arXiv:2601.00338v1 [math.SP] 1 Jan 2026

De收敛双曲曲面上拉普拉斯算子的行列式 S

Renan Gross*, Guy Lachman†, Asaf Nachmias‡

2026年1月5日

摘要

设 S_k 是一列体积不断增大的紧双曲曲面，它们局部收敛于一个随机带根曲面。我们证明，如果极短简单闭测地线长度倒数之和的归一化值收敛于 0，那么 S_k 的拉普拉斯算子的行列式的对数归一化值将收敛于一个仅取决于极限曲面的概率分布的常数。

1 引言

设 S 是一个紧双曲曲面，即一个常曲率的紧黎曼曲面-1。我们研究的主要对象是拉普拉斯算子的对数行列式。这是一个非常经典的对象，因此此处仅作简要介绍；有关全面介绍，请参见例如 [Awo18，第 1] 节及其中的参考文献。拉普拉斯算子 Δ_S 具有一个趋于无穷大的离散谱 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$。与有限矩阵类似，直观上我们希望将拉普拉斯算子的行列式的对数定义为特征值对数之和 λ_j。由于特征值趋于无穷大，无法直接这样定义；因此，我们改用拉普拉斯算子的 ζ 函数，其形式定义为以下形式和

$$\zeta_S(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^s}.$$

根据韦尔定律，$\zeta_S(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)$ 足够大时是良定义的；利用米纳克希桑达拉姆-普莱杰尔渐近展开，可以将其解析延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，且在 0 处解析（参见例如 [Cha84，第 VI 章，公式 45]）。随后我们将拉普拉斯算子的对数行列式定义为

$$\log\det(\Delta_S) := -\zeta_S'(0)$$

（将 $\zeta_S(s)$ 视为形式级数时，表达式 $-\zeta_S'(0)$ 确实是非零特征值的对数之和。）

令 $\mathcal{H}$ 为所有配备 Gromov–Hausdorff度量的带根双曲曲面的空间，并设 $(\mathbf{S}_\infty, \mathbf{x}_0)$ 是 $\mathcal{H}$ 中一个概率分布为 μ的随机带根曲面。紧双曲曲面 S 通过映射 $x \mapsto (S, x)$ 将均匀测度 $\mathrm{Vol}_S(\cdot)/\mathrm{Vol}_S(S)$ 前推，从而在 $\mathcal{H}$ 上定义一个测度 μ_S。若紧双曲流形序列 S_k 满足 μ_{S_k} 弱收敛到 μ，则称其局部收敛到 $(\mathbf{S}_\infty, \mathbf{x}_0)$（这也称为*Benjamini-Schramm*收敛）。

双曲曲面最简单的一类收敛是收敛到双曲平面 $\mathbb{H}$。在这种情况下，上述条件意味着，对于任意固定的 $R > 0$，以 S_k 中的一个均匀随机点为中心、半径为 R 的球，与 $\mathbb{H}$ 中半径为 R 的球等距同构的概率随着 $k \to \infty$趋于 ∞ 而趋近于 1（换言之，从均匀抽取的点观察到的单射半径以高概率趋于 ∞）。收敛到 $\mathbb{H}$ 是典型的情形，因为各种随机双曲曲面模型都具有这一性质，参见 [Nau23]。然而，也可能收敛到非单连通的无限带根曲面（例如，图 1 所示拓扑上的双曲结构）。

本文受 Naud 的工作启发 [Naud23]，，给出了一个尖锐条件，该条件意味着 S_k经过适当归一化后，其对数行列式收敛到一个仅取决于

*剑桥大学纯数学与数理统计系。rg751@cam.ac.uk
†特拉维夫大学数学科学系。guy.lachman@gmail.com
‡特拉维夫大学数学科学系。asafnach@tauex.tau.ac.il

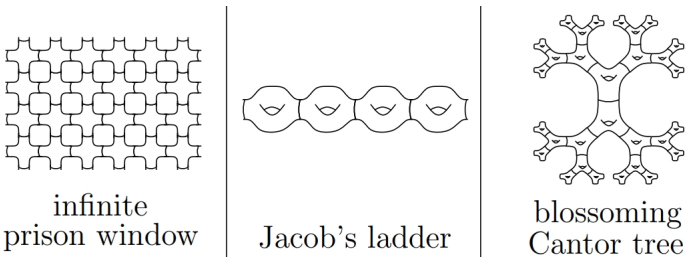


图 1：除了双曲平面外，一列双曲曲面还可以收敛到各种无限结构，例如粗网格、雅各布天梯或康托尔树。图片取自[Ang+18]。

极限曲面的分布（$\mathbf{S}_\infty$，$\mathbf{x}_0$）。对于 $\eta > 0$，令 $\{\ell_i\}_{i=1}^s$ 表示 S_k 中长度不超过 η 的所有简单闭测地线的长度，并定义

$$L_\eta(S) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(S)} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\ell_i} .$$

我们称一列曲面 S_k 具有一致可积测地线，如果对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $\eta > 0$，使得对所有足够大的 k，$L_\eta(S_k) < \varepsilon$。

定理 1。存在一个普适常数 $E_{\mathbb{H}} > 0$，使得下述结论成立。设 S_k 是一列体积趋于 ∞的紧致双曲曲面，并且它们局部收敛到一个分布为 μ 的随机带根曲面$(\mathbf{S}_\infty, \mathbf{x}_0)$。定义 $E_\mu \in [-\infty, \infty)$ 为

$$E_\mu = E_{\mathbb{H}} - \int_0^\infty \frac{\int [p_t^{S_\infty}(x_0, x_0) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)] d\mu}{t} \, dt , \tag{1}$$

其中 $p_t^S(x, y)$ 是黎曼曲面 S 上拉普拉斯算子的热核。

1. 如果 S_k 具有一致可积测地线，那么

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log\det \Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} = E_\mu .$$

2. 如果 S_k 不具有一致可积的测地线，那么

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log\det \Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} \le E_\mu ,$$

若极限存在且有限，则不等式为严格不等式。

注意，如果 S_k 收敛到双曲平面，那么右侧被积函数中的分子（1）恒为 0，因此对数行列式收敛到 $E_{\mathbb{H}}$。反过来亦然。

推论2。设 S_k 是一列紧致双曲曲面，其体积趋于 ∞，并且局部收敛到一个分布为 μ的随机带根曲面$(\mathbf{S}_\infty,\mathbf{x}_0)$。假设 S_k 具有一致可积的测地线，并且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log\det \Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} = E_{\mathbb{H}} .$$

那么 S_k 收敛到双曲平面，即$\mathbf{S}_\infty = \mathbb{H}$ μ-几乎必然。

定理 1 的证明依赖于对热核 $p_t^{S_k}(x,x)$ 在小时间 $t \to 0$ 时的发散，以及其在大时间 $1/\mathrm{Vol}(S_k)$ 时与极限值之差的界$t \to \infty$。事实上，对于紧双曲曲面 S，若记

$$D_S(t) = \int_S \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] dx ,$$

然后，对涉及 $\zeta(s)$ 的计算以及热迹公式（见 [Nau23，第 2]节）给出

$$\log\det \Delta_S = \mathrm{Vol}(S) E_{\mathbb{H}} + \gamma_0 - \int_0^1 \frac{D_S(t)}{t} \, dt - \int_1^\infty \frac{D_S(t) - 1}{t} \, dt , \tag{2}$$

其中 γ_0 是欧拉-马歇罗尼常数。这是定理1证明的起点。我们将分别处理这两项 $\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\int_0^1 \frac{D_{S_k}(t)}{t}\,dt$ 和 $\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\int_1^\infty \left(\frac{D_{S_k}(t)}{t}-1\right)dt$。对于较大的时间，我们给出一个仅取决于测地线长度倒数之和的界：

