR\rho\cos\psi}\,d\psi\right)dR.$$

利用 $e^{-iR\rho\cos\psi}$ 的雅可比–安格尔展开，得到

$$\int_0^{2\pi} e^{in\psi}e^{-iR\rho\cos\psi}\,d\psi = 2\pi(-i)^n J_n(R\rho),$$

其中 J_n 是 n阶贝塞尔函数。因此，

$$\widehat{W}(\rho,\varphi) = 2\pi(-i)^n\left(\int_0^\infty W_n(R)J_n(R\rho)R\,dR\right)e^{in\varphi} = 2\pi(-i)^n\mathcal{H}_n[W_n](\rho)e^{in\varphi}.$$

由于 Λ^β 作为符号为 $|\xi|^\beta = \rho^\beta$ 的傅里叶乘子，我们有

$$\widehat{\Lambda^\beta W}(\rho,\varphi) = \rho^\beta\widehat{W}(\rho,\varphi) = \big(2\pi(-i)^n\rho^\beta\mathcal{H}_n[W_n](\rho)\big)e^{in\varphi}.$$

应用逆傅里叶变换（该变换再次实现变量分离），我们 结论 e

$$\Lambda^\beta W(R,\phi) = \left(\int_0^\infty \rho^\beta\mathcal{H}_n[W_n](\rho)J_n(R\rho)\rho\,d\rho\right)e^{in\phi} = \mathcal{H}_n[\rho^\beta H_n[W_n](\rho)](R)e^{in\phi}.$$

因此 $\Lambda^\beta W$ 是 t 的其形式为（径向函数）$\times e^{in\phi}$，因此 Λ^β 保持 n 重旋转对称性。 □

引理 A.2. 对于任意 $s \in \mathbb{R}$、 $h \in H^s$ 和 $\lambda > 0$ ，有

$$\Lambda^s(h_\lambda) = \lambda^s(\Lambda^s h)_\lambda$$

其中 $h_\lambda(x) = h(\lambda x)$。

证明。 我们仍将傅里叶变换记作

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x.$$

注意，算子 Λ^s 是一个傅里叶乘子，其符号为 $|\xi|^s$:

$$\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = |\xi|^s \hat{f}(\xi).$$

容易验证,

$$\widehat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

因此,

$$\widehat{\Lambda^s f_\lambda}(\xi) = |\xi|^s \frac{1}{\lambda^2}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

最后，我们使用逆公式返回空间域

$$\begin{aligned}
\Lambda^s f_\lambda(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[|\xi|^s\frac{1}{\lambda^2}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right]e^{ix\cdot\xi}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\lambda^s|\eta|^s\frac{1}{\lambda^2}\hat{f}(\eta)e^{i(\lambda x)\cdot\eta}\lambda^2\,d\eta \\
&= \lambda^s\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\eta|^s\hat{f}(\eta)e^{i(\lambda x)\cdot\eta}\,d\eta\right] = \lambda^s\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{\Lambda^s f}(\eta)e^{i(\lambda x)\cdot\eta}\,d\eta\right] \\
&= \lambda^s(\Lambda^s f)(\lambda x) = \lambda^s(\Lambda^s f)_\lambda(x).
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

致谢。作者感谢 Angel Castro 和 Daniel Faraco 在本文准备过程中提出的宝贵意见。

作者感谢瓦伦西亚自治区政府通过“新兴研究团队补助”项目（CIGE/2024/115）提供的支持。

F.M. 感谢 RYC2023-045748-I 项目以及由西班牙科学、创新与大学部通过 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2024-158418NB-I00 和 PID2024-158664NB-C2 项目提供的支持。

M.S. 感谢由 MCIN/AEI/10.13039/ 501100011033 和欧洲区域发展基金（欧洲区域发展基金）（建设欧洲的一种方式）资助的项目 PID2022-136589NB-I00 提供支持。

References

[1] H. Abidi 和 T. Hmidi. 关于临界准地转方程的整体适定性.

