arXiv:2601.00351v1 [math.KT] 1 Jan 2026

A_∞结构：有限群代数的 Tate-Hochschild 上同调的加法分解

XIULI BIAN、LONGFEI LI、YUMING LIU、TIANYUN WANG、ZHENGFANG WANG、GUODONG ZHO U

摘要。首先，对于有限群代数，我们通过将每个平面 n 叉树分解为局部二子节点和局部三子节点，基于加法分解为 Tate-Hochschild 上链复形提供一个计算框架 $\widehat{m}_n$ 。其次，我们给出 Tate-Hochschild 上链复形基于加法分解的全部 $\widehat{m}_2$ 公式。第三，我们给出 Hochschild 上链复形和 Hochschild 链复形在加法分解下的显式 A_∞乘法公式。最后，我们给出阿贝尔群情形下的 A_∞乘法公式。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 5 2.1. A_∞-代数的同伦传递定理 5 2.2. Hochschild（上）同调与 Tate-Hochschild（上）同调 7 2.2.1. 代数的 Hochschild（上）同调 7 2.2.2. Tate-Hochschild 上同调 8 2.3. 群代数的 Tate-Hochschild 上同调 9 2.4. 有限群的上同调与 Tate 上同调回顾 12 2.5. 复形层面上 Tate-Hochschild 上同调的加法分解 13 3.A_∞-结构 16 3.1. $\widehat{m}_n$算法 16 3.1.1. 局部二分支图上的算法 17 3.1.2. 局部三分支图上的算法 19 3.1.3. $\widehat{m}_n$ 20的计算 3.2. 关于 $\widehat{m}_2$ ($=\alpha_{1\pm,1\pm,\pm}$) 以及 $\beta_{1\pm,1\pm,\pm}$ 21 的计算 3.3. 复形层面上 Hochschild 上同调加法分解的 A_∞-结构 31 3.3.1.$\alpha_{i+,j+}$, 32 3.3.2.$\beta_{i+,j+}$, 33 3.3.3. 36的计算 3.4. 复形层面上 Hochschild 同调加法分解的 A_∞- 结构 37 3.4.1.$\beta_{i-,j-}$, 37 3.4.2.$\alpha_{i-,j-}$, 38 3.4.3. 40的计算 4. 阿贝尔群情形下的 A_∞-结构 40 4.1. 群 G 的 Tate-Hochschild 上同调的同伦传递定理 40 4.2. 阿贝尔群上的运算$\widehat{m_n}$ 42 4.3. 阿贝尔群的例子 43 4.3.1. $G=\mathbb{Z}_2$ 44

日期：2026年1月5日。

4.3.2. $G = \mathbb{Z}_4$4.3.3. 44
$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$参考文 46
献 48

1. 引言

对于结合代数 A，Hochschild 上同调群 $\mathrm{HH}^*(A, A)$ 的概念由 Hochschild 于 1945 [6] 年提出。该上同调群通过 Hochschild 上链复形 $C^*(A, A)$ 定义，其中$C^n(A, A)$ 是从 $A^{\otimes n}$ 到 A 的线性映射空间。1963 年，Gerstenhaber 在 [5]，研究结合代数的变形理论时，发现 $\mathrm{HH}^*(A, A)$ 具有一种极其丰富的代数结构，现称为 Gerstenhaber 代数。具体而言：

(i) $\mathrm{HH}^*(A, A)$ 在杯积下构成分次交换结合代数；(ii) $\mathrm{HH}^*(A, A)$ 带有一个次数为 -1 的分次李括号（现称为*Gerstenhaber*括号），从而具有分次李代数结构；(iii) Gerstenhaber括号与杯积通过分次*Leibniz*法则相容。

随后，基于一个模的完全分解，Tate 引入了 Tate上同调理论 [16]，该理论允许对正整数和负整数 n定义上同调群 H^n 。类似地，作为将 Hochschild上同调扩展到负部分的理论，*Tate-Hochschild*上同调$\widehat{\ }^*$群 $\widehat{\mathrm{HH}}(A, A)$ 最早由 Buchweitz 在 [3]中定义。在[17]，，Wang 构造了一个称为奇异*Hochschild*上链复形的新复形，用于计算代数A的 Tate-Hochschild上同调 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(A, A)$。利用该复形，研究表明 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(A, A)$ 具有 *Gerstenhaber* 代数结构，它扩展了 Hochschild上同调 $\mathrm{HH}^*(A, A)$ 中的 Gerstenhaber 结构。此外，在 [13]，Rivera 和 Wang 扩展了 Tradler 和 Menichi 的结果，证明当 A 为对称代数时，其 Tate-Hochschild上同调上的 Gerstenhaber 结构可以扩展为*Batalin–Vilkovisky*（*BV*）代数结构。这一结果进一步加深了高阶同调代数结构与代数对称性之间的联系。

在 [13], 从“弦拓扑”的视角出发，作者研究了有限维微分分次（dg）对称代数的 Tate-Hochschild 上同调。通过构造 Tate-Hochschild 上链复形$\mathcal{D}^*(A, A)$，他们实现了一种计算对称代数 A 的 Tate-Hochschild 上同调的方法。该复形具有以下结构：

- **负次数：** 对应于 Hochschild 链复形 $C_*(A, A)$，其中
$$\mathcal{D}^{-m-1}(A, A) = C_m(A, A), \quad (m \geq 0);$$
- **非负次数：** 对应于 Hochschild 上链复形 $C^*(A, A)$，其中
$$\mathcal{D}^m(A, A) = C^m(A, A), \quad (m \geq 0);$$
- **微分算子 τ：** 定义在次数 -1 上，形式为 $\tau\colon C_0(A, A) \to C^0(A, A)$，由 Casimir元 $\sum_i e_i \otimes f_i$ 诱导，其中
$$a \mapsto \sum_i e_i a f_i.$$

1960年，Stasheff 引入了 A_∞-代数的概念。近年来，A_∞ 结构已应用于表示论。例如，Keller [7] 利用 A_∞ 结构从同调群重构复形。受 Deligne 猜想以及 Kontsevich 关于变形量子化的工作启发 [8]，，研究重点已从上同调群本身转向上同调群复形中的高阶结构。一个有趣的问题是如何找到非平凡的 A_∞-结构。文献 [12] 指出，

构造同伦变形收缩是获得 A_∞-结构的一种方法。给定一个同伦变形收缩，可以利用同伦传递定理将普通乘法提升为 A_∞-乘法。例如，文献 [13] 证明，复形 $\mathcal{D}^*(A,\ A)$ 具有一个 A_∞-代数结构$(m_1=\partial,\ m_2,\ m_3,\ \ldots)$，其中 $m_i=0$对 $i>3$成立。

更具体地说，对于有限群 G，域 k 上的群代数 kG 是对称代数的典型例子，也是本文的主要研究对象。 $\mathcal{D}^*$ $(kG,\ kG)$上的杯积公式由 [17], 给出，而关于 m_3 的公式后来由 Liu、Wang 和 Zhou 在 [10]中得到。构造非平凡 A_∞-结构的一种具体方法，是利用群代数的 Hochschild上同调代数的加法分解。 [14] 中已证明， kG 的 Hochschild 上同调环具有如下加法分解:

$$\mathrm{HH}^*(kG,kG)\cong\bigoplus_{x\in X}\mathrm{H}^*(C_G(x),k),$$

其中， X 是 G的共轭类的一组完备代表元， $C_G(x)$表示 $x\in G$的中心化子子群。此外，在 [11] 中，Liu 和 Zhou 将上述分解提升到了复形层面，如下所示:

$$s^*\circlearrowright\ C^*(kG,kG)\underset{\rho^*}{\overset{\iota^*}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{x\in G}C^*(G,k).$$

此外， [11] 证明了 Tate-Hochschild 上同调群 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(kG,\ kG)$ 作为一个 k-线性空间，具有如下加法分解:

$$\widehat{\mathrm{HH}}^*(kG,kG)\cong\bigoplus_{x\in X}\widehat{\mathrm{H}}^*(C_G(x),k),$$

其中 $\widehat{\mathrm{H}}^*(C_G(x),\ k)$ 表示中心化子子群 $C_G(x)$ 的 Tate上同调群。在[10], Liu、Wang 和 Zhou 使用群代数的 Tate-Hochschild 上链复形 $\mathcal{D}^*(kG,\ kG)$ 以及有限群的 Tate 上链$\widehat{\ }$复形 $C^*(C_G(x),\ k)$，在复形层面明确给出了群代数的 Tate-Hochschild上同调的加法分解；它可以实现为如下同伦变形收缩:

$$\hat{s}\circlearrowright\ \mathcal{D}^*(kG,kG)\underset{\hat{\iota^*}}{\overset{\hat{\rho^*}}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{x\in X}\widehat{C}^*\left(C_G(x),k\right).$$

这种在复形层面上的同伦变形收缩提供了非平凡 A_∞-代数结构的实例。在 2020 [9], Li 使用类似的同伦变形收缩来给出 Hochschild上链复形的加法分解:

$$s^*\circlearrowright\ C^*(kG,kG)\underset{\rho^*}{\overset{\iota^*}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{x\in G}C^*(G,k),$$

并通过将平面二叉树归类为两种局部变换类型（α型和 β型），建立了右侧 A_∞乘法的公式。也就是说，我们有以下结果:

kG 的Hochschild上同调代数加法分解中 A_∞乘法公式的展开，由以下等式（至多差一个符号）确定：令

$$\widehat{\varphi}_i:C_G(x)^{\times n_i}\to k,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

则乘法 m_n 由下式给出:

$$\begin{aligned}&m_n(\widehat{\varphi}_1,\ldots,\widehat{\varphi}_n)(g_{1,1},\ldots,g_{1,i_1},g_{2,1},\ldots,g_{2,i_2},\ldots,g_{n,1},\ldots,g_{n,i_n})\\&=\sum\pm\widehat{\varphi}_1(h_{1,1},\ldots,h_{1,j_1})\widehat{\varphi}_2(h_{2,1},\ldots,h_{2,j_2})\cdots\widehat{\varphi}_n(h_{n,1},\ldots,h_{n,j_n}),\end{aligned}$$

其中，元组 $(h_{1,\ 1},\ \ldots\ldots,\ h_{1,\ j_1})$、$(h_{2,\ 1},\ \ldots\ldots,\ h_{2,\ j_2})$……、$(h_{n,\ 1},\ \ldots\ldots,\ h_{n,\ j_n})$ 由平面二叉树的 α 型和 β 型变换确定。

