arXiv:2601.00349v1 [math.FA] 1 Jan 2026

由加权残差流产生的随机框架分解

JAMES TIAN

摘要。我们研究由有限个正交投影确定的加权残差映射作用下正算子的演化。沿多重指标构成的有根树迭代这些映射，会产生一棵“加权残差能量树”，以及在每一步将耗散能量或迹归一化后得到的自然路径测度。在投影满足定量覆盖条件的情况下，我们证明，沿几乎处处的分支，残差强收敛于零，且耗散部分存在一个秩一分解，可重构初始算子。在初始算子为某个子空间上的恒等算子的特殊情形下，这将产生一个几乎必然成立的随机 Parseval 框架，该框架由加权残差动力学生成。

目录

1. 引言 1
2. WR 能量树 4
3. 能量偏置分枝与路径测度 6
4. 随机分支与能量守恒 9
5. 一致消亡 13
6. 沿分支的随机原子展开 16
7. 通过迹偏置分支构造帕塞瓦尔型框架 19
参考文献 25

1. 引言

设 H 为一个希尔伯特空间，并设 $\{P_1, \dots, P_m\}$ 为 H 上的一个固定有限正交投影族。给定一个正算子 $R \in B(H)_+$，我们考虑如下基本更新

$$\Phi_P(R) := R^{1/2}(I - P)R^{1/2},$$

它会移除 R 的 P 分量，并将其余部分传回锥 $B(H)_+$。沿着由多重指标构成的根式 m 叉树迭代这些映射，会产生一个以树为索引的残差算子族，以及相应的耗散部分族。由此得到的对象，我们称之为 加权残差（*WR*）能量树，它汇集了一组 Loewner 单调恒等式，这些恒等式将 R 表示为树的有限层级上正贡献的裂项和。一般的

2020 数学主题分类。 主要分类：42C15；次要分类：47A63,47B65。关键词与短语。 加权残差映射；正算子；随机框架；路径测度；分枝过程。

本文所用的正算子与 Loewner 序背景知识均属标准内容[Bha07，RS72]。

本文的观点是，WR 能量树不仅是一个算法记账工具，也是内禀随机过程的典范样本空间。在树的每个节点 w 处，从 R_w 到其子节点R_{wj} 的更新都伴随着一个耗散算子

$$D_{w,j} := R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2} \geq 0,$$

这些耗散量可以归一化，从而得到子节点集合上的转移概率。通过这种方式，WR 动力学在边界 样本空间 $= \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$上典范地生成概率测度，而无需施加外部随机性。我们采用两种互补的归一化方式，所使用的概率工具则是标准的鞅和分枝过程论证[Wil91，Dur19，Har63，LP16]。

(1) 能量偏置分枝。取 $x \in H$，满足 $\langle x,\ R_0 x\rangle > 0$。在每一步将标量权重 $\langle x,\ D_{w,\ j} x\rangle$ 归一化后，我们得到一致的柱概率族，进而得到 Ω 上的路径测度 ν_x。该测度反映了二次型 $\langle x,\ Rx\rangle$ 沿树耗散的方式。(2) 迹偏置分枝。当 R_0 属于迹类时，我们也可以将权重 tr $(D_{w,\ j})$ 归一化，从而得到 Ω 上的测度 ν_{tr}。对于算子层面的重构结论，而非固定向量状态，这是一种自然的选择。

第一个主要定理是在投影满足定量非退化假设的条件下的灭绝原理。非正式地说，我们假设 $\{P_j\}$能够捕获沿 WR 轨道出现的每个剩余向量的能量的一个确定比例。在本文中，这被表述为一致泄漏条件（5.1），并且它意味着沿着 ν_x-几乎处处的分支，残余能量趋于零:

$$\langle x, R_\infty(\omega)\, x\rangle = 0 \qquad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega \in \Omega.$$

特别地，沿着典型分支，逐路径望远镜恒等式对于 $\langle x,\ R_0 x\rangle$ 变成一个精确的能量分解。我们利用适用于 WR 树内在权重的基本鞅论证和分枝过程论证来证明这一点。

第二个主要定理是由秩一原子进行的算子层面的重构。假设 R_0 属于迹类，则沿分支的每个耗散算子都是紧算子，并且可以进行谱分解，将其分解为秩一部分。通过将这些部分排列成分支上的一个可数向量集合 $\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$，我们得到一个逐路径帕塞瓦尔型恒等式

$$\sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle x, R_0 x\rangle,$$

对每个 $x \in H$ 都成立，并且对 ν_{tr}-几乎处处的 ω 成立。等价地，相应的随机框架算子在强算子拓扑下收敛到 R_0。在特殊情形下，若 R_0 是闭子空间 $K \subseteq H$ 上的恒等式（且在 $K^\perp$ 上为零），则向量 $\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$ 对 ν_{tr}-几乎处处的分支构成 K 的帕塞瓦尔框架。因此，从单个正算子和有限投影族出发，WR 动力学会生成一个本质上随机的帕塞瓦尔框架，其框架算子恰好就是初始数据。这使得这项工作处于经典

框架理论及其算子论表述 [HL00，BF03，CK04，BCE06，BO25，KOPT13，CRS26，RMC21]。

与现有文献的关系。 从框架理论的角度来看，本文处于以下几个方向的交汇处：(i) 经典框架及其算子论公式 [HL00、BF03、BCE06], (ii) 受分布式重构启发的融合框架和子空间框架 [CK04], ，以及 (iii) 动力学和算法观点，在这些观点中，框架系数由底层算子的迭代序列生成 [ADK13、ACMT17、CMPP20、CHR18、Tan17、Phi17、BHK+26]。这些方向的共同特征是，框架对象预先指定$a\ priori$（作为向量、子空间或采样分布的族），然后研究其稳定性、最优性或重构性质。本文则有所不同：框架是动态生成的，其来源是单个算子在反复残差更新下的 Loewner 单调耗散。

在算子方面，$\Phi_P(R) = R^{1/2}(I-P)\,R^{1/2}$ 属于与短缩算子、舒尔补以及矩阵分析和网络理论中的相关残差构造相同的形式邻域 [And71、AT75、BM88、Gol86、ACS06、MMP07、CMM19、AD69]。这些理论通常是静态的（相对于单个子空间进行一次短缩，或对分块算子取一次舒尔补），而 WR 能量树则沿固定旗迭代执行残差步骤，并将结果沿无限分支结构向下传播。本文的新意在于将 Loewner 序望远镜求和与内禀边界测度相结合，从而得到几乎必然灭失，并且在迹类情形下得到几乎必然的帕塞瓦尔重构。子空间对和投影的经典几何与分析结构提供了有益的概念参照点[vN50、Hal69、BS10], ；算子值域及值域包含关系的一般理论也同样如此 [Dou66、FW71、NRRR79、LR86]。（我们强调，并不要求任何交换性或双投影标准形假设。）

最后，支撑在有根树边界上的概率测度，使这一构造在精神上与树上随机过程的一般理论十分接近。测度 ν_x 和 ν_{tr} 由 WR 权重自然导出，证明则结合了柯尔莫哥洛夫一致性以及适用于这种算子生成的分支结构的鞅技巧。

WR 更新也与投影算法和随机迭代方案密切相关，尤其是那些与 Kaczmarz 型方法以及投影的循环／随机乘积相关的方案 [Szw07，SV09，NT14，NSW16，MTMN21，GR15，Opp18，PRZ12，PR14，RZ21，ABW26]。本文不讨论算法复杂度问题，但这种结构上的平行关系有助于阐明归一化耗散作为一种典范抽样规则所发挥的作用。

结构安排。第2 节搭建 WR 能量树，并记录有限层级上的基本望远镜恒等式。第3节根据能量归一化耗散构造边界路径测度，并证明柯尔莫哥洛夫一致性，其中包括对有限时吸收的处理。第4节推导将残差与累积耗散联系起来的随机分支记账恒等式。第5 节证明泄漏假设下的一致消亡。第6 节沿分支将算子值耗散转化为秩一原子。第7 节利用迹偏置分支得到几乎必然的帕塞瓦尔框架，并实现对 R_0的强算子重构。

2. WR 能量树

设 H 为复希尔伯特空间。对于任意投影 P 和任意正算子 $R \in B(H)+$，定义加权残差映射

$$\Phi_P(R) := R^{1/2}\,(I-P)\,R^{1/2}. \tag{2.1}$$

给定一个初始正算子 $R_0 \in B(H)+$ 和一列投影 $(P_n)_{n\geq 1}$，WR 迭代定义为

$$R_{n+1} = \Phi_{P_{n+1}}(R_n), \quad n \geq 0, \tag{2.2}$$

其中 R_0 固定。对于这样的序列，已知对所有 n，$0 \leq R_{n+1} \leq R_n \leq R_0$ 成立，且 (R_n) 强收敛到极限 R_∞。此外，单步分解

$$R_n - R_{n+1} = R_n^{1/2} P_{n+1} R_n^{1/2} \geq 0 \tag{2.3}$$

通过望远镜求和论证可得全局能量恒等式：

$$R_0 = R_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} D_n, \quad D_n := R_n^{1/2} P_{n+1} R_n^{1/2}, \tag{2.4}$$

其中级数在强算子拓扑下收敛（例如参见 [Tia25a、Tia25b]）。

现在，我们将这一构造从单个投影序列推广到一棵有根树，其索引为 $\{1,\dots,m\}$ 的所有可能有限指标序列。

WR 能量树。 固定一个整数 $m \geq 2$ 和正交投影

$$\{P_1,\dots,P_m\}$$

在 H 上。令字母表为 $\mathcal{A} := \{1,\dots,m\}$。有限词是一个序列 $w = j_1 j_2 \dots j_n$，其中 $j_k \in \mathcal{A}$ 且 $n \geq 1$。空词记作 $\emptyset$。所有有限词的集合为

$$\mathcal{W} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}^n.$$

对于非空词 $w = j_1 \dots j_n$，其长度为 $n-1$ 的前缀记作 $w^- := j_1 \dots j_{n-1}$。对于任意词 w 和字母 $j \in \mathcal{A}$，我们用 wj 表示连接。无限词（或称分支）是一个序列 $\omega = (j_1,\ j_2,\ \dots\dots) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$。其长度为 n 的前缀记作 $\omega|_n := j_1 \dots j_n \in \mathcal{A}^n$。