SIAM J. Math. , ( ): – . *Anal.* 40 1 167 185, 2008

[2] D. Albritton, E. Bru´e 和 M. Colombo. 受迫Navier-Stokes方程的 Leray 解非唯一性. *Ann. of Math. (2)*, 196(1):415–455, 2022年. [3] D. Albritton, E. Bru

´ *Instability and non-* e, M. *uniqueness for the 2D Euler equations after M. Vishik* Colombo, C. De Lellis, V. Giri, M. Janisch 和 H. Kwon. ,.《数学年刊研究》. 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2024年. [4] D. Albritton 和 M. Colombo. 二维弱耗散纳维–斯托克斯方程的 Leray 解非唯一性. *Comm. Math. Phys.*, 402(1):429–446, 2023年. [5] D. Albritton, M. Colombo 和 G. Mescolini. 受迫二维欧拉方程的消失黏性非唯一解. *arXiv:2507.19257*, 2025年. [6] H. Bahouri, J.-Y. Chemin 和 R. Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*第343卷. 施普林格，海德堡，2011年. [7] H. Beir˜ao da Veiga. 纳维–斯托克斯方程的一个新正则性类，定义于$\mathbf{R}^n$. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 16 4 407 412, 199516 1995 6, 797 ( ): – . 中文摘要见《中国数学年刊》A辑（），第期。

[8] T. Buckmaster, M. Colombo 和 V. Vicol. 时间奇异集的豪斯多夫维数严格小于1的纳维–斯托克斯方程野解. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 24(9):3333–3378, 2022年. [9] T. Buckmaster, S. Shkoller 和 V. Vicol. 表面准地转方程弱解的非唯一性.

Comm. Pure , ( ): –

Appl. Math. 72 9 1809 1874, 2019

. [10] T. Buckmaster 和 V. Vicol. 纳维 – 斯托克斯方程弱解的非唯一性 . *Ann. of Math. (2)*, 189 1 101( ): –144, 2019 年 . [11] J. Burczak, S. Modena 和 L. Sz´ekelyhidi. 幂律流的非唯一性 . *Comm. Math. Phys.*, 388(1):199– 243, 2021 年 . [12] L. A. Caffarelli 和 A. Vasseur. 具有分数阶扩散的漂移扩散方程及准地转方程. *Ann. of Math. (2)*, 171(3):1903–1930, 2010年. [13] A. Castro, D. Faraco, F. Mengual 和 M. Solera. 受迫二维欧拉方程的 Vishik 非唯一性定理的一个证明. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2025年. [14] A. Castro, D. Faraco, F. Mengual 和 M. Solera. 不稳定涡旋、带外力的尖锐非唯一性以及表面准地转方程的全局光滑解. *arXiv:2502.10274*, 2025年. [15] D. Chae. 关于耗散准地转方程的正则性条件. *SIAM J. Math. Anal.*, 37 5 1649 1656, 2006年 ( ): – . [16] D. Chae 和 J. Lee. 超临界耗散准地转方程的整体适定性.

Comm. , ( ): –

Math. Phys. 233 2 297 311, 2003

. [17] A. Cheskidov, M. Dai 和 S. Palasek. 纳维 – 斯托克斯方程解的瞬时 I 型爆破解与光滑解非唯一性 . *arXiv:2511.09556*, 2025年. [18] A. Cheskidov 和 X. Luo. 纳维–斯托克斯方程的尖锐非唯一性. *Invent. Math.*, 229 1054, 2022 3 987( ): – .[19] A. Cheskidov 和 X. Luo. L^2-临界二维纳维–斯托克斯方程的非唯一性. *Ann. PDE*, 9(2):第13号论文, 56页, 2023年. [20] A. Cheskidov, Z. Zeng 和 D. Zhang. 三维纳维–斯托克斯方程与磁流体力学方程的整体耗散解. *arXiv preprint arXiv:2503.05692*, 2025年. [21] M. P. Coiculescu 和 S. Palasek. 临界数据下纳维–斯托克斯方程光滑解的非唯一性. *arXiv:2503.14699*, 2025年. [22] M. Colombo, C. De Lellis 和 L. De Rosa. 弱耗散纳维–斯托克斯方程 Leray 解的病态适定性. *Comm. Math. Phys.*, 362(2):659–688, 2018年. [23] P. Constantin, D. Cordoba 和 J. Wu. 关于临界耗散准地转方程. 第50卷, 第97–107页. 2001年. 献给 Ciprian Foias 和 Roger Temam 教授（印第安纳州布卢明顿, 2000年）. [24] P. Constantin 和 J. Wu.