在实际计算中，我们发现，[9]中平面二叉树局部分解的分类并未涵盖 A_∞-代数计算中出现的所有情形。因此，在现有平面二叉树局部分解研究的基础上，我们进一步细化平面二叉树的 α-型和 β-型变换，从而形成了更加具体且便于操作的计算流程。

此外，基于群代数的 Tate-Hochschild 上同调复形在复形层面上的如下同伦形变收缩：

$$\hat{s}\circlearrowright\ \mathcal{D}^*(kG,kG)\underset{\hat{\iota^*}}{\overset{\hat{\rho^*}}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{x\in X}\widehat{C}^*\left(C_G(x),k\right),$$

我们可以对平面 n元树进行局部分解，以计算群代数 kG 在加法分解下的 Hochschild 上同调代数和 Tate-Hochschild 上同调代数的 A_∞乘法公式。

本文的结构如下。

在第 2 节中，我们回顾与 A_∞-代数和同伦传递定理相关的基本定义、Tate-Hochschild 上同调及其链复形的定义、有限群的 Tate 上同调复形，以及 Tate-Hochschild 上同调复形的加法分解和相应的同伦变形收缩。

在第3.1节中，我们介绍一种在复形层面计算 Tate-Hochschild 上同调加法分解上的运算 $\widehat{m}_n$ 的方法。其核心思想是对每个 PT_n进行局部分解，将其拆分为局部二分支图和局部三分支图。对于二分支图，相应的局部算法为$\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$、$\beta_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$；对于三分支图，相应的局部算法为$\alpha_{i+,\ j-,\ k+,\ +}$、$\alpha_{i-,\ j+,\ k-,\ -}$、$\beta_{i+,\ j-,\ k+,\ +}$、$\beta_{i-,\ j+,\ k-,\ -}$，其中 $i,\ j\in\{0,\ 1\}$。通过这种局部分析，我们得到了 $\widehat{m}_n$ 的显式计算过程。换言之，任意平面 n元树都可以分解为算法$\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$、$\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}$、$\beta_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$以及$\beta_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}$的复合。相应的算法流程图见图1。

在第3.2节中，通过对运算$\alpha_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$ 和$\beta_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$进行显式计算，我们得到了杯积 $\widehat{m}_2$ 在 Tate-Hochschild上同调加法分解的复形层面上的显式公式，见定理3.3。与 [11, 10], 中给出的公式相比，我们的结果还包含了 $\widehat{m}_2$与 $\mathcal{D}^{\geq 0}(kG,\ kG)$ 和 $\mathcal{D}^{<0}(kG,\ kG)$之间的杯积公式，而早期的这些研究并未涉及这一公式。

在第3.3节中，通过对对应于局部二分支图$\alpha_{i+,\ j+,\ +}$ 和$\beta_{i+,\ j+,\ +}$的算法进行显式计算，我们定义了运算$\alpha_{i+,\ j+,\ +}$ 和$\beta_{i+,\ j+,\ +}$。这使我们能够推导出 $\widehat{m}_n$ 在 Hochschild上同调加法分解的复形层面上的所有表达式，如定理3.4所述。我们还指出，这一结果为$\widehat{m}_n$ 中给出的 [9]公式提供了一个经过细化和修正的版本。

在第 3.4 节中，通过对与局部二分支图对应的算法进行显式计算 $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$ 和 $\beta_{i-,\ j-,\ -}$，我们定义了运算 $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$ 和 $\beta_{i-,\ j-,\ -}$。据此，我们可以在复形层面推导出关于 Hochschild 同调加法分解的所有 $\widehat{m}_n$ 表达式，如定理 3.7所述。

在第 4 节中，我们进一步将所讨论的有限群 G 特化为 G 为阿贝尔群的情形。基于 [10, 推论 4.11]，的结果，我们得到了 A_∞-运算 $\widehat{m}_n$ 在有限阿贝尔群 G 的 Tate-Hochschild 上同调加法分解上的复形层面显式表达式，如定理 4.2所述。最后，我们对若干阿贝尔群的例子显式计算了 A_∞-代数结构。

约定： k 表示一个固定的域，本文讨论的所有代数结构都定义在 k上。也就是说，向量空间是一个 k-向量空间，代数是一个 k-代数，依此类推。我们用 $\otimes$ 表示 $\otimes_k$，即在域 k上的张量积。

2. 预备知识

2.1. A_∞代数的同伦传递定理。

若 [12]， V 是一个与微分分次（dg）代数同伦等价的链复形 A，那么 A 上的 dg 代数结构可以转移为 A_∞上的 - 代数结构 V。更一般地， A_∞上的 - 代数结构 A 可以转移为 A_∞上的 - 代数结构 V。现在我们将详细回顾上述内容。

定义 2.1. （[15]）一个 A_∞**-代数**上的 k 是一个 $\mathbb{Z}$分次向量空间 $A = \bigoplus A_p$，配备分次映射$p\in\mathbb{Z}$

$$m_n : A^{\otimes n} \to A \quad (n \geq 1),$$

次数为 $2-n$，满足以下恒等式：

（1）对于 $n = 1$,

$$m_1 m_1 = 0,$$

因此，$(A,\ m_1)$ 是一个上链复形。

(2) 对于 $n = 2$,

$$m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes 1_A + 1_A \otimes m_1),$$

这意味着 m_1 作为 m_2 的导子作用。

(3) 对于 $n = 3$,

$$m_2(1_A \otimes m_2 - m_2 \otimes 1_A) = m_1 m_3 + m_3(m_1 \otimes 1_A \otimes 1_A + 1_A \otimes m_1 \otimes 1_A + 1_A \otimes 1_A \otimes m_1),$$

这表明 m_2 在 m_3 提供的同伦意义下是结合的。

(4) 更一般地，对于每个 $n \geq 1$,

$$\sum_{\substack{n = r+s+t \\ r,t \geq 0, s \geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

特别地，若 $m_n = 0$ 且 $n \geq 3$，则 $(A,\ m_1,\ m_2)$ 就是一个微分分次代数。

定义 2.2. 给定两个链复形 $(W,\ d_W)$ 和 $(V,\ d_V)$，以及两个链映射 p：$W \to V$和i：$V \to W$，若满足以下同伦变形收缩图表：

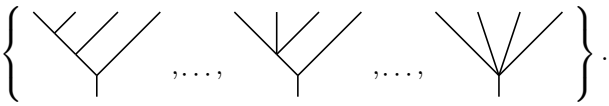
$$h \circlearrowright (W, d_W) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (V, d_V)$$

也就是说，若满足恒等式 $1_W - ip = d_W h + h d_W$ 和 $1_V = pi$，则称 V为 W的**同伦形变收缩核**。特别地，若进一步有 $h^2 = 0$、 $hi = 0$和 $ph = 0$，则称 V为 W的**强同伦形变收缩核**。

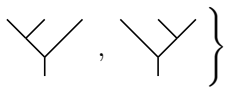
我们指出，上述定义还有一些相关记号，例如参见 [4, 定义 1.1]。在本文以下讨论中，除非另有说明，我们考虑的所有同伦形变收缩核都是强同伦形变收缩核。 在介绍同伦传递定理之前，我们先给出有关平面有根树的相关定义和记号。

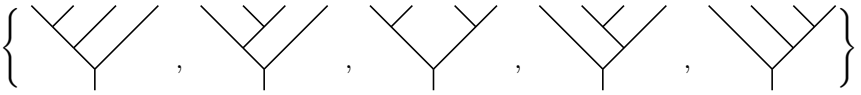
有根树是一个没有圈的无向连通图。精确定义见 [12]。我们用 PT_n 表示具有 n 个叶子的平面树集合。例如：

$PT_1 := \{|\},\ PT_2 :=$  $,\ PT_3 :=$ 

$PT_4 :=$ .

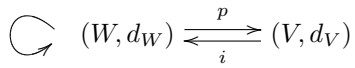
特别地，每个顶点至多有两个叶子的有根树称为**平面二叉树**，简称为 PBT。例如：

$PBT_1 := \{|\},\ PBT_2 :=$ , $PBT_3 :=$ ,

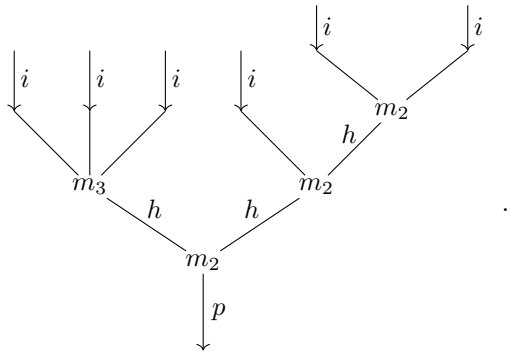
$PBT_4 :=$ .

A_∞ 结构的同伦传递定理表述如下：

定理 2. **3.** ([12]) 设 (W, d_W) 是一个 A_∞-代数，并且有如下同伦收缩：



若满足 $1_W - ip = d_W h + h d_W$ 和 $1_V = pi$，则 (V, d_V) 继承了一个 A_∞-代数结构 $\{m'_n\}_{n\geq 1}$，它来自 (W, d_W)。具体而言，

$m'_n = \sum_{\mathrm{PT_n}} \pm$ .