我们定义一族由 $\mathcal{W}$ 索引的算子。在根节点处，设 $R_\emptyset := R_0$。对于长度为 $n \geq 1$ 的词 $w = j_1 \dots j_n$，我们递归地定义余算子 R_w：

$$R_w := \Phi_{P_{j_n}}(R_{w^-}) = R_{w^-}^{1/2}\,(I - P_{j_n})\,R_{w^-}^{1/2}.$$

此外，对于非空词 $w = j_1 \dots j_n$，我们定义与之关联的耗散部分

$$D_w := R_{w^-}^{1/2} P_{j_n} R_{w^-}^{1/2}.$$

根据构造，对于每个非空词 w，恒等式 $R_{w^-} - R_w = D_w$ 成立。每个 R_w 和 D_w 都是正的，并且它们满足 Loewner序下的关系 $0 \leq D_w \leq R_{w^-} \leq R_0$。我们将族 $\{R_w, D_w : w \in \mathcal{W}\}$ 称为 WR 能量树。

定理 2.1（逐路径能量分解）。设 H 为希尔伯特空间，设$P_1,\dots,P_m$为 H上的正交投影，并设 $R_0 \in B(H)+$。如上所述构造族 $\{R_w, D_w\}$。则有以下结论。

（1）对于每个词 $w \in \mathcal{W}$ 和每个字母 $j \in \mathcal{A}$，有 $R_{wj} \leq R_w$ 和$D_{wj} \leq R_w$。沿任意扩展链 $w_0 \subset w_1 \subset \cdots \subset w_n$，序列

$$R_{w_0} \geq R_{w_1} \geq \cdots \geq R_{w_n} \geq 0$$

在 *Loewner*序下递减。特别地，对于任意无限词$\omega = (j_1, j_2, \ldots)$，路径算子 $R_{\omega|_n}$ 构成一个递减的正算子序列，且以 R_0为界。

（2）对于每个无限词 $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$，存在唯一正算子$R_\infty(\omega) \in B(H)^+$，使得

$$R_{\omega|_n} \xrightarrow[n\to\infty]{s} R_\infty(\omega).$$

因此，对于任意 $x \in H$, $\|R_{\omega|_n} x - R_\infty(\omega)\, x\| \to 0$，标量序列$\langle x, R_{\omega|_n} x\rangle$ 递减并收敛到 $\langle x, R_\infty(\omega)\, x\rangle$。

（3）对于任意无限词 ω，我们有无限路径恒等式

$$R_0 = R_\infty(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{\omega|_k},$$

其中级数在强算子拓扑下收敛。部分和$\sum_{k=1}^{n} D_{\omega|_k}$ 构成一个递增的正算子序列，且以 R_0为界。

(4) 对于任意无限词 ω 和任意向量 $x \in H$，标量量 $d_k(\omega, x) := \langle x, D_{\omega|_k} x\rangle \geq 0$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(\omega, x) = \langle x, R_0 x\rangle - \langle x, R_\infty(\omega)\, x\rangle.$$

证明。我们分步进行，这些步骤与（2.1）中的基本 WR 迭代论证相对应 – (2.4).

固定一个词 $w \in \mathcal{W}$和一个字母 $j \in \mathcal{A}$。根据定义， $R_{wj} = R_w^{1/2}(I - P_j) R_w^{1/2}$。对于任意 $x \in H$,

$$\langle x, R_{wj} x\rangle = \|(I - P_j) R_w^{1/2} x\|^2 \geq 0,$$

因此 $R_{wj} \geq 0$。此外,

$$\langle x, (R_w - R_{wj})\, x\rangle = \langle x, R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2} x\rangle = \|P_j R_w^{1/2} x\|^2 \geq 0.$$

因此 $R_w - R_{wj} \geq 0$，从而得证 $R_{wj} \leq R_w$。定义 $D_{wj} = R_w - R_{wj}$意味着 $0 \leq D_{wj} \leq R_w$。由归纳法可知，沿任意链 $w_0 \subset w_1 \subset \cdots \subset w_n$，算子序列都是递减的。

固定 $\omega = (j_1, j_2, \ldots)$。设 $R_n := R_{\omega|_n}$。由此可得 $0 \leq R_{n+1} \leq R_n \leq R_0$对所有 $n \geq 0$。由于 (R_n) 是一个有界的自伴算子单调序列，因此它强收敛于唯一正算子 $R_\infty(\omega)$；例如参见 [RS72]。

令 $D_n := D_{\omega|_n}$。根据定义， $D_n = R_{n-1} - R_n$。从 $n = 1$ 到 N 求和可得

$$\sum_{n=1}^{N} D_n = R_0 - R_N.$$

该级数的部分和 $\sum D_n$ 单调递增，且以上界 R_0 为界，因此强收敛到算子 $D(\omega)$。令 $N \to \infty$ 趋于极限，我们得到$D(\omega) = R_0 - R_\infty(\omega)$，由此证明了 (3)。

对于任意的 $x \in H$，对有限望远镜恒等式取内积可得

$$\langle x, R_0 x\rangle = \left\langle x, R_{\omega|_N} x\right\rangle + \sum_{k=1}^{N} \left\langle x, D_{\omega|_k} x\right\rangle .$$

令 $N \to \infty$，并利用第 2 步中建立的强收敛性，我们得到

$$\langle x, R_0 x\rangle = \langle x, R_\infty(\omega)\, x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\omega, x),$$

这等价于式 (4) 中的陈述。 □

边界空间与柱集。令

$$\Omega := \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{(j_1, j_2, \dots) : j_n \in \mathcal{A}\}$$

为所有无限词构成的空间，并赋予乘积拓扑。对于每个有限词 $w = j_1 \dots j_n \in \mathcal{W}$，我们定义柱集

$$[w] := \{\omega \in \Omega : \omega|_n = w\}.$$

柱集 $\{[w]\colon w \in \mathcal{W}\}$ 的集合构成 Ω 上乘积拓扑的一组基。相应的 Borel σ-代数记作 $\mathcal{B}(\Omega)$。

对于每个 $n \geq 1$，坐标投影

$$\pi_n : \Omega \to \mathcal{A}, \quad \pi_n(\omega) = j_n$$

是连续的；由 $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ 生成的 σ-代数与由长度为 n 的柱集生成的 σ-代数一致。

边界 WR 映射。对于每个 $\omega \in$ 样本空间和 $n \geq 0$，我们记

$$R_n(\omega) := R_{\omega|_n}, \qquad D_n(\omega) := \begin{cases} D_{\omega|_n}, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

按照约定 $R_{\omega|_0} := R_\emptyset = R_0$。定理 2.1 中的逐路径极限给出一个映射

$$R_\infty : \Omega \to B(H)_+, \quad \omega \mapsto R_\infty(\omega),$$

其特征是强收敛 $R_n(\omega) \xrightarrow{s} R_\infty(\omega)$，当 $n \to \infty$ 时，对每个固定的 ω 均成立。

3. Energy-biased branching and path measures

我们继续采用上一节的设定和记号。对于每个词 $w \in \mathcal{W}$，我们有 WR 算子

$$R_w \in B(H)_+, \qquad D_{wj} := R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2} \in B(H)_+$$

对于 $j \in \mathcal{A} = \{1, \dots, m\}$。

固定一个非零向量 $x \in H$，满足 $\langle x,\ R_0 x\rangle > 0$。定义能量系数

$$a_{wj} := \langle x, D_{wj} x\rangle \geq 0.$$

这些数值表示在节点 w处通过通道 j 耗散的 x-能量量。

如果节点 w 满足以下条件，我们称其为活节点

$$\sum_{j=1}^{m} a_{wj} > 0.$$

对于任意活节点 w，定义能量偏置转移概率

$$p_x(j \mid w) := \frac{a_{wj}}{\sum_{k=1}^{m} a_{wk}}, \qquad j \in \mathcal{A}.$$

根据构造，

$$p_x(j \mid w) \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} p_x(j \mid w) = 1.$$

如果 $\sum_j a_{wj} = 0$，那么对于每个 j，必然有 $a_{wj} = 0$，因此不会再有 x-能量从 R_w 耗散到任何子节点。在这种情况下，我们称 w 为 x-死节点，并一次性固定一个任意的参考概率向量 $q = (q_1, \ldots, q_m)$，并定义

$$p_x(j \mid w) := q_j, \qquad j \in \mathcal{A}.$$

q 的具体选择不会影响下面的结果：关于能量耗散和残余极限的所有陈述，仅取决于 x-活节点处的偏置转移，而不取决于 x-死节点处任意的延续规则。因此，对于每个节点 $w \in \mathcal{W}$，$p_x(\cdot \mid w)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上的一个真正的概率分布。在活节点处，它由 WR 能量耗散内在决定；而在x-死节点处，它虽是任意的，但经过了归一化。

对于有限词 $w = j_1 \cdots j_n$，定义柱集权重

$$\nu_x([w]) := p_x(j_1 \mid \emptyset) p_x(j_2 \mid j_1) \cdots p_x(j_n \mid j_1 \cdots j_{n-1}).$$

这定义了柱集半环上的有限可加集函数。对于$\omega \in \Omega$和 $n \geq 0$，我们使用以下简写

$$D_{\omega|n,j} := D_{(\omega|n)j}, \qquad j \in \mathcal{A},$$

表示从节点 $\omega|n$出发、沿着标记为 j的边对应的耗散部分。

定理 3.1（WR 路径测度）。 存在唯一的博雷尔概率测度 ν_x，定义在样本空间 $= \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上，其在柱集上的取值由上述公式给出。此外，对于每个 n，

$$\nu_x\left(\left\{\omega : \sum\nolimits_{j=1}^{m} \langle x, D_{\omega|n,j} x\rangle = 0\right\}\right) = \sum_{\substack{|w|=n \\ \sum_j a_{wj}=0}} \nu_x([w]).$$