引理 3。 存在常数 $C>0$，使得对于每个紧双曲曲面 S 和每个 $t>0$，

$$\frac{|D_S(t)-1|}{t\ \mathrm{Vol}(S)} \le C\left(\frac{e^{-t/4}}{t^2}+\frac{\sqrt{1+L_{2\sinh^{-1}(1)}(S)}}{t^{3/2}}\right).$$

对于较小的时间，我们回顾一致可积函数族的定义（“一致可积测地线”一词便源于此）：设 μ是某个空间X上的有限测度。若可积函数族 $f_k: X\to\mathbb{R}$ 在 $\mathrm{L}^1(X)$ 中一致有界，并且对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $A\subseteq X$ 的测度$\mu(A)\le\delta$时，有 $\sup_k \int_A |f_k(x)|\,d\mu(x)\le\varepsilon$，则称其为一致可积。

引理 4。 函数族 $\left\{\frac{D_{S_k}(t)}{t\ \text{体积}(S_k)}\right\}_{k=1}^\infty$ 在 $(0,\ 1)$ 上一致可积，当且仅当序列 S_k 具有一致可积测地线。

在证明中，我们将使用两个外部结果。第一个是作者近期的一项结果，它给出了 $p_t^S(x,\ x)$ 收敛到均匀测度的速率上界。

定理 5 ([GLN25], 定理 2 和推论 9)。 存在常数 $C>0$，使得对任意紧双曲曲面 S，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(S)}\int_S \left|p_t^S(x,x)-\frac{1}{\mathrm{Vol}(S)}\right| dx \le C\sqrt{\frac{1+L_{2\sinh^{-1}(1)}(S)}{t}} \qquad \forall t\ge 1.$$

第二个是李和丘的一条经典估计 [LY86]。

定理 6 (用球体积界定热核； [LY86] 中的推论 3.1，其中 $\alpha=3/2$且 $\varepsilon=1/2$)。 设 S 是一个完备、无边界且里奇曲率下界为 $-K$的黎曼流形。那么，其上的热核 S 满足

$$p_t^S(x,y)\le C_1\mathrm{Vol}(B(x,\sqrt{t}))^{-1/2}\mathrm{Vol}(B(y,\sqrt{t}))^{-1/2}\exp\left(C_2Kt-\frac{d_S(x,y)^2}{4.5t}\right).$$

1.1 先前工作与评述

我们的结果强化了 Naud 最近的一篇论文 [Nau23]：它消除了对谱隙的需求，并放宽了对短闭测地线的条件；此外，它允许 S_k 局部收敛到任意双曲曲面，而不仅仅是双曲平面（Naud 的条件隐含地意味着收敛到 $\mathbb{H}$）。关于一般黎曼流形的循环覆盖，也已证明了类似的收敛结果 [DLN25]。

拉普拉斯算子的行列式的离散对应量称为树熵 由 Lyons 定义 [Lyo05] (它与树的关系并不令人意外；事实上，基尔霍夫定理将图的拉普拉斯算子的非零特征值之积与其生成树的数量联系起来)。我们的主要定理（定理 1）是 [Lyo05，定理 3 的连续类比。2] 本文的方法部分受到该定理的启发。

在 [Abe+17]中，研究表明，收敛流形的其他性质也会传递到极限（在二维和更高维度中均如此）：贝蒂数（[Abe+17，定理 7。13]）和解析挠率（[Abe+17，定理 8。4], 在单射半径条件和无环条件下）。这些结果并不能直接推出定理 1。

注记 7。 常数 E_μ 可以从直观上看作分布 μ的归一化 ζ 函数的导数，如下所示。对于紧流形 S，ζ 函数由下式给出：[Sar90，公式 (1.3)]

$$\begin{aligned}\zeta_S(s)&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\left(\mathrm{Tr}\left(e^{-t\Delta_S}\right)-1\right)dt\\&=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\left(\int_S p_t^S(x,x)\,dx-1\right)dt.\end{aligned}$$

将流形的体积归一化，并记 μ_S S 上的均匀分布为，我们有

$$\frac{\zeta(s)}{\mathrm{Vol}(S)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\int p_t^S(x,x) d\mu_S - \frac{1}{\mathrm{Vol}(S)} \right) dt\,.$$

当（$\mathbf{S}_\infty$，$\mathbf{x}_0$）是分布为 μ 的随机有根无限体积曲面时，我们可以类似地定义

$$\zeta_\mu(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\int p_t^{\mathbf{S}_\infty}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) d\mu \right) dt\,.$$

在某些条件下（例如，$\mathbf{S}_\infty$ 几乎必然具有谱隙且单射半径有界时），可以证明常数 E_μ 等于

$$E_\mu = -\zeta'_{\mu(s)}(0)\,.$$

注记 8。 设 S <style id='10}是一个紧双曲曲面。在 [GLN25的推论 9], 中，证明了若C 是一个双曲领圈，其腰部是长度为 ℓ的测地线，则

$$\int_C \frac{1}{\mathrm{Inj}\,(x,S)^2 \wedge 1}\, dx$$

与 $1/\ell$ 成正比，其中 Inj(x, S) 是 x 的单射半径。因此，具有一致有界测地线等价于函数族 $\left\{ x \mapsto \frac{1}{S_k} \mathrm{Inj}(\cdot,\ )^2 \wedge 1 \right\}$ 一致可积。

2 单射半径与热核界

本文中，“普适常数”指一个不依赖于 S、 k 或任何其他参数的实数。对于两个非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，我们记作$f \lesssim g$，表示存在一个普适常数 $C > 0$，使得对所有 x， $f(x) \leq Cg(x)$。若 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$，则记作 $f(x) \asymp g(x)$。

对于点 $x \in S$，我们用 $B(x,r)$ 表示 S 中以 x 为中心、半径为 r 的闭球。 $x \in S$ 的单射半径记为 Inj (x)，它是满足 $B(x,r)$ 与双曲平面 $\mathbb{H}$ 中半径为 r 的球等距的最大半径 r。

紧致双曲曲面的一个重要几何刻画是所谓的领圈引理，它描述了曲面上单射半径较小的部分。以下内容综合了 [Bus10] 中的定理4.1.1和定理4.1.6。

引理9 (领圈引理)。 设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ 是双曲曲面 S 上所有长度为 $\leq 2\sinh^{-1}(1)$ 的简单闭测地线。令 $W(\gamma_i) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\ell} \sinh((\gamma_i)) \right)$，且 $C(\gamma_i) = \{x \in S \mid \mathrm{dist}(x, \gamma_i) \leq W(\gamma_i)\}$。那么

- 集合 $C(\gamma_i)_{i=1}^s$ 两两不相交。
- 单射半径（x， S） $\geq \sinh^{-1}(1)$ 对所有 $x \notin \cup_i C(\gamma_i)$均成立。
- 每个 $C(\gamma_i)$ 都与圆柱 $[-W(\gamma_i)\ W(\gamma_i)] \times S^1$ 等距，其黎曼度量为$ds^2 = d\rho^2 + \ell(\gamma_i)^2 \cosh(\rho)^2 d\theta^2$。
- 若 $x \in C(\gamma_i)$ 满足单射半径(x) $\leq \sinh^{-1}(1)$ 且 $d =$ 距离$_S(x, \partial C(\gamma_i))$，则

$$\sinh(\mathrm{Inj}\,(x)) = \cosh\left(\frac{1}{2}\ell(\gamma_i)\right)\cosh(d) - \sinh(d).$$

虽然该引理给出了领圈内点的单射半径关于其到边界距离的精确表达式，但我们主要会使用以下简单近似（例如参见 [GLN25，命题 8] 的证明）。

命题 10 (单射半径估计)。 设 T 为一个无限双曲领圈，其最短闭测地线 γ 的长度为 ℓ。记 $r(\rho, \ell)$ 为距腰部 ρ 处一点的单射半径。则

$$r(\rho,\ell) = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(1 + (\cosh(\ell) - 1)\cosh(\rho)^2\right)\,. \tag{3}$$