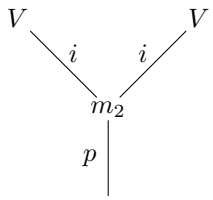
事实上，对于任意 $t \in PT_n$， n-元运算 m'_t 是通过在叶子上放置 i 、在具有 x 个叶子的顶点上放置 m_x 、在内部边上放置 h ，并在根上放置 p 得到的。求和遍历 PT_n 中的每一棵平面树。

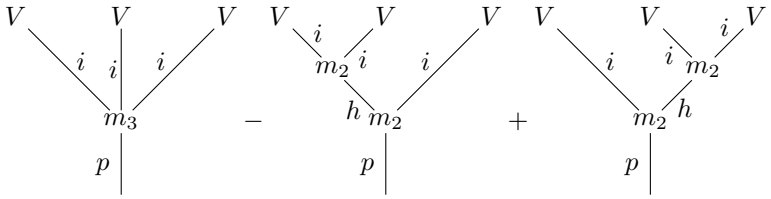
特别地，如果 (W, d_W) 是一个微分分次结合代数，那么

$$m'_n = \sum_{t \in PBT_n} \pm m_t,$$

其中，每个 m_t 都是通过在树的叶子上放置 i 、在顶点上放置 m_2 、在内部边上放置 h ，并在根上放置 p 来定义的。

例2.4. m'_2 和 m'_3的公式：

$m_2' =$  $= pm_2(i,\ i),$

$m_3' =$ 

$= pm_3(i,\ i,\ i) - pm_2(hm_2(i,i)\ i) + pm_2(i, hm_2(i,i)).$

2.2. **Hochschild（上）同调与 Tate-Hochschild（上）同调。**

2.2.1. 代数的 *Hochschild*（上）同调。

Hochschild 在 [6]中引入了结合代数的上同调理论。给定一个 k-代数 A，其 Hochschild 上同调群定义为

$$\mathrm{HH}^n(A,A) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,A),$$

其 Hochschild 同调群定义为

$$\mathrm{HH}_n(A,A) \cong \mathrm{Tor}^{A^e}_n(A,A),$$

其中 $n \geq 0$ 和 $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ 是 A 的包络代数。存在一个 A 作为 A^e-模的投射分解，称为**标准化Bar分解** $\mathrm{Bar}_*(A)$，其定义为

$$\mathrm{Bar}_{-1} = A,$$

$$\mathrm{Bar}_n(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A, \quad n \geq 1,$$

¯其中 $A = A/(k \cdot 1_A)$，也就是说，

$$\mathrm{Bar}_*(A)\colon \cdots \to A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A \xrightarrow{d_n} A \otimes \bar{A}^{\otimes n-1} \otimes A \to \cdots \to A \otimes \bar{A} \otimes A \xrightarrow{d_1} A^{\otimes 2} \xrightarrow{d_0} A,$$

其中映射 $d_0\colon A \otimes A \to A$ 是 A 的乘法，并且对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_n(a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes a_{n+1}) &= a_0a_1 \otimes \overline{a_2} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes a_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{i-1}} \otimes \overline{a_ia_{i+1}} \otimes \overline{a_{i+2}} \otimes \cdots \otimes \overline{a_n} \otimes a_{n+1} \\ &+ (-1)^n a_0 \otimes \overline{a_1} \otimes \cdots \otimes \overline{a_{n-1}} \otimes a_na_{n+1}. \end{aligned}$$

¯为方便起见，当 $n = 0$、$A^n := k$ 时，我们记 $a_{i,\cdots,j} := a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j (i \leq j)$。

该**Hochschild上链复形**是 $C^*(A,\ A) = \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathrm{Bar}_*(A)\ A)$。注意到

$$C^n(A,A) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A, A) \cong \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes n}, A)$$

for 每个 $n \geq 1$。我们还将 $C^0(A,\ A)$ 与 A 视为相同。因此， $C^*(A,\ A)$ 具有以下形式：

$$C^*(A,A)\colon A \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}(\bar{A}, A) \to \cdots \to \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes n}, A) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes (n+1)}, A) \to \cdots.$$

不难给出 δ^*, δ^0 的定义： $A \to \mathrm{Hom}(\bar{A}, A)$ 定义如下：

$$\delta^0(x)(\bar{a}) = ax - xa,\ x \in A,\ \bar{a} \in \bar{A}.$$

对于任意 $f\in \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes n}, A)$ $n\geq 1$，映射 $\delta^n(f)$ 定义为将 $a_{1,n+1}$ 发送到

$$\delta^n(f)(\overline{a_{1,n+1}}) = a_1\cdot f(\overline{a_{2,n+1}}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(\overline{a_{1,i-1}}\otimes \overline{a_i a_{i+1}}\otimes \overline{a_{i+1,n+1}}) + (-1)^{n+1} f(\overline{a_{1,n}})a_{n+1}.$$

回忆一下，**Hochschild链复形**$(C_*(A,\ A)\ \partial_*)$定义如下：

$$C_n(A,A) = A\otimes_{A^e}\mathrm{Bar}_n(A)\simeq A\otimes \bar{A}^{\otimes n}, n\geq 0,$$

并且，对于 $n\geq 2$，微分 ∂_n：$A\otimes\bar{A}^{\otimes n}\to A\otimes\bar{A}^{\otimes n-1}$ 将 $a_0\otimes a_{1,\ n}$ 映射为

$$a_0a_1\otimes\overline{a_{2,n}} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_0\otimes\overline{a_{1,i-1}}\otimes\overline{a_ia_{i+1}}\otimes\overline{a_{i+2,n}} + (-1)^n a_n a_0\otimes\overline{a_{1,n-1}},$$

且在次数 $n=1$，微分 ∂_1：$A\otimes A\to A$ 定义为

$$\partial_1(a_0\otimes\overline{a_1}) = a_0a_1 - a_1a_0(\text{ for } a_0\in A \text{ and } \overline{a_1}\in\bar{A}\ ).$$

2.2.2. *Tate-Hochschild*上同调。

根据 [3], 本节首先回顾 n-次 Tate–Hochschild上同调群$\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,A)$ 自内射代数 A的定义。

命题 2.5。 [3, 推论 6.4。1] 设 A 为一个自内射代数。将 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e)$ 记为 $A^\vee$。则

(i) 对所有 $n>0$, $\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,A)\simeq\mathrm{HH}^n(A,A)$；(ii) 对所有 $n<-1$, $\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,A)\simeq\mathrm{HH}_{-n-1}(A^\vee,A)$；(iii) $\widehat{\mathrm{HH}}^0(A,A)\simeq\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A)$, $\widehat{\mathrm{HH}}_{-1}(A,A)\simeq\mathrm{Hom}_{A^e}(A,\Omega_{A^e}(A))$, 并且存在一个正合序列

$$0\to\widehat{\mathrm{HH}}^{-1}(A,A)\to A^\vee\otimes_{A^e}A\xrightarrow{\sigma}\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A)\to\widehat{\mathrm{HH}}^0(A,A)\to 0,$$

其中，σ 由 $\sigma(f\otimes a)(a') = f(a')\cdot a$ 给出，其中 $a,a'\in A$ 以及 $f\in A^\vee$。这里，$\mathrm{Hom}_{A^e}(-,-)$ 表示稳定范畴 A^e-模中的同态空间，而 Ω_{A^e} 是 A^e-模上的覆叠函子。

现在我们将 A 特化为对称代数。

定义 2.6. 有限维 k-代数 A 若存在对称非退化结合双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：$A\times A\to k,$，或等价地，存在 $A\simeq A^* = \mathrm{Hom}_k(A,k)$ 作为 A-A-双模，则称其为对称代数。

注意，我们可以如下选取一个 A-A-双模同构（记为 t）： $t(a) = \langle a,\cdot\rangle$ 对于 $a\in A$。此同构 t 诱导出以下同构

$$t\otimes\mathrm{id}: A\otimes_k A\to A^*\otimes_k A\simeq\mathrm{End}_k(A)$$
$$a\otimes b\ \mapsto t(a)\otimes b\ \mapsto (x\mapsto t(a)(x)b).$$

按照 Broué 的说法（见 [1]），我们称元素 $(t\otimes\mathrm{id})^{-1}(\mathrm{id}) := \sum_i e_i\otimes f_i\in A\otimes_k A$ 为 A 的 Casimir元。由 [1, 命题 3.3] 可知，Casimir元诱导出一个 A-A-双模同构

$$A\simeq A^\vee = \mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e),\quad a\mapsto\sum_i e_ia\otimes f_i,$$

其中我们将 $\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A^e)$ 视为

$$(A\otimes A)^A := \left\{\sum_i a_i\otimes b_i\in A\otimes_k A \middle| \sum_i aa_i\otimes b_i = \sum_i a_i\otimes b_ia \text{ for any } a\in A\right\}.$$

根据命题 2.5，我们现在给出 n 阶 Tate-Hochschild 上同调群$\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,A)$ 在 A 为对称代数时的描述。

(i) $\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,\ A)\simeq\mathrm{HH}^n(A,\ A)$ 对所有 $n>0$ 均成立,
(ii) $\widehat{\mathrm{HH}}^n(A,\ A)\simeq\mathrm{HH}_{-n-1}(A,\ A)$ 对所有 $n<-1$ 均成立,

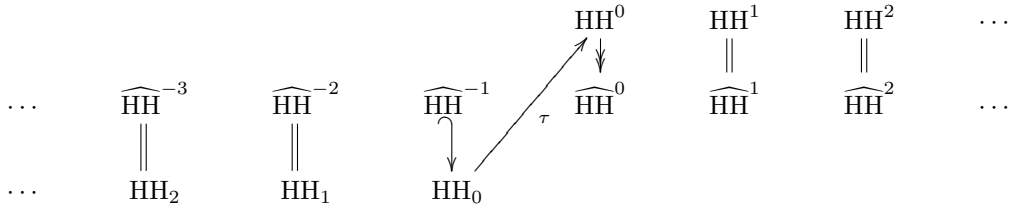
(iii) $\mathrm{HH}_0(A,\ A) = A/[A,A]$，$\mathrm{HH}^0(A,\ A) = Z(A)$，并且存在一个正合序列

$$0 \to \widehat{\mathrm{HH}}^{-1}(A,A) \to \mathrm{HH}_0(A,A) \xrightarrow{\tau} \mathrm{HH}^0(A,A) \to \widehat{\mathrm{HH}}^{0}(A,A) \to 0,$$

其中，映射 τ 定义如下：

$$\tau : \mathrm{HH}_0(A,A) = A/[A,A] \to \mathrm{HH}^0(A,A) = Z(A), \quad a + [A,A] \mapsto \sum_i e_i a f_i.$$

因此，$\widehat{\mathrm{HH}}^*(A,\ A)$ 是 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(A,\ A)$ 与 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_*(A,\ A)$ 的一种“组合”。我们可以通过下图概括上述结果：



在 [17, 第 6 节中，4], 作者构造了一个复形（称为 **Tate-Hochschild 上链复形**）

$$\mathcal{D}^*(A,A) := \left(\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(A,A) \xrightarrow{\partial_1} C_0(A,A) \xrightarrow{\tau} C^0(A,A) \xrightarrow{\delta^0} C^1(A,A) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \right),$$

以计算对称代数 A 的 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(A,\ A)$，其中，$\partial_*$（分别为 δ^*）是 $C_*(A,\ A)$（分别为 $C^*(A,\ A)$）的微分，而 $\tau(x) = \sum_i e_i x f_i$。这里，$\sum_i (e_i \otimes f_i)$ 是 Casimir 元。

