arXiv:2601.00342v1 [physics.flu-dyn] 1 Jan 2026

通过多阶段神经网络求解无限域中的非线性亚声速可压缩流

Xuehui Qian[1, 2, †]、Hongkai Tao[3, †]和 Yongji Wang[4, 5, *]

[1]圣路易斯华盛顿大学，机械工程与材料科学系，美国密苏里州圣路易斯，邮编 63130[2]圣母大学，航空航天与机械工程系，美国印第安纳州圣母城，邮编 46556[3]中南大学，邓迪国际学院，中国湖南，邮编 410083[4]斯坦福大学，地球物理学系，美国加利福尼亚州斯坦福，邮编 94305[5]纽约大学，数学系，美国纽约州纽约，邮编 08550

[†]这些作者贡献相同[*]通讯作者：
yongjiw@stanford.edu

摘要

在空气动力学中，准确模拟翼型上的亚声速可压缩流对飞机设计至关重要。然而，求解控制非线性扰动速度势方程面临计算方面的挑战。传统方法通常依赖线性化方程或有限的截断域，这会引入不可忽略的误差，并限制其在实际场景中的适用性。本研究提出一种新框架，利用物理信息神经网络（PINN）在无界（无限）域中求解完整的非线性可压缩势方程。针对标准 PINN 固有的无界域处理和收敛难题，我们采用坐标变换，并将物理渐近约束直接嵌入网络架构。此外，我们采用多阶段物理信息神经网络（MS-PINN）方法，迭代地最小化残差，使解的精度接近机器精度。我们通过模拟圆形和椭圆几何形状上的流动，验证了这一框架，并将结果与传统的有限域解和线性化解进行比较。研究结果量化了区域截断和线性化所引入的显著差异，尤其是在较高马赫数下，并表明这一新框架是用于计算流体力学的稳健、高保真工具。

关键词：亚声速流动；无限域；物理信息神经网络；多阶段训练

1 引言

可压缩亚声速流在空气动力学领域至关重要，因为它广泛应用于飞机设计，而理解压力分布和气动载荷也十分重要[1——4]。为了解翼型周围的流动特性，人们推导出了一个称为扰动速度势方程的控制方程 [1, 5]。传统上，该方程为流体力学研究提供了宝贵的见解，有助于预测气动力，并优化翼型形状，以提高效率和升力特性 [1, 6]。然而，长期以来，速度势方程一直是一项重大挑战，因为它们属于非线性偏微分方程，因此除非满足严格的假设条件，否则不存在通用的闭式解 [7, 8]应对这一挑战的一种经典方法，是基于流动物理作出假设，并对方程进行线性化 [2]。尽管

通过传统数学技术可以获得解析解或半解析解，但当非线性可压缩性效应变得显著时，这些解的精度会降低 [9, 10]。

直到20世纪50年代中期，线性解一直主导着空气动力学的发展史。此后，随着高速计算机的出现，计算流体力学（CFD）蓬勃发展，提供了能够更精确地求解非线性方程的数值方法 [11–13]。如今，借助有限差分法、有限体积法和有限元法，我们可以高保真地数值求解非线性方程 [14–17]。然而，大多数 CFD 程序的核心是线性代数求解器，这意味着，对于非线性方程，必须在先行进行离散化的基础上，通过线性代数过程处理部分非线性问题 [18]。更重要的是，在实际应用中，无界域会被截断为有限计算域，并采用近似的外边界条件。因此，尽管与线性理论相比精度有所提高，但当需要获得有效无限域中的高保真解时，截断和人工外边界仍可能引入明显误差。

随着机器学习的发展，一种名为物理信息神经网络（PINNs）的创新方法正在迅速发展 [19–22]。它代表着求解此类非线性偏微分方程的一种范式转变，并已证明其在各个领域解决这类问题时具有优势 [23–26]。物理信息神经网络本质上是深度神经网络（DNNs）。传统深度神经网络不包含物理定律，因此需要大量数据进行训练。然而，物理信息神经网络将支配流动的方程作为损失函数，从而成功地将物理定律纳入考量。此外，物理信息神经网络无需依赖海量数据，而是通过在损失函数中以软约束的方式施加物理定律，便能从原本平凡的解中获得解；与标准深度神经网络相比，这种方式效率更高 [27]。与传统数值方法相比，物理信息神经网络具有若干优势。首先，物理信息神经网络无需网格划分，因此能够处理具有小尺度特征的高维问题和复杂几何 [28]。它们还避免了显式离散化，因为偏导数可以直接计算。此外，物理信息神经网络能够求解无限域问题，而这被视为标准数值方法面临的一项挑战 [29–33]。然而，标准物理信息神经网络在求解具有挑战性的非线性偏微分方程时，精度往往有限；而且，无限域问题仍然难以求解，需要谨慎处理。鉴于这些优势，我们采用物理信息神经网络作为基础求解器，并开发高级设置，以提高非线性问题的精度，并处理亚声速流动中的无限域。

虽然我们的研究动机源于翼型空气动力学，但我们通过圆柱体和椭圆这两种简化几何形状来开发并验证所提出的方法。本文其余部分安排如下。第2 节建立数学框架，第3节概述物理信息神经网络的基础方法。第4 节首先量化有限区域截断所引入的显著误差。为解决这一问题，我们提出一种融合无限域坐标变换、物理渐近约束和多阶段物理信息神经网络（MS-PINN）方法的方案，随后通过不可压缩流基准问题进行验证。第5节将该框架扩展至可压缩流，研究线性方程和非线性方程。本节分析线性化方法固有的差异，并通过求解椭圆绕流问题展示该框架的通用性。最后，第6 节给出总结。

2 可压缩亚声速流动的数学框架

2.1 控制方程

本研究聚焦于均匀流中绕椭圆几何体流动的二维、定常可压缩亚声速流。为描述该流动，我们首先作出一些假设：流动无黏且无旋。因此，我们可以引入速度势 $\Phi = \Phi(x,\ y)$

作为流动的$\mathbf{V} = \nabla\Phi$，即：

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{and} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2.1}$$

其中，u 和 v 分别是沿 x 和 y 方向的速度分量。

可压缩流的运动由纳维–斯托克斯方程和连续性方程支配，它们分别描述动量守恒和质量守恒。对于二维可压缩流，连续性方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{2.2}$$

其中，ρ 表示空气密度，$\mathbf{u} = (u, v)$ 表示速度矢量。由于假设流动为定常流，时间导数项消失。接下来，将方程（2.1）代入连续性方程（2.2），得到：

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \tag{2.3}$$

类似地，纳维–斯托克斯方程描述动量平衡，其矢量形式为：

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \mathbf{F}_\nu + \rho \mathbf{f}, \tag{2.4}$$

其中，$\mathbf{p}$、$\mathbf{F}_\nu$和$\mathbf{f}$ 分别表示压力、黏性应力和单位质量体积力。由于流动为定常流，省略时间导数项。此外，在无黏流假设下，黏性应力项可忽略不计，即$\mathbf{F}_\nu \approx 0$。另外，本研究中气流的重力效应（体积力）可忽略，因此动量方程可简化为：

$$\rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\rho}{2} \nabla \left(\mathbf{u}^2 \right) = -\nabla \mathbf{p}, \tag{2.5}$$

其中 $\mathbf{u}^2 = u^2 + v^2$。将方程（2.1）代入上述方程，可得：

$$dp = -\frac{\rho}{2} d \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]. \tag{2.6}$$

由于流动是等熵的，我们可以使用等熵关系，该关系直接将压力 dp 的变化与密度 $d\rho$ 的变化联系起来。因此，我们有关系式 $\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$。此外，右侧是声速的平方，记为$a^2$。因此，我们有：

$$dp = a^2 d\rho. \tag{2.7}$$

将方程（2.7）代入方程（2.6），可得：

$$d\rho = -\frac{\rho}{2a^2} d \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]. \tag{2.8}$$

结合方程（2.8）和（2.3，可得到可压缩亚声速流的速度势最终控制方程：

$$\left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \tag{2.9}$$

接下来，我们引入扰动速度势 ϕ。具体而言，对于置于沿 x 方向以速度 U_∞ 流动的均匀流中的物体，我们将速度势分解为

$$\Phi(x,y) = U_\infty x + \phi(x,y). \tag{2.10}$$

将这一关系代入方程（2.9），即可得到非线性扰动速度势方程：

$$\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_\infty\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_\infty\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 0. \tag{2.11}$$

对于稳态、绝热、无黏流，能量方程写为：

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}, \tag{2.12}$$

其中，h 为焓；对于量热完全气体，$h = c_pT$，其中 $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ 为定压比热。将这些关系代入方程（2.12），可得：

$$\frac{\gamma RT_1}{\gamma-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma RT_2}{\gamma-1} + \frac{V_2^2}{2}. \tag{2.13}$$

S由于声速为 $a = \sqrt{\gamma RT}$，方程（2.13）可改写为：

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{V_2^2}{2}. \tag{2.14}$$

令 a_1 为 a，a_2 为驻点声速，可得：

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_\infty\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right], \tag{2.15}$$

其中，a_0 为已知常数，γ 为热容比。在本研究中，我们始终使用$\gamma = 1.4$。

2.2 线性化

前文给出的非线性扰动速度势方程很难通过解析方法求解。在经典空气动力学中，通常采用小扰动假设对控制方程进行线性化，使其更易于求解。然而，在本研究中，我们并不将线性化作为简化或近似非线性问题的方法。相反，线性化方程为我们的方法设计提供了动机，并作为评估模型性能的参考。

基于（2.10）及定义 $u = \Phi_x$ 和 $v = \Phi_y$，我们将扰动速度定义为

$$u'(x,y) = \phi_x(x,y), \qquad v'(x,y) = \phi_y(x,y), \tag{2.16}$$

从而有 $u = U_\infty + u'$ 和 $v = v'$。

将（2.16）代入（2.11），并使用 $\phi_{xx} = u'_x$、$\phi_{yy} = v'_y$和 $\phi_{xy} = u'_y$，可得：

$$\left[a^2 - \left(U_\infty + u'\right)^2\right]\frac{\partial u'}{\partial x} + \left[a^2 - v'^2\right]\frac{\partial v'}{\partial y} - 2\left(U_\infty + u'\right)v'\frac{\partial u'}{\partial y} = 0. \tag{2.17}$$