证明。 由于对于每个 $w \in \mathcal{W}$，$p_x(\cdot \mid w)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上的概率分布，因此柱集权重满足一致性关系

$$\nu_x([w]) = \sum_{j=1}^{m} \nu_x([wj]), \qquad w \in \mathcal{W}.$$

事实上，

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_x([wj]) = \nu_x([w]) \sum_{j=1}^{m} p_x(j \mid w) = \nu_x([w]).$$

根据柯尔莫哥洛夫–卡拉西奥多里扩张定理，存在唯一的博雷尔概率测度 ν_x 定义在 Ω 上，将这些柱集权重扩张为测度。第二个断言成立，是因为事件

$$\left\{\omega : \sum\nolimits_{j} \langle x, D_{\omega|n,j} x\rangle = 0\right\}$$

恰好是所有长度为 n 、x已死亡的词所对应的柱集 $[w]$ 的不交并 w 。□

注 3.2. 测度 ν_x 描述了一种随机 WR 分支：在一个 x活节点 w处，以与x能量 $\langle x$ 成正比的概率选取下一个投影指标 j， $D_{wj}x\rangle$ 该能量是由 P_j 在该节点耗散的。在 x死亡节点处，分支规则不再由能量决定，下一个指标可任意选择，但须经过归一化。因此，在 x能量动力学终止之前，随机性完全由算子论决定。

备注 3.3。 固定 $w \in \mathcal{W}$ 使得 $\sum_{j=1}^{m} a_{wj} = 0$。用算子术语来说，这意味着

$$\left\langle x, R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2} x \right\rangle = 0 \quad \text{for all } j,$$

或者等价地，

$$P_j R_w^{1/2} x = 0 \quad \text{for all } j.$$

因此，剩余向量 $R_w^{1/2}x$ 完全位于公共核中

$$\bigcap_{j=1}^{m} \ker P_j,$$

并且通道 P_1、……、 P_m 均不会在节点 w处移除任何进一步的 x-能量。从 $\sum_j a_{wj} = 0$ 无法得出 $R_w x = 0$，也无法得出 D_{wj} 作为算子消失。该表述仅涉及 WR 树对特定状态 x的作用；其他向量 $y \in H$ 仍可能通过某些 P_j经历非零耗散。因此，算子值 WR 树 $\{R_{wj}, D_{wj}\}$ 仍可能在w以下继续演化，尽管 x-能量动力学已在那里终止。

3.1. 特殊情形：分裂与二元互补性。 现在我们讨论 WR 分支概率得以简化或可以得到闭式表达式的情形。

在演化支撑上分裂。由于 WR 迭代满足 $0 \le R_w \le R_0$ 对所有词 w，Douglas 值域包含定理（[Dou66]）推出

$$ran\,(R_w^{1/2}) \subset ran\,(R_0^{1/2}), \quad w \in \mathcal{W}. \tag{3.1}$$

因此，WR 树的所有演化支撑集都包含在固定的初始支撑中

$$H_0 := \overline{ran}(R_0^{1/2}). \tag{3.2}$$

现在假设这些投影 P_1，……， P_m 满足分裂条件：

$$\sum_{j=1}^{m} P_j = I \quad \text{on } H_0. \tag{3.3}$$

由此可得，对每个 $w \in \mathcal{W}$， $\sum_{j=1}^{m} P_j = I$ 在 $ran(R_w^{1/2})$ 上成立。于是我们得到如下分解

$$R_w = \sum_{j=1}^{m} D_{wj}, \quad \langle x, R_w x\rangle = \sum_{j=1}^{m} a_{wj}$$

特别地，对于存活节点，

$$p_x\,(j \mid w) = \frac{a_{wj}}{\sum_{k=1}^{m} a_{wk}} = \frac{\langle x, D_{wj}x\rangle}{\langle x, R_w x\rangle}.$$

因此，在欠分裂假设下，在节点 w 处选择通道 j 的概率，恰好是 x 的当前残余能量通过 P_j耗散的那一部分。

二元情形。 假设 $m = 2$，且 $P_1 + P_2 = I$ 位于 H_0上。那么 $D_{w1} + D_{w2} = R_w$，我们得到交叉恒等式

$$R_{w1} = D_{w2}, \qquad R_{w2} = D_{w1}.$$

因此，残余能量具有可加性：

$$\langle x, R_w x\rangle = \langle x, R_{w1} x\rangle + \langle x, R_{w2} x\rangle .$$

这种残余能量守恒使我们能够定义一个残余路径测度 μ_x，它不同于耗散测度 ν_x。定义

$$\mu_x([w]) := \frac{\langle x, R_w x\rangle}{\langle x, R_0 x\rangle}.$$

Then

$$\mu_x([w]) = \mu_x([w1]) + \mu_x([w2]) .$$

由于 $\mu_x([\emptyset]) = 1$ （假设 $\|x\| = 1$），因此 μ_x 可扩展为样本空间 Ω 上的柱集可加概率测度。

备注 3.4（测度的比较）。 在此二元情形下，我们有两种自然测度：

（1）耗散测度 ν_x （由定理 3.1得到），由 D_{wj}驱动，追踪捕获能量的路径。
（2）残余测度 μ_x，由 R_{wj}驱动，追踪存留能量的路径。

由于 $D_{w1} = R_{w2}$，这些测度互为共轭。也就是说，耗散到通道 1 的概率与通道 2 的残差权重成正比：

$$p_x(1 \mid w) = \frac{\langle x, D_{w1} x\rangle}{\langle x, R_w x\rangle} = \frac{\langle x, R_{w2} x\rangle}{\langle x, R_w x\rangle} = \frac{\mu_x([w2])}{\mu_x([w])}.$$

残余测度 μ_x 在这里具有特殊性，因为它有明确的闭式表示 $\mu_x([w]) = \langle x, R_w x\rangle / \langle x, R_0 x\rangle$，而一般$m$ 情形下并没有这种表示。

4. 随机分支与能量守恒

我们继续讨论一个固定的非零态 $x \in H$，其满足 $\langle x, R_0 x\rangle > 0$，以及 WR 树 $\{R_w, D_{wj}\}$ 和路径测度 ν_x，它们在第 3 节中构造。本节中，我们始终赋予 样本空间 $= \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 典范滤子 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$，其中 $\mathcal{F}_n$ 是由长度为 σ 的柱集生成的 n-代数。

4.1. 可测性与随机边界算子。我们的第一个观察是，WR 边界极限 $R_\infty(\omega)$ 可以在自然意义下视为一个随机正算子。

命题 4.1。 对于所有 x、$y \in H$，函数

$$\omega \longmapsto \langle x, R_{\omega|_n} y\rangle , \qquad \omega \longmapsto \langle x, R_\infty(\omega) y\rangle$$

分别是 $\mathcal{F}_n$-可测和 $\mathcal{F}_\infty$-可测的，其中 $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n\right)$。特别地，$\omega \mapsto \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle$ 是 Ω上的非负 ν_x-可测函数。

证明。 固定 $x, y \in H$。对于每个 n，算子 $R_{\omega|n}$ 仅取决于前缀 $\omega|n$。长度为 n 的词只有有限多个，因此 $\omega \mapsto R_{\omega|n}$ 是 Ω 按长度为 n 的柱集划分所得划分上的简单分段常值映射。由此可得

$$\omega \longmapsto \langle x, R_{\omega|n} y \rangle$$

是一个简单的 $\mathcal{F}_n$可测函数。由定理2.1，对于每个固定的 ω ，我们有强收敛

$$R_{\omega|n} \xrightarrow[n\to\infty]{s} R_\infty(\omega).$$

特别地，对于固定的 x， $y \in H$，

$$\langle x, R_{\omega|n} y \rangle \longrightarrow \langle x, R_\infty(\omega) y \rangle$$

在 ω 上逐点成立。由于可测函数的逐点极限仍然可测，$\omega \mapsto \langle x,\ R_\infty(\omega) y \rangle$ 是 $\mathcal{F}_\infty$-可测的。 □

因此，对于每个初始状态 x，WR 树都给出一个定义良好的随机边界能量 $\omega \mapsto \langle x,\ R_\infty(\omega) x \rangle$。下一个结果表明，这个随机能量是一个自然超鞅的极限。

4.2. **能量超鞅与边界极限**。定义实值过程

$$M_n(\omega) := \langle x, R_{\omega|n} x \rangle, \qquad n \geq 0,\ \omega \in \Omega. \tag{4.1}$$

由 WR 残差沿每条分支的单调性可知，对于每个固定的 ω， $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 0}$ 是一个由非负数组成的非增序列。

定理 4.2 (能量超鞅)。 设 $x \in H$ 满足 $\langle x,\ R_0 x \rangle > 0$，并设$\nu_x$ 是定理*3.1*中的 *WR* 路径测度。则由 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 定义的过程 (4.1) 是关于 $(\nu_x, \mathcal{F}_n)$的有界非负超鞅。特别地：

(1) *For each n, M_n is $\mathcal{F}_n$-measurable and $0 \leq M_n(\omega) \leq \langle x, R_0 x \rangle$ for all $\omega \in \Omega$.*
(2) *For each n,*

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq M_n(\omega) \quad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega.$$

(3) 存在一个可积随机变量 M_∞ ，使得

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad \text{almost surely and in } L^1(\nu_x).$$

此外，对于 ν_x-几乎处处的 ω，

$$M_\infty(\omega) = \langle x, R_\infty(\omega) x \rangle .$$

证明。 (1) 可测性和有界性由命题 4.1以及算子不等式 $0 \leq R_{\omega|n} \leq R_0$得出。

(2) 固定 $n \geq 0$ 和一个长度为 n的词 w 。在柱集 $[w]$ 上，我们有 $\omega|n = w$，并且

$$M_n(\omega) = \langle x, R_w x \rangle .$$

在下一步，过程以概率 $p_x(j \mid w)$ 移至子节点 wj ，对应的残差为 R_{wj}。因此，对于 $\omega \in [w]$,

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \sum_{j \in \mathcal{A}} p_x(j \mid w) \langle x, R_{wj} x \rangle .$$