2.3. 群代数的 Tate-Hochschild 上同调。

本节内容完全基于 [10, 第 2] 节；更多细节请参阅该文献。

设 k 为一个域，G 为一个有限群，kG 为其群代数。回忆一下，kG 是一个对称代数，其对称化形式为：

$$\langle g,h\rangle = 1, \text{ if } gh = 1 \text{ and } \langle g,h\rangle = 0 \text{ otherwise}$$

对所有 $g,\ h \in G$。特别地，$\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes g$ 是 kG的一个 Casimir元。因此，根据第 2.2.2 节，我们有 Tate-Hochschild上同调 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(kG,\ kG)$ 是 Hochschild上同调 $\mathrm{HH}^*(kG,\ kG)$ 与 Hochschild同调 $\mathrm{HH}_*(kG,\ kG)$的“组合”。

为方便起见，我们先引入以下记号：

对于集合 X，我们用 $k[X]$ 表示由 X 中元素张成的 k-向量空间。特别地，我们有 $kG = k[G]$。注意，kG 可视为 k-向量空间 $k[G]$，其中 $G = G \setminus \{1\}$。当 $n = 0$ 时，乘积 $G^{\times n}$ 理解为单点集，并令 $k[G^{\times n}] := k$。为简便起见，我们将 $(g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n) \in G^{\times n}$ 记作 $(g_{1,\overline{n}})$。

群代数 kG 的标准化Bar分解（$\mathrm{Bar}_*(kG)$ d_*）具有如下形式（此处我们仅写出基元素上的映射）：

$$\mathrm{Bar}_{-1}(kG) = kG, \quad \text{and for } n \geqslant 0, \quad \mathrm{Bar}_n(kG) = k\left[G \times \overline{G}^{\times n} \times G\right],$$

$$d_0 \colon \mathrm{Bar}_0(kG) = k[G \times G] \to kG, \quad (g_0, g_1) \mapsto g_0 g_1,$$

并且对于 $n \geqslant 1$,

$$d_n \colon \mathrm{Bar}_n(kG) \to \mathrm{Bar}_{n-1}(kG),$$

$$(g_0, \overline{g_{1,n}}, g_{n+1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \overline{g_1}, \ldots, \overline{g_i g_{i+1}}, \ldots, \overline{g_n}, g_{n+1}).$$

这里， $k\left[G\times G^{\times n}\times G\right]$ 表示由笛卡尔积 $G\times G^{\times n}\times G$ 的元素张成的 k-向量空间。为方便起见，我们将其在 G 中的像 $\bar{g}$ 简写为 g。

定义 2.7. Hochschild上链复形 $(C^*(kG,kG)\ \delta^*)$ 定义如下:

(i) 对于 $n\geq 0$,

$$C^n(kG,kG)=\mathrm{Hom}_{(kG)^e}\left(\mathrm{Bar}_n(kG),kG\right)\simeq \mathrm{Hom}_k\left(k\left[\overline{G}^{\times n}\right],kG\right)\simeq \mathrm{Map}\left(\overline{G}^{\times n},kG\right),$$

其中 $\mathrm{Map}\left(G^{\times n},kG\right)$ 表示从 $G^{\times n}$ 到 kG的映射集合，并且

(ii) 微分定义为

$$\delta^n:\mathrm{Map}\left(\overline{G}^{\times n},kG\right)\to \mathrm{Map}\left(\overline{G}^{\times (n+1)},kG\right),\varphi\mapsto\delta^n(\varphi),$$

其中 $\delta^n(\varphi)$ 将 $g_{1,n+1}\in G^{(n+1)}$映射为

$$g_1\varphi\left(g_{2,n+1}\right)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi\left(g_{1,i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2,n+1}\right)+(-1)^{n+1}\varphi\left(g_{1,n}\right)g_{n+1}.$$

在零次，微分映射 δ^0： $kG\to \mathrm{Map}(G,kG)$ 定义为

$$\delta^0(x)(g)=gx-xg\ \left(\text{for } x\in kG \text{ and } g\in\overline{G}\right).$$

定义 2.8. Hochschild链复形 $(C_*(kG,\ kG)\ \partial_*)$ 定义如下:

(i) 对于 $n\geq 0$,

$$C_n(kG,kG)=kG\otimes_{(kG)^e}\mathrm{Bar}_n(kG)\simeq k\left[G\times\overline{G}^{\times n}\right],$$

其中 $k\left[G\times G^{\times n}\right]$ 表示由 $G\times G^{\times n}$, 中的元素张成的 k-向量空间，微分定义为,

(ii) 对于 $n>1$,

$$\partial_n:k\left[G\times\overline{G}^{\times n}\right]\to k\left[G\times\overline{G}^{\times(n-1)}\right],$$

$$(g_0,g_{1,n})\mapsto(g_0g_1,g_{2,n})+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(g_0,g_{1,i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2,n}\right)+(-1)^n\left(g_ng_0,g_{1,n-1}\right).$$

在一次，微分映射 ∂_1： $k[G\times G]\to kG$ 定义为

$$\partial_1\left(g_0,g_1\right)=g_0g_1-g_1g_0\ \left(\text{for } g_0\in G \text{ and } g_1\in\overline{G}\right).$$

从第 2.2.2 节可知，Tate-Hochschild上同调 $\widehat{\mathrm{HH}}^*(kG,kG)$ 可以通过 Tate-Hochschild 复形 $\mathcal{D}^*(kG,kG)$ 计算。

定义 2.9。Tate-Hochschild 复形 $(\mathcal{D}^*(kG,kG)\ d^*)$ 定义如下:

$$\cdots\xrightarrow{\partial_2}k[G\times\overline{G}]\xrightarrow{\partial_1}kG\xrightarrow{\tau}kG\xrightarrow{\delta^0}\mathrm{Map}(\overline{G},kG)\xrightarrow{\delta^1}\cdots,$$

其中有

(i) $\mathcal{D}^n(kG,kG)=C^n(kG,kG)$, 且 $d^n=\delta^n$ 对于 $n\geq 0$, (ii) $\mathcal{D}^n(kG,kG)=C_{-1-n}(kG,kG)$ 对于 $n\leq -1$, 且 $d^n=\partial_{-n-1}$ 对于 $n\leq -2$, (iii) $d^{-1}=\tau$： $kG\to kG$ （从 -1 次到零次分量）定义为迹映射

$$\tau(x)=\sum_{g\in G}gxg^{-1}.$$

由 [17] 和 [13], 可得一个 A_∞-代数结构 $(m_1,m_2,m_3,\cdots)$ 在 $\mathcal{D}^*(kG,kG)$ 上，其中 $m_2=\cup$ 定义见[17]。

定义2.10。 设 $\alpha \in \mathcal{D}^n(kG, kG)$ 和 $\beta \in \mathcal{D}^m(kG, kG)$。则（广义）杯积 $\alpha \cup \beta$由以下六种情形定义：

情形*1*。 $n \geq 0$, $m \geq 0$。那么 $\alpha \in C^n(kG, kG)$ $\beta \in C^m(kG, kG)$, 且杯积 $\alpha \cup \beta \in C^{n+m}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 与 $C^*(kG, kG)$ 上的通常杯积相同：

$$\alpha \cup \beta : \overline{G}^{\times n+m} \to kG, \quad g_{1,n+m} \mapsto \alpha\left(g_{1,n}\right)\beta\left(g_{n+1,n+m}\right).$$

情形*2*。 $n \leq -1$, $m \leq -1$。那么 $\alpha = (g_0, g_{1,s}) \in C_s(kG, kG)$, 其中 $s = -n-1 \geq 0$, $\beta = (h_0, h_{1,t}) \in C_t(kG, kG)$, 其中 $t = -m-1 \geq 0$, 且杯积 $\alpha \cup \beta \in C_{s+t+1}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 定义为

$$\alpha \cup \beta = \sum_{g \in G} \left(gh_0, h_{1,t}, g^{-1}g_0, g_{1,s}\right) \in k\left[G \times \overline{G}^{\times s+t+1}\right].$$

情形 *3*。 $n \geq 0, m \leq -1$ 和 $n+m \leq -1$。那么 $\alpha \in C^n(kG, kG)$、 $\beta = (h_0, h_{1,t}) \in C_t(kG, kG)$, 其中$t = -m-1 \geq 0$, 而杯积 $\alpha \cup \beta \in C_{t-n}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 与通常的帽积相同 $\cap$ （它诱导了 Hochschild 上同调在 Hochschild 同调上的作用）：

$$\alpha \cup \beta = \left(\alpha\left(h_{t-n+1,t}\right)h_0, h_{1,t-n}\right) \in k\left[G \times \overline{G}^{\times t-n}\right].$$

情形 *4*。 $n \geq 0, m \leq -1$ 和 $n+m \geq 0$。那么 $\alpha \in C^n(kG, kG)$、 $\beta = (g_0, g_{1,t}) \in C_t(kG, kG)$, 其中 $t = -m-1 \geq 0$, 而杯积 $\alpha \cup \beta \in C^{n-t-1}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 定义为以下广义帽积：

$$\alpha \cup \beta : \overline{G}^{\times n-t-1} \to kG, \quad h_{1,n-t-1} \mapsto \sum_{g \in G} \alpha\left(h_{1,n-t-1}, g^{-1}, g_{1,t}\right) g_0 g.$$

情形*5*。 $n \leq -1$, $m \geq 0$ 和 {v7>。于是, $\alpha = (g_0, g_{1,s}) \in C_s(kG, kG)$, 其中 $s = -n-1 \geq 0$、$\beta \in C^m(kG, kG)$, 且杯积 $\alpha \cup \beta \in C_{s-m}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 是从右侧得到的如下帽积：

$$\alpha \cup \beta = \left(g_0\beta\left(g_{1,m}\right), g_{m+1,s}\right) \in k\left[G \times \overline{G}^{\times s-m}\right].$$

情形*6*。 $n \leq -1$, $m \geq 0$ 和 {v7>。于是, $\alpha = (g_0, g_{1,s}) \in C_s(kG, kG)$, 其中 $s = -n-1 \geq 0$、$\beta \in C^m(kG, kG)$, 且杯积 $\alpha \cup \beta \in C^{m-s-1}(kG, kG) = \mathcal{D}^{n+m}(kG, kG)$ 定义为从右侧得到的如下广义帽积：

$$\alpha \cup \beta : \overline{G}^{\times m-s-1} \to kG, \quad h_{1,m-s-1} \mapsto \sum_{g \in G} gg_0\beta\left(g_{1,s}, g^{-1}, h_{1,m-s-1}\right).$$