回顾:

$$\frac{a_\infty^2}{\gamma-1}+\frac{U_\infty^2}{2}=\frac{a^2}{\gamma-1}+\frac{(U_\infty+u')^2+v'^2}{2}. \tag{2.18}$$

将其代入方程（2.17），得:

$$\begin{aligned}\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=&M_\infty^2\left[(\gamma+1)\frac{u'}{U_\infty}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{u'^2}{U_\infty^2}+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v'^2}{U_\infty^2}\right]\frac{\partial u'}{\partial x}\\&+M_\infty^2\left[(\gamma-1)\frac{u'}{U_\infty}+\frac{\gamma+1}{2}\frac{v'^2}{U_\infty^2}+\frac{\gamma-1}{2}\frac{u'^2}{U_\infty^2}\right]\frac{\partial v'}{\partial y}\\&+M_\infty^2\left[\frac{v'}{U_\infty}\left(1+\frac{u'}{U_\infty}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.19}$$

在小扰动假设下（该假设通常适用于小攻角下的细长体），有 $\frac{u'}{U_\infty}$，$\frac{v'}{U_\infty}\ll 1$。这意味着可以忽略方程（2.19）右侧的项，因此线性化扰动速度势方程变为:

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0. \tag{2.20}$$

2.3 边界条件

速度势方程应满足两组边界条件：一组在无穷远处，另一组在物体表面。在无穷远处，随着物体引起的扰动消失，流动趋近于均匀自由来流，其中 $u\to U_\infty=55m/s$ 和 $v\to 0$。

在物体表面，流动切向边界条件 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0$ （$\mathbf{n}$ 表示物体表面的单位法向量）要求速度矢量 $\mathbf{V}$ 与物体表面相切。用速度分量表示，这意味着比值 v/u等于表面切线的斜率，即物体表面上的 $v/u=dy/dx$ 。

本文研究的椭圆几何以笛卡尔坐标系的原点为中心。因此，我们将物体形状定义为:

$$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.21}$$

其中 b 是介于 0 m 和 1 m之间的任意常数。物体形状如图 1所示。为求得有符号切线斜率，我们将方程（ y 2.21）中的 x视为 2.21）的隐函数，并对方程（

$$2x+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0. \tag{2.22}$$

整理方程（2.22），并将 (x_0,y_0) 代入方程，可得 n:

$$\frac{dy}{dx}=-b^2\frac{x_0}{y_0}. \tag{2.23}$$

对于该椭圆几何，我们引入标准参数角 $\theta\in[0,2\pi)$，使椭圆几何上的任意点 (x_0,y_0) 均可表示为 $x_0=\cos\theta$，$y_0=b\sin\theta$。将其代入方程（2.23），并应用表面上的相切条件 $\Phi_y/\Phi_x=dy/dx$，可得流动相切条件:

$$\frac{\Phi_y}{\Phi_x}=-b\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.24}$$

在 $b=1$ 的特殊情况下，几何形状变为圆柱体，流动相切条件简化为:

$$\frac{\Phi_y}{\Phi_x}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.25}$$

3 方法

3.1 物理信息神经网络

物理信息神经网络（PINN）用于求解涉及复杂非线性偏微分方程的物理问题，这些方程通常表示为:

$$u_t + N[u] = 0, x \in \Omega, t \in [0, T]. \tag{3.26}$$

在该方程中，$u(x,\ t)$ 是解，N 是非线性微分算子，Ω 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的计算域。

物理信息神经网络通常由三个主要部分组成：全连接神经网络、激活函数 $\sigma(\cdot)$（用于处理全连接网络的输入和输出），以及物理信息损失函数（通过将损失最小化至零来优化网络）。此过程用于近似解 $u(x,\ t)$。

神经网络由一个输入层、一个输出层以及位于两者之间的若干隐藏层组成。输入层接收坐标 $(x,\ t)$，输出层则给出 $u(x,\ t)$ 的近似值。在每个隐藏层中，输入 x_i 与输出y_j 之间的关系由下式描述:

$$y_j = \sum_i w_{ji} x_i + b_j, \tag{3.27}$$

其中，w_{ji} 是权重，b_j 是偏置，通过最小化损失函数的均方误差（MSE）进行调整。MSE 的计算如下:

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{MSE}_0 + \mathrm{MSE}_b + \mathrm{MSE}_f. \tag{3.28}$$

这里，MSE_0、MSE_b和MSE_f 分别表示初始条件、边界条件和控制方程的误差。它们的定义如下:

$$\mathrm{MSE}_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} |g_0|^2, \qquad \mathrm{MSE}_b = \frac{1}{N_b}\sum_{i=1}^{N_b} |g|^2, \qquad \mathrm{MSE}_f = \frac{1}{N_f}\sum_{i=1}^{N_f} |f|^2,$$

其中:

$$g_0 = u\left(t_0^i, x_0^i\right) - u_0^i, \qquad g = u\left(t_b^i, x_b^i\right) - u_b^i, \qquad f = u_t\left(t_f^i, x_f^i\right) + N\left[u\left(t_f^i, x_f^i\right)\right],$$

在这些方程中，g_0、g和 f 分别表示初始条件、边界条件和控制方程中预测值与实际值之间的差异。术语$(x_0^i,\ t_0^i)$、$(x_b^i,\ t_b^i)$和 $\left(x_f^i, t_f^i\right)$ 分别表示初始数据、边界上的配点以及用于求解控制方程的配点。数字 N_0、N_b和 N_f分别对应这些组成部分的数据点数量。损失函数中的导数通过自动微分计算，而 Jax、PyTorch 和 TensorFlow 等许多框架目前已广泛支持自动微分。

3.2 归一化

本文中，我们设自由来流速度为 $U_\infty = 55$ m/s，这使得原始速度势方程的量级远大于 1。为提高求解过程的数值稳定性，我们对变量进行归一化，使其数值量级为 1。具体而言，我们将自由来流速度归一化为 $U'_\infty = U_\infty/100 = 0.55$ m/s。由此得到原始扰动速度势与归一化扰动速度势之间的关系：$\phi = 100\phi'$。

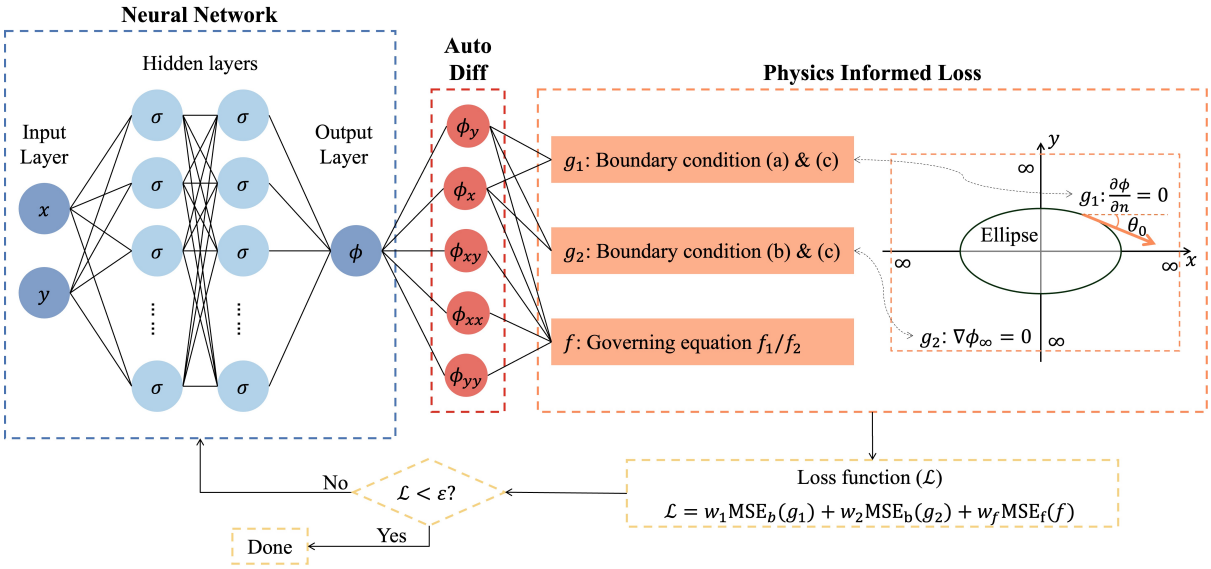

图 1：**用于求解亚声速流动的物理信息神经网络框架示意图**。该网络由六个隐藏层组成，每层包含 60 个神经元，用于近似解。输出 ϕ 通过自动微分用于计算损失函数，随后利用这些损失函数训练隐藏层中激活函数的权重和偏置。右侧面板展示了施加的边界条件。

由于 $a_\infty = U_\infty/M_\infty$，我们也可以将 a_∞ 归一化为 $a'_\infty = a_\infty/100$，从而使 $a = 100a'$。因此，归一化后的非线性速度势方程为：

$$\left[1 - \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} + U'_\infty\right)^2\right]\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} - \frac{2}{a'^2}\left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} + U'_\infty\right)\left(\frac{\partial \phi'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3.29}$$

利用这一归一化关系，线性化速度势方程可写成归一化形式：

$$\left(1 - M_\infty^2\right)\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0. \tag{3.30}$$

请注意，归一化后，结果也会归一化。因此，为了获得正确的结果，必须将输出乘以 100 的缩放因子。为简便起见，我们省略撇号，并对归一化变量沿用相同的符号（例如，除非另有说明，我们写作ϕ 而不是 ϕ' ）。

3.3 求解亚声速流动的代价函数

现在，我们构建一个物理信息神经网络模型来近似该解。该神经网络由八层组成：一个包含两个输入的输入层 x 和 y、一个输出为ϕ（x，y）的输出层，以及六个各含 60 个神经元的隐藏层。图1展示了用于求解该问题的物理信息神经网络框架示意图。

代价函数定义为两个主要项的组合：边界损失（MSE$_b$）和控制方程损失（MSEf）。为定义代价函数，我们首先回顾该问题的边界条件。这些条件如下：

（a）远场区域中的扰动速度为零；

(b) 物体表面上的流动相切条件；

(c) 自由来流速度 $U_\infty = 55$ m/s。

为满足边界条件 (a)，我们将无穷远处的 ϕ_x 和 ϕ_y 设为零。由此得到以下边界残差：

$$g_1 = \{\phi_x(-\infty, y),\ \phi_x(\infty, y),\ \phi_y(x, -\infty),\ \phi_y(x, \infty)\}. \tag{3.31}$$