特别是，

$$r(\rho,\ell) \asymp \ell\cosh(\rho)\,. \tag{4}$$

对所有 $\ell \leq 2$ 双曲正弦$^{-1}(1)$ 以及所有 $\rho \leq W(\gamma)$ 其中 $W(\gamma)$ 定义见定理 9。

以下引理给出了紧致曲面与双曲平面的热核之差的一个界。

引理 11. 对于每个紧双曲曲面 S、每个 $x \in S$ 和每个 $t > 0$，以下两者均成立

$$p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) \lesssim \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Inj}(x)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cdot e^{64t}\right) \tag{5}$$

and

$$p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) \lesssim \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Inj}(x)^3}\right)\sqrt{t}\cdot e^{64t}\,. \tag{6}$$

界（5）关于单射半径较小取值的依赖关系是最优的；然而，当 $t \to 0$ 时，该界会趋于无穷大。另一方面，界（6）在$t \to 0$时趋于零，但代价是对单射半径的依赖更差。这可以看作 Minakshisundaram-Pleijel 渐近展开中的一个显式误差界。界（5）已为人所知（例如参见 [Abe+17]中的引理 7.11）；由于这两个界的证明共享相同的初步计算，我们在此给出两者的一个自成一体的初等证明。

注 12. （t 和 Inj（x）中各自的幂在（6）中均无法进一步改进。例如，当$t = \ell^2$ 且点 x 位于对应于一条长度为 ℓ 的闭测地线的领圈腰部附近时，可以看出 p_t^S（x，x）$- p_t^{\mathbb{H}}$（0，0）$\gtrsim \frac{1}{\ell^2}$。

证明。回顾一下，任意双曲曲面 S 的热核 $p_t^S(x,y)$ 由 $p_t^S(x,y) = \sum_{T\in\Gamma} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{y})$ 给出，其中 Γ 是作用于 $\mathbb{H}$ 上的等距变换群，满足 $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}$；而 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 分别是投影到 S 后 x 和 y 的任意原像。为估计 $p_t^S(x,x)$，我们按照 $T\tilde{x}$ 与 $\tilde{x}$ 的距离对群平移进行划分。记

$$\Gamma(m) := \{T \in \Gamma \mid m < d_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \le m+1\}\,,$$

我们有

$$\begin{aligned} p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{T\in\Gamma(m)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \\ &= \sum_{T\in\Gamma(0)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{T\in\Gamma(m)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x})\,. \end{aligned} \tag{7}$$

令 $r = \operatorname{Inj}(x)$。群元素 $T \in \Gamma(m)$ 的数量可以用一个简单的体积论证来估计（见 [Bus10，引理 7.5。3]）：当 D 是以 $\tilde{x}$为中心、半径为 $r/2$的圆盘时，$T(D)$ 的平移像对不同的 $T \in \Gamma(m$互不相交。由于半径为 R 的双曲圆盘的体积为$2\pi(\cosh(R) - 1$，由此可得

$$\#\Gamma(m) \le \frac{\cosh(m+1+r/2) - 1}{\cosh(r/2) - 1} \le \frac{e^{r/2+1}}{\cosh(r/2)-1} e^m \lesssim \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) e^m\,,$$

其中这些不等式依赖于函数 $\cosh(r)$ 在 $r \to 0$ 和 $r \to \infty$ 时的渐近性质。对于单射半径较小的 x，可以通过计算将 $\tilde{x}$ 映射到距离很近的位置的群元素个数，得到一个更好的界，如下所示。

首先假设 $r \le \frac{1}{8}\sinh^{-1}(1)$。根据定理 9，$x$ 位于宽度为 $W(\gamma)$ 的领圈 $C(\gamma)$ 内，其中 γ 是一条简单闭测地线。事实上，x 到领圈边界 ∂C 的距离严格大于 1。这意味着所有元素 $T \in \Gamma(0)$ 都具有 α^k 的形式，其中 α是生成该领圈的元素，而 k 是非零整数。请看图 2。黄色区域是领圈 $C(\gamma)$ 在上半平面上的一个提升，由所有到区间 $[i, ie^{\ell(\gamma)}]$ 的双曲距离不超过 $W(\gamma)$ 的点组成。该区域在 α 的各次幂作用下的平移像铺满一个顶点位于原点的圆锥。Γ 中任何不是 α 的幂的元素，都会将 $\tilde{x}$ 移到圆锥之外。利用初等双曲几何可以证明，以 $\tilde{x}$ 为中心、半径为 $\operatorname{dist}_S(x, \partial C(\gamma))$ 的球与圆锥边界相切，这意味着对于圆锥外的所有 y，都有 $\operatorname{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, y) > 1$；也就是说，对于所有 $T \ne \alpha^k$，必有 $\operatorname{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) > 1$。

记从 $\tilde{x}$ 到虚轴的双曲距离为 ρ。距离 $\operatorname{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha^k\tilde{x})$等于无限领圈中距离中心测地线 ρ 处的点的单射半径的两倍，该领圈的腰部长度为 $k\ell(\gamma)$。由方程（3），可得

$$\operatorname{dist}_{\mathbb{H}}\left(\tilde{x}, \alpha^k\tilde{x}\right) = \cosh^{-1}\left(1 + (\cosh(k\ell(\gamma)) - 1)\cosh(\rho)^2\right)\,. \tag{8}$$

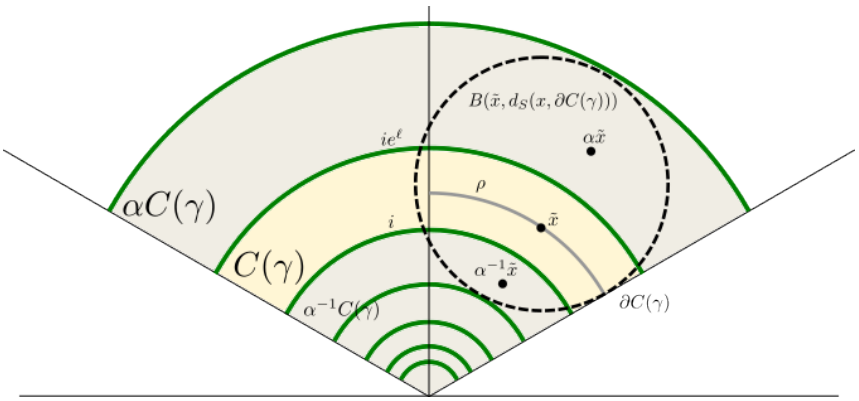


图 2：当 $\tilde{x}$ 远离领圈边界时，使其移动距离最短的群元素是领圈平移。

因此，每个满足 $\alpha^k \in \Gamma(0)$ 的 k 都满足

$$\cosh(1) \geq 1 + (\cosh(k\ell(\gamma)) - 1)\cosh(\rho)^2 .$$

重新整理并利用 $\cosh(z) \geq 1 + \frac{z^2}{2}$ 这一事实，可得 —

$$|k| \leq \sqrt{\frac{2(\cosh(1)-1)}{\cosh(\rho)^2 \ell^2}} \asymp \frac{1}{\operatorname{Inj}(x)} ,$$