注 2.11。 由于本文使用的杯积符号约定 $\cup$ 与 [17], 中的不同，为了使下列恒等式在 $\mathcal{D}^*(kG, kG)$中仍然成立,

$$\partial(\alpha \cup \beta) = \partial(\alpha) \cup \beta + (-1)^m \alpha \cup \partial(\beta), \text{ for } \alpha \in \mathcal{D}^m(kG, kG) \text{ and } \beta \in \mathcal{D}^n(kG, kG),$$

我们必须改变负部分 $\mathcal{D}^{<0}(kG, kG)$ 中微分的符号。也就是说， $\mathcal{D}^*(kG, kG)$ 上的新微分 ∂' 定义如下：

$$\partial'_m(\alpha) = \begin{cases} (-1)^{m+1}\partial_{-m-1}(\alpha) & \text{for } \alpha \in \mathcal{D}^m(kG, kG) \text{ and } m < -1, \\ \tau(\alpha) & \text{for } \alpha \in \mathcal{D}^{-1}(kG, kG), \\ \delta^m(\alpha) & \text{for } \alpha \in \mathcal{D}^m(kG, kG) \text{ and } m \geq 0. \end{cases}$$

由 [13, 定理 6.3], 可知， 杯积可扩张为 $\mathcal{D}^*(kG, kG)$ 上的一个 A_∞-代数结构 $(m_1, m_2, m_3, \cdots)$, 其中 $m_1 = \partial'$、$m_2 = \cup$ 和 $m_i = 0$ 对于 $i > 3$ 成立。 m_3 的公式描述如下：

(i) 如果 ϕ、$\varphi(kG$、$kG)$ 或 ϕ、$\varphi(kG$、$kG)$, 则 $m_3(\phi$、φ、$\psi) = 0$。(ii) 如果 α、$\beta \in C_*(kG$、$kG)$ 且 $\phi \in C^*(kG$、$kG)$, 则 $m_3(\alpha$、β、$\phi) = 0 = m_3(\phi$、α、$\beta)$。(iii) 如果 $\alpha \in C_*(kG$、$kG)$ 且 ϕ、$\varphi \in C^*(kG$、$kG)$, 则 $m_3(\phi$、φ、$\alpha) = 0 = m_3(\alpha$、ϕ、$\varphi)$。(iv) 对于 $\phi \in C^m(kG$、$kG)$ $\varphi \in C^n(kG$、$kG)$ 以及 $\alpha = (g_0$、g_1、$\cdots$、$g_r) \in C_r(kG$、$kG)$,

- 若 $r+2 \leq m+n$，则 $m_3(\phi, \alpha, \varphi) \in C^{m-r+n-2}(kG, kG)$ 定义为

$$m_3(\phi,\alpha,\varphi)(h_1,\cdots,h_{m-r+n-2}) = \sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{1,r+2-m\}}^{\min\{n,r+1\}}(-1)^{m+r+j-1}$$
$$\phi(h_{1,m-r+j-2}, g, g_{j,r})g_0\varphi(g_{1,j-1}, g^{-1}, h_{m-r+j-1,m-r+n-2}).$$

- 若 $r+2 > m+n$，则 $m_3(\phi, \alpha, \varphi) = 0$。

(v) 对于 $\alpha = (g_0, g_{1,r}) \in C_r(kG, kG)$ $\beta = (h_0, h_{1,s}) \in C_s(kG, kG)$ 以及 $\phi \in C^m(kG, kG)$,

- 若 $m-1 \leq r+s$,

$$m_3(\alpha,\phi,\beta) = \sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{0,s+1-m\}}^{\min\{s,r-m+s+1\}}(-1)^{m+r+s-j}$$
$$(g_0\phi(g_{1,m-s+j-1}, g, h_{j+1,s})h_0, h_{1,j}, g^{-1}, g_{m-s+j,r}),$$

注：在 [10],原文中写作

$$m_3(\alpha,\phi,\beta) = \sum_{g\in G}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{n-j}$$
$$(g_0\phi(g_{1,m-s+j-1}, g, h_{j+1,s})h_0, h_{1,j}, g^{-1}, g_{m-s+j,r}).$$

然而，在实际计算中，我们发现 (-1) 中指数的符号有误。本文中的所有计算均已将其更正为 $(-1)^{m+r+s-j}$。

- 若 $m-1 > r+s$，则 $m_3(\alpha, \phi, \beta) = 0$。

2.4. **有限群上同调与 Tate上同调回顾**。

本节回顾有限群 Tate上同调的一些概念。有关详细内容，请参阅 [2, 第六章]。

设 k 为一个域， G 为一个有限群， kG 为其群代数。设 M 为一个左 kG-模。那么， G 以 M 为系数的上同调定义为

$$\mathrm{H}^p(G, M) := \mathrm{Ext}^p_{kG}(k, M), p \geq 0,$$

G 以 M 为系数的同调定义为

$$\mathrm{H}_p(G, M) = \mathrm{Tor}^{kG}_p(k, M), p \geq 0,$$

其中， k是在 $\mathrm{Ext}^p_{kG}(k, M)$ 中的左平凡 kG-模，在 $\mathrm{Tor}^{kG}_p(k, M)$ 中的右平凡 kG-模。注意，复形 $P_* := \mathrm{Bar}_*(kG) \otimes_{kG} k$ 是平凡 kG-模 k的标准分解 。因此，存在计算群（上）同调的典范复形。

回顾一下，**群上同调复形**$(C^*(G, M), \delta^*)$定义如下:

$$C^n(G, M) = \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Bar}_n(kG) \otimes_{kG} k, M) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(k\left[\overline{G}^{\times n}\right], M) \simeq \mathrm{Map}(\overline{G}^{\times n}, MG),\ for\ n \geq 0,$$

微分定义为

$$\delta^n : \mathrm{Map}\left(\overline{G}^{\times n}, M\right) \to \mathrm{Map}\left(\overline{G}^{\times(n+1)}, M\right), \quad \varphi \mapsto \delta^n(\varphi),$$

其中 $\delta^n(\varphi)$ 将 $g_{1,n+1} \in G^{n+1}$映射为:

$$g_1\varphi\left(g_{2,n+1}\right) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi\left(g_{1,i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2,n+1}\right) + (-1)^{n+1}\varphi\left(g_{1,n}\right).$$

在零次中，微分映射 δ^0： $M \to \mathrm{Map}G$， M 定义如下:

$$\delta^0(x)(g) = gx - x \quad (\text{for } x \in M \text{ and } g \in \overline{G}).$$

我们可以通过 $x\cdot g=g^{-1}x,\ x\in M,\ g\in G$ 将 M 视为右 kG-模。于是 $\mathrm{Tor}_*^{kG}(k,\ M)\cong\mathrm{Tor}_*^{kG}(M,\ k)$, 其中我们在 $\mathrm{Tor}_*^{kG}(M,\ k)$ 中使用右 kG-模 M。注意，$\mathrm{Tor}_*^{kG}(M,\ k)$ 可以通过**群同调复形** $(C_*(G,\ M)\ \partial_*)$ 计算，该复形定义如下:

$$C_n(G,M)=M\otimes_{kG}\mathrm{Bar}_n(kG)\otimes_{kG}k\simeq M\otimes k\left[\overline{G}^{\times n}\right],\quad \text{for } n\geq 0,$$

且微分 $\partial_n\colon M\otimes k\left[G^{\times n}\right]\to M\otimes k\left[G^{\times(n-1)}\right]$, $n\geq 2$ 定义为

$$x\otimes g_{1,n}\mapsto x\cdot g_1\otimes(g_{2,n})+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i x\otimes(g_{1,i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2,n})+(-1)^n x\otimes(g_{1,n-1})$$

在次数 1 时，微分映射 $\partial_1\colon M\otimes k[G]\to M$ 定义为

$$\partial_1(x\otimes g_1)=x\cdot g_1-x\quad\left(\text{for } x\in M \text{ and } g_1\in\overline{G}\right)$$

设 U 是任意左 kG-模，我们回顾 [10] 中 **Tate上链复形** $(C^*(G,\ U)\ \delta'_n)$ 的定义，其中群 G

(i) $\widehat{C}^{\geq 0}(G,\ U)=C^*(G,\ U)\quad \delta'_{\geq 0}=\delta^n$。

(ii) 对每个 $n\leq -1$（令 $s=-n-1\geq 0$），

$$\widehat{C}^{n<0}(G,U)=C_*(G,U)$$

且微分对所有 $s\geq 1$ 定义为 $\delta'_n=\partial_s$。

(iii) 对于 $n=1$（或 $s=0$），微分 $\delta'_{-1}\colon C_0(G,\ U)=U\to U=C^0(G,\ U)$ 由 $u\mapsto(\sum_{g\in G}g)u$给出，其中 $u\in U$。

2.5. **Tate-Hochschild上同调在复形层面的加法分解**。

在 [10], 中，作者构造了群代数 kG 的 Tate-Hochschild上链复形层面的加法分解$\mathcal{D}^*(kG,\ kG)$。下面我们简要回顾这一构造。本文的主要结果是在这一加法分解框架下获得一种新的 A_∞-代数结构。

设 X 是 G 中元素的共轭类代表元集合。对每个 $x\in X$，定义 $C_x=\left\{gxg^{-1}\mid g\in G\right\}$ 为 x 的共轭类，并将中心化子子群定义为 $C_G(x)=\left\{g\in G\mid gxg^{-1}=x\right\}$。固定 G 按 $C_G(x)$ 的右陪集分解:

$$G=C_G(x)\gamma_{1,x}\cup C_G(x)\gamma_{2,x}\cup\cdots\cup C_G(x)\gamma_{n_x,x},$$

其中，n_x 是共轭类 C_x中的元素个数。于是，共轭类 C_x 可写为:

$$C_x=\left\{\gamma_{1,x}^{-1}x\gamma_{1,x},\cdots,\gamma_{n_x,x}^{-1}x\gamma_{n_x,x}\right\}.$$

记 $x_i=\gamma_{i,\ x}^{-1}x\gamma_{i,\ x}$，并且不失一般性，令 $\gamma_{1,\ x}=1$，因此 $x_1=x$。

定义:

$$\mathcal{H}^{x,0}=k[C_x],\ \text{and for } n\geq 1,$$

$$\mathcal{H}^{x,n}=\left\{\varphi:\overline{G}^{\times n}\longrightarrow kG\ \middle|\ \varphi(g_1,\ldots,g_n)\in k[g_1\cdots g_nC_x]\subset kG,\ \forall g_1,\ldots,g_n\in\overline{G}\right\},$$