如第2.3节所述，流动相切条件由方程（2.24）给出。对于扰动速度势表述，物体表面上的流动相切条件表示为 $\phi_y/(\phi_x + U_\infty) = -b^{\cos\theta}\sin\theta$。然而，若直接将损失函数定义为 $g_2 = \phi_y/(\phi_x + U_\infty) + b^{\cos\theta}\sin\theta$，则会在 $\theta = 0, \pi$ 和 2π 处产生奇点。为避免这一问题，我们将等式两边乘以 $\sin\theta(\phi_x + U_\infty)$，得到等价的第二个边界残差，

$$g_2 = \phi_y \sin\theta + b\cos\theta(\phi_x + U_\infty). \tag{3.32}$$

因此，g_1 和 g_2 定义了边界损失。对于 g_1，配点取在无穷远处；而对于 g_2，配点取在物体表面上。因此，g_1 满足边界条件（a），g_2 满足边界条件（b），而条件（c）则隐含地编码在分解 $\Phi(x, y) = U_\infty x + \phi(x, y)$ 中。

方程残差定义如下：

$$f_1 = \left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_\infty\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_\infty\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}, \tag{3.33}$$

$$f_2 = \left(1 - M_\infty^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}. \tag{3.34}$$

残差 f_1 嵌入在非线性代码中，f_2 则嵌入在线性代码中。

为控制各损失项的相对重要性，我们在损失项中引入权重 w_1、w_2和 w_f。通常，w_1 和 w_2 设为 1，而 w_f 取小于 1 的值。于是，总损失为：

$$\mathcal{L} = w_1\mathrm{MSE}_b(g_1) + w_2\mathrm{MSE}_b(g_2) + w_f\mathrm{MSE}_f(f). \tag{3.35}$$

4 求解亚声速流的高级设置

4.1 无限域的坐标变换

在截断有限域中求解问题时，不可避免地会产生不可忽略的截断误差。为量化区域截断的影响，我们考虑一个简化的基准算例，该算例在无限域中具有已知解析解：流经圆柱体的无黏、无旋、不可压缩流。扰动势满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \tag{4.36}$$

这等价于极坐标形式：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0, \tag{4.37}$$

其中 $(r,\ \theta)$ 为极坐标。解析解为：

$$\Phi(r, \theta) = U_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \tag{4.38}$$

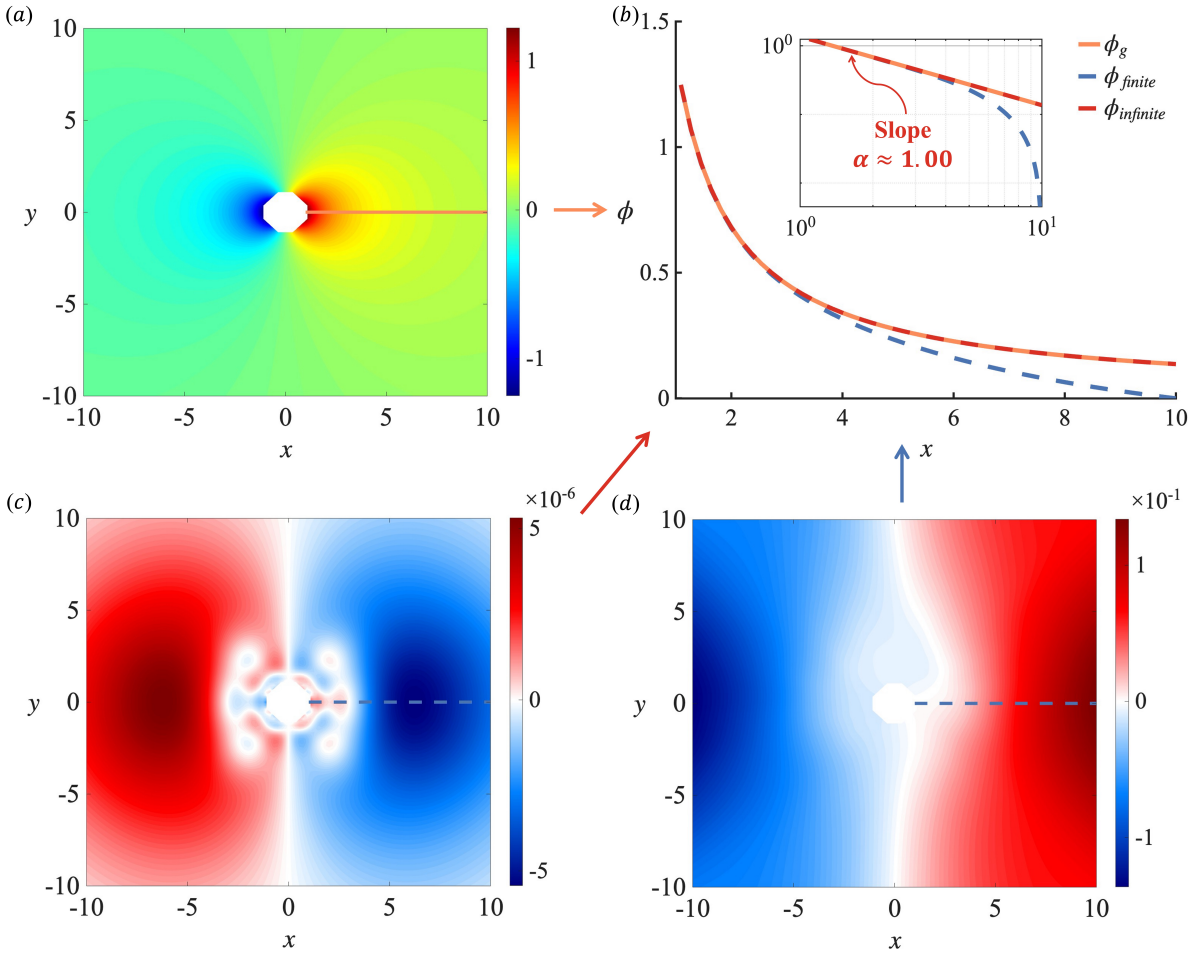

图 2：**有限域和无限域的结果比较。**（a）无限域中的解析解（4.39），在截断区域内进行可视化。（b）解剖面的比较，并附有双对数图展示其随距离的渐近衰减。（c）无限域上求解的第一阶段物理信息神经网络的误差分布。（d）截断有限域上求解的第一阶段物理信息神经网络的误差分布。

令 $\Phi = U_\infty r\cos\theta + \phi$，扰动势为：

$$\phi(r,\theta) = U_\infty \frac{R^2}{r}\cos\theta. \tag{4.39}$$

图 2 比较了无限域解析解与两种物理信息神经网络解：一种是在截断有限域上得到的，另一种是在紧化无限域上得到的，后者采用本节稍后介绍的坐标变换。可以观察到明显的 $\mathcal{O}(10^{-1})$ 量级的差异，误差主要集中在远场区域。这表明，即使近物体区域得到了充分分辨，只要计算域没有充分扩展，人工外边界仍会污染解。

在笛卡尔坐标中直接将区域扩展到无限远，对物理信息神经网络而言并不可行，因为采样会变得低效，数值条件性也可能恶化。相反，我们需要一种映射，将无限物理域紧化为有限计算域。可以采用许多紧化映射。一种常见的选择是 $q = e^{-r}$ 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 且 $\beta = \frac{x^2}{x^2+y^2}$。将解变换为 $\phi(q,\beta)$ 后，如图 3(a) 所示，无限域确实被映射到了有限区间，且图中的衰减看起来平滑。然而，图 3(b) 显示，ϕ 在 $q \to 0$ 时会出现尖锐梯度。在

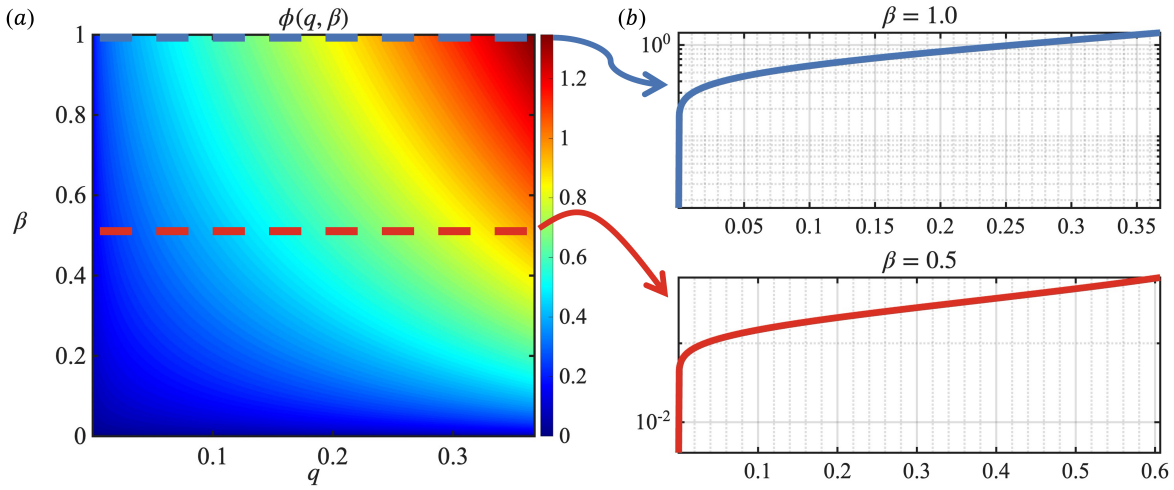

图 3：**指数映射下的解剖面**（$q = e^{-r}$）。对于不可压缩流，(a) 展示了（q，β）域中的 $\phi(q,\beta)$；(b) 展示了 $\beta = 1$ 和 $\beta = 0.5$ 处的切片，突出显示了 $q = 0$ 附近的尖锐梯度。

具体而言，$\partial\phi/\partial q$ 在 $q \to 0$时趋于无穷大，从而在 $q = 0$ 处产生奇点（即 $r \to \infty$），使得该问题难以通过数值方法求解。

