arXiv:2601.00350v1 [math.OC] 1 Jan 2026

一致最优搜索计划的真实检测概率与主观探测概率

Liang Hong*

2026年1月5日

摘要

本文探讨了一致最优搜索计划的真实检测概率与主观概率之间的差异。本文的主要贡献有以下几方面。首先，本文给出了一组示例，说明从真实检测概率的角度来看，一致最优搜索计划可能是最优的，也可能不是。其次，本文证明，基于复合先验的一致最优搜索计划的真实检测概率，可能低于基于不同先验的一致最优搜索计划的真实检测概率。接着，本文指出一个开放问题无解。最后，本文表明，随着搜索时间趋于无穷，一致最优搜索计划的真实检测概率趋于 1。

关键词与短语：贝叶斯学习；复合概率映射；最优搜索理论；搜救；静止目标。

1 引言

最优搜索理论起源于美国海军反潜作战研究小组，该小组在第二次世界大战期间致力于寻找一种高效的方法来探测敌方潜艇（例如，Koopman，1946，1956a、b、c）。此后，该理论的发展也主要受到海上搜索任务实际需求的推动（例如，Stone 和 Stanshire，1971；Stone，1973、1975、1976；Richardson 和 Stone，1971；Richardson 和 Discenza，1980；Stone等人，2014；Vermeulen 和 Brink，2017；Bourque，2019）。最近，搜索博弈在文献中受到了广泛关注；例如，参见 Clarkson 等人（2020）、Lidbetter（2020）、Alpern 等人（2021）和 Lin（2021）。

一致最优搜索计划是最优搜索理论的基石。它已成功应用于实践中（例如，Richardson和Stone 1971年；Richardson等人1980年；Stone 1992年；Stone等人2014年）。一致最优搜索计划是理论上的

*数学科学系，达拉斯德克萨斯大学，800 West Campbell Road，Richardson，TX 75080，美国。电话：972-883-2161。电子邮箱：liang.hong@utdallas.edu。

美国海岸警卫队搜救最优规划系统（SAROPS）及其前身计算机辅助搜索规划（CASP）的骨架；例如参见Stone（1975年）和Kratzke等人（2010年）。Arkin（1964年）首次确立了欧几里得搜索空间中一致最优搜索计划存在的充分条件。他的工作后来由Stone（1973年、1975年、1976年）加以推广。一致最优搜索计划在搜索的每一时刻都使主观探测概率最大化。其性质已得到广泛研究（例如，Stone 1975年；Stone等人2016年；Hong 2024年）。然而，直到最近，一致最优搜索计划的真实探测概率才得到较为深入的研究（例如，Hong 2025年）。

本文旨在探讨一致最优搜索计划的真实探测概率与主观探测概率之间的差异。本文的主要贡献如下。首先，本文通过一组示例展示了一致最优搜索计划的真实探测概率与主观探测概率之间关系的一些有趣事实。具体而言，本文表明：

（i）一致最优搜索的真实探测概率可能始终等于其主观探测概率；（ii）一致最优搜索的真实探测概率可能永远不等于其主观探测概率；（iii）一致最优搜索计划的真实探测概率可能始终低于另一搜索计划的真实探测概率；

这些示例为研究人员和从业者提供了有益的启示。例如，（iii）表明，一致最优搜索计划不一定能使真实探测概率最大化，尽管其定义保证了它始终使主观探测概率最大化。这还意味着，一致最优搜索计划的真实平均探测时间可能短于另一搜索计划的真实平均探测时间。

接下来，本文探讨目标分布不一致这一具有挑战性的情形。在这种情况下，分析人员通常会先生成一个复合目标分布，再据此获得一个一致最优搜索计划（例如，Richardson和Discenza 1980；Stone 1992；Stone等人 2014）。直观而言，还有一种合理的替代方案：首先，根据不一致的目标分布获得一致最优搜索计划；然后，创建一个复合搜索计划。我们将看到，

（iv）基于复合目标分布的一致最优搜索计划的真实探测概率，可能低于基于不同目标分布的复合搜索计划的真实探测概率。

鉴于一致最优搜索计划存在上述局限，自然会想到一个问题：我们能否找到一种搜索计划，使其在搜索的每一时刻都能最大化真实检测概率？这是 Hong（2025）提出的一个开放问题。我们将看到，这个问题无解。

最后，本文确立了一致最优搜索计划的一项新性质：一致最优搜索计划的真实检测概率和主观探测概率都趋近于 1。这一结果的实际意义如下：如果预计搜索会持续很长时间，那么最优搜索计划即使从真实检测概率的角度来看，也将近似最优。

本文其余部分安排如下。第 2 节通过回顾搜索问题和一致最优搜索计划，为后文作铺垫。第 3 节证明陈述 (i)– (iii)。第 4 节证明陈述 (iv)。对于上述每个陈述，我们都给出一个离散示例和一个连续示例。第 5 节表明前述开放问题无解，第 6 节表明一致最优搜索计划的极限真实探测概率为 1。最后，第 7 节以若干注结束本文。

2 记号与设置

考虑这样一个搜索问题：在可用努力有限的情况下，搜索一个位置未知的静止目标。由于目标的确切位置 x 未知，我们采用贝叶斯方法，通过指定一个非退化的目标分布 来量化对 x 的不确定性；其（累积）分布函数和密度函数分别记为 Π 和 π。可能区域记为 X，是目标分布的支集。我们假设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，其中 n为某个正整数。离散情形 和连续情形 分别指 X 可数和不可数的情形。在离散情形中，我们始终假设 X 是 $\{1, 2, \ldots\}$ 的子集，并以单元表示可放置搜索努力的最小区域；在连续情形中，我们假设搜索努力连续分配。

设 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$。在离散情形下，$X$ 上的分配 是一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}_+$。在连续情形下，$X$ 上的分配 是一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}_+$，满足 $\int_A f(x)dx$等于分配到 A 中的搜索努力量，其中 $A \subseteq X$。显然，$\sum_{x\in X} f(x)$ 和$\int_X f(x)dx$ 分别表示离散情形和连续情形下的总努力量。

探测函数 $d\colon X \times \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ 用于描述传感器的不完美性。在离散情形下，$d(x,\ y)$ 表示在目标位于单元 x 的条件下，向单元 x 分配 y 努力量时探测到目标的条件概率；在连续情形下，$d(x,\ y)$ 表示在目标位于 x的条件下，x处的努力密度等于 y 时探测到目标的条件概率。本文始终假设，探测函数已根据物理定律正确推导，或通过反复测试可靠估计。因此，探测函数是客观的，并取决于所使用的传感器。若探测函数 d 满足正则 条件，则称其为正则函数：对于所有$x \in X$，$d(x,\ 0) = 0$，且 $\partial d(x,\ y)/\partial y$连续、正值且严格递减。

给定目标分布函数 Π、分配 f 和探测函数 d，$P[f]$

表示主观探测概率：

$$P[f] = \begin{cases} \sum_{x\in X} d(x, f(x))\pi(x), & \text{in the discrete case,} \\ \int_X d(x, f(x))\pi(x)dx, & \text{in the continuous case.} \end{cases} \tag{1}$$

相比之下， $P_{\#}[f]$ 表示真实/客观探测概率：

$$P^{\#}[f] = d(x_0, f(x_0)), \tag{2}$$

其中， x_0 表示离散情形下包含目标的真实单元格，以及连续情形下目标的真实位置。

我们定义成本函数 c： $X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$。在离散情形下， $c(x, y)$ 表示在单元 x 中投入 y 努力所产生的成本；在连续情形下， $c(x, y)$ 表示在位置 x 投入努力密度 y 所产生的成本密度。因此，若令 $C[f]$ 表示由分配 f 产生的成本，则

$$C[f] = \begin{cases} \sum_{x\in X} c(x, f(x)), & \text{in the discrete case,} \\ \int_X c(x, f(x))dx, & \text{in the continuous case.} \end{cases}$$