其中，$g_1\cdots g_nC_x$ 表示将 $g_1\cdots g_n$ 在 C_x上相乘所得的 G 的子集，而 $k[g_1\cdots g_nC_x]$ 是由该集合张成的 kG 的 k-子空间。

注意，我们有等式 $g_1\cdots g_nC_x=C_xg_1\cdots g_n$，因此 $k[g_1\cdots g_nC_x]=k[C_xg_1\cdots g_n]$。定义$\mathcal{H}^{x,*}=\bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{H}^{x,n}$，它构成 $C^*(kG,kG)$ 的子复形，并且我们有:

$$C^*(kG,kG)=\bigoplus_{x\in X}\mathcal{H}^{x,*}.$$

现在回顾上链复形 $(C^*(C_G(x)\ k)\ \delta^n)$ 的定义：

$$\widehat{C}^*(C_G(x),k)=\left(\cdots\xrightarrow{\partial_2}C_1(C_G(x),k)\xrightarrow{\partial_1}C_0(C_G(x),k)\xrightarrow{\tau}C^0(C_G(x),k)\xrightarrow{\delta^0}C^1(C_G(x),k)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\right).$$

(i) $\widehat{C}^{n\geq 0}(C_G(x),k)=C^n(C_G(x),k)=\mathrm{Map}(\overline{C_G(x)}^{\times n},k)$, $\delta_{\geq 0}=\delta^n$, specificly, the differential is given by

$$\delta^0(\lambda)(g_1)=0,\ \text{for } \lambda\in k \text{ and } g_1\in C_G(x),$$

并且对于 $n\geq 1$, δ^n（φ）映射 $g_{1,\ n+1}\in C_{G\ (x)}{}^{\times n+1}$ 到

$$\varphi\left(g_{2,n+1}\right)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi\left(g_{1,i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2,n+1}\right)+(-1)^{n+1}\varphi\left(g_{1,n}\right).$$

（ii）对于每个 $n\leq -1$（令 $s=-n-1\geq 0$），$\widehat{C}^n\ (C_G\ (x)\quad k)\ =C_s\ (C_{G\ (x)}\quad k)\ =k\left[C_G\ (x)\ {}^{\times s}\right]$, 微分$\delta_n=\partial_s$： $k\left[C_G\ (x)\ {}^{\times s}\right]\to k\left[C_G\ (x)\ {}^{\times(s-1)}\right]$ 由下式给出

$$g_{1,s}\mapsto(g_{2,s})+\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i(g_{1,i-1},g_ig_{i+1},g_{i+2,s})+(-1)^s(g_{1,s-1})$$

对所有 $s\geq 2$, 以及对于 $s=1$, 微分 ∂_1： $k\left[C_{G\ (x)}\right]\to k$ 定义为 $\partial_1\ (g_1)\ =0$。

（iii）对于 $n=-1$（或 $s=0$），微分 $\delta_{-1}=\tau$： $C_0\ (C_G\ (x)\quad k)\ =k\to k=C^0\ (C_G\ (x)\quad k)$ 定义为 $\tau(1)=|C_G(x)|$.

在 [11, 10], 群代数的 Hochschild 上同调加法分解的一个提升 kG 在复形层面得以建立。

引理 2.12。 [11, 定理 6.3][10, 定理 4.3] 设 k 为一个域， G 为一个有限群。考虑群代数 kG的 Hochschild 上同调代数的加法分解：

$$\mathrm{HH}^*(kG,kG)\simeq\bigoplus_{x\in X}\mathrm{H}^*\left(C_G(x),k\right)$$

该加法分解可以提升为复形的同伦变形收缩

$$s^*\circlearrowright\quad C^*(kG,kG)\underset{\rho^*}{\overset{\iota^*}{\rightleftarrows}}\bigoplus_{x\in X}C^*(C_G(x),k).$$

其中 $\iota^n=\sum_{x\in X}\iota^{x,\ n}$， $\rho^n=\sum_{x\in X}\rho^{x,\ n}$，且 $s^n=\sum_{x\in X}s^{x,\ n}$，其中 $n\geq 0$。

对于 $n=0$，任取 $\alpha_x\in k[C_x]$，映射 $\iota^{x,\ 0}$, $\rho^{x,\ 0}$, $s^{x,\ 0}$ 定义如下：

$$\iota^{x,0}:\mathcal{H}^{x,0}=k[C_x]\to k,\quad \alpha_x=\sum_{i=1}^{n_x}\lambda_ix_i\mapsto\lambda_1,$$

$$\rho^{x,0}:k\to\mathcal{H}^{x,0}=k[C_x],\quad \lambda\mapsto\alpha_x=\sum_{i=1}^{n_x}\lambda x_i,$$

$$s^{x,0}(\alpha_x)=0$$

对于 $n=1$, t 同伦 $s^{x,1}$ 定义如下：对于 $(\varphi_x:G\to k[g\overline{C}_x])\in\mathcal{H}^{x,1}$，定义 $s^{x,1}(\varphi_x)\in k[C_x]$ a s

$$s^{x,1}(\varphi_x)=\sum_{i=1}^{n_x}a_i^1x_i,$$

其中 a_i^1由 $\varphi_x(\gamma_{i,x})=\sum_{k=1}^{n_x}a_i^kx_k\gamma_{i,x}$ 确定。

对于 $n\geq 1$，映射 $\iota^{x,\ n}$ 由下式给出

$$\iota^{x,n}:\mathcal{H}^{x,n}\to C^n(C_G(x),k),\quad[\varphi_x:\overline{G}^{\times n}\to kG]\mapsto[\widehat{\varphi}_x:\overline{C_G(x)}^{\times n}\to k],$$

$$\text{with } \widehat{\varphi}_x(h_{1,n}) = a_{1,x} \text{ where } \varphi_x(h_{1,n})h_n^{-1}\cdots h_1^{-1} = \sum_{i=1}^{n_x} a_{i,x}x_i \in kC_x.$$

换言之，$\widehat{\varphi}_x(h_{1,n})$ 就是 $\varphi_x(h_{1,n})h_n^{-1}\cdots h_1^{-1} \in kC_x$ 中 x 的系数。映射 $\rho^{x,n}$ 由下式给出

$$\rho^{x,n} : C^n(C_G(x),k) \to \mathcal{H}^{x,n}, \quad [\widehat{\varphi}_x : \overline{C_G(x)}^{\times n} \to k] \mapsto [\varphi_x : \overline{G}^{\times n} \to kG],$$

$$\text{with } \varphi_x \in \mathcal{H}^{x,n}, \text{ and } \varphi_x(g_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n_x} \widehat{\varphi}_x(h_{i,1}^x,\cdots,h_{i,n}^x)x_i g_1\cdots g_n,$$

其中 $\{h_{i,1}^x,\ldots,h_{i,n}^x\} \in C_{\overline{G(x)}}$ 由序列 $\{g_1,\cdots,g_n\}$ 如下确定：

$$\gamma_{i,x}g_1 = h_{i,1}^x\gamma_{s_i^1,x}, \quad \gamma_{s_i^1,x}g_2 = h_{i,2}^x\gamma_{s_i^2,x}, \quad \cdots, \quad \gamma_{s_i^{n-1},x}g_n = h_{i,n}^x\gamma_{s_i^n,x}.$$

我们将此过程称为 ♠。在此过程中，序列 $\{h_{i,1}^x,\ldots,h_{i,n}^x\} \in C_G(x)^{\times n}$ 由序列$\{g_1,\cdots,g_n\}$, x和 i确定。我们记作 $\{h_{i,1}^x,\ldots,h_{i,n}^x\} = \spadesuit_{x,i}\{g_1,\cdots,g_n\}$。

对于 $n \geq 2$，同伦 $s^{x,n}$ 定义如下：对于 $(\varphi_x : G^{\times n} \to kG) \in \mathcal{H}^{x,n}$，我们定义 $s^{x,n}(\varphi_x) \in \mathcal{H}^{x,n-1}$ 为

$$s^{x,n}(\varphi_x)(g_{1,n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n_x}(-1)^j a_{i,j}^1 x_i g_1\cdots g_{n-1},$$

其中系数 $a_{i,j}^1$ 由以下恒等式确定（当 $j=0$ 时，令 $\gamma_{s_i^0,x} = \gamma_{i,x}$）

$$\varphi_x(h_{i,1}^x,\cdots,h_{i,j}^x,\gamma_{s_i^j,x},g_{j+1},\cdots,g_{n-1})g_{n-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}\gamma_{i,x}^{-1} = \sum_{k=1}^{n_x} a_{i,j}^k x_k,$$

因为对于任意 $0 \leq j \leq n-1$，我们有 $h_{i,1}^x h_{i,2}^x\cdots h_{i,j}^x\gamma_{s_i^j,x}g_{j+1}\cdots g_{n-1} = \gamma_{i,x}g_1\cdots g_{n-1}$。

现在我们讨论群代数 kG 的 Hochschild同调层面的加法分解。我们首先介绍以下记号

$$\mathcal{H}_{x,0} = k\left[C_x\right], \text{ and for } s \geq 1,$$
$$\mathcal{H}_{x,s} = k\left[\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}u, g_{1,s}\right) \mid u \in C_x, g_1,\cdots,g_s \in \overline{G}\right].$$

令 $\mathcal{H}_{x,*} = \bigoplus_{s\geq 0}\mathcal{H}_{x,s}$。容易验证，$\mathcal{H}_{x,*}$ 是 $C_*(kG,kG)$ 的子复形，并且 $C_*(kG,kG) = \bigoplus_{x\in X}\mathcal{H}_{x,*}$。

引理 2.13。 [10, 定理 4。6] $\mathrm{H}_*(C_G(x)\ k)$ 是 $C_G(x)$ 的群同调。考虑群代数 kG 的 Hochschild 同调的加法分解：

$$\mathrm{HH}_*(kG,kG) \simeq \bigoplus_{x\in X}\mathrm{H}_*\left(C_G(x),k\right),$$

这个加法分解可以提升为复形的同伦变形收缩 s

$$s_* \circlearrowright \quad C_*(kG,kG) = \bigoplus_{x\in X}\mathcal{H}_{x,*} \underset{\iota_*}{\overset{\rho_*}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{x\in X} C_*(C_G(x),k),$$