其中最后一个关系由（4）得出。因此，存在一个普适常数 $C > 0$ 使得

$$\#\Gamma(0) \leq \frac{C}{\operatorname{Inj}(x)} . \tag{9}$$

设 D 为以 $\tilde{x}$为中心、半径为 $1/2$ 的圆盘，并考虑当 $T \in \Gamma(m)$ 时的平移像 $T(D)$。这些圆盘都包含于 $B(\tilde{x}, m+2)$ 中，但不一定彼此不相交。然而，$\tilde{x}, m+2)$ 中的任意一点 $y \in B$不会同时属于过多这样的圆盘。为说明这一点，设 $T_1, \ldots, T_s \in \Gamma(m)$ 是等距变换，满足对所有 $i = 1, \ldots, s$ 都有 $y \in B(T_i\tilde{x}, 1/2)$。于是，圆盘 $B(T_1\tilde{x}, 1)$ 包含所有点 $T_i\tilde{x}$。该圆盘在 T_1^{-1}作用下的像是一个以 $\tilde{x}$为中心、半径为 1 的圆盘，其中包含 s 个互不相同的点 $T_1^{-1}T_i\tilde{x}$。因此，每个等距变换 $T_1^{-1}T_i (i \neq 1)$ 都属于 $\Gamma(0)$，并且根据（9），必有 $s - 1 \leq C/\operatorname{Inj}(x)$。所以，对 $T \in \Gamma(m)$ 中的 $T(D)$ 求体积之和，至多为 $1 + C/\operatorname{Inj}(x)$ 乘以 $B(\tilde{x}, m+2)$ 的体积，从而得到

$$\#\Gamma(m) \lesssim \frac{1}{\operatorname{Inj}(x)} e^m .$$

最后，放宽 $r \leq \frac{1}{8}\sinh^{-1}(1)$ 这一要求后，我们得到如下的一般结论：

$$\#\Gamma(m) \lesssim \left(1 + \frac{1}{\operatorname{Inj}(x)}\right) e^m . \tag{10}$$

现在我们回过头来估计（7）。关于 $p_t^{\mathbb{H}}$（参见 [Bus10，引理 7.4。26]）有一个著名上界指出：

$$p_t^{\mathbb{H}}(x, y) \lesssim \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{d_{\mathbb{H}}(x,y)^2}{8t}\right) . \tag{11}$$

于是，右侧第二项（7）可由以下上界估计：

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{T \in \Gamma(m)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(m - m^2/8t\right) .$$

Since $\frac{1}{x}\exp(-1/x) \leq 1$ 对所有 x，我们有 $\frac{1}{t}\exp(-m^2/8t) \lesssim \exp(-m^2/16t)$ 对所有 $m \geq 1$, giving

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{T \in \Gamma(m)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(m - m^2/16t\right) .$$

每当 $m \geq 32t$ 时，我们有 $m \leq m^2/32t$，因此上式中的和的上界为

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(m - m^2/16t\right) \leq \sum_{m=1}^{\lceil 32t \rceil} \exp\left(m - m^2/16t\right) + \sum_{m=\lceil 32t \rceil}^{\infty} \exp\left(-m^2/32t\right)$$
$$\leq \lceil 32t \rceil e^{\lceil 32t \rceil} \exp(-1/16t) + \sum_{m=\lceil 32t \rceil}^{\infty} \exp\left(-m^2/32t\right) . \tag{12}$$

由于函数 $m \mapsto \exp\left(-m^2/32t\right)$ 是递减的，我们可以用高斯积分界来估计右端第二个求和：

$$\sum_{m=\lceil 32t \rceil}^{\infty} \exp\left(-m^2/32t\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-m^2/32t\right) \leq \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2/32t\right)\, dx \lesssim \sqrt{t} .$$

利用简单的界 $xe^x \leq \sqrt{x}e^{2x}$ 来估计式 (12) 右端的第一项，得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{T \in \Gamma(m)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sqrt{t} \cdot e^{64t} , \tag{13}$$

它的上界为式 (5) 和 (6) 右端的较大者。

剩下的工作是估计式 (7) 右端的第一项。若 $r > \frac{1}{8}\sinh^{-1}(1)$，则利用以下事实：对每个 $d_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \geq r$，都有 $T \neq \mathrm{Id}$；由式 (10) 和 (11) 可得

$$\sum_{T \in \Gamma(0)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \left(1 + \frac{1}{r}\right) \exp\left(-r^2/8t\right) \lesssim \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sqrt{t} , \tag{14}$$

最后一个不等式成立，是因为 r 有下界。其上界同样为式 (5) 和 (6) 右端的较大者。

现在假设 $r \leq \frac{1}{8}\sinh^{-1}(1)$。如上所述，此时 x 位于领圈 $C(\gamma)$ 中，且所有元素 $T \in \Gamma(0)$ 都具有 α^k 的形式，其中 α 是生成该领圈的元素，而 k 是一个非零整数。因此我们有

$$\sum_{T \in \Gamma(0)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \sum_{\substack{k \neq 0 \\ \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}\left(\tilde{x}, \alpha^k \tilde{x}\right) \leq 1}} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}\left(\tilde{x}, \alpha^k \tilde{x}\right)^2}{8t}\right) . \tag{15}$$

由于 $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}\left(\tilde{x},\ \alpha^k \tilde{x}\right) \geq |k|\ell(\gamma)$ 始终成立，和式 (15) 中的 k 取值满足 $|k|\ell(\gamma) \leq 1$。记 ρ 为从 $\tilde{x}$ 到虚轴的双曲距离，利用 (4)，并将泰勒展开 $\cosh(z) = 1 + O(z^2)$ 代入 (8)，可知存在一个普适常数 $C > 0$ 使得

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}\left(\tilde{x}, \alpha^k \tilde{x}\right) \geq \cosh^{-1}\left(1 + C^2 |k|^2 r^2\right) .$$

由于对于 $z \leq 2$，$\cosh^{-1}(1 \mp z) \asymp \sqrt{z}$，且对于 $z \geq 2$，$\cosh^{-1}(1+z) \asymp \log(z)$，因此存在一个普适常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{T \in \Gamma(0)} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \lesssim \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 r^2 C^2}{8t}\right) + \frac{1}{t} \sum_{k=\lceil 2/r \rceil + 1}^{\infty} \exp\left(-\frac{C \log(kr)^2}{8t}\right) .$$

右侧的第一项可按如下方式估计：

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 r^2 C^2}{8t}\right) \leq \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k^2+1) r^2 C^2}{16t}\right)$$
$$\lesssim \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{r^2 C^2}{16t}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2 r^2 C^2}{16t}\right) dy$$
$$\lesssim \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{r^2 C^2}{16t}\right) \frac{\sqrt{t}}{r} .$$

我们可以用两种方式估计这个最后的表达式：首先，将指数项上界估为 1，可得

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2 r^2 C^2}{8t}\right) \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{r} ,$$

它的上界为（5）右侧；其次，利用$\frac{1}{x}\exp(-1/x) \le 1$这一事实，可得

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2r^2C^2}{8t}\right) \lesssim \frac{\sqrt{t}}{r^3},$$

其上界为（6）右端。右端的第二项可如下进行估计：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\sum_{k=\lceil 2/r\rceil+1}^{\infty}\exp\left(-\frac{C\log(kr)^2}{8t}\right) &\lesssim \sum_{k=\lceil 2/r\rceil+1}^{\infty}\frac{\log(kr)^2}{t}\exp\left(-\frac{C\log(kr)^2}{16t}\right)^2 \\
&\lesssim \sum_{k=\lceil 2/r\rceil+1}^{\infty}\exp\left(-\frac{C\log(kr)^2}{16t}\right) \\
&\lesssim \int_{2/r}^{\infty}\exp\left(-\frac{C\log(yr)^2}{16t}\right)\,dy \\
&\le \frac{2}{r}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{Cz^2}{16t}+z\right)\,dz \\
&\lesssim \frac{\sqrt{t}}{r}e^{16t}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式是因为 $kr \ge 2$，第二个不等式则是由于 $\frac{1}{x}\exp(-1/x) \le 1$这一事实。这一项同时被（5）和（6）的右端所界定，从而得到所需结果。 □

3 证明

定理 3的证明。 回顾定义可知，

$$D_{S_k}(t) - 1 = \int_{S_k}\left(p_t^{S_k}(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) - \frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\right)dx,$$