全文中，我们假设对所有 $x \in X$， $c(x, y) = y$ ，也就是说，成本与分配成正比。

在 X 上的一个搜索计划是一个函数 φ： $X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ，满足

(i) 对所有 $t \geq 0$， $\varphi(\cdot, t)$ 都是 X 上的一个分配；

(ii) $\varphi(x, \cdot)$ 对所有 $x \in X$ 都是递增函数。

设 T 为使用搜索计划 φ 找到目标所需的时间，并设 $\mu(\varphi)$ 为关于主观探测概率的 T 期望值。则

$$\mu(\varphi) = \int_0^\infty (1 - P[\varphi(\cdot, t)])dt.$$

类似地，设 $\mu^{\#}$ 为关于真实探测概率的 T 期望值。则

$$\mu^{\#}(\varphi) = \int_0^\infty (1 - P^{\#}[\varphi(\cdot, t)])dt. \tag{3}$$

累积努力函数 E 是定义域为 $\mathbb{R}_+$ 的非负函数，并满足$E(t)$表示截至时间 t可用的努力。我们假设 E 是递增的，且对于所有$t > 0$， $E(t) > 0$ 。给定目标分布函数 Π，针对 Π 和$E(t)$的一致最优搜索计划 在约束条件 $C[\varphi^\star(\cdot, t)] \leq E(t)$下，使搜索各时刻的主观探测概率达到最大。具体而言，令 $\Phi(E)$表示满足以下条件的搜索计划 φ

$$\sum_{x\in X} \varphi(x, t) = E(t), \quad \text{for all } t \geq 0, \tag{4}$$

对于离散情形，且

$$\int_X \varphi(x,t)dx = E(t), \quad \text{for all } t \geq 0, \tag{5}$$

对于连续情形。如果搜索计划 $\varphi^\star \in \Phi(E)$对于 Π在 $\Phi(E)$<style id="">一致最优，则称其为

$$P[\varphi^\star(\cdot,t)] = \max\{P[\varphi(\cdot,t)] \mid \varphi \in \Phi(E)\} \quad \text{for all } t \geq 0, \tag{6}$$

其中， $P[\varphi^\star]$ 是基于 Π的主观探测概率。Stone（1975）的例2.2.9表明，一致最优搜索计划并不总是存在。然而，以下是均匀最优搜索计划存在的充分条件（例如，参见 Stone 1975 的第2.4节）。

定理 2.1。

(i) 如果 Π 是离散可能区域 X上的目标分布函数， $d(x,0) = 0$，并且$d(x,\cdot)$ 对每个 $x \in X$ 都连续、凹且递增，那么存在一个对于 Π在 $\Phi(E)$内一致最优的搜索计划。

(ii) 如果 Π 是连续可能区域 X上的目标分布函数， $d(x,0) = 0$，并且 $d(x,\cdot)$ 对每个 $x \in X$都递增且右连续，那么存在一个对于 Π在 $\Phi(E)$内一致最优的搜索计划。

对于正则探测函数，我们可以得到一致最优搜索计划的半闭式表达（例如，Stone 1975 的第 2 章；Washburn 2014 的第 5 章）。

定理 2.2。 如果成本函数具有如下形式 $c(x,y) = y$ ，对所有 $y \geq 0$ 和 $x \in X$均成立，且探测函数为正则函数，则对于任意目标分布函数 Π ，均可按以下方式求得满足 $\Phi(E)$ 的一致最优搜索计划 $\varphi^\star$ 。定义

$$q_x(y) = \pi(x)\frac{\partial}{\partial y}d(x,y), \quad x \in X \text{ and } y \geq 0, \tag{7}$$

$$q_x^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \text{the inverse function of } q_x(y) \text{ evaluated at } \lambda, & \text{if } 0 < \lambda \leq q_x(0), \\ 0, & \text{if } \lambda > q_x(0), \end{cases} \tag{8}$$

and

$$Q(\lambda) = \begin{cases} \sum_{x \in X} q_x^{-1}(\lambda), & \text{in the discrete case,} \\ \int_X q_x^{-1}(\lambda)dx, & \text{in the continuous case.} \end{cases} \tag{9}$$

那么，对于 Π 在 $\Phi(E)$ 内，一致最优搜索计划由 $\varphi^\star(x,t) = q_x^{-1}(Q^{-1}(E(t)))$给出，其中 Q^{-1} 是 Q的反函数。

3 $P[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 与 $P_\#[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 相比

3.1 $P[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 对所有 $t \geq 0$ 都可能等于 $P_\#[\varphi^\star(\cdot,t)]$

3.1.1 离散情形

定理 3.1。设可能区域 X 是离散的，$x_0 \in X$，且目标分布在 X上均匀分布。如果探测函数 d 是正则且齐次的，那么，对于所有 $t \geq 0$，$P[\varphi^\star(\cdot,t)] = P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)]$，且 $\mu(\varphi^\star) = \mu^\#(\varphi^\star)$。

证明。不失一般性，假设 $X = \{1, 2, \ldots, m\}$。根据假设，目标密度函数为

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{for } x \in X, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 d 是齐次的，我们有 $\frac{\partial}{\partial y} d(x, y) = d'(y)$，并且

$$q_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{m} d'(y), & \text{if } x \in D, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} q_x^{-1}(\lambda) &= \begin{cases} \text{inverse of } d'(y) \text{ evaluated at } \frac{\lambda}{\pi(x)}, & \text{for } 0 < \lambda \leq q_x(0) \text{ and } x \in D, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{inverse of } d'(y) \text{ evaluated at } \lambda m, & \text{for } 0 < \lambda \leq \frac{d'(0)}{m} \text{ and } x \in D, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$Q(\lambda) = \sum_{x \in X} q_x^{-1}(\lambda) = m q_x^{-1}(\lambda).$$

因此，

$$Q^{-1}(K) = \left(q_x^{-1}\right)^{-1}(K/m) = q_x(K/m),$$

其中努力量为 $K \geq 0$。由此可得

$$\begin{aligned} \varphi^\star(x,t) &= q_x^{-1}(Q^{-1}(E(t))) \\ &= \begin{cases} q_x^{-1}(q_x(E(t)/m)), & \text{for } 0 < q_x(E(t)/m) \leq q_x(0) \text{ and } x \in D, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{E(t)}{m}, & x \in D, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

其中，最后一个等号是根据 $0 < q_x(E(t)/V_D) \le q_x(0)$ 始终成立这一事实得出的（因为对于每个 $x \in X$， $q_x(y) = \pi(x)d'(y)$ 关于 y 严格递减）。因此，

$$\begin{aligned} P[\varphi^\star(\cdot,t)] &= \sum_{x\in X} d(x,\varphi^\star(x,t))\pi(x) = \sum_{x\in X} d(\varphi^\star(x,t))\pi(x) = \sum_{x\in X} d(E(t)/m)\pi(x) \\ &= d(E(t)/m) = d(x_0,\varphi^\star(\cdot,t)) = P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)]. \end{aligned}$$