2 *SIAM Journal on Mathematical* d 准

Analysis 30 5 937 948, 1999

地转方程解的行为. , ( ): – . [25] M. Dai 和 Q. Peng. 受迫表面准地转方程的非唯一弱解. *arXiv:2310.13537*, 2023年. [26] C. De Lellis 和 L. Sz´ekelyhidi, Jr. 欧拉方程作为微分包含. *Ann. of Math. (2)*, 170(3):1417– 1436, 2009年. [27] L. De Rosa. 分数阶纳维–斯托克斯方程的无穷多个 Leray-Hopf 解.

Comm. Partial , ( ): –

Differential Equations 44 4 335 365, 2019

. [28] M. Dolce 和 G. Mescolini. 自相似不稳定性与受迫非唯一性：在二维欧拉方程中的应用 . *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 112(2): 论文编号 e70274, 28 页, 2025 年 . [29] B.-Q. Dong 和 Z.-M. Chen. 临界与超临界耗散准地转方程的渐近稳定性. *Nonlinearity*, 19(12):2919, 2006年11月. [30] B.-Q. Dong 和 Z.-M. Chen. 关于耗散表面准地转方程的弱强唯一性. *Nonlinearity*, 25(5):1513–1524, 2012年. [31] H. Dong 和 D. Du. 全空间中临界耗散准地转方程的整体适定性与衰减估计. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(4):1095–1101, 2008 年 . [32] K.-J. Engel 和 R. Nagel.

One-parameter semigroups for linear evolution equations 194 *Graduate* ,

Texts in Mathematics 2000

[33] 卷. Springer-Verlag, 纽约, . S. Brendle、M. Campiti、T. Hahn、G. Metafune、G. Nickel、D. Pallara、C. Perazzoli、A. Rhandi、S. Romanelli 和 R. Schnaubelt 合著. ¨L. Escauriaza, G. A. Ser´egin 和 V. ˇSver$L_{3,\infty}$-解、纳维–斯托克斯方程与反向唯一性. *Uspekhi Mat. Nauk*, 58(2(350)):3–44, 2003年. [34] E. B. Fabes, B. F. Jones 和 N. M. Rivi`ere. 纳维–斯托克斯方程在属于 L^p的数据下的初值问题. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45:222–240, 1972年. [35] G. Furioli, P. G. Lemari´e-Rieusset 和 E. Terraneo. Navier-Stokes 在 $L^3(\mathbb{R}^3)$及其他极限函数空间中的唯一性. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16(3):605–667, 2000年. [36] K. Golovkin. 流体力学方程某些边值问题解的非唯一性. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(4):212–215, 1964年。

[37] M. Hofmanov´a、R. Zhu 和 X. Zhu。确定性与随机三维纳维–斯托克斯方程及欧拉方程的非唯一遍历性。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 249(3):第 33 号论文，54 页，2025年。[38] E. Hopf。

4 213 231, 论流体力学基本方程的初值问题。 *Math. Nachr.*, : – 。[39] T. Hou、Y. Wang 和 C. Yang。无外力不可压三维纳维–斯托克斯方程的 Leray-Hopf 解的非唯一性。 *arXiv:2509.25116*, 2025年。[40] H. Jia 和 V. ˇSver´ak。不可压三维纳维–斯托克斯方程在自然能量空间中是否局部不适定？ *J. Funct. Anal.*, 268(12):3734–3766, 2015年。[41] N. Ju。耗散型二维准地转方程：局部适定性、整体正则性与相似解。*Indiana Univ. Math. J.*, 56(1):187–206, 2007年。[42] C. Khor、C. Miao 和 X. Su。三维受迫分数阶纳维–斯托克斯方程的 Leray-Hopf 解的非唯一性，直至 J. L. Lions 指数。 *Bull. Lond. Math. Soc.*, 55(6):2705–2717, 2023。[43] K. Kinra 和 U. Koley。随机欧拉方程及弱耗散纳维–斯托克斯方程的霍尔德连续解的非唯一性。 *arXiv:2407.20270*, 2025 年。[44] A. Kiselev 、 F. Nazarov 和 A. Volberg。临界二维耗散型准地转方程的整体适定性。 *Invent. Math.*, 167(3):445–453, 2007年。[45] H. Koch 和 D. Tataru。纳维–斯托克斯方程的适定性。