根据定理 2.1 我们有 $0 \leq R_{wj} \leq R_w$ 对于每个 j，因此

$$\langle x, R_{wj} x \rangle \leq \langle x, R_w x \rangle \quad \text{for all } j.$$

由于 $\sum_j p_x(j \mid w) = 1$，我们得到

$$\sum_j p_x(j \mid w)\, \langle x, R_{wj} x\rangle \le \langle x, R_w x\rangle = M_n(\omega),$$

对所有 $\omega \in [w]$ 均成立。这证明了超鞅不等式

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \le M_n \quad \text{almost surely.}$$

(3) 过程 $\{M_n\}$ 非负，且一致有界于 $\langle x,\ R_0 x\rangle$因此一致可积。由超鞅收敛定理，存在一个可积随机变量 M_∞ 使得 $M_n \to M_\infty$ 几乎必然且在 $L^1(\nu_x)$收敛。另一方面，对于每个固定的 ω，序列 $\{R_{\omega|n}\}$ 强收敛到$R_\infty(\omega)$ ，由定理 2.1 可知。特别地，对于我们固定的 x,

$$\left\langle x, R_{\omega|n} x\right\rangle \longrightarrow \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle \quad \text{for every } \omega \in \Omega.$$

因此， $M_n(\omega)$ 的逐点极限恰好是 $\langle x,\ R_\infty(\omega)x\rangle$。由于几乎必然极限具有唯一性，可得

$$M_\infty(\omega) = \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle \quad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega.$$

□

注 4.3。 该定理表明，沿着一条 ν_x-随机 WR 分支，余算子的 x-能量作为超鞅递减，并几乎必然收敛到边界值 $\langle x,\ R_\infty(\omega)x\rangle$。特别地，灭绝事件

$$E_{\text{ext}}(x) := \{\omega \in \Omega : \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle = 0\}$$

具有概率

$$\nu_x(E_{\text{ext}}(x)) = \nu_x\left(\{\omega : M_\infty(\omega) = 0\}\right),$$

而互补事件描述了这样的随机分支：沿着这些分支，有正量的 x能量在边界处存留。这是理解随机 WR 边界 $\{R_\infty(\omega)\}$ 如何在$B(H)$+中编码存留能量分布的一种自然方式。

4.3. 沿随机分支的期望能量平衡。 最后，我们记录一个期望层面上的精确能量平衡恒等式。对于 $\omega \in\Omega$和 $k \ge 1$，令

$$\Delta_k(\omega) := D_{\omega|k-1,j_k}, \qquad A_k(\omega) := \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle\,.$$

由逐路径望远镜恒等式，

$$R_0 - R_\infty(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(\omega)$$

在强算子拓扑下，并通过与 x 取内积，我们得到，对每个 ω,

$$\langle x, R_0 x\rangle = \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega),$$

其中该级数单调地收敛。应用单调收敛定理和定理4.2，我们得到：

命题 4.4（随机 WR 分支的能量平衡）。设 $x \in H$ 满足$\langle x,\ R_0x\rangle > 0$。那么这些随机变量

$$A_k(\omega) := \langle x, \Delta_k(\omega)x\rangle\,, \qquad k \geq 1,$$

非负且可积，并且

$$\langle x, R_0x\rangle = \mathbb{E}_{\nu_x}\left[\langle x, R_\infty(\omega)x\rangle\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\nu_x}\left[A_k(\omega)\right].$$

特别地，沿着一条 ν_x-随机 *WR* 分支所耗散的预期总 x 能量是有限的，且等于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\nu_x}\left[A_k(\omega)\right] = \langle x, R_0x\rangle - \mathbb{E}_{\nu_x}\left[\langle x, R_\infty(\omega)x\rangle\right].$$

证明。对每个 ω，级数 $\sum_{k\geq 1} A_k(\omega)$ 单调收敛至 $\langle x,\ R_0x\rangle - \langle x,\ R_\infty(\omega)x\rangle$，因此逐点和有限，且有界于 $\langle x,\ R_0x\rangle$。由单调收敛定理和 Fubini–Tonelli 定理，

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)\right] = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\nu_x}\left[A_k(\omega)\right].$$

对路径上的恒等式取期望

$$\langle x, R_0x\rangle = \langle x, R_\infty(\omega)x\rangle + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} A_k(\omega)$$

并利用定理 4.2 将 $\langle x,\ R_\infty(\omega)x\rangle$ 与几乎处处极限 $M_\infty(\omega)$对应起来，即得所需等式。□

推论 4.5. 设

$$E_{\mathrm{ext}}\left(x\right) := \left\{\omega \in \Omega : \left\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\right\rangle = 0\right\}.$$

则以下各项等价：

(1) $\nu_x(E_{\mathrm{ext}}(x)) = 1$。(2) $E_{\nu_x}\left[\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\rangle\right] = 0$。(3) $\sum_{k\geq 1} E_{\nu_x}\left[A_k\left(\omega\right)\right] = \langle x,\ R_0x\rangle$。

此外，对每个 $n \geq 0$，都有尾部恒等式

$$E_{\nu_x}\left[M_n\right] = E_{\nu_x}\left[\left\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\right\rangle\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_{\nu_x}\left[A_k\left(\omega\right)\right],$$

特别地，

$$E_{\nu_x}\left[\left\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\right\rangle\right] = \inf_{n\geq 0} E_{\nu_x}\left[M_n\right] = \lim_{n\to\infty} E_{\nu_x}\left[M_n\right].$$

证明。由于 $\langle x,\ R_\infty\left(\omega\right) x\rangle \geq 0$，我们有

$$\nu_x\left(E_{\mathrm{ext}}\left(x\right)\right) = 1 \Longleftrightarrow E_{\nu_x}\left[\left\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\right\rangle\right] = 0.$$

（2）与（3）的等价性正是命题4.4。

对于尾部恒等式，在深度 n 处应用逐路径望远镜恒等式：

$$\left\langle x, R_{\omega|n}x\right\rangle = \left\langle x, R_\infty\left(\omega\right) x\right\rangle + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\left(\omega\right),$$

其中该级数单调收敛，并按照命题4.4中的做法取期望，使用单调收敛定理和 Fubini-Tonelli 定理。最后几个等式成立，是因为 $E_{\nu_x}[M_n]$ 关于 n递减。□

5. 一致消亡

本节将证明，在对投影 $\{P_j\}$ 作出自然的定量分解假设时，WR 动力学会沿着 ν_x- 几乎处处的分支消除 x- 能量，而且其期望消亡速率实际上是指数级的。该结论与维数无关，且仅取决于总和 $\sum_j P_j$ 的一致下界。

与之前一样，我们固定一个满足 $\langle x, R_0 x\rangle > 0$ 的向量 $x \in H$，并使用 WR 树 $\{R_w, D_{wj}\}$、路径测度 ν_x 以及超鞅

$$M_n(\omega) := \left\langle x, R_{\omega|n} x\right\rangle, \qquad n \geq 0,$$

在定理 4.2 中构造。我们还回顾一下逐步k 耗散算子

$$\Delta_k(\omega) := D_{\omega|k-1,j_k}, \qquad A_k(\omega) := \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle, \qquad k \geq 1,$$

其中 j_k 是 ω 的第 k 个字母。回忆一下，$ran(R_w)$ 都包含在一个固定的闭子空间 $H_0 \subset H$ 中，其中 $H_0 = ran(R_0^{1/2})$；见 (3.1)–(3.2)。

假设 5.1。存在一个常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\sum_{j=1}^{m} P_j \geq \alpha I \quad on\ H_0. \tag{5.1}$$

备注 5.2。注意，（5.1）在 $\alpha = 1$ 时成立，其中 $\sum_j P_j = I$ 在 H_0上，即分裂情形（3.3）。由于每个 $P_j \leq I$，我们也有 $\sum_{j=1}^m P_j \leq mI$，因此必然有 $0 < \alpha \leq m$，且数量 $c := 1 - \frac{\alpha}{m}$ 位于区间 $[0, 1)$ 内。

等价地，限制在 H_0上时，带单位权重的子空间 $ran(P_j)$ 构成一个有限融合框架，其框架界为 α 和 m：

$$\alpha \|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \|P_j x\|^2 \leq m \|x\|^2, \qquad x \in H_0. \tag{5.2}$$

尽管如此，我们仍将（5.1）称为泄漏假设，因为在 WR 动力学中，它衡量了每一代所捕获的残余能量。

特别地，（5.1）意味着 $span\{\overline{ran}(P_j)\} = H_0$。如果 H_0 中的某个方向与每个 $ran(P_j)$都正交，那么它将在 WR 动力学下保持不变，从而该方向上的消亡不可能发生。因此，本节结果需要某种形式的“无盲方向”条件，而（5.1）则是带有统一裕度 α的定量版本。

定理 5.3 表明，在满足（5.1）的条件下，WR 动力学必须在每个层级耗散固定比例的 x-能量，且对路径测度ν_x取平均。这将使期望残余能量一致指数衰减，并沿随机分支几乎必然消灭。

定理 5.3。假设（5.1）。那么存在一个常数

$$0 \leq c < 1, \qquad c := 1 - \frac{\alpha}{m},$$

使得以下条件对所有满足 $\langle x, R_0 x\rangle > 0$ 的非零 $x \in H$ 均成立：

(1) 对于所有 $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1}\right] \leq c\,\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_n\right],$$

因此

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_n\right] \leq c^n \left\langle x, R_0 x\right\rangle.$$

(2) 沿着几乎每个 ν_x-分支 $\omega \in \Omega$，残余能量满足

$$\left\langle x, R_{\omega|n} x\right\rangle \longrightarrow 0 \quad as\ n \to \infty,$$

也就是说,

$$\left\langle x, R_\infty(\omega) x\right\rangle = 0 \quad for\ \nu_x\text{-}almost\ every\ \omega.$$