因此， $\mu(\varphi^\star) = \mu^\#(\varphi^\star)$。 □

注。 定理 3.1 不适用于探测函数 d 为非齐次的情况。为说明这一点，令 $m = 2$、 $x_0 = 1$，并令探测 d 为

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{if } x = 1, \\ 1 - e^{-2y}, & \text{if } x = 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是我们有

$$q_x^{-1}(\lambda) = \begin{cases} -\ln(2\lambda), & \text{if } x = 1, \\ -\frac{1}{2}\ln(\lambda), & \text{if } x = 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此， $Q(\lambda) = -\ln 2 - \frac{3}{2}\ln(\lambda)$，且 $Q^{-1}(K) = e^{-\frac{2}{3}(K+\ln 2)}$。这意味着

$$\varphi^\star(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{3}E(t) - \frac{1}{3}\ln 2, & \text{if } x = 1, \\ \frac{1}{3}E(t) + \frac{1}{3}\ln 2, & \text{if } x = 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} P[\varphi^\star(\cdot,t)] &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\left[\frac{2}{3}E(t) - \frac{1}{3}\ln 2\right]}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\left[\frac{1}{3}E(t) + \frac{1}{3}\ln 2\right]}\right) \\ &= 1 - 2^{-2/3}e^{-\frac{2}{3}E(t)} - 2^{-5/3}e^{-\frac{2}{3}E(t)}. \end{aligned}$$

But

$$P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)] = 1 - e^{-\left[\frac{2}{3}E(t) - \frac{1}{3}\ln 2\right]} = 1 - 2^{-2/3}e^{-\frac{2}{3}E(t)} > P[\varphi^\star(\cdot,t)] \quad \text{for all} \ge 0.$$

还可推出 $\mu(\varphi^\star) < \mu^\#(\varphi^\star)$。

例 1 （离散情形）。 设可能区域为 $X = \{1,2\}$，真实目标位置为单元 1，时刻 t 的搜索预算为 $E(t)$。设目标密度函数为 $\pi(1) = \pi(2) = 1/2$。假设探测函数 d 为 $d(x,y) = 1 - e^{-y}$, $y \ge 0$，对所有 $x \in X$ 均成立。由定理 2.2 可知，一致最优搜索计划 $\varphi^\star$ 存在，且其表达式为

$$\varphi^\star(1,t) = \varphi^\star(2,t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t = 0, \\ \frac{E(t)}{2}, & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

因此，主观探测概率等于

$$\begin{aligned} P[\varphi^\star(\cdot,t)] &= \pi(1)d(1,\varphi^\star(1,E(t))) + \pi(2)d(2,\varphi^\star(2,E(t))) \\ &= p\left(1-e^{-E(t)/2}\right) + (1-p)\left(1-e^{-E(t)/2}\right) \\ &= 1-e^{-E(t)/2}, \quad \text{for all } t>0. \end{aligned}$$

由于真实目标位置在单元 1，真实探测概率等于

$$\begin{aligned} P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)](p) &= d(1,\varphi^\star(1,E(t))) \\ &= 1-e^{-E(t)/2} \quad \text{for all } t>0. \end{aligned}$$

此外，我们有 $P[\varphi^\star(\cdot,\ 0)] = P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ 0)] = 0$，因为对于任意搜索计划（无论是否一致最优），当 $t = 0$ 时，其检测概率（真实或主观）均为 0。因此，$P[\varphi^\star(\cdot,\ t)] = P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。这也意味着 $\mu(\varphi^\star) = \mu^{\#}(\varphi^\star)$。

3.1.2 连续情形

定理 3.2。 假设 X 连续且有界，$x_0 \in X$，并且目标分布在 X 上均匀分布。如果检测函数 d 正则且齐次，那么对于所有 $t \geq 0$ 以及 $\mu(\varphi^\star) = \mu^{\#}(\varphi^\star)$，$P[\varphi^\star(\cdot,t)] = P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$。

证明。 根据假设，目标密度函数为

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{V_X}, & \text{for } x \in X, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，V_X 是 X 的体积，即 $V_X = \int_X 1dx$。由于 d 是齐次的，因此有 $\frac{\partial}{\partial y} d(x,\ y) = d'(y)$，并且

$$q_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{V_X} d'(y), & \text{if } x \in X, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} q_x^{-1}(\lambda) &= \begin{cases} \text{inverse of } d'(y) \text{ evaluated at } \frac{\lambda}{\pi(x)}, & \text{for } 0<\lambda \leq q_x(0) \text{ and } x \in X, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{inverse of } d'(y) \text{ evaluated at } \lambda V_X, & \text{for } 0<\lambda \leq \frac{d'(0)}{V_X} \text{ and } x \in X, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

and

$$Q(\lambda) = \int_X q_x^{-1}(\lambda)dx = V_X \times q_x^{-1}(\lambda).$$

因此，

$$Q^{-1}(K) = \left(q_x^{-1}\right)^{-1}(K/V_X) = q_x\left(K/V_X\right),\ K \geq 0,$$

and

$$\begin{aligned}\varphi^\star(x,t) &= q_x^{-1}(Q^{-1}(E(t)))\\ &= \begin{cases} q_x^{-1}\left(q_x\left(E(t)/V_X\right)\right), & \text{for } 0 < q_x\left(E(t)/V_X\right) \le q_x(0) \text{ and } x \in X,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\\ &= \begin{cases} \frac{E(t)}{V_X}, & x \in X,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的：对于每个 $x \in X$， $q_x(y) = \pi(x)d'(y)$ 关于 y 严格递减。因此，

$$\begin{aligned}P[\varphi^\star(\cdot,t)] &= \int_X d(x,\varphi^\star(x,t))\pi(x)dx = \int_X d(\varphi^\star(x,t))\pi(x)dx = \int_X d(E(t)/V_X)\pi(x)dx\\ &= d(E(t)/V_X) = d(x_0,\varphi^\star(\cdot,t)) = P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)].\end{aligned}$$

因此， $\mu(\varphi^\star) = \mu^{\#}(\varphi^\star)$。 □

注。此定理不能推广到 d 为非齐次的情况。为此，令 $X = (a,\ b)$，其中 $0 < a < x_0 < b$ 且 $\ln(b/a) \neq (b-a)/x_0$；令 $d(x,\ y) = 1 - e^{-xy},\ x,\ y > 0$；并令 Π 为区间 $(a,\ b)$ 上的均匀分布。则

$$q_x(y) = \begin{cases} \frac{x}{b-a}e^{-xy}, & \text{if } a < x < b,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

由此可得

$$q_x^{-1}(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left[\frac{\lambda(b-a)}{x}\right], & \text{for } 0 < \lambda \le 1/(b-a) \text{ and } x \in (a,b),\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and

$$\varphi^\star(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left[\frac{Q^{-1}(E(t))(b-a)}{x}\right], & \text{for } 0 < Q^{-1}(E(t)) \le 1/(b-a) \text{ and } x \in (a,b),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，

$$P[\varphi(\cdot,t)] = \int_X d(x,\varphi^\star(x,t))\pi(x)dx = 1 - (\ln b - \ln a)Q^{-1}(E(t)),$$

and

$$P^{\#}[\varphi(\cdot,t)] = d(x_0,\varphi^\star(x,t)) = 1 - \frac{(b-a)Q^{-1}(E(t))}{x_0}.$$

由此可知，当且仅当 $\ln(b/a) \neq \frac{b-a}{x_0}$ 时， $P[\varphi(\cdot,t)] \neq P^{\#}[\varphi(\cdot,t)]$。

例2。令 x_0 为原点 (0,0)，并令 $X = B_2(r) \subseteq \mathbb{R}^2$，其中 $B_2(r)$ 表示以 (0,0) 为圆心、半径为 $r > 0$ 的圆盘。假设对于所有 $x \in X$，探测函数为 $d(x, y) = 1 - e^{-y},\ y \geq 0$。考虑如下的目标分布：

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{for } x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么 $\frac{\partial}{\partial y} d(x,\ y) = d'(y) = e^{-y}$ 且

$$q_x(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{\pi r^2}, & \text{if } x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