Advances in Mathematics 157 1 22 35, , ( ): – 。2001

[46] H. Kozono 和 H. Sohr。关于纳维–斯托克斯方程弱解唯一性的注记。 *Analysis*, 16 3 255( ): –271, 1996年。[47] O. A. Ladyzhenskaya。纳维–斯托克斯方程广义解的唯一性与光滑性。

Zap. , : – 。[48] *Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 5 169 185, 1967

J. Leray。充满空间的黏性流体的运动。 *Acta Mathematica*, 63(1):193–248, 1934年。[49] J.-L. Lions。 *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*。Dunod，巴黎；Gauthier- Villars，巴黎，1969年。[50] P.-L. Lions 和 N. Masmoudi。

L^N *Comm. Partial* 中纳维–斯托克斯系统温和解的唯一性。 *Differential Equations* 26 11 12 2211 2226, 2001

, (-): – 。[51] Q. Liu、Y. Jia 和 B.-Q. Dong。关于 BMO 空间中二维准地转方程弱强唯一性的注记。 *Applied Mathematics Letters*, 25(10):1470–1474, 2012年。[52] T. Luo 和 P. Qu。

2 *J. Differential* D 低黏性纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性。 *Equations* 269 4 2896 2919, 2020

, ( ): – 。[53] T. Luo 和 E. S. Titi。超黏性纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性：J.-L. Lions 指数的尖锐性。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 59(3):第 92 号论文，15 页，2020年。[54] F. Marchand。准地转方程在空间 L^p 或$\dot{H}^{-1/2}$中的弱解的存在性与正则性。 *Comm. Math. Phys.*, 277(1):45–67, 2008年。[55] F. Marchand。临界准地转方程的弱强唯一性判据。 *Phys. D*, 237(10- 12):1346–1351, 2008年。[56] Y. Meyer。小波、抛物乘积与纳维–斯托克斯方程。载于

Current developments in mathematics 1996 , , 第 – 页。*(Cambridge, MA)* 105 212 1997

Int. Press，波士顿，MA，。[57] C. Miao、Y. Nie 和 W. Ye。 $\mathbb{R}^3$中纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性。 *arXiv preprint arXiv:2412.10404* 2024

arXiv , 。[58] C. Miao、Y. Nie 和 W. Ye。 $\mathbb{R}^3$中纳维–斯托克斯方程的尖锐非唯一性。 *arXiv:2412.09637* 2024

arXiv preprint , 。[59] C. Miao 和 Z. Zhao。 C_tL^q 空间中纳维–斯托克斯方程的非唯一性分析。2025年。arXiv:2501.09698。[60] H. Miura。临界索博列夫空间中大初值的耗散型准地转方程。

Comm. Math. , ( ): – 。 *Phys.* 267 1 141 157, 2006

[61] S. Monniaux。纳维–斯托克斯方程温和解的唯一性与最大

L^p *C. R. Acad.* -正则性。 , *Sci. Paris Sér. I Math.* 328 8 663 668, 1999

( ): – 。[62] G. Prodi。纳维 – 斯托克斯方程唯一性定理。 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 48:173–182, 1959 年。[63] M. Romito 和 F. Triggiano。对数超临界超耗散纳维–斯托克斯系统弱解的非唯一性。 *J. Funct. Anal.*, 289(4):第 110989 号论文，23 页，2025年。[64] J. Serrin。纳维–斯托克斯方程弱解的内部正则性。 *Arch. Rational Mech. Anal.*, 9 187 195, 1962 : – 。[65] M. Vishik。理想不可压流体欧拉方程柯西问题的不稳定性与非唯一性。第一部分。 *arXiv:1805.09426*, 2018年。[66] M. Vishik。理想不可压流体欧拉方程柯西问题的不稳定性与非唯一性。第二部分。 *arXiv:1805.09440*, 2018年。

[67] J. Zhao 和 Q. Liu。 β-广义表面准地转方程的弱解-强解唯一性判据。*Monatsh. Math.*, 172(3-4):431–440, 2013。

Francisco Mengual
Universidad de Sevilla, IMUS
41012 Sevilla, Spain电子邮箱地址:
fmengual@us.es

Marcos SoleraDepartament d'Anàlisi Matemàtica,
Universitat de València46100 Burjassot, Spain电子邮箱地址:
marcos.solera@uv.es