其中 $\iota_n = \sum_{x\in X}\iota_{x,n}$，$\rho_n = \sum_{x\in X}\rho_{x,n}$ 且 $s_n = \sum_{x\in X}s_{x,n}$，对于 $n \geq 0$。

对于 $n=0$、$x = \sum_{i=1}^{n_x}\lambda_i x_i \in k[C_x]$，$\lambda \in k$，单射 $\iota_{x,0}$、满射 $\rho_{x,0}$ 和同伦 $s_{x,0}$ 分别如下给出：

$$\iota_{x,0}(\lambda) = \lambda x_1,$$
$$\rho_{x,0}(\sum_{i=1}^{n_x}\lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n_x}\lambda_i,$$
$$s_{x,0}(\sum_{i=1}^{n_x}\lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n_x}\lambda_i(\gamma_{i,x}^{-1}x,\gamma_{i,x}).$$

对于 $n \geq 1$，单射 $\iota_{x,\ n}$ 由下式给出

$$\iota_{x,n} : C_n\left(C_G(x), k\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{x,n},$$
$$\left[\widehat{\alpha}_x = (h_1, \cdots, h_n) \in k\left[\overline{C_G(x)}^{\times n}\right] \longmapsto \left[\alpha_x = \left(h_n^{-1} \cdots h_1^{-1} x, h_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n}\right],\right.$$

并且满射 $\rho_{x,n}$ 由下式给出

$$\rho_{x,n} : \mathcal{H}_{x,n} \longrightarrow C_n\left(C_G(x), k\right),$$
$$\left[\alpha_x = \left(g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} g_0^{-1} x g_0, g_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n}\right] \longmapsto \left[\widehat{\alpha}_x = \left(h_{i,1}^x, \cdots, h_{i,n}^x\right) \in k[\overline{C_G(x)}^{\times n}]\right],$$

其中 $h_{i,1}^x, \ldots, h_{i,n}^x \in C_{\overline{G}}(x)$ 由以下序列确定：

$$g_0 = h\gamma_{i,x}, \quad \gamma_{i,x} g_1 = h_{i,1}^x \gamma_{s_i^1,x}, \quad \gamma_{s_i^1,x} g_2 = h_{i,2}^x \gamma_{s_i^2,x}, \quad \cdots, \quad \gamma_{s_i^{n-1},x} g_n = h_{i,n}^x \gamma_{s_i^n,x}.$$

同伦 $s_{x,n}$（对于 $n \geq 1$）如下给出：对于 $\alpha_x = \left(g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} g_0^{-1} x g_0, g_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n}$，

$$\begin{aligned} s_{x,n}\left(\alpha_x\right) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} g_0^{-1} x h, h_{i,1}^x, \cdots, h_{i,j}^x, \gamma_{s_i^j,x}, g_{j+1}, \cdots, g_n\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left((h_{i,1}^x \cdots h_{i,j}^x \gamma_{s_i^j,x} g_{j+1} \cdots g_n)^{-1} x, h_{i,1}^x, \cdots, h_{i,j}^x, \gamma_{s_i^j,x}, g_{j+1}, \cdots, g_n\right) \in \mathcal{H}_{x,n+1}, \end{aligned}$$

当 $j = 0$ 时，我们令 $\gamma_{s_i^0,x} = \gamma_{i,x_0}$。

由引理 2.12 和引理 2.13，我们得到以下定理。

定理 2.14。 群代数的 Tate-Hochschild 上链复形 $\mathcal{D}^*(kG, kG)$ 具有如下加法分解：

$$\hat{s}^* \circlearrowright \quad \mathcal{D}^*(kG, kG) \underset{\hat{\iota}^*}{\overset{\hat{\rho}^*}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{x \in X} \widehat{C}^*\left(C_G(x), k\right).$$

其中，对于 $m \geq 0$，有

$$\hat{\iota}^m = \rho^m,\ \hat{\iota}^{-m-1} = \iota_m; \quad \hat{\rho}^m = \iota^m,\ \hat{\rho}^{-m-1} = \rho_m; \quad \hat{s}^m = s^m,\ \hat{s}^{-m-1} = s_m.$$

3. A_∞-STRUCTURE

3.1. $\widehat{m}_n$算法。

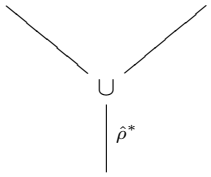
由于与 PT_n 对应的图较为复杂，本小节将介绍一种针对 PT_n 图的分解方法。我们还将说明如何通过局部分解计算与每个 PT_n 图相关的乘法，从而得到群代数的 Tate-Hochschild 上链复形在加法分解下的 $\widehat{m}_n$ 计算过程。

具体而言，由于 Tate-Hochschild 上链复形$\mathcal{D}^*(kG, kG)$ 上所有 $i \geq 4$ 的高阶运算 $m_i = 0$，在 $\bigoplus_{x \in X} C^*(C_G(x)\ k)$ 上计算 $\widehat{m}_n$ 只需分析 PT_n 图中具有两个或三个分支的局部情形。

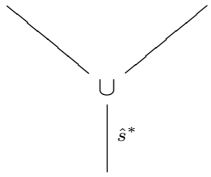
我们首先讨论恰有两个分支的局部图。

3.1.1. 局部二分支图上的算法。

(1) 首先，我们参考 [9], 中引入的平面二叉树分类。也就是说，从末端开始，平面二叉树可以根据其末端态射分为两类：$\hat{}\rho^*$和 $\hat{s}^*$。我们分别将它们称为 α-型树和 β-型树。特别地，相应的分支图还可以进一步分为以下两种不同形式：



α



β

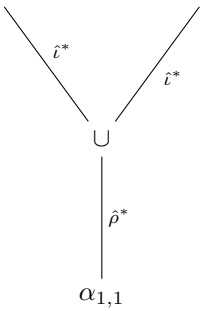
(2) 在实际计算中，我们发现，在上述两种局部结构中，左端和右端的态射各自都可以分为两类：

$$\hat{\iota}^* : \bigoplus_{x\in X} \widehat{C}^* (C_G(x), k) \longrightarrow \mathcal{D}^*(kG, kG),$$

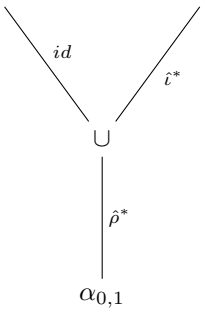
以及恒等态射

$$\mathrm{id} : \mathcal{D}^*(kG, kG) \longrightarrow \mathcal{D}^*(kG, kG).$$

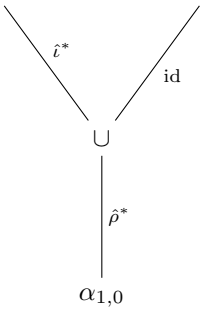
为了更准确地区分这些结构，我们进一步细化分类。对于 α-型结构，我们将其分为以下四个子类，



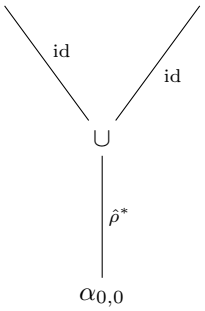
,



,



,



.

同样地，如果将位置 $\hat{}\rho^*$ 替换为$\hat{s}^*$ ，而其他部分保持不变，就可以得到 $\beta_{1,\ 1}$、$\beta_{0,\ 1}$、 $\beta_{1,\ 0}$ 和$\beta_{0,\ 0}$。

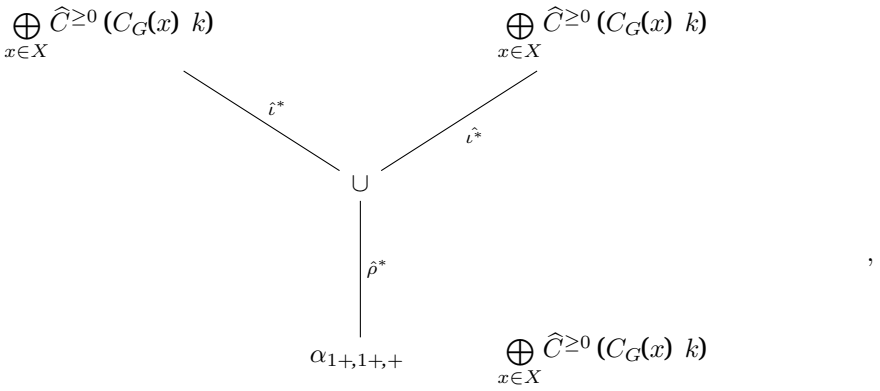
（3）对于类型 α 和类型 β，为了区分对应运算所涉及的输入元素和输出元素属于上同调还是同调，我们通过添加符号 $+$ 和 $-$ 来细化记号：

添加 $+$，如果对应元素属于 $\bigoplus \widehat{C}^{\geq 0}(C_G(x)\ k)$ 或 $\mathcal{D}^{\geq 0}(kG,\ kG)$，$_{x\in X}$

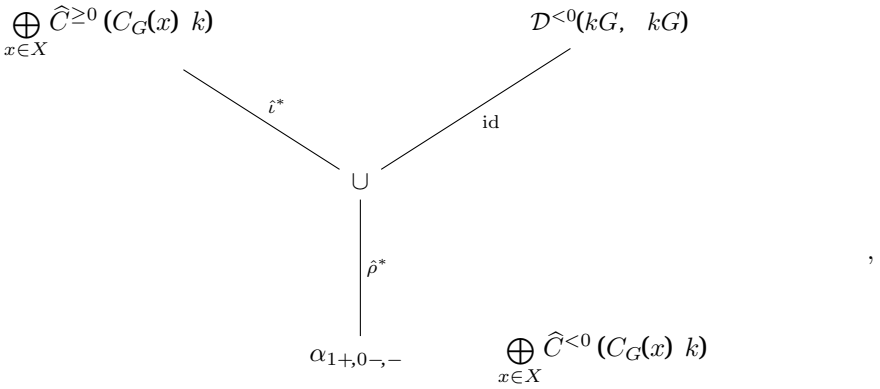
加上 $-$ 若相应元素属于 $\bigoplus_{x\in X}\widehat{C}^{<0}(C_G(x)\ k)$ 或 $\mathcal{D}^{<0}(kG,kG)$。