因此

$$\frac{|D_{S_k}(t)-1|}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} \le \frac{1}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)}\int_{S_k}\left(p_t^{S_k}(x,x) - \frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\right)dx + \frac{p_t^{\mathbb{H}}(0,0)}{t}. \qquad (17)$$

根据著名上界 [DM88，定理 3。1] 对于双曲平面上的热核，有$p_t^{\mathbb{H}}(0,0) \lesssim e^{-t/4}/t$。由定理 5立即可得该引理。 □

定理4的证明。设 $\gamma_1,\dots,\gamma_s$是 S中长度为 $\le 2\sinh^{-1}(1)$ 的简单闭测地线，并用 $\ell_1,\dots,\ell_s$表示它们的长度。我们首先给出以下短时间界

$$\int_S\left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]dx \lesssim \mathrm{Vol}(S)\sqrt{t} + \sum_{i=1}^{s}\min\left\{\frac{\sqrt{t}}{\ell_i^2}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right\} + \sum_{i|\ell_i\le\sqrt{t}}\frac{1}{t^{1/4}\sqrt{\ell_i}} \quad \forall t\in(0,1). \qquad (18)$$

为证明这一点，我们利用定理9将曲面划分为“薄”部分和“厚”部分。设$C(\gamma_i)$ 是短测地线的领圈。对于领圈 C，令 $C := \{x \in C \mid \mathrm{dist}(x,\partial C) \ge 1\}$为“截断”领圈，即切除领圈中靠近˜边界的部分后得到的集合。令 $S_{\mathrm{thin}} = \cup_{i=1}^{s}C(\gamma_i)$ 为所有截断领圈的并集，并设 $S_{\mathrm{thick}} := S\backslash S_{\mathrm{thin}}$。于是，热核之差在其上的积分可分解为

$$\int_S\left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]dx = \int_{S_{\mathrm{thick}}}\left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]dx + \int_{S_{\mathrm{thin}}}\left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]dx.$$

厚部的名称恰如其分：对于每个 $x \in S_{\mathrm{thick}}$，若 $x \notin \cup_i C_i$，则 $\mathrm{Inj}(x,S) > \sinh^{-1}(1)$；而若 $x \in C(\gamma_i)\backslash\tilde{C}(\gamma_i)$ 且 $\mathrm{Inj}(x,S) \le \sinh^{-1}(1)$，则由定理9，对于 $d = \mathrm{dist}(x,\partial C)$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inj}(x,S_k) &= \sinh^{-1}\left(\cosh\left(\frac{1}{2}\ell(\gamma_i)\right)\cosh(d) - \sinh(d)\right) \\
&\ge \sinh^{-1}\left(\cosh(d) - \sinh(d)\right) \ge \sinh^{-1}\left(\cosh(1) - \sinh(1)\right).
\end{aligned}$$

因此，厚部中各点的单射半径均有一个普适常数作为统一下界。由（6），可得

$$p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) \lesssim \sqrt{t}$$

对所有 $0 < t \leq 1$ 以及每个 $x \in S_{\text{thick}}$。这给出了不等式（18）右端的第一项。

对于薄部，无法对热核给出一致的逐点估计。我们改为分别在每个截断领圈 $\tilde{C}(\gamma_i)$ 上对差值 $p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)$ 积分。为简便起见，记 $\ell := \ell(\gamma_i)$，而对于 $x \in S$，记

$$r(x) := \operatorname{Inj}(x, S) .$$

我们将截断领圈分成两部分：满足 $r(x)^2 \geq t$ 的点 x，以及满足$x(^2 \leq t)r$ 的点。

情形 $\mathbf{r(x)^2 \geq t}$ 对于这样的点，我们有

$$\begin{aligned} p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) &\overset{(6)}{\lesssim} \left(1 + \frac{1}{r(x)^3}\right)\sqrt{t} \\ &\overset{(4)}{\lesssim} \frac{\sqrt{t}}{\ell^3 \cosh(\rho)^3} , \end{aligned} \tag{19}$$

其中 ρ 是 x 到相应腰部 γ_i的距离。利用（4），设 $\beta_2 > 1$ 为一个普适常数，使得 $r(z) \leq \beta_2 \ell \cosh(\rho)$，对每个 $z \in \tilde{C}$均成立。当 $t < \beta_2^2 \ell^2$时，我们通过在整个截断领圈上的所有点进行积分，从上方估计热核差值的积分。因此，对于这一区间的 t，

$$\begin{aligned} \int_{r(x)^2 \geq t} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] dx &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{W(\gamma_i)-1} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] \ell \cosh(\rho)\, d\rho d\theta \\ &\overset{(19)}{\lesssim} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{\ell^2 \cosh(\rho)^2} d\rho = \frac{\sqrt{t}}{\ell^2} \tanh(\rho) \,|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{t}}{\ell^2} . \end{aligned} \tag{20}$$

现在假设 $t = \alpha^2 \beta_2^2 \ell^2$，其中 $\alpha \geq 1$。由于 $r(x)^2 \geq t$，根据 β_2 的选择，我们有 $\cosh(\rho) \geq \alpha$。因此，可以通过对所有 $\rho \geq \cosh^{-1}(\alpha)$ 积分来给出该积分的上界：

$$\begin{aligned} \int_{r(x)^2 \geq t} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] dx &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\cosh^{-1}(\alpha)}^{W(\gamma_i)-1} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] \ell \cosh(\rho)\, d\rho d\theta \\ &\overset{(19)}{\lesssim} \int_{\cosh^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{\ell^2 \cosh(\rho)^2}\, d\rho \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\ell^2} \left(1 - \tanh\left(\cosh^{-1}(\alpha)\right)\right) \leq \frac{\sqrt{t}}{\ell^2} \left(1 - \tanh\left(\log(\alpha)\right)\right) , \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是由于 $\cosh^{-1}(z) = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \geq \log(z)$。利用 $\tanh(z) = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$ 和 $\alpha = \sqrt{t}/\beta_2 \ell$这一事实，我们得到

$$\int_{r(x)^2 \geq t} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] dx \lesssim \frac{\sqrt{t}}{\ell^2} \frac{1}{\alpha^2} \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{21}$$

在此范围内，t。由于 $\sqrt{t}/\ell^2 \leq 1/\sqrt{t}$ 对于 $t \leq \ell^2$，结合界（20）和（21）即可得到方程（18）右侧的中间项。

$\mathbf{r}$ 的情形$\mathbf{(x)^2 \leq t}$ 由于我们只关注时刻 $t \leq 1$，因此使用定理 6 并得到

$$p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) \leq p_t^S(x,x) \lesssim \frac{1}{\operatorname{Vol}(B(x,\sqrt{t}))} . \tag{22}$$

因此，要对积分 $\int_{r(x)^2 \leq t} \left[p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right] dx$进行界定，只需给出以 x 为中心、半径为 $\sqrt{t}$ 的球的体积下界。

令 m 为满足 $t \geq (2m+1)^2 r(x)^2$ 的最大整数；由于 $t \geq r(x)^2$,，我们总有 $m \geq 0$。那么球 $B(x, \sqrt{t})$ 包含 $m+1$ 个半径为 $r(x)$ 的两两不相交的球：若 x 由下式给出