因此，为了设计有效的紧化，我们首先考察解的远场行为。对于方程（4.36），解析解（4.39）表明，扰动势按代数规律衰减为 $\phi \propto r^{-1}$，这启发我们采用基于幂律的径向紧化。图 2（b）也通过数值结果证实了这一衰减。在物理坐标中，ϕ 在物体附近快速变化，随后过渡为缓慢变化的远场尾部。以 r 为横轴、$|\phi|$为纵轴的双对数图近似为斜率绝对值接近 1 的直线，这表明：

$$\phi \propto r^{-\alpha}, \qquad \alpha \approx 1. \tag{4.40}$$

因此，无限域的坐标变换应遵循这一渐近结构。具体而言，理想情况下应引入一个变换后的径向坐标，使其随 ϕ 的主导远场衰减线性缩放。

Mo基于这一考虑，我们引入变换坐标 $(q,\ \beta)$，定义为 y:

$$\begin{aligned} q &= (1+r^2)^{-\alpha/2} = (1+x^2+y^2)^{-\alpha/2}, \\ \beta &= \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

其中 $\alpha > 0$ 控制径向缩放。该映射将无限物理域（$x,\ y$）$\in$（$-\infty,\ \infty$）^{2}映射到紧致且归一化的计算域（$q,\ \beta$）$\in [0,1] \times [0,1]$。坐标 q 捕捉主要的径向变化，而 β 表示角向依赖。需要注意的是，该映射在构造上还施加了偶对称性；当目标解具有混合对称性时，这可能会带来问题。我们将在第4.2节讨论这一问题。

当 $\alpha = 1$ 时，变换后的坐标在远场满足 $q \sim r^{-1}$，使 q 与首阶扰动势呈线性正比。这种选择改善了学习问题的条件性，因为主导衰减被吸收到坐标系中，而不必由网络学习。更一般地说，α 具有明确的物理意义：它表示扰动势的渐近衰减指数。如果选择 α 与渐近行为相匹配，变换后的解便会在紧致域上平滑变化。如果错误地选择 α，映射就会与解的结构错位。具体而言，过大的取值会使远场在 $q = 0$ 附近过度压缩，从而放大梯度并

恶化数值条件性，而过小的取值则无法充分捕捉衰减，使远场行为更难学习。在这两种情况下，收敛都会变差，解的精度也会降低。

最后，我们还测试了一种替代性的降阶方法，该方法直接求解扰动速度分量 u' 和 v'，而不是求解势 ϕ。然而，正如附录 A中所述，在我们的物理信息神经网络实验中，这种基于速度的公式并未优于基于势的公式。

4.2 神经网络中的物理嵌入

基于前述坐标变换和物理学洞见，我们进一步将物理约束（记为 q）嵌入神经网络中。预测表示为：

$$\begin{gathered}\phi_{pred}(x,y) = q \cdot \mathcal{N}[q,\beta], \\ \text{where} \quad q = (1+x^2+y^2)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B},\end{gathered} \tag{4.42}$$

其中，$\mathcal{N}$ 表示神经网络，ϕ_{pred} 表示模型预测值。此处，$\mathbb{R}^2$ 表示无界物理平面；在实际应用中，在 $(q,\ \beta) \in (0,\ 1]\times[0,1]$ 中采样配点，并将其映射回外部流动区域 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$，其中 $\mathcal{B}$ 为固体（对于椭圆，$\mathcal{B} = \{(x,\ y):\ x^2+y^2/b^2 \le 1\}$）。该公式将渐近幂律衰减嵌入网络，使神经网络只需专注于学习剩余的线性表达式，从而简化训练过程。此外，施加的衰减约束确保解在无穷远处趋近于零，这与物理边界条件一致。

然而，由于施加的衰减条件迫使解在无穷远处趋于零，这一限制可能导致网络低估远场区域的损失贡献，使物理信息神经网络忽略该区域。为解决这一问题，需要采用额外的技术来放大该区域的残差，相关内容将在后续章节中讨论。

此外，目标解在两个坐标方向上并不对称。具体而言，扰动速度势 $\phi(x,\ y)$ 关于 x 为奇函数，关于 y为偶函数。为了将这种对称性融入网络，我们施加以下约束，并对模型进行如下修改：

$$\phi_{pred}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot q \cdot \mathcal{N}[q,\beta]. \tag{4.43}$$

这种表述确保模型遵循流场的物理对称性，同时通过可学习的神经表示保留灵活性。

4.3 配点布置

物理信息神经网络通过在区域内选取特定配点，并要求解在这些点满足控制方程，来求解偏微分方程。恰当选择这些点对于获得准确且高效的解至关重要，尤其是在复杂区域中。本研究采用拉丁超立方抽样（拉丁超立方抽样）方法，在整个区域空间内随机生成配点。

然而，流动变化剧烈的不规则边界给控制方程的求解带来了困难。将不规则区域转换为规则区域有时会有所帮助，但这种方法存在局限性，因为针对每个具体情况都需要进行不同的变换。此外，前文讨论的无穷映射带来了另一项挑战：它会将较小的区段映射到相对较大的区域。例如，小区间 $[0,10]$ 会被映射到 $[0.1,1]$，而无限域 $[10,+\infty]$ 则被压缩到 $[0,0.1]$，导致物理信息神经网络对远场区域关注不足。这种不平衡——较小区域比更大区域受到更多关注——会影响解的精度。

为应对这些挑战，采用了另外两种策略：增加边界点和自适应采样。第一种策略是根据训练性能，在边界、变化剧烈的区域或无限区域中额外布置配点。这些点可以均匀分布，也可以根据函数的行为进行布置。第二种策略是自适应采样，它会在训练过程中根据误差分布动态调整配点的密度。具体而言，在训练的某次迭代中，会计算整个区域内的方程误差分布 F，并将其归一化，生成归一化误差分布 F_{nm}。然而，这种方法可能导致配点集中在某些位置，从而造成训练不平衡，并可能产生低频且有偏的结果。为缓解这一问题，引入敏感性指标 Δf，以减小误差分布的差异和敏感性。通常， Δf 选取在 0.1 到 0.5 之间。

$$F = f^2, \tag{4.44}$$

$$F_{nm} = \frac{F}{\mathrm{MSE}_f(f)} + \Delta f. \tag{4.45}$$

为降低噪声并提高采样效率，使用高斯滤波器对归一化误差分布进行平滑：

$$F_s = \mathcal{G}(F_{nm}, \sigma, w). \tag{4.46}$$

其中， $\mathcal{G}$ 是高斯平滑算子， σ 和 w 分别表示滤波器的标准差和宽度。将每个节点处的误差与其周围 w 个相邻节点的误差相结合，从而有效平滑误差分布。对于不规则区域，需要执行两个关键步骤以确保高斯平滑的稳健性。首先，在平滑之前，应用半掩膜 F_{nm} ，将网格向不规则边界之外延伸 $w/2$，以涵盖域外区域。这样可以确保高斯平滑均衡，同时略微提高不规则边界附近的误差概率。这一点尤为重要，因为不规则边界会给训练带来挑战。其次，平滑之后，在主体区域内对结果 F_s 进行完全掩蔽，确保不会在域外生成采样点。

误差分布平滑后，计算累积分布函数 B。随后，在 $[0, B_{max}]$ 之间生成一个随机数 c，根据相对概率选择网格点。最后，通过为选定的网格点添加微小的随机偏移来微调采样点，确保采样点不严格局限于网格点。

这些方法确保在误差较高的区域拥有更高密度的采样点，从而提升模型在复杂区域中的整体效率和精度。

4.4 用于不规则边界条件的多阶段物理信息神经网络

Wang 和 Lai [22] 提出了一种多阶段神经网络框架，通过引入多个网络阶段来突破精度瓶颈。在每个阶段，都会引入一个新的神经网络，并对其进行优化，使其学习上一阶段的残差。该方法采用基于频谱的方法进行阶段转换，并通过迭代以指数衰减率达到机器精度结果。然而，基于频谱的阶段转换方法并不直接适用于不规则区域，因为标准离散傅里叶变换要求提供完整均匀矩形网格上的数值。此外，坐标变换会使训练更加困难，因为内侧有限区域与外侧无限区域的精度并不一致。

4.4.1 基于频谱的不规则区域过渡

首先，我们回顾用于阶段转换的原始基于频谱的误差关系。当前一阶段经过适当训练且其边界条件接近于零时，以下等式成立：

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{r1}}{[2\pi f_d^{(r)}]^m \cdot \epsilon_\beta}, \quad \text{with } \epsilon_1 = \mathrm{RMS}(e_1(x,u_0)),\ \epsilon_\beta = \mathrm{RMS}(\beta_m),\ \epsilon_{r1} = \mathrm{RMS}(r_1(x,u_0)). \tag{4.47}$$

这里，ϵ_1、ϵ_β 和 ϵ_{r1} 分别表示误差 e_1（x，u_0）（精确解与预测解之间的误差）、β_m（最高阶导数的系数）以及r_1（x，u_0）（前一阶段的方程残差）的大小。$f_d^{(r)}$ 表示方程残差 r_1（x，u_0）的主导频率，m 指 u的最高阶导数阶数。RMS(·)表示在采样点上评估某个量所得的均方根误差（RMS）。

对于残差可在完整的均匀采样矩形网格上获得的问题，可以使用离散傅里叶变换（DFT）确定主导频率。然而，对于不规则区域上的偏微分方程，无法直接应用标准DFT。虽然通常使用坐标变换来解决这一问题，但这会限制泛化能力，尤其是在处理复杂边界时。另一种选择是使用区域分解来求解问题，但精度较低。正如第4.3节所述，无限区域的频率低于内部区域，因此整个区域中可能存在频率差异，从而限制区域分解方法的有效性。

为解决这一问题，我们利用方程残差 $r_1(x,u_0)$ 在理论上为零且实际中也非常接近零这一特性。将不规则区域之外的值设为零后，离散傅里叶变换便能有效发挥作用。该方法有两大优点：泛化能力强，便于有效处理不规则边界；而且由于残差接近零，不会引入显著误差。不过，由于对误差进行了任意掩膜处理，频谱中可能会出现吉布斯现象和频谱泄漏等歧义。这些问题很容易检测，无需担忧；更多讨论见第 附录 B。

4.4.2 MS-PINN 设置、超参数和配点

多阶段网络的关键超参数包括幅值前因子（新阶段的归一化因子）ε_1、修正尺度因子（网络第一层的层尺度，用于决定解的频率）$\hat{}\kappa_1$，以及方程权重 w_f，其定义如下：

$$\varepsilon_1 = \epsilon_1,\ \hat{\kappa}_1 = [2\pi f_d^{(r)}]^m \cdot \epsilon_1,\ w_{f1} = \frac{w_{f0}}{[2\pi f_d^{(r)}]^m}, \tag{4.48}$$