特别地，*WR* 动力学几乎必然沿着一条 ν_x-随机分支使 x-能量消失，并且期望残余能量至少以 c^n 的速率衰减。

证明。我们首先推导 M_{n+1} 关于 $\mathcal{F}_n$ 的条件期望的一致单步收缩界。固定 $n \geq 0$ 和一个长度为 n 的词 w。在柱集 $[w]$ 上，我们有 $\omega|n = w$ 和 $M_n(\omega) = \langle x,\ R_w x\rangle$。令

$$v := R_w^{1/2} x \in H_0.$$

然后 $\langle x,\ R_w x\rangle = \|v\|^2$。对于每个子节点 wj，下一个残差为

$$R_{wj} = R_w^{1/2}(I - P_j)R_w^{1/2},$$

so

$$\langle x, R_{wj} x\rangle = \langle v, (I - P_j)v\rangle = \|v\|^2 - \|P_j v\|^2.$$

接下来，回顾一下，节点 w 处的能量偏置转移概率为

$$p_x(j \mid w) := \frac{a_{wj}}{\sum_k a_{wk}} = \frac{\langle x, D_{wj} x\rangle}{\sum_k \langle x, D_{wk} x\rangle} = \frac{\|P_j v\|^2}{\sum_k \|P_k v\|^2},$$

当 $\sum_k a_{wk} > 0$时，并且按照我们的约定，当 $\sum_k a_{wk} = 0$时，它们由某个固定的概率向量给出。无论哪种情况，$p_x(\cdot \mid w)$ 都是$\mathcal{A}$上的概率向量。

记

$$s_j := \|P_j v\|^2, \qquad S := \sum_{j=1}^m s_j.$$

Then

$$p_x(j \mid w) = \begin{cases} \dfrac{s_j}{S}, & \text{if } S > 0, \\ \text{a fixed } q_j, & \text{if } S = 0. \end{cases}$$

如果 $S = 0$，那么对所有 j都有 $P_j v = 0$，因此

$$0 = \sum\nolimits_{j=1}^m \|P_j v\|^2 = \left\langle v, \left(\sum\nolimits_{j=1}^m P_j\right) v\right\rangle \geq \alpha \|v\|^2$$

由（5.1）。由于 $\alpha > 0$，这迫使 $v = 0$，因此 $\|v\|^2 = 0$，从而 $M_n\left(\omega\right) = 0$ 在$[w]$上成立。特别地,

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 0 = c\,M_n(\omega)$$

对所有 $\omega \in [w]$ 都成立，而所需的不等式在该柱集上显然成立。

若 $S > 0$，则

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \sum\nolimits_{j=1}^m p_x(j \mid w)\left\langle x, R_{wj} x\right\rangle = \sum\nolimits_{j=1}^m \frac{s_j}{S}\left(\|v\|^2 - s_j\right).$$

经过移项和整理，我们得到

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]}{\|v\|^2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{s_j}{S}\left(1 - \frac{s_j}{\|v\|^2}\right) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j^2}{S\,\|v\|^2}.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\left(\sum_{j=1}^{m} s_j\right)^2 \le m \sum_{j=1}^{m} s_j^2,$$

so

$$\sum_{j=1}^{m} s_j^2 \ge \frac{S^2}{m}.$$

因此，

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]}{\|v\|^2} \le 1 - \frac{S^2/m}{S\,\|v\|^2} = 1 - \frac{S}{m\,\|v\|^2}.$$

另一方面，将（5.1）应用于 $v \in H_0$ 可得

$$S = \sum_{j=1}^{m} \|P_j v\|^2 = \left\langle v, \left(\sum_{j=1}^{m} P_j\right) v \right\rangle \ge \alpha\,\|v\|^2.$$

结合这些不等式，我们得到

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]}{\|v\|^2} \le 1 - \frac{\alpha}{m},$$

也就是说，

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \le \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)\|v\|^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) M_n(\omega).$$

综上，我们证明了对于每个 n以及每个长度为 n 的柱集 $[w]$，

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \le c\,M_n \quad \text{almost surely,}$$

其中 $c = 1 - \alpha/m \in [0, 1)$。

对该不等式取期望，得到

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_{n+1}\right] \le c\,\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_n\right] \quad \text{for all } n \ge 0.$$

迭代可得

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_n\right] \le c^n\,\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_0\right] = c^n \left\langle x, R_0 x\right\rangle,$$

这证明了第（1）部分。

对于第（2）部分，回顾一下，$\{M_n\}$ 是一个有界非负上鞅。根据定理4.2，存在一个可积随机变量 M_∞ 使得

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad \text{almost surely and in } L^1(\nu_x),$$

并且对于 ν_x-几乎处处的 ω，

$$M_\infty(\omega) = \left\langle x, R_\infty(\omega) x\right\rangle.$$

另一方面，由第 (1) 部分可得

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_n\right] \le c^n \left\langle x, R_0 x\right\rangle \longrightarrow 0.$$

由于 $M_n \to M_\infty$ 属于 $L^1(\nu_x)$，这就意味着

$$\mathbb{E}_{\nu_x}\left[M_\infty\right] = 0.$$

由于 $M_\infty \ge 0$，我们得出，对于 ν_x-几乎处处的 ω，$M_\infty(\omega) = 0$。等价地，

$$\left\langle x, R_\infty(\omega) x\right\rangle = 0 \quad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega.$$

□

推论 5.4。 常数 $c = 1 - \alpha/m$ 与维数无关，且仅取决于参数 α 和分支数 m。在分裂情形中， $\sum_j P_j = I$ 在H_0上，有 $\alpha = 1$ ，因此

$$\mathbb{E}_{\nu_x}[M_n] \le \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \langle x, R_0 x\rangle .$$

因此，对于每个初始状态 x，预期残余能量至少以 $(1-1/m)^n$ 的速率衰减，并且沿 ν_x-随机分支几乎必然消灭。

注 5.5。 假设（5.1）可以理解为投影 $\{P_j\}$ 在 x的 WR 轨道上的定量非退化性。对于每个剩余向量 $v = R_w^{1/2} x$，不等式

$$\sum_j \|P_j v\|^2 \ge \alpha \|v\|^2$$

表明，平均而言，族 $\{P_j\}$ 捕获了v能量的固定比例。随后，该定理断言，这种一致泄漏会沿 WR 树传播，并在边界处迫使 x-能量消灭，其定量速率仅由 α 和 m 控制。因此，算子论分裂条件转化为 WR 动力学中的概率灭绝。

6. 沿分支的随机原子展开

本节将证明，在泄漏假设（5.1）下，WR 动力学沿典型分支生成二次型的随机原子（类似框架）展开。对于每个固定状态 $x \in H$ ，若 $\langle x,\ R_0 x\rangle > 0$，则逐步耗散算子 Δ_k（ω） 可以按谱分解，所得的秩一部分结合起来给出逐路径帕塞瓦尔型恒等式

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2$$

对于 ν_x-几乎处处的分支 ω。这给出了一个算子论的“边界上的 WR 框架”实例，它与单个初始状态 x 相关联。

我们继续采用第4 节和第5节中的设定。具体而言：

- R_w 和 D_{wj} 是节点 w 处的 WR 残差和耗散部分。
- 对于 $\omega \in \Omega$ 和 $k \ge 1$，沿 ω 的第 k 步耗散算子为

$$\Delta_k(\omega) := D_{\omega|k-1, j_k},$$

其中 j_k 是 ω 的第 k 个字母。

对于固定态 $x \in H$，第 k 步的标量耗散能量为

$$A_k(\omega) := \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle .$$

逐路径望远镜恒等式为

$$\langle x, R_0 x\rangle = \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega),$$

在 k中单调收敛。根据（5.1），我们有

$$\langle x, R_\infty(\omega) x\rangle = 0 \quad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega$$

根据定理5.3。

在本节中，我们还施加一个附加条件：

假设 6.1。 初始算子 R_0 是迹类。

由于对于每个 w 都有 $0 \le R_w \le R_0$，这意味着每个 R_w 都是迹类。特别地，对于每个 $\omega \in \Omega$ 和 $k \ge 1$,

$$\Delta_k(\omega) = R_{\omega|k-1}^{1/2} P_{j_k} R_{\omega|k-1}^{1/2}$$

是迹类。现在，我们将算子值耗散 $\Delta_k(\omega)$转化为秩一原子。

6.1. **耗散算子的谱原子**。 固定一个分支 $\omega \in$样本空间 和一步 $k \ge 1$。根据假设 6.1，算子 $\Delta_k(\omega)$ 是正且紧的。根据紧自伴算子的谱定理，存在一个标准正交族 $\{u_{k,r}(\omega)\}_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)} \subset H$ 以及非负特征值 $\{\lambda_{k,r}(\omega)\}_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)}$，使得

$$\Delta_k(\omega) = \sum_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)} \lambda_{k,r}(\omega)\, |u_{k,r}(\omega)\rangle \langle u_{k,r}(\omega)|$$

且在强算子拓扑下收敛。这里，假设 H 可分， $\mathcal{R}_k(\omega)$至多可数。我们将相应的秩一“原子”定义为

$$\varphi_{k,r}(\omega) := \lambda_{k,r}(\omega)^{1/2} u_{k,r}(\omega), \qquad k \ge 1,\ r \in \mathcal{R}_k(\omega).$$

Then

$$\Delta_k(\omega) = \sum_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)} |\varphi_{k,r}(\omega)\rangle \langle \varphi_{k,r}(\omega)|\,.$$

因此，对于任意 $x \in H$，我们有

$$A_k(\omega) = \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle = \sum_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2\,,$$

其中标量级数在 r 中单调地收敛。

6.2. **固定态的随机 WR 帕塞瓦尔展开**。 现在，我们将 $\Delta_k(\omega)$ 的谱分解与第5 节的消亡结果结合起来，从而得到 $\langle x,\ R_0 x\rangle$ 关于原子 $\varphi_{k,\ r}(\omega)$ 的逐路径展开。

定理 6.2。 假设 (5.1) 且 R_0 是迹类，并固定一个非零态 $x \in H$，使得 $\langle x,\ R_0 x\rangle > 0$。那么存在一个 ν_x-全测度集 样本空间$_x \subset$ 样本空间，使得对每个 $\omega \in$样本空间$_x$,