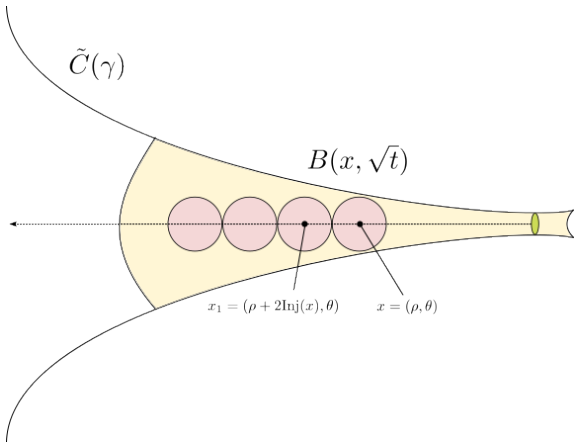


图3：当 t 很大时，许多份 $B(x,\ r(x))$ 都可以容纳在 $B(x,\ \sqrt{t})$ 中。

参数化 (ρ,θ)，那么对于 $j=0,\dots,m$，在每个点 $x_j=(\rho+2jr(x)\ \theta)$ 处都有这样一个球（见图3）。注意，由于 $t\le 1$，将 $C(\gamma_i)$ 从 $C(\gamma_i)$ 中截断后，所有形如 $(\rho+2jr(x)\ \theta)$ 的点仍然位于 $C(\gamma_i)$ 内（即使它们不在 $C(\gamma_i)$ 内），因此单射半径随 j 增大；这保证了每个球中心处的单射半径至少为 $r(x)$。由于体积 $\mathrm{Vol}(B(x,s))\ge s^2$，由此得到

$$\mathrm{Vol}(B(x,\sqrt{t}))\ge (m+1)\cdot r(x)^2\,.$$

这意味着，当 t 写成 $t=(2\alpha+1)^2r(x)^2$（其中 $\alpha>0$ 为实数）时，我们有

$$\mathrm{Vol}(B(x,\sqrt{t}))\ge \frac{1}{2}(\alpha+1)\cdot r(x)^2\ge \frac{1}{4}\sqrt{t}\cdot r(x)\,.$$

如果 x 具有柱坐标 $(\rho,\ \theta)$，并且满足 $r(x)^2\le t$，那么 $\rho\le\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\beta_1\ell}\right)$，其中 β_1 是一个普适常数，由 (4) 保证其存在，使得 $r(z)\ \ge\beta_1\ell\cosh(\rho)$，对所有 $z\in C$均成立。将上述体积估计代入李-姚估计 (22) 后，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{r(x)^2\le t}\left[p_t^S(x,x)-p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]\,dx &\lesssim \int_{r(x)^2\le t}\frac{1}{t^{1/2}r(x)}\,dx\\ &\le\int_0^{2\pi}\int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\beta_1\ell}\right)}\frac{1}{t^{1/2}r(x)}\ell\cosh(\rho)\,d\rho d\theta\\ &\lesssim\int_0^{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\beta_1\ell}\right)}\frac{1}{t^{1/2}}\,d\rho\\ &=\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{t}}{\beta_1\ell}\right)\frac{1}{t^{1/2}}\lesssim\frac{1}{\sqrt{\ell}\cdot t^{1/4}}\,,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是由于 $\cosh^{-1}(z)\le\sqrt{2z}$这一事实导致的。注意到不等式$r(x)^2\le t$ 只有在 $t\ge\ell^2$时才能成立，这就给出了方程 (18) 右侧的第三项，也是最后一项。

利用（18），现在证明：若 S_k 具有一致可积测地线，则 $\frac{D_{S_k}(t)}{t\,\mathrm{Vol}(S_k)}$ 在 $(0,\ 1)$ 上一致可积。由（18），

$$\frac{D_{S_k}(t)}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)}\lesssim\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\sum_{i=1}^{s}\min\left\{\frac{1}{\sqrt{t}\ \ell_i^2},\frac{1}{t^{3/2}}\right\}+\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)}\sum_{i|\ell_i\le\sqrt{t}}\frac{1}{t^{5/4}\ \sqrt{\ell_i}}\right):=g^k_{\mathrm{small}}(t)\,.$$

为证明 g^k_{small} 确实是一致可积族，首先注意到 $g^k_{\mathrm{small}}(t)$ 都关于 t 单调递减，因此只需证明它们的 L^1 范数都有界，并且对任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得对所有充分大的 k，

$$\int_0^{\delta}g^k_{\mathrm{small}}(t)\,dt<\varepsilon\,.$$

现在来估计构成 g^k_{small} 的三个项的积分。第一项 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 是可积的。对于第二项，对每个 $\delta > 0$ 以及每个 $i = 1, \ldots\ldots, s$，我们有

$$\int_0^\delta \min\Big\{\frac{1}{\sqrt{t}\ \ell_i^2}, \frac{1}{t^{3/2}}\Big\} dt = \int_0^{\min(\ell_i^2,\delta)} \frac{1}{\sqrt{t}\ \ell_i^2}\ dt + \int_{\min(\ell_i^2,\delta)}^\delta \frac{1}{t^{3/2}}\ dt = 2\frac{\sqrt{t}}{\ell_i^2}\Big|_0^{\min\{\ell_i^2,\delta\}} - \frac{2}{\sqrt{t}}\Big|_{\min\{\ell_i^2,\delta\}}^\delta$$
$$= 2\left(\min\Big\{\frac{1}{\ell_i}, \frac{\sqrt{\delta}}{\ell_i^2}\Big\} - \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\min\{\ell_i, \sqrt{\delta}\}}\right). \tag{23}$$

L以及 $\eta > 0$。对所有 $i = 1$、……、s 求和，并将总和拆分为 $\ell_i \le \eta$ 和 $\ell_i \ge \eta$，我们得到 et

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)} \sum_1^s \int_0^\delta \min\Big\{\frac{1}{\sqrt{t}\ \ell_i^2}, \frac{1}{t^{3/2}}\Big\} dt \le \frac{2}{\mathrm{Vol}(S_k)} \left(\sum_{\ell_i<\eta} \frac{1}{\ell_i} + \sum_{\ell_i\ge\eta} \frac{\sqrt{\delta}}{\ell_i^2} + \sum_{\ell_i<\sqrt{\delta}} \frac{1}{\ell_i}\right)$$
$$\le 2L_\eta(S_k) + \frac{2}{\mathrm{Vol}(S_k)} \sum_{\ell_i\ge\eta} \frac{\sqrt{\delta}}{\eta^2} + 2L_{\sqrt{\delta}}(S_k)\,.$$

首先选取 η 足够小，使得 $L_\eta < \varepsilon$对足够大的 k 成立，然后选取 $\delta = \varepsilon\eta^2$可得 $\int_0^\delta g^k_{\text{small}}(t)\ dt \lesssim \varepsilon$ 对所有足够大的 k成立。注意，当 $\delta = 1$时，（23）给出 $\int_0^1 g^k_{\text{small}}(t)dt \le 4L_{2\sinh^{-1}(1)}(S_k)$；根据我们对 $L_\eta(S_k)$ 的假设，该式关于 k 有界。

对于第三项，我们有

$$\int_0^\delta \sum_{i|\ell_i\le\sqrt{t}} \frac{1}{t^{5/4}\ \sqrt{\ell_i}} dt = \sum_{i=1}^s \int_{\min(\ell_i^2,\delta)}^\delta \frac{1}{t^{5/4}\ \sqrt{\ell_i}} dt = -4\sum_{i=1}^s \frac{1}{t^{1/4}\sqrt{\ell_i}}\Big|_{\min(\ell_i^2,\delta)}^\delta$$
$$= \sum_{i=1}^s \left(\frac{4}{\min(\ell_i, \delta^{1/4}\sqrt{\ell_i})} - \frac{4}{\delta^{1/4}\sqrt{\ell_i}}\right) \le \sum_{\ell_i<\sqrt{\delta}} \frac{4}{\ell_i} = 4L_{\sqrt{\delta}}\,.$$

取 $\delta = 1$ 可得该项一致有界，而取 δ 足够小，使得$L_{\sqrt{\delta}} < \varepsilon$ 对 k 足够大时成立，则可得该项的一致可积性。这表明，如果 S_k 具有一致可积测地线，那么 $D_{S_k}(t)$ t体积(S_k) 具有一致可积性。

反过来，只需证明对于每个 $\eta < 1/2$ 和每个紧双曲曲面 S，

$$\int_0^\eta \frac{D_S(t)}{t\ \mathrm{Vol}(S)}\ dt \gtrsim L_\eta(S)\,. \tag{24}$$