其中，w_{f0} 表示前一阶段的方程权重，而$\hat{}\kappa_1$ 可以略微增大，以捕捉新阶段结果中的更高频率。

关于这一关系的一个常见误解是，频率越高，精度就越高。虽然增大修正尺度因子可以提高解的频率，但高阶段网络的精度取决于前一阶段频率和幅值的同质性。频率变化过大，或目标函数与残差项的幅值差异显著，都可能导致训练失败，因为网络可能会陷入局部极小值。这是因为优化景观会变得非凸，网络往往优先拟合低频和高幅值分量，而忽略其他分量。

此外，要获得机器精度解，必须仔细设计配点。除了第 4.3 节讨论的策略外，在坐标变换后求解定义于无限域上的方程时，第一阶段和第二阶段添加边界点的策略可能有所不同。在第一阶段，无限区域和物体周围内部区域的学习难度相对均衡。因此，即使将边界点集中布置，甚至省略边界点，仍可能获得良好结果。然而，在第二阶段，随着总体误差降低、模型逐渐达到更高精度，无限区域中的微小变化（此前可以忽略）会变得相对显著。这些变化会主导局部误差，并吸引网络投入更多关注。不巧的是，由于变换坐标高度压缩，该区域只占据很窄的区间（例如 $\mathcal{O}(+\infty)$ 映射到 $\mathcal{O}(0.1)$），其中的配点相对较少。因此，网络难以在该区域准确拟合函数。由此，第二阶段在无限区域中的训练变得更具挑战性，因此必须在无穷远边界附近增加配点。

4.4.3 性能验证与最终调整

为验证 MS-PINN 的性能，我们首先应用其求解圆柱体周围的二维不可压无黏流，其中扰动势满足拉普拉斯方程（4.36）。图4 给出了结果，并通过方程残差和解误差对其进行了评估。结果表明，MS-PINN 达到了机器精度，均方根约为 $\mathcal{O}$（10^{-8}），凸显了其求解偏微分方程的卓越能力。

需要注意的是，方程误差与解误差之间的关系并不严格遵循方程（4.47）。这种差异主要源于无限域中的训练不足，即使增加了配点也是如此。由于在无穷远处施加了硬约束（4.42）以强制取零，无限区域中的误差自然会降为零，从而误导优化器。

为提高精度并使结果更接近方程（4.47），我们通过将控制方程损失除以 q^γ来对其进行修改； 是一个能够放大无限区域误差的权重调整因子。修改后的方程损失为：

$$MSE_f = \frac{1}{N_f}\sum_{i=1}^{N_f} |f/q^\gamma|^2 , \tag{4.49}$$

其中， γ 是放大因子，通常在 0.5 到 3 之间。在实践中，第一阶段训练期间的放大因子通常较高，并可持续调整，直到训练精度开始下降。 q^γ 设置失败通常可通过以下几种特征加以识别：方程损失不下降、异常偏高或无法收敛；过多的自适应配置点集中在无限区域；所得方程误差不理想或异常偏大；以及误差呈现低频特征，并且其频谱存在异常。出现上述任何一种迹象，通常都表明γ 设置得过高。

此类操作后可能出现一种常见现象，似乎与我们先前关于第一阶段训练中的频率应保持均匀的说法相矛盾。然而，当考察 f/q^γ 的方程误差和频谱，而不是仅考察 f 时，我们发现频率分布仍然保持一致。这一观察结果证实了第一阶段训练的成功，并表明该调整并不违背我们此前的论断。

尽管这一策略改善了解，但需要注意的是，即使不进行这一修改，MS-PINN 也已达到令人满意的精度，约为 $\mathcal{O}$（10^{-7}）。

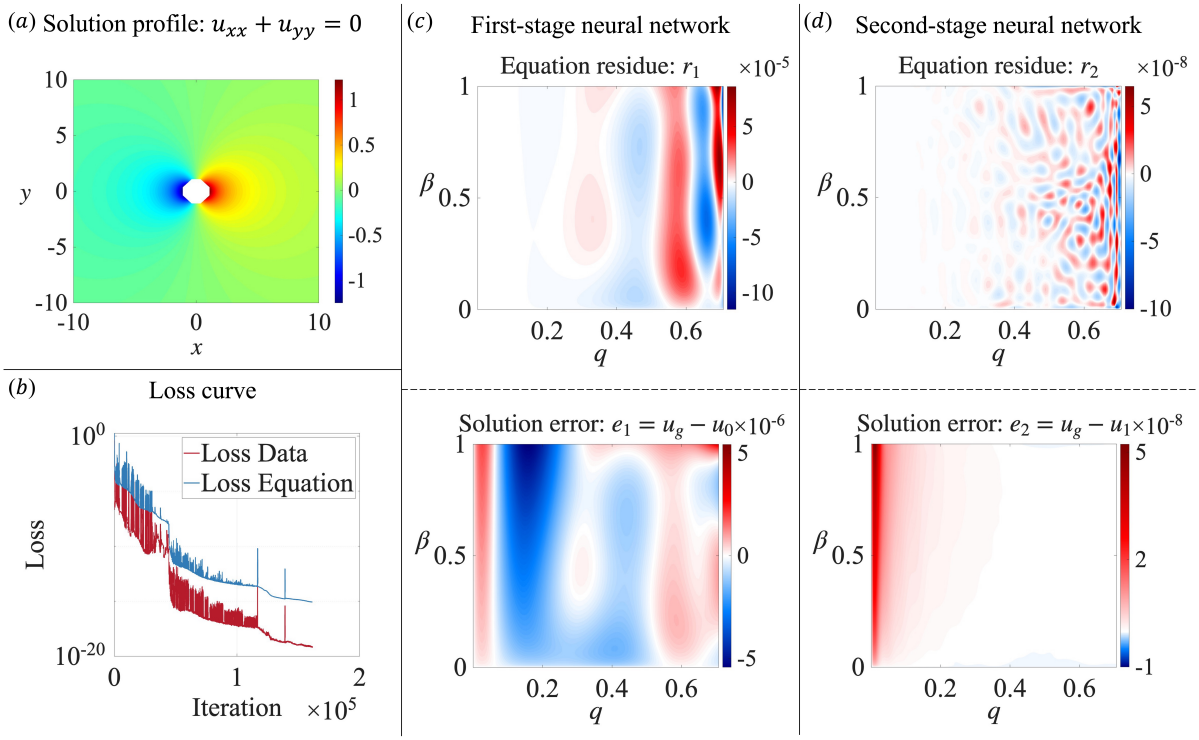

图 4：**MS-PINN 对不可压缩流的求解结果**。（a）预测的势 ϕ（拉普拉斯方程4.36）。（b）多阶段训练的损失曲线。（c）第一阶段训练后的方程残差和解误差。（d）第二阶段训练后的相应结果。

5 结果

本节按复杂程度递增的顺序展示结果。在上一节中通过拉普拉斯方程验证该方法后，我们首先将其应用于更复杂的线性形式。随后，我们将模型扩展到非线性问题，并比较线性解与非线性解，以量化非线性的影响。最后，我们在更复杂的几何形状上测试该方法。

5.1 线性与非线性可压缩亚声速流

在第 4 节中，我们使用拉普拉斯方程（4.36）介绍并验证了我们的方法，证明了模型的鲁棒性和精度。现在，我们将同样的方法拓展到更具挑战性的线性可压缩方程（2.20）。该线性方程的形式与方程（4.36）相似，但包含额外的系数，因此对于这个边值问题，通常不存在简单的闭式解。由于整体形式仍然相似，我们可以沿用之前相同的 MS-PINN 设置。

图 5（a）展示了马赫数为 $M_\infty = 0.4$时线性方程的 MS-PINN 结果。我们绘制了有限区域上的解，报告了无限域上的第二阶段方程残差，并给出了相应的损失曲线。结果达到了机器精度。

我们进一步将该方法应用于非线性方程（2.11），该方程长期以来一直难以准确且高效地求解。如图5（b）所示，结果表明，MS-物理信息神经网络能够稳定地实现均方根误差 $\mathcal{O}(10^{-7})$。该方法仍保持较高的计算效率，表明其能够直接捕捉线性模型所遗漏的非线性效应。随着

在这一精度水平下，MS-PINN 能够提供足够精确的解来求解

e

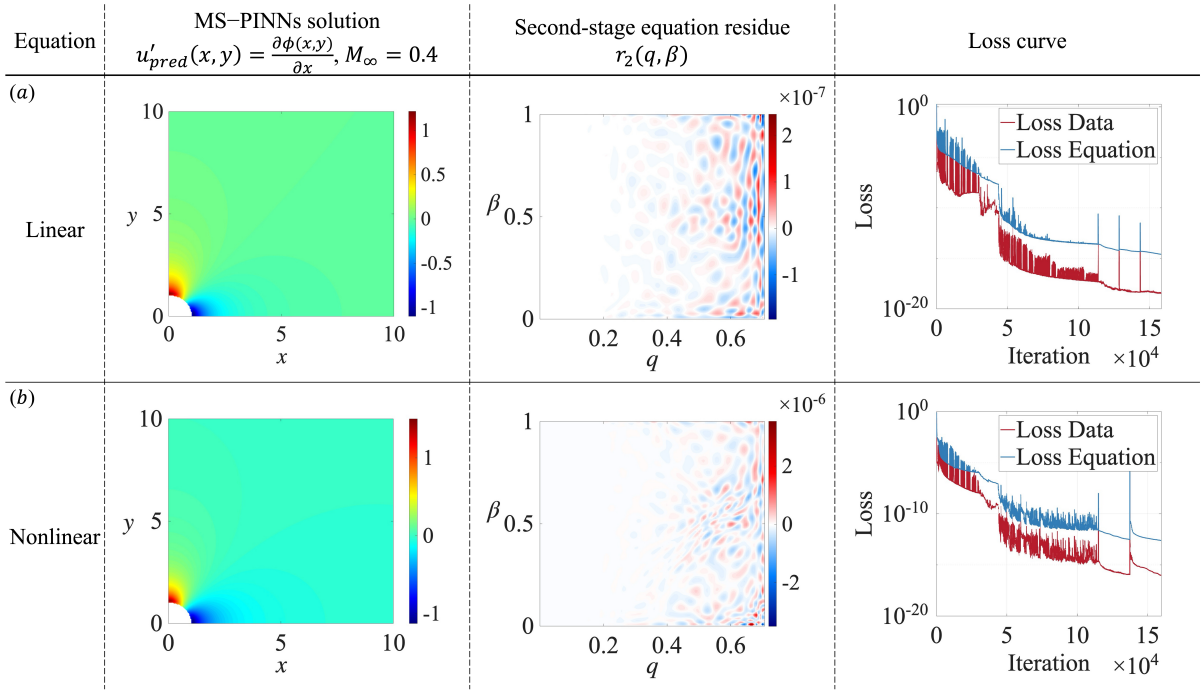

图 5：**用于可压缩流的 MS-PINN 解**。（a）线性方程（2.20）在 $M_\infty = 0.4$处的解，通过 $u' = \partial\phi/\partial x$显示，并附有第二阶段方程残差，$r_2$（$x$，$y$），展示了无限域上的结果及相应的损失曲线。（$b$）非线性方程（2.11）的相应结果。