因此，

$$q_x^{-1}(\lambda) = \begin{cases} -\ln(\lambda \pi r^2), & \text{for } 0 < \lambda \leq \frac{1}{\pi r^2} \text{ and } x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$Q(\lambda) = \int_X q_x^{-1}(\lambda) dx = \begin{cases} -\pi r^2 \ln(\lambda \pi r^2), & \text{for } 0 < \lambda \leq \frac{1}{\pi r^2} \text{ and } x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可得

$$Q^{-1}(K) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{K}{\pi r^2}}}{\pi r^2}, & \text{if } x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi^\star(x,t) &= q_x^{-1}(Q^{-1}(E(t))) \\ &= \begin{cases} \frac{E(t)}{\pi r^2}, & x \in B_2(r), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

也就是说，一致最优搜索计划将可用搜索 effort 均匀分布在目标分布的支集上。主观探测概率为

$$P[\varphi^\star(\cdot,t)] = \int_X d(x, \varphi^\star(x,t))\pi(x)dx = \int_{B_2(r)} \left(1 - e^{-\frac{E(t)}{\pi r^2}}\right) \frac{1}{\pi r^2} dx = 1 - e^{-\frac{E(t)}{\pi r^2}}, \quad \text{for all } t > 0.$$

真实探测概率等于

$$P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)] = d(x_0, \varphi^\star(x_0,t)) = 1 - e^{-\frac{E(t)}{\pi r^2}}, \quad \text{for all } t > 0.$$

由于 $P[\varphi^\star(\cdot,\ 0)] = P_\#[\varphi^\star(\cdot,\ 0)] = 0$ 始终成立，因此对于所有$t \geq 0$，都有 $P[\varphi^\star(\cdot,\ t)] = P^\#[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$。因此，$\mu(\varphi^\star) = \mu^\#(\varphi^\star)$。

3.2 $P[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$ 可能永远不等于 $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$ 对所有 $t>0$

例3（离散情形）。考虑 Hong（2025）中的例1，该例对 Stone（1975）第3页上的例子作了轻微推广。具体而言，令 $X=\{1,2\}$、$x_0=1$ 和 $E(t)>\ln[p/(1-p)]$ 对所有 $t>0$ 成立。我们取目标分布为 $\pi(1)=p$ 和 $\pi(2)=1-p$，其中 $1/2<p<1$。探测函数 d 为 $d(x,\ y)=1-e^{-y}$，$y\geq 0$ 对所有 $x\in X$ 成立。根据定理 2.2，一致最优搜索计划 $\varphi^\star$ 存在，且其形式为

$$\varphi^\star(1,t)=\begin{cases} E(t), & \text{if } 0<E(t)\leq \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),\\ \frac{1}{2}\left[E(t)+\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right], & \text{if } E(t)>\ln\left(\frac{p}{1-p}\right),\end{cases}$$

and

$$\varphi^\star(2,t)=\begin{cases} 0, & \text{if } 0<E(t)\leq \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),\\ \frac{1}{2}\left[E(t)-\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right], & \text{if } E(t)>\ln\left(\frac{p}{1-p}\right).\end{cases}$$

那么，主观探测概率为

$$\begin{aligned} P[\varphi^\star(\cdot,t)] &= \pi(1)d(1,\varphi^\star(1,E(t)))+\pi(2)d(2,\varphi^\star(2,E(t)))\\ &= p\left(1-e^{-\frac{1}{2}\left[E(t)+\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]}\right)+(1-p)\left(1-e^{-\frac{1}{2}\left[E(t)-\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]}\right)\\ &= 1-2\sqrt{p(1-p)}e^{-E(t)/2}.\end{aligned}$$

由于对所有 $t>0,\ x_0=1$ 和 $E(t)>\ln[p/(1-p)]$，真实探测概率为

$$\begin{aligned} P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)] &= d(1,\varphi^\star(1,E(t)))\\ &= 1-e^{-\frac{1}{2}\left[E(t)+\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]}\\ &= 1-e^{-E(t)/2}\sqrt{\frac{1}{p}-1}.\end{aligned}$$

不难验证，$P[\varphi^\star(\cdot,\ t)]\geq P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$ 当且仅当 $p\geq 1/2$，且等号成立当且仅当 $p=1/2$。由于 $p>1/2$，对所有 $t>0$，我们有 $P[\varphi^\star(\cdot,\ t)]\neq P\#[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$。

例4（连续情形）。考虑 Stone（1975年）例2.2.1和例2.2.7中的设定。假设搜索以恒定速度 v 进行，并使用扫掠宽度为 W的传感器。因此，$E(t)=Wvt$。假设可能区域为 $X=\mathbb{R}^2$，且真实目标位置 x_0 为 (0，0)。目标分布为二元正态分布，其密度函数如下：

$$\pi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}},\quad (x_1,x_2)\in X=\mathbb{R}^2, \tag{10}$$

其中 $\sigma>0$，探测函数为 $d(x,\ y)=1-e^{-y}$ 对所有 $x\in X$ 和 $y\geq 0$ 均成立。为方便起见，我们将使用极坐标。Stone（1975年）的例2.2.1表明，

存在一致最优计划，其形式为

$$\begin{aligned}\varphi^\star((r,\theta),t) &= \begin{cases}\left(\frac{E(t)}{\pi\sigma^2}\right)^{1/2}-\frac{r^2}{2\sigma^2}, & \text{if } r^2\le 2\sigma^2\left(\frac{E(t)}{\pi\sigma^2}\right)^{1/2},\\ 0, & \text{if } r^2>2\sigma^2\left(\frac{E(t)}{\pi\sigma^2}\right)^{1/2},\end{cases}\\ &= \begin{cases}\left[H\sqrt{t}-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right], & \text{if } 0\le r\le R_x(t),\\ 0, & \text{if } r>R_x(t),\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $R^2(t)=2\sigma^2H\sqrt{t}$ 和 $H=\sqrt{Wv/\pi\sigma^2}$。根据 Stone（1975年）的例2.2.7，主观探测概率为

$$P[\varphi^\star(\cdot,t)]=1-(1+H\sqrt{t})e^{-H\sqrt{t}},\quad \text{for all } t>0. \tag{11}$$

由于在极坐标中，$x_0=(0,0)$ 可写作 $(0,\theta)$，其中角度为 θ，因此真实探测概率等于

$$P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)] = 1-e^{-H\sqrt{t}},\quad \text{forall } t>0.$$

由此可得，对于所有 $t>0$，$P[\varphi^\star(\cdot,t)]\neq P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$。

3.3 可能存在一个搜索计划 $\varphi\neq\varphi^\star$，使得 $P[\varphi^\star(\cdot,t)]>P[\varphi(\cdot,t)]$，但对于所有 $t>0$，$P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]<P_{\#}[\varphi(\cdot,t)]$