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2\,,$$

其中双重级数单调地收敛。特别地，对于 ν_x-几乎处处的分支 ω，这一族

$$\{\varphi_{k,r}(\omega) : k \ge 1,\ r \in \mathcal{R}_k(\omega)\}$$

给出了标量 $\langle x, R_0 x\rangle$ 的帕塞瓦尔型原子分解。

证明。 固定 $x \in H$ 使得 $\langle x,\ R_0 x\rangle > 0$。根据逐路径望远镜恒等式以及 A_k 的定义，对于每个 $\omega \in$样本空间,

$$\langle x, R_0 x\rangle = \langle x, R_\infty(\omega) x\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega),$$

且 $\sum_{k\geq 1} A_k(\omega)$ 单调收敛且以上界为 $\langle x,\ R_0 x\rangle$。根据定理5.3 (在 (5.1) 条件下), 我们知道

$$\langle x, R_\infty(\omega)x\rangle = 0 \quad \text{for } \nu_x\text{-almost every } \omega.$$

令 $\Omega_x \subset \Omega$ 表示此结论成立的全测度子集。对于每个 $\omega \in \Omega_x$，望远镜恒等式可化简为

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega),$$

由 k 中的单调收敛。接下来，对于每个 ω 和 k，我们利用 $\Delta_k(\omega)$ 的谱分解，将 $A_k(\omega)$ 展开为:

$$A_k(\omega) = \langle x, \Delta_k(\omega)x\rangle = \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} \left|\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle\right|^2,$$

由 r 中的单调收敛。结合这些关系，我们得到

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} \left|\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle\right|^2$$

对所有 $\omega \in \Omega_x$ 均成立。由于所有项均非负，双重级数单调收敛至 $\langle x,\ R_0 x\rangle$；如有需要，可以任意调整求和顺序。□

备注6.3。对于固定的 x，定理6.2 表明，沿着 ν_x几乎处处的分支ω，整个 x-能量 $\langle x,\ R_0 x\rangle$ 可以写成一个 ℓ^2-型系数和

$$\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle$$

相对于由 WR 动力学生成的随机可数原子族 $\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$。从这个意义上说，每个典型的 WR 分支都承载着一维射线 $\mathbb{C}x$的“帕塞瓦尔框架”，其框架元素通过秩一外积完全位于锥 $B(H)_+$内。索引集

$$\{(k,r) : k \geq 1,\ r \in \mathcal{R}_k(\omega)\}$$

继承了 WR 能量树的树状分支结构；在具体的有限维示例中，这个随机族呈现出明显的分形组织 $B(H)_+$。

注6.4。 可以将这一图景推广到有限或可数个初始状态 $\{x_\alpha\} \subset H$。对于每个 x_α，构造相应的路径测度 ν_{x_α}，并得到一个满测度集 Ω_{x_α}，在该集合上

$$\langle x_\alpha, R_0 x_\alpha\rangle = \sum_{k,r} \left|\langle x_\alpha, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle\right|^2.$$

算子 $\Delta_k(\omega)$及其谱原子$\varphi_{k,\ r}(\omega)$对所有 α都相同；只有 Ω 上的抽样测度 ν_{x_α} 会随初始状态而变化。因此，WR 树在 H中定义了一个单一的原子族，而不同的初始态则通过树上不同的能量偏置随机游走来探测这一原子族。

7. 通过迹偏置分支构造帕塞瓦尔型框架

本节将构造第二种路径测度，此处采用迹偏置，而非x能量偏置，并证明在满足（5.1）和假设 6.1的条件下，沿几乎处处的分支（相对于这一新测度），WR 动力学会生成一个可数原子系统，其秩一外积之和强收敛至 R_0。等价地，沿几乎处处的分支，我们得到一个帕塞瓦尔型框架恒等式，其框架算子为 R_0 ，定义在能量空间 $ran(R_0^{1/2})$。

在本节中，我们始终假设 (5.1)，并且 R_0 属于迹类。

7.1. **迹偏置转移概率与路径测度**。对于每个节点$w \in \mathcal{W}$ 定义迹耗散权重

$$s_{wj}^{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}(D_{wj}) = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2}\right) \geq 0, \qquad j \in \mathcal{A}.$$

Set

$$S_w^{\mathrm{tr}} := \sum_{j=1}^{m} s_{wj}^{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{m} P_j\right) R_w^{1/2}\right).$$

若 w 满足 $S_w^{\mathrm{tr}} > 0$ ，则称其为迹存活，否则称为迹死亡。对于迹存活节点，我们定义

$$p^{\mathrm{tr}}(j \mid w) := \frac{s_{wj}^{\mathrm{tr}}}{\sum_{k=1}^{m} s_{wk}^{\mathrm{tr}}}, \qquad j \in \mathcal{A}.$$

对于迹死亡节点，我们统一固定一个参考概率向量

$$q = (q_1, \ldots, q_m) \in (0,1)^m, \qquad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1,$$

并令

$$p^{\mathrm{tr}}(j \mid w) := q_j, \qquad j \in \mathcal{A}$$

当 $S_w^{\mathrm{tr}} = 0$ 时。因此，在所有情况下， $p^{\mathrm{tr}}(\cdot \mid w)$ 都是 $\mathcal{A}$ 上的一个概率分布。对于有限词 $w = j_1 \cdots j_n$ ，我们定义柱集权重

$$\nu^{\mathrm{tr}}([w]) := p^{\mathrm{tr}}(j_1 \mid \emptyset) p^{\mathrm{tr}}(j_2 \mid j_1) \cdots p^{\mathrm{tr}}(j_n \mid j_1 \cdots j_{n-1}).$$

与第3节一样，这给出了柱集上一个相容的权重族：

$$\nu^{\mathrm{tr}}([w]) = \sum_{j=1}^{m} \nu^{\mathrm{tr}}([wj]), \qquad w \in \mathcal{W},$$

柯尔莫戈洛夫–卡拉西奥多里扩张定理保证存在唯一的 $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 上的博雷尔概率测度 ν^{tr} ，它扩张了这些柱集权重。

我们将 ν^{tr} 称为迹偏置 WR 路径测度。直观地说，在每个迹存活节点 w 处，下一索引 j 被选中的概率与通道 j耗散的迹 $\mathrm{tr}(D_{wj})$成正比；当没有迹耗散时，分支由固定的参考向量 q决定。

7.2. **迹超鞅与迹的消亡。** 现在，我们构造第 4 节中能量超鞅的迹类比。

对于 $\omega \in$ 样本空间 和 $n \geq 0$ 集合

$$T_n(\omega) := \mathrm{tr}(R_{\omega|n}).$$

由于对于所有 ω 和 n， $R_{\omega|n}$ 都是正且属于迹类， T_n（ω） ≥ 0，并且根据 $\mathrm{tr}(R_{\omega|n})$ $\leq \mathrm{tr}(R_0)$，我们有

$$0 \leq T_n(\omega) \leq \mathrm{tr}(R_0), \qquad \omega \in \Omega,\ n \geq 0.$$

令 $\{\mathcal{F}_n\}$ 为由前缀 $\omega|n$ 生成的典范滤子。

定理 7.1. 假设 (5.1) 并且 R_0 属于迹类。那么存在一个常数

$$0 \leq c < 1, \qquad c := 1 - \frac{\alpha}{m},$$

使得以下结论成立：

(1) $\{T_n\}_{n\geq 0}$ 是$(\Omega\ \nu^{\mathrm{tr}}, \mathcal{F}_n)$上的有界非负上鞅，且对所有 $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_{n+1}] \leq c\,\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_n].$$

(2) 对所有 $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_n] \leq c^n \mathrm{tr}(R_0),$$

且极限

$$T_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} T_n(\omega) = \mathrm{tr}(R_\infty(\omega))$$

对几乎处处的 ω， ν^{tr}极限存在。

(3) 对几乎处处的 ω（相对于 ν^{tr}），

$$\mathrm{tr}(R_\infty(\omega)) = 0,$$

因此， $R_\infty(\omega)$ $= 0$ 作为一个算子。

证明。 我们首先证明条件期望的单步压缩不等式。

固定 $n \geq 0$ 和一个长度为 n 的词 w。在柱集 $[w]$ 上，我们有 $\omega|n = w$，并且

$$T_n(\omega) = \mathrm{tr}(R_w).$$

Set

$$A := \mathrm{tr}(R_w), \qquad s_j := \mathrm{tr}(D_{wj}) = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2}\right) \geq 0, \qquad S := \sum_{j=1}^m s_j.$$

根据构造,

$$p^{\mathrm{tr}}(j \mid w) = \begin{cases} \dfrac{s_j}{S}, & \text{if } S > 0, \\ q_j, & \text{if } S = 0. \end{cases}$$

我们分别考虑这两种情况。

若 $S = 0$，则对所有 j 都有 $s_j = 0$。特别地,

$$0 = \sum_{j=1}^m \mathrm{tr}(R_w^{1/2} P_j R_w^{1/2}) = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}\left(\sum\nolimits_{j=1}^m P_j\right) R_w^{1/2}\right) \geq \alpha\,\mathrm{tr}(R_w),$$

根据（5.1）在 H_0。由于 $\alpha > 0$，可得迹（R_w） $= 0$，因此 $A = 0$ 从而T_n（ω） $= 0$ 在 $[w]$。由于 $R_w \geq 0$ 是迹类，迹（R_w） $= 0$ 意味着 $R_w = 0$，因此

$$R_{wj} = R_w^{1/2}(I - P_j)R_w^{1/2} = 0, \qquad \mathrm{tr}(R_{wj}) = 0$$

对所有 j 均成立。因此

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right](\omega) = \sum_{j=1}^{m} p^{\mathrm{tr}}(j \mid w)\,\mathrm{tr}(R_{wj}) = 0 = c\,T_n(\omega)$$

在 $[w]$ 上。特别地，所需的不等式在迹死圆柱上取等号。

若 $S > 0$，则在 $[w]$ 上有

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right](\omega) = \sum_{j=1}^{m} p^{\mathrm{tr}}(j \mid w)\,\mathrm{tr}(R_{wj}).$$