线性模型与非线性模型之间的差异。观测到的差异量级为 $\mathcal{O}(10^{-3} \sim 10^{-1})$，比数值误差大几个数量级。因此，这些差异反映的是真实的非线性效应，而非求解器精度有限所导致的误差。图 6 展示了马赫数逐渐增大时线性方程与非线性方程之间的差异，并在同一有限区域内绘制，以确保一致性。随着马赫数从 0.1 增至 0.4，差异迅速增大：在物体附近 $\mathcal{O}(10^{-3})$处约为 $M_\infty = 0.1$，在 $\mathcal{O}(10^{-2})$ 处增至 $M_\infty = 0.2$，并在 $\mathcal{O}(10^{-1})$ 处达到$M_\infty = 0.4$。从相对值来看，物体周围的差异从0.6%增至约13%，表明差异随马赫数增加而近乎呈指数增长。最大的偏差集中在物体表面附近：与非线性解相比，线性模型预测迎风侧的势更高，而尾流中的势更低，这反映出对上游速度势的系统性高估和对下游速度势的低估。

5.2 扩展至其他几何形状

我们进一步将该方法扩展到更复杂的几何形状。例如，我们考虑由 $x^2 + 4y^2 = 1$定义的椭圆几何。根据方程（3.32）中的边界残差，当 $b = 0.5$时，边界残差变为：

$$g'_2 = \phi_y \sin\theta + 0.5\cos\theta(\phi_x + U_\infty). \tag{5.50}$$

我们 co 考虑处理这一几何形状的两种方法。第一种方法是进行变换 e

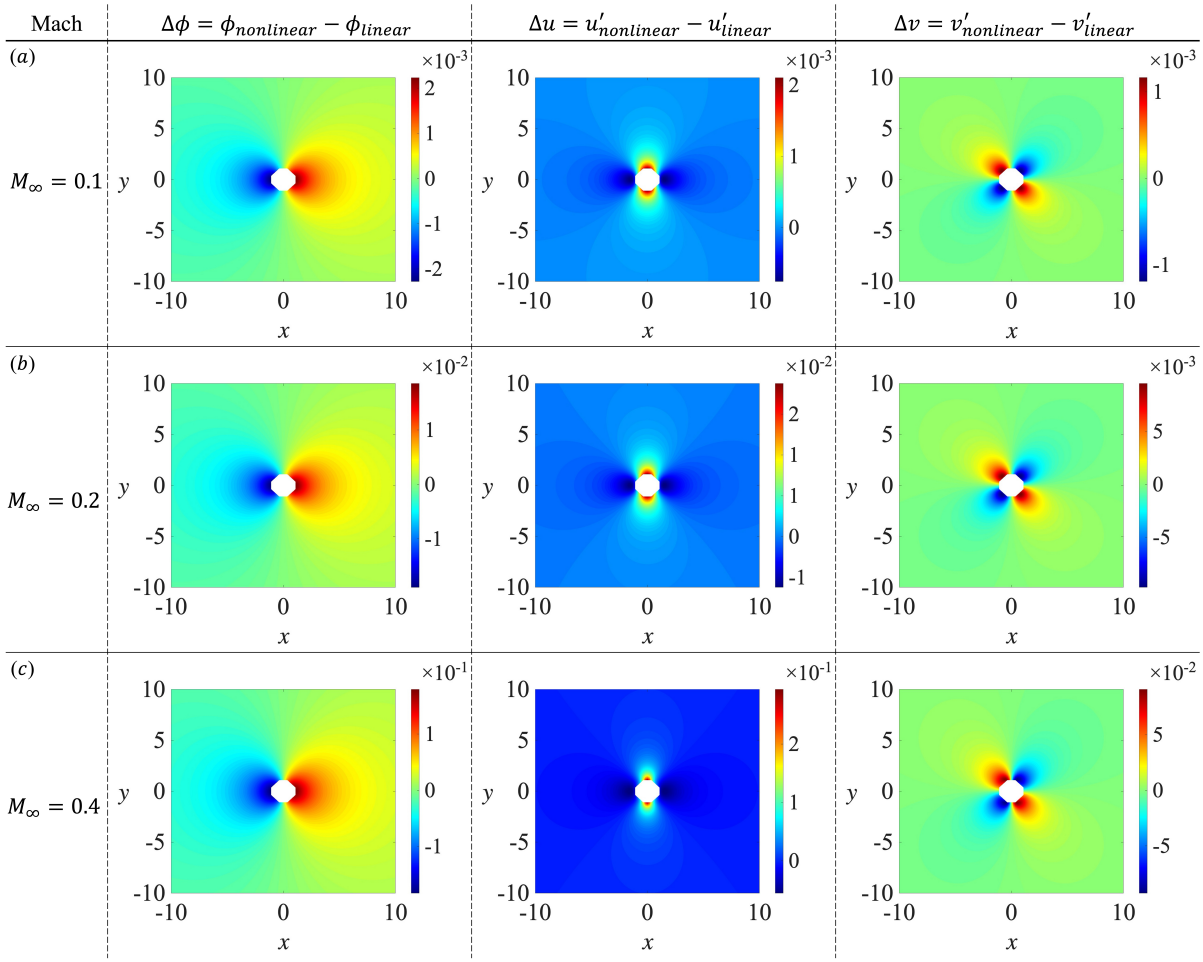

图 6：**线性方程与非线性方程的比较**。有限区域内速度势差值 $\Delta\phi$、流向速度差值 Δu 和横向速度差值 Δv 的空间分布，分别对应自由来流马赫数 (*a*) $M_\infty = 0.1$、(*b*) $M_\infty = 0.2$ 和 (*c*) $M_\infty = 0.4$。

坐标系，设定为 $y' = 2y$。变换变量如下：

$$q = (1 + x^2 + y'^2)^{-1/2} = \left(1 + x^2 + (2y)^2\right)^{-1/2}, \tag{5.51}$$

$$\beta = \frac{x^2}{x^2 + (2y)^2}. \tag{5.52}$$

通过这种缩放，变换坐标始终位于一个矩形区域内，从而简化计算过程并保持数值稳定性。第二种更通用的方法保留原始坐标变换，同时允许变换区域保持不规则。这样可以避免特定几何缩放，并可直接应用于任意形状。

图7 表明，采用任一种方法都能实现精确求解。两种方法得到的解都很精确，最终结果仅有细微差异。缩放情形（$y' = 2y$）的精度约为 $\mathcal{O}(10^{-7})$，而未缩放情形（$y' = y$）的精度约为 $\mathcal{O}(10^{-6})$。总体而言，这些结果表明，所提出的模型扩展到复杂几何形状时仍能保持精确且稳健。

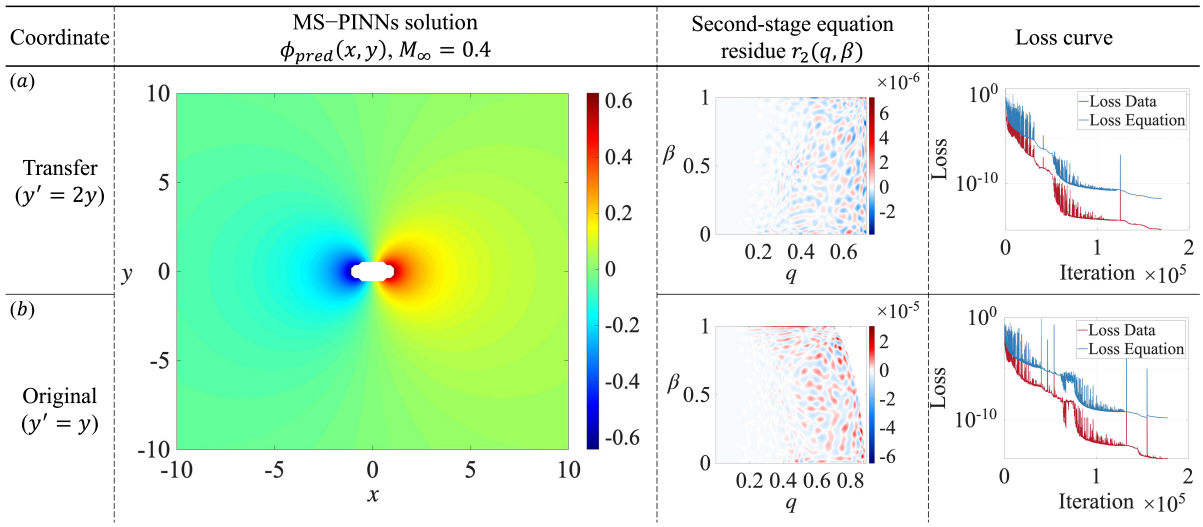

图 7：**椭圆上的 MS-PINN 解**。（a）在 $M_\infty = 0.4$处，采用缩放变换 $y' = 2y$的 MS-PINN 得到的椭圆绕流可压缩亚声速流非线性方程（2.11）的解剖面，包括预测的势 ϕ_{pred}（x，y）、第二阶段方程残差 r_2（x，y）以及损失曲线。（b）采用原始变换 $y' = y$得到的相应结果。