例5（离散情形）。取与例3相同的设置，其中 $p=2/3$，但假设对于所有 $t>0$，$E(t)>\ln 4$；令 $\varphi^\star$ 为相应的一致最优搜索计划。考虑另一个搜索计划 φ:

$$\varphi(1,t)=\begin{cases}E(t)/2 & \text{if } 0<E(t)\le\ln 4,\\ \frac{1}{2}\left[E(t)+\ln 4\right], & \text{if } E(t)>\ln 4,\end{cases}$$

and

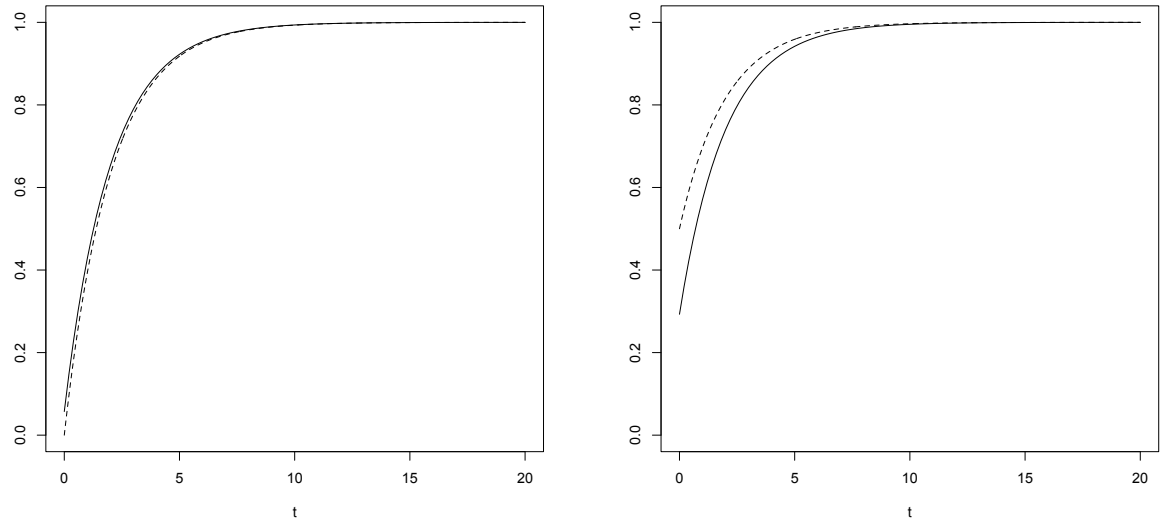
$$\varphi(2,t)=\begin{cases}E(t)/2, & \text{if } 0<E(t)\le\ln 4,\\ \frac{1}{2}\left[E(t)-\ln 4\right], & \text{if } E(t)>\ln 4.\end{cases}$$

那么 $\varphi\neq\varphi^\star$ 和 $\varphi\in\Phi(E)$。根据一致最优搜索计划的定义，对于所有 $t>0$，我们有 $P[\varphi^\star(\cdot,t)]>P[\varphi(\cdot,t)]$。事实上，很容易验证

$$P[\varphi^\star(\cdot,t)]=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-E(t)/2}>1-e^{-E(t)/2}=P[\varphi(\cdot,t)].$$

然而，

$$\begin{aligned}P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)] &= d(1,\varphi^\star(1,E(t)))=1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-E(t)/2}\\ &< 1-\frac{1}{2}e^{-E(t)/2}=d(1,\varphi(1,E(t)))=P^{\#}[\varphi(\cdot,t)].\end{aligned}$$



(a) 主观探测概率　　(b) 真实检测概率

图1：在例5中，当 $p = 2/3$ 和 $E(t) > \ln 4$对所有 $t > 0$均成立时， $\varphi^\star$ 和 φ 的真实及主观检测概率随 t变化的情况。在面板（a）和（b）中，实线和虚线分别表示 $\varphi^\star$ 和 φ的检测概率。

对于所有 $t > 0$。

图1的面板（a）绘出了当 $p = 2/3$和 $E(t) > \ln 4$时， $P[\varphi^\star(\cdot, t)]$（实线）和 $P[\varphi(\cdot, t)]$（虚线）随 t变化的情况；面板（b）则以同样方式绘出了 $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot, t)]$（实线）和 $P^{\#}[\varphi(\cdot, t)]$（虚线）。如我们所见，尽管 $P[\varphi^\star(\cdot, t)]$与$P[\varphi(\cdot, t)]$之间的差异可以忽略不计，但 $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot, t)]$与$P^{\#}[\varphi(\cdot, t)]$之间的差异却并非如此。

例 6 （连续情形）。 采用例4中相同的设定，其中 $\sigma = 2$ 和$W = v = 1$。那么目标密度函数为

$$\pi(x_1, x_2) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{8}}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

一致最优搜索计划 $\varphi^\star$ 由下式给出

$$\varphi^\star((r, \theta), t) = \begin{cases} \sqrt{t/4\pi} - \frac{r^2}{8}, & \text{if } r^2 \le 8\sqrt{t/4\pi}, \\ 0, & \text{if } r^2 > 8\sqrt{t/4\pi}. \end{cases}$$

此外，

$$\begin{aligned} P[\varphi^\star(\cdot, t)] &= 1 - (1 + \sqrt{t/4\pi}) e^{-\sqrt{t/4\pi}}, \\ P^{\#}[\varphi^\star(\cdot, t)] &= 1 - e^{-\sqrt{t/4\pi}}. \end{aligned}$$

现在考虑另一种搜索计划:

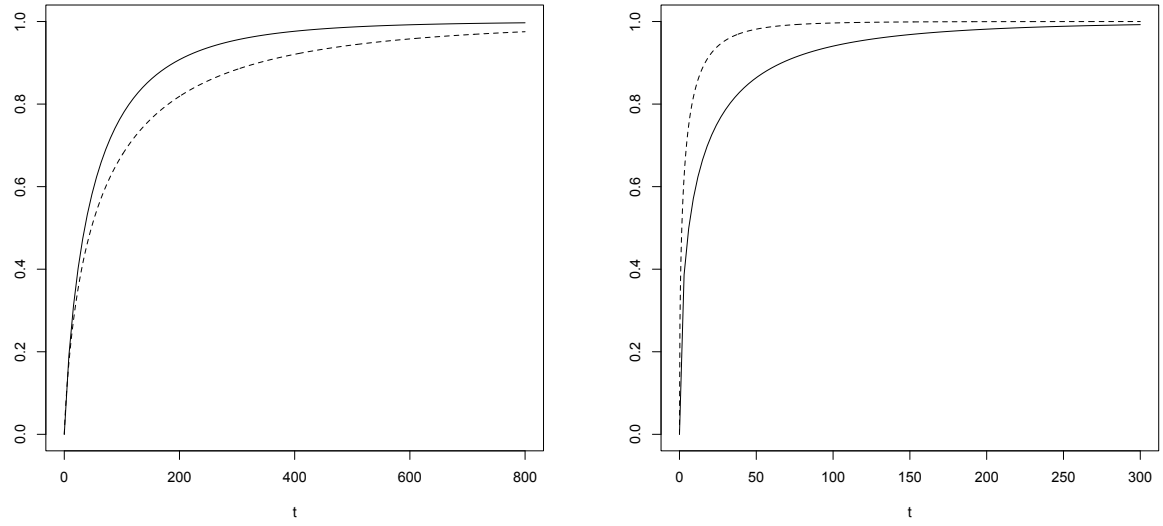
$$\varphi(((x_1,x_2),t) \;=\; \begin{cases} \sqrt{t/\pi}-\frac{r^2}{2}, & \text{if } r^2 \le 2\sqrt{t/\pi}, \\ 0, & \text{if } r^2 > 2\sqrt{t/\pi}. \end{cases}$$

Then

$$P^{\#}[\varphi(\cdot,t)] = 1-e^{-\sqrt{t/\pi}} > 1-e^{-\sqrt{t/4\pi}} = P^{\#}[\varphi^{\star}(\cdot,t)].$$

由于 $\varphi^{\star}$是一致最优搜索计划，因此对于所有 $t>0$，我们有 $P[\varphi^{\star}(\cdot,\ t)] > P[\varphi(\cdot,\ t)]$。事实上，我们有

$$\begin{aligned} P[\varphi^{\star}(\cdot,t)] &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(1-e^{-\varphi((r,\theta),t)})\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{r^2}{8}}r dr d\theta \\ &= 1-\frac{1}{4}\int_0^{\left(2\sqrt{t/\pi}\right)^{1/2}} e^{-\frac{r^2}{8}}e^{-\sqrt{t/\pi}+\frac{r^2}{8}}r dr - \frac{1}{4}\int_{\left(2\sqrt{t/\pi}\right)^{1/2}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{8}}r dr \\ &= 1-\frac{4}{3}e^{-\sqrt{t/\pi}/4}+\frac{1}{3}e^{-\sqrt{t/\pi}}. \end{aligned}$$