如第5节所示，

$$R_{wj} = R_w^{1/2}(I - P_j)R_w^{1/2},$$

so

$$\mathrm{tr}(R_{wj}) = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}(I - P_j)R_w^{1/2}\right) = \mathrm{tr}(R_w) - \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}P_jR_w^{1/2}\right) = A - s_j.$$

因此

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n](\omega)}{A} = \sum_{j=1}^{m} \frac{s_j}{S}\left(1 - \frac{s_j}{A}\right) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j^2}{SA}.$$

根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\left(\sum_{j=1}^{m} s_j\right)^2 \le m \sum_{j=1}^{m} s_j^2,$$

so

$$\sum_{j=1}^{m} s_j^2 \ge \frac{S^2}{m}.$$

Thus

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n](\omega)}{A} \le 1 - \frac{S^2/m}{SA} = 1 - \frac{S}{mA}.$$

另一方面，将（5.1）应用于 $R_w^{1\ 2}$可得 /

$$S = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}P_jR_w^{1/2}\right) = \mathrm{tr}\left(R_w^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{m} P_j\right)R_w^{1/2}\right) \ge \alpha\,\mathrm{tr}(R_w) = \alpha A.$$

因此，

$$\frac{\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n](\omega)}{A} \le 1 - \frac{\alpha}{m},$$

或者等价地，

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right](\omega) \le \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)A = \left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)T_n(\omega).$$

因此，我们已经证明，对于每个 n 以及每个长度为 n 的柱集 $[w]$，

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \le c\,T_n \quad \text{almost surely,}$$

其中 $c = 1 - \alpha/m \in [0, 1)$。这证明了 $\{T_n\}$ 是一个有界非负上鞅，并通过取期望得到结论（1）：

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_{n+1}\right] \le c\,\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_n\right] \quad \text{for all } n \ge 0.$$

迭代可得

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_n\right] \le c^n\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}\left[T_0\right] = c^n\mathrm{tr}(R_0),$$

这就是期望的第（2）部分。

由于 $\{T_n\}$ 是有界非负超鞅，超鞅收敛定理（定理 4.2）蕴含存在一个可积随机变量 T_∞ 使得

$$T_n \longrightarrow T_\infty \quad \text{almost surely and in } L^1(\nu^{\mathrm{tr}}).$$

另一方面，对于每个固定的 ω，序列 $R_{\omega|n}$ 在 Loewner序下单调递减且以下界 0 为界，因此强收敛到一个正算子 $R_\infty(\omega)$。由迹的单调收敛性，

$$T_n(\omega) = \mathrm{tr}(R_{\omega|n}) \downarrow \mathrm{tr}(R_\infty(\omega)),$$

so

$$T_\infty(\omega) = \mathrm{tr}(R_\infty(\omega))$$

对于 ν^{tr}-几乎处处的 ω。

根据界

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_n] \le c^n \mathrm{tr}(R_0) \longrightarrow 0$$

由 L^1-收敛性 $T_n \to T_\infty$，我们可推得

$$\mathbb{E}_{\nu^{\mathrm{tr}}}[T_\infty] = 0.$$

由于 $T_\infty \ge 0$，这就迫使 $T_\infty(\omega) = 0$ 对 ν^{tr}-几乎处处的 ω 成立，也就是说，

$$\mathrm{tr}(R_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{for } \nu^{\mathrm{tr}}\text{-almost every } \omega.$$

最后，每个 $R_\infty(\omega)$都是正的迹类算子，因此 $\mathrm{tr}(R_\infty(\omega)) = 0$ 蕴含$R_\infty(\omega) = 0$。这就证明了第（3）部分。□

注 7.2. 该定理是定理 $\langle x, R_{\omega|n}x\rangle$5.3中消亡结果的迹类比。不同之处在于，$\nu^{\mathrm{tr}}$ 仅取决于 WR 树和迹泛函，而不依赖于某个特定向量 x；结论 $R_\infty(\omega) = 0$ 则是一个算子陈述，对 ν^{tr}几乎处处的分支均成立。

7.3. **全局随机 WR Parseval 型框架**。现在，我们将定理 7.1与第 6 节中耗散算子 $\Delta_k(\omega)$的谱分解结合起来，从而得到一个算子层面的随机 Parseval 型框架恒等式。

回忆一下，R_0 假设为迹类，因此每个 R_w 和 $\Delta_k(\omega)$ 都是迹类且紧的。对于每个 $\omega \in$ 样本空间 Ω 和 $k \ge 1$，紧自伴算子的谱定理给出一个标准正交族 $\{u_{k,r}(\omega)\}_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} \subset H$以及特征值 $\lambda_{k,r}(\omega) \ge 0$，使得

$$\Delta_k(\omega) = \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} \lambda_{k,r}(\omega)\, |u_{k,r}(\omega)\rangle \langle u_{k,r}(\omega)|,$$

其中的收敛是在强算子拓扑下进行的，且 $\mathcal{R}_k(\omega)$ 至多可数。接着我们定义原子

$$\varphi_{k,r}(\omega) := \lambda_{k,r}(\omega)^{1/2} u_{k,r}(\omega),$$

使得

$$\Delta_k(\omega) = \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} |\varphi_{k,r}(\omega)\rangle \langle \varphi_{k,r}(\omega)|.$$

对于任意 $x \in H$，

$$\langle x, \Delta_k(\omega)x\rangle = \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2,$$

其中标量级数在 r 中单调地收敛。

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 7.3。 假设 (5.1) 且 R_0 是迹类。那么存在一个 ν^{tr}-全测度集 样本空间$_0 \subset$ 样本空间 使得对于每个 $\omega \in$样本空间$_0$，以下结论成立：

(1) 算子层面的望远镜恒等式

$$R_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(\omega)$$

在强算子拓扑下成立。

(2) 对于每个 $x \in H$，

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 ,$$

其中双重级数单调地收敛。

(3) 该族

$$\{\varphi_{k,r}(\omega) : k \geq 1,\ r \in \mathcal{R}_k(\omega)\}$$

是 $ran(R_0^{1/2})$ 的一个框架，其框架算子为 R_0：对每个 $x \in H$，

$$\sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle x, R_0 x\rangle ,$$

$\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$ 的闭线性张成为 $ran(R_0^{1/2})$。特别地，当$R_0 = I$ 作用于闭子空间 $K \subset H$上时，这在通常意义下是 K 的一个帕塞瓦尔框架。

证明。根据定理 7.1，存在一个 ν^{tr}-全测度集 样本空间$_0 \subset$ 样本空间 使得$R_\infty(\omega) = 0$ 对每个 $\omega \in$ 样本空间$_0$。

对每个 $\omega \in$ 样本空间以及 $n \geq 1$，逐路径望远镜恒等式给出

$$R_{\omega|n} = R_0 - \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\omega),$$

当 $n \to \infty$ 时在强算子拓扑下收敛，并且 $R_{\omega|n} \downarrow R_\infty(\omega)$ 在 Loewner序下成立。因此，对于每个 ω，

$$R_0 - R_\infty(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(\omega)$$

在强算子拓扑下，且该级数在 Loewner序下单调地收敛。

若 $\omega \in$ 样本空间$_0$, ，则 $R_\infty(\omega) = 0$，因此

$$R_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(\omega)$$

在强算子拓扑下。这证明了第 (1) 部分。

固定 $\omega \in$ 样本空间$_0$ 和 $x \in H$。将 $\langle x, \cdot x\rangle$ 应用于式（1）中的恒等式，得到

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Delta_k(\omega) x\rangle ,$$

由 k中的单调收敛性可得，因为部分和递增，且由 $\langle x, R_0 x\rangle$从上方有界。

对于每个 k,

$$\langle x, \Delta_k(\omega)x\rangle = \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 ,$$

在 r 中单调收敛。结合这些关系可得

$$\langle x, R_0 x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r\in\mathcal{R}_k(\omega)} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 .$$

由于双重级数中的所有项均为非负数，级数单调收敛，因此可以任意重新排列求和顺序:

$$\sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle x, R_0 x\rangle .$$

这证明了第（2）部分。

对于第（3）部分，首先注意到每个 $\varphi_{k,\,r}(\omega)$ 都属于 $ran(R_{\omega|k-1}^{1/2}) \subseteq ran(R_0^{1/2})$，因此

$$V(\omega) := \overline{span}\,\{\varphi_{k,r}(\omega) : k \geq 1,\ r \in \mathcal{R}_k(\omega)\} \subseteq \overline{ran}(R_0^{1/2}).$$

反过来，假设 $y \in H$ 满足 $y \perp V(\omega)$。那么 $\langle y,\ \varphi_{k,\,r}(\omega)\rangle = 0$ 对所有 $(k,\ r)$ 都成立，并由第（2）部分可得

$$\sum_{k,r} |\langle y, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle y, R_0 y\rangle .$$

左边为零，因此 $\langle y,\ R_0 y\rangle = 0$。由于 $R_0 \geq 0$，这意味着 $R_0^{1/2} y = 0$，即 $y \in \ker R_0$。

因此我们已经证明

$$V(\omega)^{\perp} \subseteq \ker R_0.$$

取正交补可得

$$(\ker R_0)^{\perp} \subseteq V(\omega).$$

但 $(\ker R_0)^{\perp} = \overline{ran}(R_0^{1/2})$。结合上面得到的包含关系 $V(\omega) \subseteq ran(R_0^{1/2})$，可得

$$V(\omega) = \overline{ran}(R_0^{1/2}).$$

将此结果与第（2）部分中的恒等式结合起来，可知 $\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$ 是 $ran(R_0^{1/2})$ 的一个框架，其框架算子为 R_0: 对每个 $x \in H$,

$$\sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle x, R_0 x\rangle .$$

特别地，当 R_0 是闭子空间 $K \subset H$ 上的恒等算子（并在 $K^{\perp}$上为零）时，这个恒等式可简化为

$$\sum_{k,r} |\langle x, \varphi_{k,r}(\omega)\rangle|^2 = \langle x, x\rangle , \quad x \in K,$$