6 结论

本研究提出了一种新的计算框架，利用物理信息神经网络求解无限域中的非线性亚声速可压缩流。该问题的难点主要源于两个方面：控制方程的非线性以及区域的无界性。受线性化方程在远场区域渐近行为的启发，我们成功引入了一种坐标变换，将无界物理域映射到归一化的计算空间，使解剖面保持高度正则。通过将变换后的坐标系作为网络输入，我们有效地求解了无限域上的方程，从而消除了区域截断的需求及其带来的明显误差。

为提高训练效率和精度，我们进一步提出了一种扰动势 ϕ 的解的试探形式：将网络输出与解的渐近衰减相乘构造而成。因此，无需在损失函数中使用软约束，该解便能自动满足无穷远边界条件。测试结果证实，这种硬约束形式能够加快收敛，并避免优化过程停滞于局部极小值。此外，将这一架构与多阶段训练策略（MS-PINN）相结合后，我们成功地将方程残差降至机器精度水平。值得注意的是，该框架不仅适用于求解线性化亚声速流方程，也可直接用于求解原始非线性方程。

借助这一高精度框架，我们对线性化扰动速度势方程与完整非线性形式进行了比较分析。我们证明，线性化近似所固有的误差会随马赫数非线性增大，这凸显了在较高速度的亚音速范围内采用完整非线性求解器的必要性。此外，我们量化了在无限域中求解相较于在截断域中求解所带来的精度提升。最后，通过将该方法应用于椭圆几何形状，验证了其泛化能力。未来的工作将着重于把这一方法扩展到无限域中的复杂非对称物体形状以及更高维的空气动力学问题。

附录 A. 偏微分方程的降阶

我们注意到，扰动势 $\nabla\phi$ 的梯度给出了扰动速度。由于 $\nabla\phi \propto r^{-2}$，扰动速度在远场区域衰减至零。与势函数形式相比，速度形式的控制方程只需要对 u' 和 v' 求一阶导数，这可能会降低训练难度。因此，我们将控制方程改写为关于 u' 和 v' 的形式。利用势—速度关系：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + U_\infty = u' + U_\infty, \tag{A.53}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v', \tag{A.54}$$

非线性扰动速度势方程可改写为：

$$\left[1 - \frac{1}{a^2}\left(u' + U_\infty\right)^2\right]\frac{\partial u'}{\partial x} + \left[1 - \frac{1}{a^2}v'^2\right]\frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{a^2}\left(u' + U_\infty\right)v'\frac{\partial u'}{\partial y} = 0, \tag{A.55}$$

并满足无旋约束，

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0. \tag{A.56}$$

对于线性化情形，方程变为：

$$\left(1 - M_\infty^2\right)\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \tag{A.57}$$

然而，对于物理信息神经网络（PINNs）而言，求解耦合的速度形式（A.55）或（A.57）并同时满足无旋约束（A.56）更具挑战性。在势函数形式中，两个速度分量通过单个标量场 ϕ 紧密耦合，因此这种耦合会自然地得到满足。相比之下，在速度形式中，耦合仅依赖于（A.56），这在物理信息神经网络优化过程中提供的约束要弱得多。在我们的实验中，物理信息神经网络的解往往会变得近乎常数，而远场区域仍存在较大的残差。经过无限域坐标变换后，这个问题会更加严重。误差较大的区域（远场区域）会进一步压缩，且损失是在整个区域上取平均值。因此，远场高误差区域对总损失的贡献很小，优化器更容易忽略该区域，从而使解更难训练。

为缓解这一问题，我们为速度形式引入硬衰减约束，并采用变换坐标：

$$\begin{gathered} u_{pred}(x,y) = q \cdot \mathcal{N}[q,\beta], \\ \text{where} \quad q = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad \beta = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}. \end{gathered} \tag{A.58}$$

这里，$\mathcal{N}$ 表示神经网络，$u_{pred}(x,\ y)$为模型输出。与前文相同，$\mathbb{R}^2$ 表示无界平面，$\mathcal{B}$ 表示固体。我们选择 $q = (1+x^2+y^2)^{-1}$，因为扰动速度在远场区域按 r^{-2} 衰减。因此，将网络输出乘以 q，即可通过硬约束确保正确的渐近衰减。此外，速度分量具有不同的对称性：$u'(x,\ y)$在 x 和 y两个方向上均为偶函数，而 $v'(x,\ y)$在两个方向上均为奇函数。设$u_{pred}(x,\ y) = [u_1(x,\ y)\ u_2(x,\ y)]$ 为两个网络输出。我们通过以下方式施加所需的对称性：

$$\begin{aligned} u' &= u_1(x,y), \\ v' &= \frac{2xy}{x^2+y^2}\,u_2(x,y). \end{aligned} \tag{A.59}$$

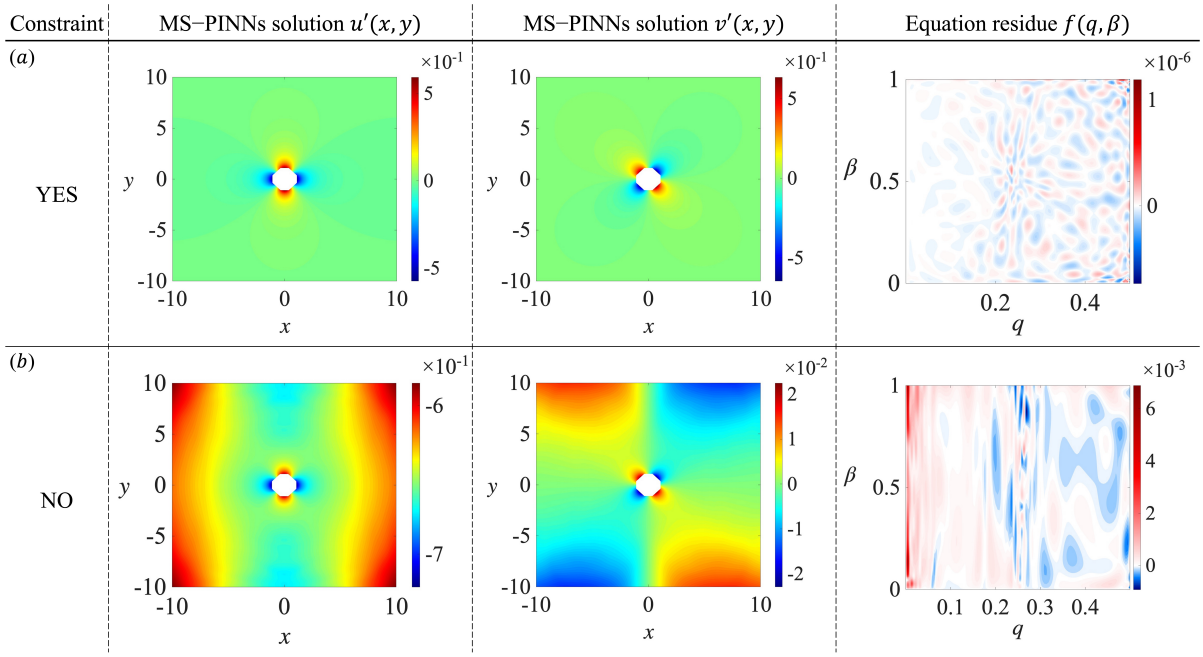

图 8：**基于速度的非线性方程的 MS-PINN 解**。(*a*) 预测的扰动速度场$(u',\ v')$ 以及可压缩流在 $M_\infty = 0.2$条件下基于速度的非线性方程（A.55）的方程残差，结果是在硬约束（A.58）下获得的。 (*b*) 未应用硬约束时得到的错误结果。

图 8（*b*）展示了一个失败案例：在 $M_\infty = 0.2$处不施加硬约束（A.58）求解方程（A.55）和（A.56）时， u' 和 v' 都变得几乎为常数，而 v' 由于对称约束，进一步被限制在零附近。残差可能略有下降，但通常仍维持在 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 左右，且无限区域内仍存在较大的误差。图8（*a*）给出了施加硬约束后可压缩亚声速流非线性解的最终结果。然而，双方程表述的精度低于单方程表述。这一局限可能是因为两个控制方程之间的耦合不够强，无法相互增强。尽管从理论上讲，降维通常被认为是一种很有前景的策略，尤其是在传统数值方法中，但在这个问题中，更高维的表述在物理信息神经网络中反而取得了更好的性能。另一种可能是，标准物理信息神经网络框架已经足够稳健，能够通过自动微分处理势函数形式中的高阶导数，因此降低偏微分方程的阶数并未带来明显的优化优势。

附录 B. 势谱伪影

在第 4.4 节中，我们介绍了一种用于 MS-PINN 训练中具有非规则边界条件的偏微分方程的通用离散傅里叶变换方法。该方法采用掩膜处理（将物理区域之外的值设为零），使场能够在规则网格上进行分析。然而，掩膜处理可能会在掩膜边界处引入跳跃间断。这些间断可能在边界附近产生振荡，并在频谱中造成虚假的高频分量，这就是众所周知的吉布斯现象。图 9(*a*–*b*) 通过两个示例展示了这一效应：在不同间断程度下的 $u = \text{正弦}\left(9\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 和 $u = \text{正弦}(4\pi x)$ 正弦 $(4\pi y) + 1$。在这两种情况下，半径为 0 和 0.2 的中心圆内均设置了一个取常值的掩膜区域。与连续情形相比，掩膜情形呈现出明显的吉布斯