(a) 主观探测概率　　(b) 真实检测概率

图 2：在例 6 中，当 $\sigma=2$ 和 $W=v=1$时，$\varphi^{\star}$ 和 φ的真实检测概率与主观探测概率随 t变化的曲线。在每个图中，实线和虚线分别表示 $\varphi^{\star}$ 和 φ的检测概率。

图 2 展示了 $P[\varphi^{\star}(\cdot,\ t)]$、$P[\varphi(\cdot,\ t)]$、$P_{\#}[\varphi^{\star}(\cdot,\ t)]$,和 $P_{\#}[\varphi^{\star}(\cdot,\ t)]$ 随 t变化的曲线。在面板 (a) 和 (b) 中，$\varphi^{\star}$ 和 φ 的检测概率分别用实线和虚线表示。

实线和虚线。我们可以看到， $P[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$与 $P[\varphi(\cdot,\ t)]$之间的差异显著， $P_\#[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$与 $P^\#[\varphi(\cdot,\ t)]$之间的差异也同样显著。

4 不一致目标分布

实践中，分析人员常因信息相互矛盾而面临不一致目标分布。这种情况颇具挑战性，因为基于不同目标分布的（一致最优搜索计划的）主观探测概率无法相互比较。规避这一难题的一种常见做法如下：首先，依据不一致的信息生成复合目标分布（在统计学中，复合目标分布通常称为分层先验；例如，参见 Berger 2006年，第3.6节）；然后，依据该复合目标分布制定一致最优搜索计划。这种做法已在若干备受关注的搜索行动中取得成功（例如，Stone 1992年和 Stone等人 2014年）。除了这种做法之外，还有一种直观上合理的替代方案：首先，针对这些不一致的目标分布分别制定一致最优搜索计划；然后，基于这些不同的一致最优搜索计划创建复合搜索计划。根据一致最优搜索计划的定义，就主观探测概率而言，第一种做法始终优于第二种做法。然而，接下来的两个例子表明，就真实探测概率而言，第二种做法可能胜过第一种。

例7 （离散情形）。 假设 $X=\{1,2\}$, $x_0=1$, $d(x,y)=1-e^{-cy}, y\geq 0$ 对所有$x\in X$ 均成立，其中 $c>0$，且有两个不一致的目标密度函数 π_1 和 π_2:

$$\pi_1(1)=p_1 \text{ and } \pi_1(2)=1-p_1,$$

$$\pi_2(1)=p_2 \text{ and } \pi_2(2)=1-p_2,$$

其中 $0<p_2<1/2<p_1<1$。赋予 π_1 和 π_2 的权重分别为 w 和 $1-w$ ，其中 $1/2<w<1$。假设 $E(t)>\max\{\ln(p/(1-p)),\ln(p_1/(1-p_1)),\ln(p_2/(1-p_2))\}$，其中 $p=wp_1+(1-w)p_2$。

复合目标分布的密度函数为

$$\pi(1)=p \text{ and } \pi(2)=1-p.$$

根据与例3几乎相同的论证，我们知道

$$P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)]=1-e^{-cE(t)/2}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{c/2},$$

其中， $\varphi^\star$ 是一致最优搜索计划，它基于复合目标分布。对于 $i=1,\ 2$，令 $\varphi_i^\star$ 为基于 π_i的一致最优搜索计划。设

$$\varphi_c^\star=w\varphi_1^\star+(1-w)\varphi_2^\star.$$

显然， $\varphi_1^\star$ 和 $\varphi_2^\star$ 都属于 $\Phi_\Pi(E)$。因此， $\varphi_c^\star \in \Phi_\Pi(E)$。根据例3及对称性，我们有

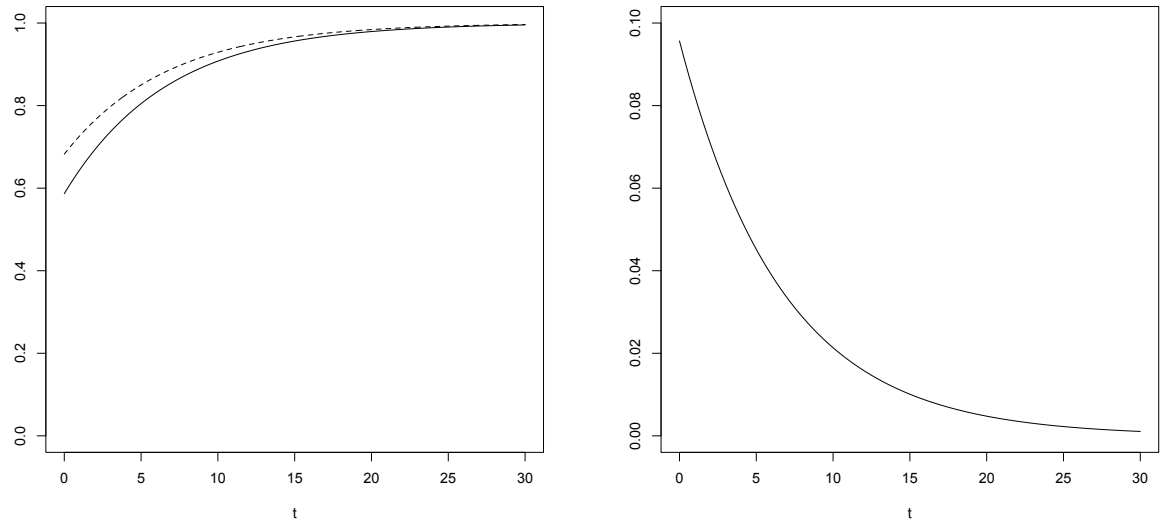
$$\begin{aligned}\varphi_c^\star(1,t) &= \frac{w}{2}\left[E(t)+\ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)\right]+\frac{1-w}{2}\left[E(t)-\ln\left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[E(t)+w\ln\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)-(1-w)\ln\left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)\right].\end{aligned}$$

由此可得

$$P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)] = 1-e^{-cE(t)/2}\left(\frac{1-p_1}{p_1}\right)^{cw/2}\left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)^{c(1-w)/2}.$$

现在取 $c=0.3$, $p_1=0.99$, $p_2=0.17$ 和 $w=0.75$。则 $p=0.75$, $\max\{\ln(p/(1-p)),\ \ln(p_1/(1-p_1)),\ \ln(p_2/(1-p_2))\}=4.59512$，并且

$$P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)] = 1-0.82345e^{-0.3E(t)} < 1-0.63287e^{-0.3E(t)} = P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)] \quad \text{for all } t>0.$$



(a) 真实检测概率　　(b) 真实检测概率之差

图3：在例7中，当 $E(t)=4.59512+t$, $c=0.3$, $p_1=0.99$, $p_2=0.17$ 和 $w=0.75$时， $\varphi^\star$ 与 $\varphi_c^\star$ 的真实检测概率对比。面板（a）中，实线和虚线分别表示 $P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$ 和 $P_{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,\ t)],$。面板（b）绘制了 $P_{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,\ t)]-P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,\ t)]$。

图3展示了在时间区间 $[0,30]$ 内，当 $E(t)=4.59512+t$, $c=0.3$, $p_1=0.99$, $p_2=0.17$ 和 $w=0.75$时， $P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 和 $P_{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]$ 的曲线。$P_{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 与 $P_{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]$ 之间的差异在开始时不可忽略，但随着 t增大，差异会逐渐缩小。