因此 $\{\varphi_{k,r}(\omega)\}$是 K的帕塞瓦尔框架。 □

参考文献

[ABW26] Daniel Alpay、Chad Berner 和 Eric S. Weber，《希尔伯特 C^* **44** 2026 2, 125738 4997577 -模中的 Kacz
[17]
marz 算法》，Expo. Math. ( )，第 C^* **44** 2026 2, 125738 4997577 期，论文编号 。
[17]
MR ACMT A. Aldroubi、C. Cabrelli、U. Molter 和 S. Tang，《动态采样》，Appl. Comput. Harmon. Anal. 42 (2017年)，第 3 期，378–401。MR 3613395[ACS06] Jorge Antezana、Gustavo Corach 和 Demetrio Stojanoff，《谱短缩算子》，Integral Equations Operator Theory **55** 2006 2, 169 188 2234254 ( )，第 – 期。MR
[69]
AD W. N. Anderson, Jr. 和 R. J. Duffin，《矩阵的串联与并联加法》，J. Math. Anal. Appl. 26 (1969)，576–594。MR 242573[ADK13] Akram Aldroubi、Jacqueline Davis 和 Ilya Krishtal，《动态采样：时间与空间的权衡》，Appl. Comput. Harmon. Anal. **34** 2013 3, 495 503 3027915 ( )，第 – 期。
[71] **20** 1971 520
MR And William N. Anderson, Jr.，《短缩算子》，SIAM J. Appl. Math. ( )，– 525。MR 287970[AT75] W. N. Anderson, Jr. 和 G. E. Trapp，《短缩算子 II》，SIAM J. Appl. Math. 28 (1975)，60–71。MR 356949[BCE06] Radu Balan、Pete Casazza 和 Dan Edidin，《无相位信号重构》，Appl. Comput. Harmon. Anal. **20** 2006 3, 345 356 2224902 ( )，第 – 期。MR BF
[03]
John J. Benedetto 和 Matthew Fickus，《有限归一化紧框架》，第 18 卷，2003年，框架，页 357–385。MR 1968126[Bha07] Rajendra Bhatia，《正定矩阵》，普林斯顿应用数学丛书，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2007年。MR 2284176[BHK+26] Victor Bailey、Deguang Han、Keri Kornelson、David Larson 和 Rui Liu，《动态框架与超不变子空间》，Appl. Comput. Harmon. Anal. 81 (2026)，论文编号 101824。MR 4990268[BM88] C. A. Butler 和 T. D. Morley，《关于短缩算子的一则注记》，SIAM J. Matrix Anal. Appl. **9** 1988 2, 147 155 938493 ( )，第 – 期。MR BO Martin Buck 和 Kasso A.
[25]
Okoudjou，《由图短时傅里叶变换生成的紧框架》，Linear Algebra Appl. **707** 2025 107 125 4832149 ( )，–。MR BS A.
[10]
Böttcher 和 I. M. Spitkovsky，《双投影理论基础入门》，Linear Algebra Appl. 432 (2010)，第 6 期，1412–1459。MR 2580440[CHR18] Ole Christensen、Marzieh Hasannasab 和 Ehsan Rashidi，《有界算子下的动态采样与框架表示》，J. Math. Anal. Appl. 463 2, 634 2018 644 3785475 ( )，第 – 期。MR [CK04] Peter G. Casazza 和 Gitta Kutyniok，《子空间框架》，《小波、框架与算子理论》，Contemp. Math.，第 345 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年，页 87–113。MR 2066823[CMM19] Maximiliano Contino、Alejandra Maestripieri 和 Stefania Marcantognini，《自伴 Krein 空间算子的舒尔补》，Linear Algebra Appl. 581 (2019)，214–246。MR 3983070[CMPP20] Carlos Cabrelli、Ursula Molter、Victoria Paternostro 和 Friedrich Philipp，《有限指标集上的动态采样》，J. Anal. Math. 140 (2020)，第 2 期，637–667。MR 4093918[CRS26] Ole Christensen、Navneet Redhu 和 Niraj K. Shukla，《有限维希尔伯特空间中的循环框架》，Linear Algebra Appl. **728** 2026 63 81 4953099 ( )，–。MR
[66]
Dou R. G. Douglas，《希尔伯特空间上算子的主序、因子分解和值域包含》，Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966)，413–415。MR 203464[Dur19] Rick Durrett，《概率论与例题》，剑桥统计与概率数学丛书，第 49 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2019年，第五版， [1068527] 3930614 MR 。MR FW P.
[71]
A. Fillmore 和 J. P. Williams，《关于算子值域》，Advances in Math. 7 (1971)，254–281。MR 293441[Gol86] Hans Goller，《短缩算子与秩分解矩阵》，Linear Algebra Appl. **81** 1986 207 236 852902 ( )，–。MR GR Robert M. Gower 和 Peter Richtárik，
[15]
《线性系统的随机迭代方法》，SIAM J. Matrix Anal. Appl. **36** 2015 4, 1660 1690 3432148 ( )，第 – 期。MR
[69] **144** 1969
Hal P. R. Halmos，《两个子空间》，Trans. Amer. Math. Soc. ( )，381–389。MR 251519

[Har63] Theodore E. Harris, 《分枝过程理论》, 数学科学基础丛书, 第119卷, Springer-Verlag, 柏林; Prentice Hall, Inc., 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1963 163361 。MR HL Deguang Han 和 David R. Larson, 《框架、基与群表示》, 美国数学会回忆录 **147** 2000 697, +94 1686653 (), 第 x 期。MR KOPT [00] Gitta Kutyniok、Kasso A. Okoudjou、Friedrich Philipp 和 Elizabeth K. Tuley, 《可扩展框架》, 《线性代数及其应用》438（2013）, 第5期, 2225–2238。MR 3005286[LP16] Russell Lyons 和 Yuval Peres, 《树与网络上的概率》, 剑桥统计与概率数学丛书, 第42卷, 剑桥大学出版社, 纽约, 2016年。MR 3616205[LR86] W. E. Longstaff 和 Peter Rosenthal, 《论算子代数与算子值域》, 《积分方程与算子理论》9（1986）, 第6期, 820–830。MR 866966[MMP07] Alejandra Maestripieri 和 Francisco Martínez Pería, 《克莱因空间中的舒尔补》, 《积分方程与算子理论》 **59** 2007 2, 207 221 2345997 (), [13] 第 – 期。MR MTMN Jacob D. Moorman、Thomas K. Tu、Denali Molitor 和 Deanna Needell, 《带平均化的随机化 Kaczmarz 算法》, BIT **61** 2021 1, 337 359 4235310 (), 第 – 期。[21] MR NRRR E. Nordgren、M. Radjabalipour、H. Radjavi 和 P. Rosenthal, 《论不变算子值域》, 《美国数学会汇刊》251（1979）, 389–398。MR 531986[NSW16] Deanna Needell、Nathan Srebro 和 Rachel Ward, 《随机梯度下降、加权抽样与随机化 Kaczmarz 算法》, 《数学规划》155（2016 1 2, 549 573 3439812 ）, A辑, 第 - 期, –。MR NT Deanna [79] Needell 和 Joel A. Tropp, 《铺满善意之路：随机化分块 Kaczmarz 方法分析》, 《线性代数及其应用》441（2014）, 199–221。MR 3134343[Opp18] Izhar Oppenheim, 《平均投影以及投影的循环或随机乘积一致收敛的角度判据》, 《以色列数学杂志》223（2018）, 第1期, 343–362。MR 3773065[Phi17] Friedrich Philipp, 《正规算子的贝塞尔轨道》, 《数学分析与应用杂志》448（2017）, 第2期, 767–785。MR 3582259[PR14] Evgeniy Pustylnik 和 Simeon Reich, 《希尔伯特空间中任意算子的无穷乘积与子空间交》, 《逼近理论杂志》178（2014）, 91–102。MR 3145756[PRZ12] Evgeniy Pustylnik、Simeon Reich 和 Alexander J. Zaslavski, 《希尔伯特空间中正交投影与非扩张算子的非周期无穷乘积的收敛性》, 《逼近理论杂志》164（2012）, 第5期, 611–624。MR 2903120[RMC21] Benjamin Robinson、Bill Moran 和 Doug Cochran, 《正算子值测度与稠密定义的算子值框架》, 《落基山数学杂志》51（2021 1, 265 272 4280112 ）, 第 – 期。MR RS Michael Reed 和 Barry Simon, [14] 《现代数学物理方法》。I.《泛函分析》, 学术出版社, 纽约—伦敦, 1972年。MR 493419[RZ21] Simeon Reich 和 RafałZalas, 《具有无穷多个子空间的同时投影方法的误差界》, 《逼近理论杂志》272（2021）, 论文编号105648, 24页。MR 4310540[SV09] Thomas Strohmer 和 Roman Vershynin, 《具有指数收敛的随机化 Kaczmarz 算法》, 《傅里叶分析与应用杂志》 **15** 2009 2, 262 278 2500924 (), [72] 第 – 期。MR Szw Ryszard Szwarc, 《希尔伯特空间中的 Kaczmarz 算法与紧框架》, 《应用与计算调和分析》 **22** 2007 3, 382 385 2311862 (), 第 – 期。MR [07] Tan Sui Tang, 《动态采样中的系统辨识》, 《计算与应用数学进展》43（2017）, 第3期, 555–580。MR 3650440[Tia25a] James Tian, 《交替加权残差流与非交换间隙》, arXiv.2512.06968（2025）。[17] [Tia25b] , 《正算子的残差加权分解》, arXiv.2512.00167（2025）。[vN50] 约翰·冯·诺依曼, 《泛函算子。II. 正交空间的几何》, 数学年刊研究丛书, 第22号, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1950年。~~MR 34~~514[Wil91] David Williams, 《鞅概率论》, 剑桥数学教材, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1991年。MR 1155402

数学评论，535 W. WilliamSt，210室，安娜堡，密歇根州48103，美国电子邮件地址：
james.ftian@gmail.com