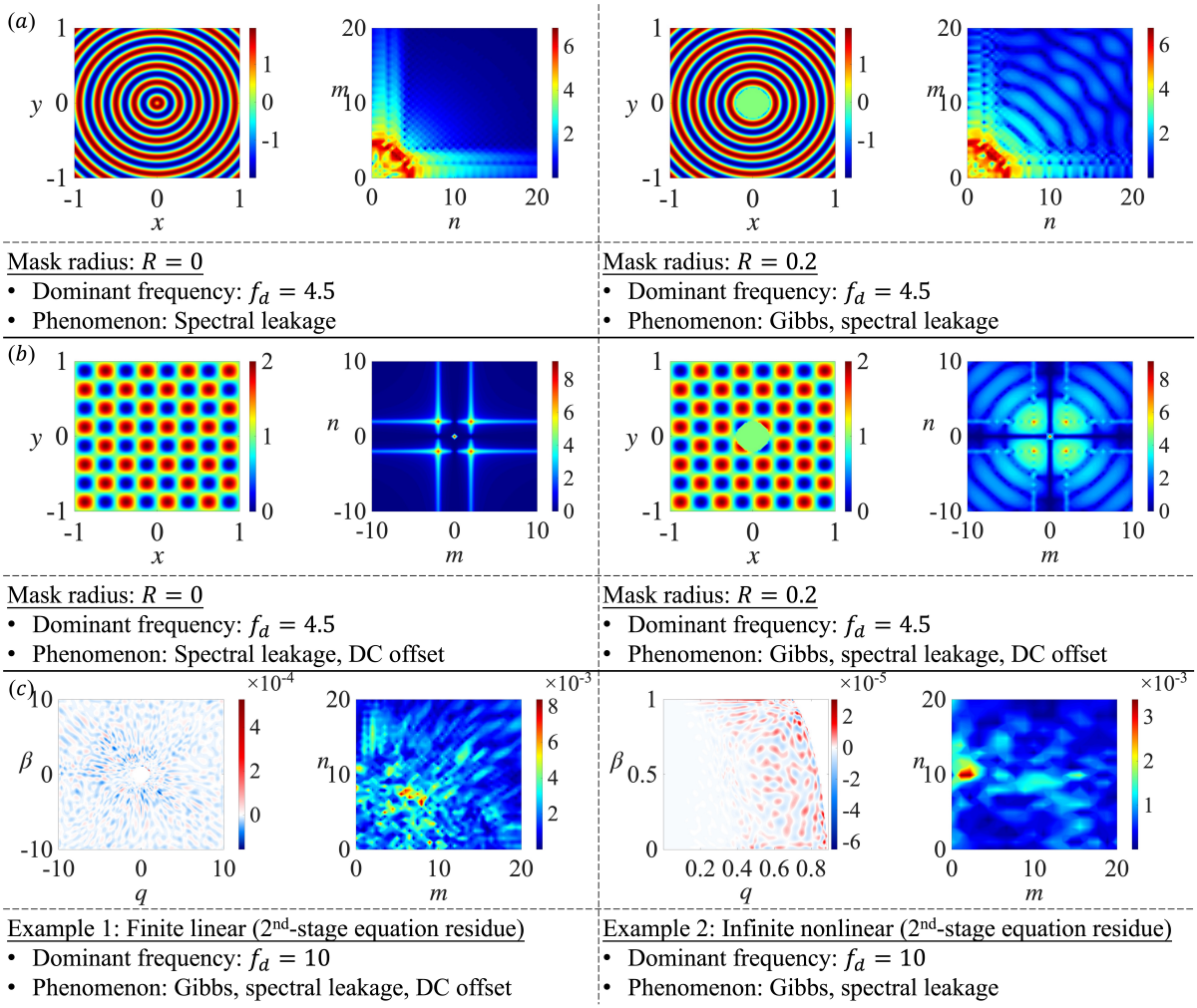

图 9：**势谱伪影**。（a）对 $u = \sin\left(9\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 在内部区域进行常值掩蔽处理与未进行该处理时的离散傅里叶变换结果，以及识别出的谱伪影。（b）在相同的常值掩蔽处理下，$u = \sin(4\pi x)\sin(4\pi y) + 1$ 的对应结果。（c）在有限区域或无限域上计算的亚声速流动方程第二阶段训练的方程误差。随附表格汇总了主导频率和识别出的伪影（例如，直流偏移、频谱泄漏、吉布斯现象）。

现象，并伴有额外的高频成分。在对方程残差进行掩膜处理时，也可能出现类似伪影。图9(c)展示了我们研究中的一个代表性频谱，其中存在明显的高频伪影。这些效应在频谱分析中很常见，通常可以识别并忽略，而不会影响主导频率的判定。

此外，在有限空间域中加窗可能会引入低频伪影，这种现象称为频谱泄漏。当将窗函数 $w(x,\ y)$（即本例中的常值掩蔽处理）应用于原始信号 $u(x,\ y)$ 时，傅里叶变换变为：

$$U_w(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{u(x,y)w(x,y)\} = U(f_x, f_y) * W(f_x, f_y), \tag{B.60}$$

其中，符号 $*$ 表示二维卷积。因此，频谱成分会发生涂抹：原本单一的频率会扩散到相邻频率，导致频谱中的低频区域升高。高频分量也可能被人为增强。

图9（a–b）展示了这一效应，表明随着常量分量增大，低频区域的幅值也随之增加。我们的研究中也出现了类似现象，如图9（c）所示。尽管如此，由于其圆形结构和相对较高的幅值，主导频率仍然清晰可辨。

最后，当（经过掩蔽的）场具有非零空间平均值时，可能会出现直流偏移，从而在傅里叶频谱原点处产生异常高的尖峰。离散傅里叶变换（DFT）定义如下：

$$F[k,l] = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m,n] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k}{M}m + \frac{l}{N}n\right)}, \tag{B.61}$$

且在 $k = l = 0$处，我们得到 $F[0,0] = \text{mean}(f[m,n]) \neq 0$。因此，非零平均值会导致原点处出现一个具有误导性的较大值。图 9(b) 展示了这一效应：添加常数偏移 1，即 $u = \sin(4\pi x)\sin(4\pi y) + 1$，会在频谱原点处产生明显的尖峰。在实际应用中，只要主导频谱分量仍清晰可辨，通常就可以忽略这一尖峰。

参考文献

[1] John Anderson。 *EBOOK*：《空气动力学基础》（*SI* 神经元）。 McGraw hill，2011 .

[2] John Anderson。 《现代可压缩流：历史视角》。 McGraw-Hill，1990。

[3] H.W. Liepmann 和 A. Roshko。《气体动力学要论》。Wiley，1957。

[4] Ascher Shapiro。 可压缩流体流动的动力学与热力学。 Ronald Press，1953。[5] Holt Ashley 和 Martin J. Landahl。 机翼与物体的空气动力学。 Addison-Wesley Publishing Company，1965。[6] Ira Abbott 和 Albert von Doenhoff。 翼型理论：包括翼型数据概要。 Dover，1959。[7] Antonio Ferri。 超声速流动空气动力学要论。 Macmillan，1976。[8] Wallace Hayes 和 Ronald Probstein。 高超声速流动理论。 Academic Press，1959。[9] M.J. Lighthill。 空气动力学产生的声波。 英国皇家学会学报，1951。[10] Milton van Dyke。 流体力学中的摄动方法。 Parabolic Press，1975。[11] John D Anderson。 计算流体力学：基础与应用。 McGraw-Hill，纽约，2002。[12] Charles Hirsch。 内流与外流的数值计算：计算流体力学基础。 Wiley，1988。[13] Richard H Pletcher、John C Tannehill 和 Dale Anderson。 计算流体力学与传热。 CRC press，2012。[14] Claes Johnson。 有限元法求解偏微分方程。 Dover，2009。

[15] Randall J. LeVeque。 常微分方程与偏微分方程的有限差分方法：稳态与时变问题。工业与应用数学学会（SIAM），2007年。[16] M. Darwish、F. Moukalled、L. Mangani。 计算流体力学中的有限体积法：结合 *OpenFOAM* 的高级导论Ⓡ 与 *Matlab*。Springer International Publishing，2015年。[17] Randall LeVeque。 双曲问题的有限体积方法。剑桥大学出版社，2002。[18] J. Blazek。 计算流体力学：原理与应用。爱思唯尔，2015年。[19] Isaac E Lagaris、Aristidis Likas 和 Dimitrios I Fotiadis。用于求解常微分方程与偏微分方程的人工神经网络。*IEEE*神经网络汇刊，9(5):987–1000，1998年。[20] Maziar Raissi、Paris Perdikaris 和 George E Karniadakis。用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的物理信息神经网络：一种深度学习框架。计算物理学杂志，378:686–707，2019年。[21] Jeremy Yu、Lu Lu、Xuhui Meng 和 George Em Karniadakis。用于偏微分方程正问题与逆问题的梯度增强物理信息神经网络。计算力学与工程方法，393:114823，2022年。[22] Yongji Wang 和 Ching-Yao Lai。多阶段神经网络：机器精度的函数逼近器。计算物理学杂志，504:112865，2024年。[23] Shengze Cai、Zhicheng Wang、Sifan Wang、Paris Perdikaris 和 George Em Karniadakis。用于传热问题的物理信息神经网络。传热学杂志，143(6):060801，2021年。[24] Ehsan Haghighat、Maziar Raissi、Adrian Moure、Hector Gomez 和 Ruben Juanes。用于固体力学反演与代理建模的物理信息深度学习框架。计算力学与工程方法，379:113741，2021年。[25] Ameya D Jagtap、Zhiping Mao、Nikolaus Adams 和 George Em Karniadakis。用于超声速流动逆问题的物理信息神经网络。计算物理学杂志，466:111402，2022年。[26] Wenbo Cao、Jiahao Song 和 Weiwei Zhang。一种基于物理信息神经网络与网格变换的翼型周围亚声速流动求解器。流体物理学，36(2)，2024年。[27] George Em Karniadakis、Ioannis G Kevrekidis、Lu Lu、Paris Perdikaris、Sifan Wang 和 Liu Yang。物理信息机器学习。自然综述：物理，3(6):422–440，2021年。[28] Diab W Abueidda、Qiyue Lu 和 Seid Koric。用于三维固体力学的无网格物理信息深度学习方法。国际工程数值方法杂志，122(23):7182–7201，2021年。[29] Ben Moseley、Andrew Markham 和 Tarje Nissen-Meyer。有限基物理信息神经网络（fbpinns）：一种用于求解微分方程的可扩展区域分解方法。计算数学进展，49(4):62，2023年。[30] Mingtao Xia、Lucas Böttcher 和 Tom Chou。用于求解无界区域问题的谱适配物理信息神经网络。机器学习：科学与技术，4(2):025024，2023年。

[31] Pu Ren、Chengping Rao、Su Chen、Jian-Xun Wang、Hao Sun 和 Yang Liu。《Seismic-net：用于半无限域地震波建模的物理信息神经网络》。《计算物理通讯》，295:109010，2024年。[32] Yixuan Wang、Ziming Liu、Zongyi Li、Anima Anandkumar 和 Thomas Y Hou。《无界域中的高精度物理信息神经网络：在偏微分方程奇异性表述中的应用》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2506.19243*，2025年。[33] Hassan Bararnia 和 Mehdi Esmaeilpour。《物理信息神经网络（PINN）在求解边界层热流体问题中的应用》。《国际传热与传质通讯》，132:105890，2022年。