例8（连续情形）。考虑与例4相同的设置，但有两个不一致的目标密度函数 π_1 和 π_2:

$$\begin{aligned}\pi_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma_1^2}}, \quad (x_1,x_2)\in X=\mathbb{R}^2,\\ \pi_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_2^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma_2^2}}, \quad (x_1,x_2)\in X=\mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

其中 σ_1, $\sigma_2>0$。为构造复合目标分布，我们分别为 π_1 和 π_2 赋予权重 w 和 $1-w$。根据正态分布的封闭性，复合目标分布的密度函数等于

$$\pi(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}, \quad (x_1,x_2)\in X=\mathbb{R}^2,$$

其中 $\sigma^2=w\sigma_1^2+(1-w)\sigma_2^2$。由例4可知

$$P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]=1-e^{-\sqrt{\frac{E(t)}{\pi\sigma^2}}},$$

其中 $\varphi^\star$ 是基于 π的一致最优搜索计划。

令 $\varphi_i^\star$ 表示基于 π_i 、针对 $i=1$, 2 的一致最优搜索计划。那么复合搜索计划为

$$\varphi_c^\star=w\varphi_1^\star+(1-w)\varphi_2^\star.$$

由于 $x_0=(0,\ 0)$，由例4可知

$$\varphi_c^\star(x_0,t)=w\sqrt{\frac{E(t)}{\pi\sigma_1^2}}+(1-w)\sqrt{\frac{E(t)}{\pi\sigma_2^2}}=\left(\frac{w}{\sigma_1}+\frac{1-w}{\sigma_2}\right)\sqrt{\frac{E(t)}{\pi}}.$$

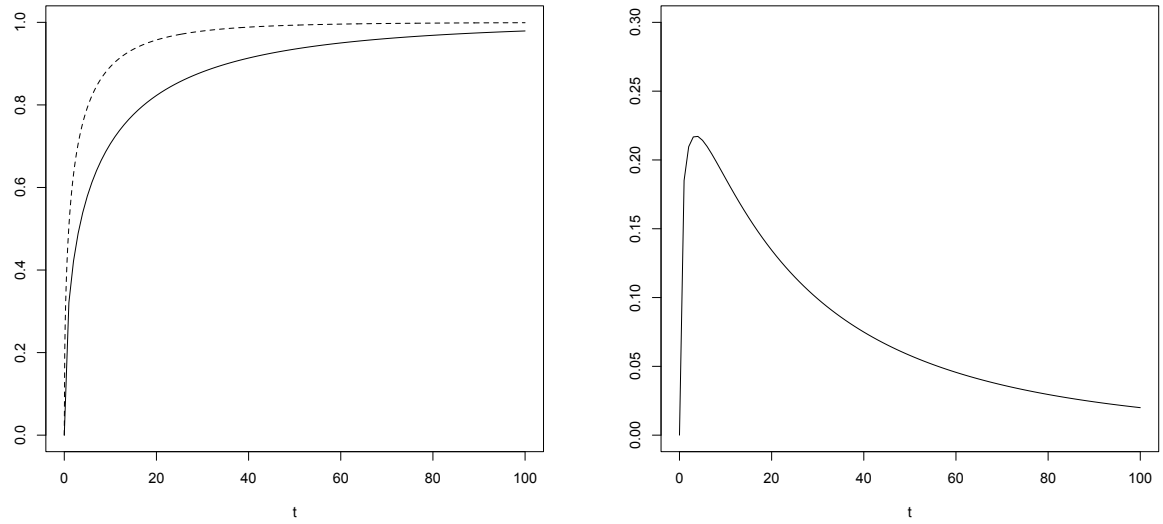
因此,

$$P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]=1-e^{-\left(\frac{w}{\sigma_1}+\frac{1-w}{\sigma_2}\right)\sqrt{\frac{E(t)}{\pi}}}.$$

现在取 $\sigma_1=2$、 $\sigma_2=0.5$ 和 $w=0.5$。则 $\sigma=1.4577$ 和

$$P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]=1-e^{-0.686\sqrt{\frac{E(t)}{\pi}}}<1-e^{-1.25\sqrt{\frac{E(t)}{\pi}}}=P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)] \quad \text{for all } t>0.$$

图4比较了 $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 和 $P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]$ 在 $E(t)=t$, $\sigma_1=2$, $\sigma_2=0.5$和$w=0.5$时的情况。显然， $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 与 $P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]$ 之间的差异显著。此外， $P^{\#}[\varphi^\star(\cdot,t)]$ 与 $P^{\#}[\varphi_c^\star(\cdot,t)]$ 之间的差异先增大，随后减小，最终趋近于0。



(a) 真实检测概率　　(b) 真实检测概率之差

图4：在$E(t) = t$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$和 $w = 0.5$的情况下，例8中 $\varphi^\star$ 和 $\varphi_c^\star$ 的真实检测概率比较。面板（a）中，实线和虚线分别表示 $P_\#[\varphi^\star(\cdot, t)]$和 $P_\#[\varphi_c^\star(\cdot, t)]$。面板（b）绘制了 $P_\#[\varphi_c^\star(\cdot, t)] - P_\#[\varphi^\star(\cdot, t)]$。

5 开放问题的不可解性

前两节展示了一致最优搜索计划的一些局限性。为了克服这些局限性，我们需要找到一种搜索计划，使其在搜索的每一时刻都能最大化真实探测概率。也就是说，找到一种搜索计划 $\psi^\star$ ，使得

$$P^\#[\psi^\star(\cdot, t)] = \max_{\varphi \in \Phi(E)} P^\#[\varphi(\cdot, t)] \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{12}$$

该问题最初由 Hong（2025）提出。解决这一问题将是分析者梦寐以求的成果。遗憾的是，这个问题无法解决。为说明这一点，考虑以下搜索计划

$$\psi(x, t) = \begin{cases} E(t), & \text{if } x = x_0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$P^\#[\psi(\cdot, t)] = \max_{\varphi \in \Phi(E)} P^\#[\varphi(\cdot, t)] \quad \text{for all } t \geq 0.$$

反过来，很容易看出，任何满足 (12) 的解 $\psi^\star$ 都必须等于 ψ。由于 ψ 在每一时刻 $t > 0$ 都将全部可用搜索 effort $E(t)$ 用于真实目标位置，因此构造它需要知道真实目标位置。但在搜索问题中，我们并不确定真实目标位置。因此，这个问题无解。

如果我们施加一项额外限制：搜索计划不得将全部努力用于单一位置，会怎样？如果我们能通过无限次重复目标丢失过程的实验，获得目标位置的客观分布，那么就可以将一致最优搜索计划的公式中的目标分布替换为这一客观分布，从而推导出一个搜索计划。该搜索计划将是 (12) 的解。然而，在任何现实情况下，例如潜艇或飞机失踪，同一事件都不会在相同条件下重演。因此，这个问题仍然无解。

6 一致最优搜索计划的一个极限性质

尽管一致最优搜索计划的真实检测概率与主观探测概率可能存在显著差异，但我们将看到，只要目标分布并非完全错误，当 t 趋于 ∞ 时，二者都会趋于 1。该结果的实际意义在于，对于持续时间较长的搜索，就真实检测概率而言，一致最优搜索计划将近似最优。事实上，Hong（2024）证明，如果 $\varphi^\star$ 是一致最优搜索计划，则 $\lim_{t\to\infty} P[\varphi^\star(\cdot,t)] = 1$。下一个定理表明，对于真实检测概率 $P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)]$，同样可以得到这一结论。