事实上，由于 S_k 不存在一致可积测地线，因此存在一个 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $\eta > 0$，$L_\eta(S_k) > \varepsilon$ 对无穷多个 k 成立。于是上述不等式保证，对每个$\eta > 0$，$\int_0^\eta {}_t\, {}^{D_{S_k}(t)\text{ 体积}(S_k)}\ dt \gtrsim \varepsilon$ 对无穷多个 k 成立。为证明此不等式，设 γ 是一条长度为 $\ell \le \eta$ 的简单闭测地线，C 是其领圈，α 是生成 C 的群元素。对于每个 $x \in C$，我们有

$$p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0) = \sum_{T\ne\mathrm{Id}, T\in\Gamma} p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \ge p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})\,, \tag{25}$$

其中 $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}$，$\tilde{x}$ 是 x 在投影到 S 下的原像。令 $A = \{x \in S \mid \mathrm{dist}(x,\ \gamma) \le 1\}$ 为距离 γ 不超过 1 的点集。由于 $\ell < 1/2$，我们有 $W(\gamma) > 2$，因此 $A \subseteq C$ 且 $\mathrm{dist}(A,\ \partial C) > 1$。

如定理 11 的证明中所示，对于任意非平凡的 $T \ne \alpha^k$，对所有 $x \in A$，$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, T\tilde{x}) \ge \mathrm{dist}(x, \partial C) > 1$。另一方面，根据式 (3) 的计算，对于 $\ell < 1/2$，$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}) < 1$（在无限双曲领圈中，$z$ 的单射半径等于 $\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(z, \alpha z)$）。因此 $\mathrm{Inj}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x})$。由式 (4)，$\mathrm{Inj}(x) \asymp \ell$，于是

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}) \asymp \ell\,. \tag{26}$$

根据 [DM88，定理 3。1]，双曲平面上的热核正比于

$$p_t^{\mathbb{H}}(x,y) \sim \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{4}t - \frac{\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(x,y)^2}{4t} - \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(x,y)\right)\frac{1+\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(x,y)}{1+\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(x,y)+t}\,.$$

结合（26），这意味着对于 $x \in A$ 以及对于$t \in [\frac{1}{2}\ell^2, \ell^2]$，

$$p_t^{\mathbb{H}}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}) \gtrsim \frac{1}{t}\,.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta} \frac{\int_C [p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)]\ dx}{t} dt &\gtrsim \int_{\frac{1}{2}\ell^2}^{\ell^2} \int_A \frac{1}{t^2}\ dx dt \\ &\asymp \int_{\frac{1}{2}\ell^2}^{\ell^2} \int_0^1 \frac{1}{t^2} \ell \cosh(\rho)\ d\rho dt \asymp \frac{1}{\ell}\,.\end{aligned}$$

对所有长度为 $\leq \eta$ 的 γ 求和，并除以 $\mathrm{Vol}(S)$，即可得到所需结果。

□

定理1的证明。注意，若 S_k 具有一致可积测地线，则其任意子序列 S_{k_m} 也具有一致可积测地线。因此，为了证明原序列 S_k 满足条件 (1)，只需证明对于满足 $\log\det\Delta_{S_{k_m}}\mathrm{Vol}(S_{k_m})$ 收敛的每个子序列，该条件都成立。另一方面，若 S_k 不具有一致可积测地线，则不同的子序列可能具有、也可能不具有一致可积测地线。尽管如此，若能证明对于每个不具有一致可积测地线且满足 $\log\det\Delta_{S_{k_m}}$ $\mathrm{Vol}(S_{k_m})$ 收敛的子序列，其极限在收敛到有限值时严格小于 E_μ，而在不收敛到有限值时为 $-\infty$，则条件 (2) 对 S_k 仍然成立。省略下标后，我们因此可以只考虑满足 $\log\det\Delta_{S_k}\mathrm{Vol}(S_k)$ 收敛的子序列 S_k。

首先假设 $\sup_k L_1(S_k) = \infty$ (特别是，S_k 不具有一致可积测地线)。那么由 (2)、定理 3 以及定理 的证明中的 (24)，我们有4

$$\begin{aligned}\inf_k \frac{\log\det\Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} &= E_{\mathbb{H}} + \inf_k \left(\frac{\gamma_0}{\mathrm{Vol}(S_k)} - \int_0^1 \frac{D_{S_k}(t)}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} dt - \int_1^\infty \frac{D_{S_k}(t) - 1}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} dt \right) \\ &\lesssim E_{\mathbb{H}} + \gamma_0 - \sup_k \left(L_1(S_k) - \sqrt{1 + L_1(S_k)} \right)\,.\end{aligned}$$

由于 $\sup_k L_1(S_k) = \infty$，上述不等式右侧等于 $-\infty$。由于序列 $\log\det\Delta_{S_k}$体积(S_k) 收敛，且下确界为 $-\infty$，我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log\det\Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log\det\Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} = \inf_k \frac{\log\det\Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} = -\infty\,,$$

也就是说，该序列的极限不是有限值，满足定理 1第 (2) 项的条件。

现在假设 $\sup_k L_1(S_k) := M < \infty$。这并不意味着 S_k 具有一致可积测地线；然而，这确实意味着测地线长度倒数的对数必须一致可积。事实上，设 $\varepsilon > 0$。由于 $x\log(1/x) \to 0$ 当 $x \to 0$ 时，存在一个 $\eta > 0$，使得对所有 $x < \eta$，都有 $x\log(1/x) < \varepsilon/M$，这意味着对于每个 k，

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)} \sum_{\ell_i < \eta} \log(1/\ell_i) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)} \sum_{\ell_i < \eta} \frac{\varepsilon}{M} \frac{1}{\ell_i} \leq \varepsilon\,. \tag{27}$$

在此条件下，我们现在证明，对于每个固定的 $t > 0$，极限 $\lim_{k\to\infty}$ $^{D_{S_k}(t)\text{ 体积}(S_k)}$ 存在。

回忆一下，$\mathcal{H}$ 是所有带根双曲曲面构成的空间，并赋予 Gromov–Hausdorff度量。固定 $t > 0$，并令 $h_t \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 由 $h_t(S,x) = p_t^S(x,x) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)$ 给出。函数 h_t关于 Gromov–Hausdorff拓扑连续（例如参见 [Din02、定理 2.6、定理 5.54 和定理 5.59]。这些定理表明，当一列紧致曲面（分别为非紧曲面）收敛到一个紧致（分别为非紧）极限曲面时，h_t 也会收敛。相同的方法也适用于其余两种情形。）。令 μ_k 为集合 $\{(S_k, x) \mid x \in S_k\} \subseteq \mathcal{H}$上的均匀测度，并定义 $X_k = h_t(S_k, x)$，其中 $(S_k, x) \sim \mu_k$，且 $X = h_t(S_\infty, x_0)$ 的分布与 μ 相同。于是，极限 $\lim_{k\to\infty}$ $^{D_{S_k}(t)}$ $\mathrm{Vol}(S_k)$ 存在，等价于 $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[X_k]$ 存在。如果 h_t 有界，那么根据 μ_k 弱收敛到 μ，便可推出 $\mathbb{E}[X_k] = \int h_t\, d\mu_k$ 收敛。然而，h_t 无界，因此我们将像在公式 (27) 中那样，利用对数的一致可积性。我们将使用随机变量的 Vitali收敛定理（[Bil12，定理 25.12]），该定理指出，若 X_k 是一列一致可积的随机变量，且依分布收敛

到 X，那么 X 可积，且 $\mathbb{E}[X_k] \to \mathbb{E}[X]$。这里，若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $M > 0$，使得 $\sup_k \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{X_k \geq M}] < \varepsilon$，则称一列随机变量一致可积。

首先注意到 X_k 依分布收敛于 X：根据连续映射定理[Bil12，定理 25 的推论 1。7]，可知，若随机变量序列 $Y_k \in \mathcal{H}$依分布收敛于随机变量 $Y \in \mathcal{H}$，且 $h\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 是连续的，则 $h(Y_n)$ 依分布收敛于 $h(Y)$。令 $Y_k \sim \mu_k$，$Y \sim \mu$ 并取 $h = h_t$，即可得到 X_k依分布收敛于 X。

还需证明 X_k 一致可积。由（5）可知，存在函数 $f(t)$，使得 $h_t(S,x) < f(t)\,(1 + 1/\mathrm{Inj}\,(x))$。因此，只需证明对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对每个 k，$\int \frac{1}{\mathrm{Inj}(x)} \mathbf{1}_{\mathrm{Inj}(x) < \delta} d\mu_k \leq \varepsilon$。计算可知，在腰长为 ℓ 的领圈 C 中，

$$\int_C \frac{1}{\mathrm{Inj}\,(x)}\, dx \lesssim \int_0^{W(\ell)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\ell \cosh(\rho)} \ell \cosh(\rho)\, d\theta d\rho \asymp \log\,(1/\ell)\,.$$

因此，根据（27），存在一个 $\delta < \sinh^{-1}(1)$ 足够小，使得如果 ℓ_1，……，ℓ_s 是 δ 中 S_k短于

$$\int_{S_k} \frac{\mathbf{1}_{\mathrm{Inj}(x) < \delta}}{\mathrm{Inj}\,(x)}\, d\mu_k \lesssim \frac{1}{\mathrm{Vol}(S_k)} \sum_{i=1}^{s} \log(1/\ell_i) \leq \varepsilon\,. \tag{28}$$

应用维塔利定理可知，$\lim_{k\to\infty} \frac{D_{S_k}(t)\text{体积}(S_k)}{}$ 存在，且等于 $\int \left[p_t^{S_\infty}(x_0,\ x_0)\ - p_t^{\mathbb{H}}(0,\ 0)\right] d\mu$。

证明了这一点后，考虑大时间积分的极限，$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{D_{S_k}(\quad t\ -1)\text{体积}()}{t} dt$。根据定理 3 以及 $\sup_k L_1(S_k) < \infty$这一事实，我们有 $\frac{|D_{S_k}\ t\ -1|}{t}_{S_k}()\text{体积}()$ 被一个可积函数一致有界，因此根据控制收敛定理，

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{D_{S_k}(t) - 1}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} dt = \int_1^\infty \lim_{k\to\infty} \frac{D_{S_k}(t) - 1}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} dt = \int_1^\infty \frac{\int \left[p_t^{S_\infty}(x_0,x_0) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]\, d\mu}{t}\, dt\,. \tag{29}$$

对于小时间积分，我们使用函数的Vitali收敛定理 [Bil12，定理16。14]，该定理指出，如果 f_k 是一个几乎处处收敛于可测函数 f的非负函数族，那么 f_k 一致可积当且仅当 $f_k \xrightarrow{L^1} f$。结合定理4，这意味着

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{D_{S_k}(t)}{t\ \mathrm{Vol}(S_k)} dt = \int_0^1 \frac{\int \left[p_t^{S_\infty}(x_0,x_0) - p_t^{\mathbb{H}}(0,0)\right]\, d\mu}{t}\, dt \tag{30}$$

当且仅当 S_k 具有一致可积测地线。当 S_k 具有一致可积测地线时，(2)、(29) 和 (30) 给出了定理 1中的条目 (1。当 S_k 不具有一致可积测地线时，法图引理和 (29推出

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log\det \Delta_{S_k}}{\mathrm{Vol}(S_k)} \leq E_\mu\,;$$

由于极限存在，根据 (30) 等号不可能成立，因此我们得到定理 1中的条目 (2)　　. □

定理 2 的证明。 由于 $\mathbb{H}$ 是任意双曲曲面的万有覆盖，我们有 $p_t^S(x,x) > p_t^{\mathbb{H}}(0,0)$，对所有 $S \neq \mathbb{H}$ 以及所有 $t \in (0,\infty)$ 均成立。因此，如果 $\lim_{k\to\infty} \frac{\log\det \Delta_{S_k}}{\text{体积}(S_k)} = E_{\mathbb{H}}$，那么 $p_t^S(x,x) = p_t^{\mathbb{H}}(0,0)$ 对所有 t μ-a.s 均成立，这意味着 $\mathbf{S}_\infty = \mathbb{H}$ μ-a.s。 □

致谢

作者获得 ERC 巩固者资助 101001124（UniversalMap）以及 ISF 资助 1294/19 和 898/23。

参考文献

[Abe+17] Miklos Abert 等人：《李群中格序列的 L^2-不变量增长》。载于：数学年刊（第二辑）185.3（2017），第 711–790 页。 DOI：10 .4007 /annals . 2017.185.3.1。[Ang+18] Omer Angel 等人：《双曲与抛物单模随机映射》。载于：几何与泛函分析 28.4（2018），第 879–942 页。 DOI：10.1007/s00039-018-0446-y。[Awo18] Richard Olu Awonusika：《复射影空间 $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$（$n \geq 1$）上拉普拉斯算子的行列式》。载于：数论杂志 190（2018），第 131–155 页。 ISSN：0022-314X。 DOI：10.1016/j.jnt.2018.02.007。[Bil12] Patrick Billingsley：《概率与测度》。周年纪念版。威利概率与统计丛书。Steve Lalley 撰写序言，Steve Koppes 撰写 Billingsley 简传。John Wiley & Sons, Inc.，新泽西州霍博肯，2012 年，第 xviii+624 页。 ISBN：978-1-118-12237-2。[Bus10] P. Buser：《紧黎曼曲面的几何与谱》。现代 Birkh¨auser 经典著作。2010 年。 ISBN：9780817649913。[Cha84] I. Chavel：《黎曼几何中的特征值》。纯粹与应用数学。Academic Press, Inc.，佛罗里达州奥兰多，1984 年。 ISBN：0-12-170640-0。[Din02] Yu Ding：《极限空间上的热核与格林函数》。载于：分析与几何通讯 10（2002），第 475–514 页。 URL：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:46689162。[DLN25] Nguyen Viet Dang、Jiasheng Lin 和 Fr´ed´eric Naud：《高次数阿贝尔覆盖上拉普拉斯算子 ζ 行列式的渐近行为》。载于：arXiv:2505.01586（2025）。arXiv：2505.01586 [math-ph]。 URL：https://arxiv.org/abs/2505.01586。[DM88] E. B. Davies 和 N. Mandouvalos：《双曲空间与克莱因群上的热核估计》。载于：伦敦数学学会会刊（第三辑）57.1（1988），第 182–208 页。 DOI：10.1112/plms/s3-57.1.182。[GLN25] Renan Gross、Guy Lachman 和 Asaf Nachmias：《曲面小特征值的一个尖锐下界》。载于：arXiv:2407.21780（2025）。arXiv：2407.21780 [math.SP]。URL：https://arxiv.org/abs/2407.21780。[LY86] P. Li 和 S. T. Yau：《关于 Schr¨odinger 算子的抛物核》。载于：数学学报 156.3-4（1986），第 153–201 页。 DOI：10.1007/BF02399203。[Lyo05] R. Lyons：《生成树的渐近计数》。载于：组合学、概率与计算 14.4（2005），第 491–522 页。 DOI：10.1017/S096354830500684X。[Nau23] Fr´ed´eric Naud：《随机双曲曲面上拉普拉斯算子的行列式》。载于：J. Anal. Math. 151.1（2023），第 265–291 页。 ISSN：0021-7670,1565-8538。 URL：https : / / doi.org/10.1007/s11854-023-0334-8。[Sar90] Peter Sarnak：《拉普拉斯算子的行列式；高度与有限性》。载于：分析，等等。Academic Press，马萨诸塞州波士顿，1990 年，第 601–622 页。