定理 6.1。 如果检测函数 d 是正则的，并且对于所有 $x \in X$都有 $\lim_{y\to\infty} d(x,y) = 1$，目标分布是连续的，其概率密度函数为 π，x_0 属于目标分布的支集，并且 $\lim_{t\to\infty} E(t) = \infty$，则 $\lim_{t\to\infty} P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)] = 1$。

证明。 根据定理 2.1，此情形下一致最优搜索计划 $\varphi^\star$ 存在。由于 x_0属于目标分布的支集，真实探测概率为

$$P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)] = d(x_0, \varphi^\star(x_0,t)) = d(x_0, q_{x_0}^{-1}(Q^{-1}(E(t)))).$$

由于 Q 在 $(0,\infty)$ 上连续，且在区间 $(0,\sup\{\lambda \mid Q(\lambda) > 0\})$ 上严格递减，因此Q^{-1} 在 $(0, q_x(0)]$ 上连续且严格递减。此外，我们知道 q_x^{-1}在 $(0,\infty)$ 上递减，并且对于所有满足 $\pi(x) > 0$ 的 $x \in X$，$\lim_{\lambda\to 0} q_x^{-1}(\lambda) = \infty$（例如，参见 Stone 1975 第 47 页）。因此，$\lim_{K\to\infty} q_x^{-1}(Q^{-1}(K)) = \infty$。由假设 $\lim_{t\to\infty} E(t) = \infty$可得

$$\lim_{t\to\infty} P^\#[\varphi^\star(\cdot,t)] = d\left(x_0, q_{x_0}^{-1}\left(Q^{-1}\left(\lim_{t\to\infty} E(t)\right)\right)\right) = 1.$$

□

注。 首先，容易看出，运用相同的论证，该定理对离散情形也成立。其次，假设 $\lim_{y\to\infty} d(x,y) = 1$ for all $x \in X$ 并非正则探测函数必然满足的条件。为说明这一点，考虑 $d(x,y) = c(1-e^{-y})$ for all $x \in X$ and $y \geq 0$ where $0 < c < 1$。最后，任意搜索计划在 $\Phi(E)$下的真实探测概率不一定会随着 $t \to \infty$趋于 1。为说明这一点，

考虑以下情形： $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0,0)$，探测函数为 $d(x,y) = 1 - e^{-y}$ for all $x \in X$ and $t \geq 0$, 而搜索计划 φ 由下式给出（采用极坐标）

$$\varphi((r,\theta),t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{for } 0 < r \leq R(t), \\ \frac{[Wvt - I(t)]}{\pi[\widetilde{R}^2(t) - R^2(t)]}, & R(t) < r \leq \widetilde{R}(t), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

搜索以速度 v 进行，使用扫描宽度为 W的传感器，并且 $R^2(t) = 2\sigma^2 H\sqrt{t}$, $H = \sqrt{Wv/\pi\sigma^2}$, $\widetilde{R}(t) = \sqrt{R^2(t) + (Wvt - I(t))/\pi}$，以及 $I(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R(t)} e^{-t} r dr d\theta$。于是我们得到

$$\lim_{t\to\infty} P^{\#}[\varphi(\cdot,t)] = \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-e^{-t}}\right) = 0.$$

7 总结

我们证明了一致最优搜索计划并非在真实探测概率方面最优。这一事实不应被视为一致最优搜索计划的缺陷，它只是揭示了搜索问题的挑战性。当从业者面对不一致目标分布时，可以根据这些相互冲突的目标分布得到不同的一致最优搜索计划。我们证明，就真实探测概率而言，基于复合目标分布的一致最优搜索计划，可能不如基于不同一致最优搜索计划的复合搜索计划。这两个事实促使我们寻求以下问题的解决方案：找到一个能在搜索的每个时刻使真实探测概率最大化的搜索计划。遗憾的是，根据我们的研究，这个问题无法解决。此外，我们证明，当搜索时间趋于无穷时，一致最优搜索计划的真实探测概率趋近于一。

致谢

感谢 Jeffrey R. Cares、Matthew Cosner 和 Michael W. Kopp 在美国海军研究生院举行的第92届MORS研讨会上与我进行了富有成效的讨论。这次讨论启发了本文的若干部分。

利益冲突

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

参考文献

Alpern, S., Chleboun, P., Katslkas, S. 和 Lin, K.Y.（2021）。均匀环境中的对抗性巡逻。《运筹学》70(1), 129-140。

Arkin, V.I.（1964）。搜索问题中的均匀最优策略。《概率论及其应用》9(4), 647–677。Berger, J.O.（2006）。《统计决策理论与贝叶斯分析》，第二版，施普林格：纽约。Bourque, FA.（2019）。使用不可区分搜索者求解移动目标搜索问题。《欧洲运筹学杂志》275, 45–52。Clarkson, J.、Glazebrook, K.D. 和 Lin, K.Y.（2020）。快还是慢：使用两种搜索模型在离散位置进行搜索。《运筹学》68(2), 552–571。Hong, L.（2024）。关于均匀最优搜索计划的若干性质。《军事运筹学》29(2), 95—106。Hong, L.（2025）。关于均匀最优搜索计划的真实探测概率。《运筹学会杂志》，即将发表，https://arxiv.org/abs/2311.18226。Koopman, B.O.（1946）。搜索与筛选。运筹评估组报告第*56*号（未分类）。海军分析中心，罗斯林，弗吉尼亚州。Koopman, B.O.（1956a）。搜索理论（一）：运动学基础。《运筹学》4, 324–346。Koopman, B.O.（1956b）。搜索理论（二）：目标探测。《运筹学》4, 503–531。Koopman, B.O.（1956a）。搜索理论（三）：搜索力量的最优分配。《运筹学》4, 613–626。Kratzke, T.M.、Stone, L.D. 和 Frost J.R.（2010）。搜救最优规划系统。《第*13*届国际信息融合会议论文集，英国爱丁堡，*2010*年*7*月》，26–29。Lidbetter, T.（2020）。面对不确定威胁时的搜救。《欧洲运筹学杂志》285, 1153–1160。Lin, K.Y.（2021）。周界最优巡逻。《运筹学》70(5), 2860–2866。Richardson, H.R. 和 Stone, L.D.（1971）。天蝎号水下搜索期间的运筹分析。《海军研究后勤季刊》18, 141–157。Richardson, H.R 和 Discenza, J.H.（1980）。美国海岸警卫队计算机辅助搜索规划系统（CASP）。《海军研究后勤季刊》27, 659–680。

Stone, L.D.（1973）。增量最优分配的完全最优性。《海军研究后勤季刊》20，419–430。Stone, L.D.（1975）。《最优搜索理论》。学术出版社：纽约。Stone, L.D.（1976）。带约束的可分泛函的增量优化与整体优化。《*SIAM* 控制与优化杂志》14，791–802。Stone, L.D.、Royset, J.O. 和 Washburn, A.R.（2016）。《移动目标的最优搜索》。施普林格：纽约。Stone, L.D. 和 Stanshine J.A.（1971）。使用持续接触调查进行最优搜索。《*SIAM* 应用数学杂志》20，241–263。Stone, L.D.（1992）。对 SS Central America 号的搜索：数学寻宝。《*Interfaces*》22：32–54。Stone, L.D.、Keller, C.M.、Kratzke, T.M. 和 Strumpfer, J.P.（2014）。搜索法航 AF 447 航班残骸。《统计科学》29：69–80。Artech House：波士顿，Vermeulen, J.F. 和 Brink, M.V.（2017）。对改变后的移动目标的搜索。《运筹学会杂志》56(5)，514–525。Washburn, A.（2014）。《搜索与探测》，第5版。Create Space：北卡罗来纳州。