对于类型 α，最后一个位置的符号 $+$（分别为 $-$）表示由类型 α 运算所得的结果属于$\bigoplus_{x\in X}\widehat{C}^{\geq 0}(C_G(x)\ k)$（分别为 $\bigoplus_{x\in X}\widehat{C}^{<0}(C_G(x)\ k)$）。对于类型 β，最后一个位置的符号 $+$（分别为 $-$）表示由类型 α 运算所得的结果属于 $\mathcal{D}^{\geq 0}(kG,\ kG)$（分别为 $\mathcal{D}^{<0}(kG,\ kG)$）。

根据上述分类规则，（2）中的类型 α 情形可进一步分为 $\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}(i,\ j\in\{0,\ 1\})$，而（2）中的类型 β 情形可进一步分为 $\beta_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}(i,\ j\in\{0,\ 1\})$。例如，$\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$, $\alpha_{1+,\ 0-,\ -}$ 分别如下：

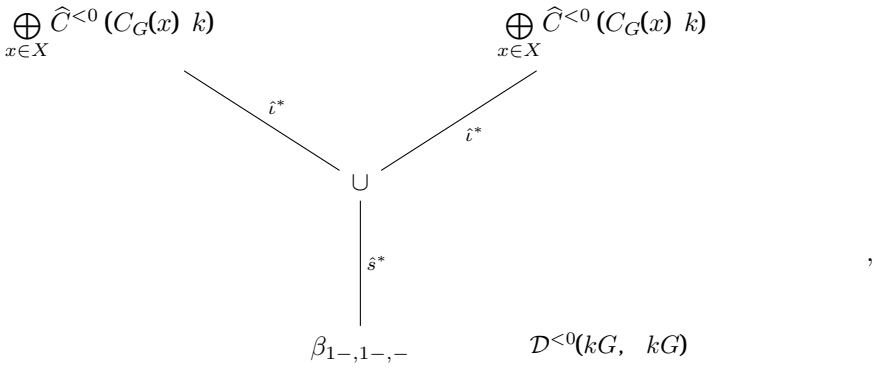


，

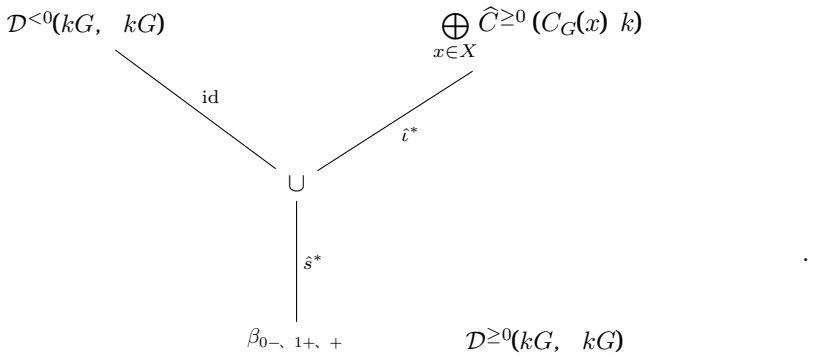


，

例如，$\beta_{1-、1-、-、}$ $\beta_{0-、1+、+}$ 分别描述如下：



，

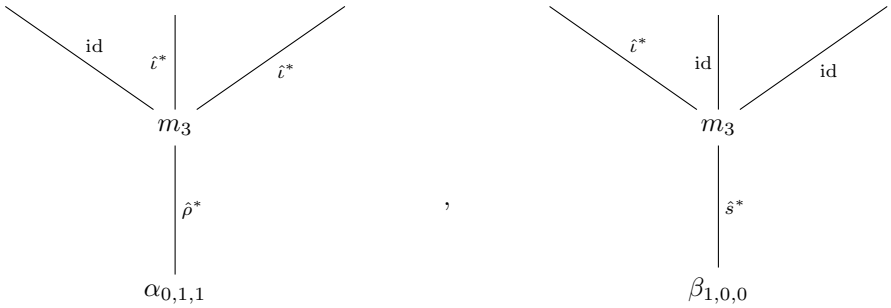


3.1.2. 局部三分支图上的算法。

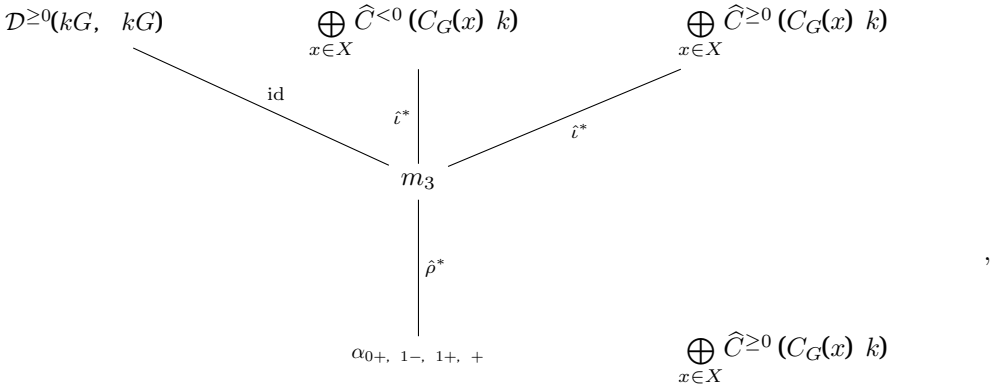
我们按照局部二分支树所采用的方法，对局部三分支树进行分类，并给出相应的对应记号。

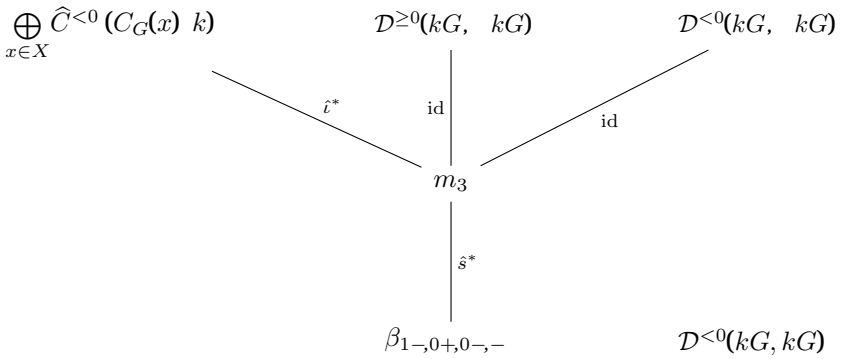
(1) 我们仍沿用上一节的记号：对于末端态射为 $\hat{}\rho^*$ 和 $\hat{s}^*$ 的树，分别称为 α-型和 β-型。

(2) 0 和 1 的分类也与之前相同：我们进一步根据每个分支上的态射细分分类。具体而言，它们分为 8 种类型 $\alpha_{i,\ j,\ k}(i,\ j,\ k=1$ 或 $0)$，以及 $\beta_{i,\ j,\ k}(i,\ j,\ k=1$ 或 $0)$。需要注意，标签 i、j 和 k 表示从左到右的分支顺序。例如，



(3) 符号 $+$ 和 $-$ 的定义与前面相同：我们进一步细化分类，记为 $\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}(i,\ j,\ k\in\{0,\ 1\})$，以及 $\beta_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}(i,\ j,\ k\in\{0,\ 1\})$。例如，





现在我们回顾第2.3节中 m_3 在 $\mathcal{D}^*(kG,kG)$ 中的定义，除以下两种情形外，它均为 0：(i) 对于 $\phi\in C^m(kG,kG)$ $\varphi\in C^n(kG,kG)$ 和 $\alpha=(g_0,g_1,\cdots,g_r)\in C_r(kG,kG)$，若 $r+2\leq m+n$，则$m_3(\phi,\alpha,\varphi)\in C^{m-r+n-2}(kG,kG)$ 定义为

$$m_3(\phi,\alpha,\varphi)(h_1,\cdots,h_{m-r+n-2})=\sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{1,r+2-m\}}^{\min\{n,r+1\}}(-1)^{m+r+j-1}$$
$$\phi(h_{1,m-r+j-2},g,g_{j,r})g_0\varphi(g_{1,j-1},g^{-1},h_{m-r+j-1,m-r+n-2}).$$

(ii) 对于 $\alpha=(g_0,g_{1,\ r})\in C_r(kG,\ kG)$ $\beta=(h_0,\ h_{1,\ s})\in C_s(kG,\ kG)$ 以及 $\phi\in C^m(kG,\ kG)$，如果 $m-1\leq r+s$ ，

$$m_3(\alpha,\phi,\beta)=\sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{0,s+1-m\}}^{\min\{s,r-m+s+1\}}(-1)^{m+r+s-j}$$
$$(g_0\phi(g_{1,m-s+j-1},g,h_{j+1,s})h_0,h_{1,j},g^{-1},g_{m-s+j,r}),$$

3.1.3. $\widehat{m}_n$ 的计算。

在上一节中，我们讨论了计算 $\widehat{m}_n$ 所涉及的局部分支图的所有分类情形。在此基础上，一个平面 n 叉树可以分解为 $\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}$、 $\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$、$\beta_{i\pm,\ j\pm,\ k\pm,\ \pm}$ 和 $\beta_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$ 的复合。相应的算法流程图如下所示。

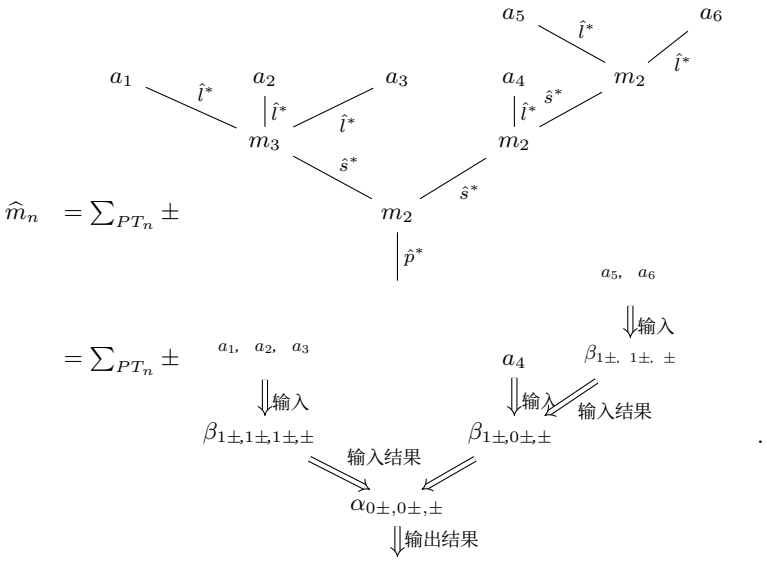
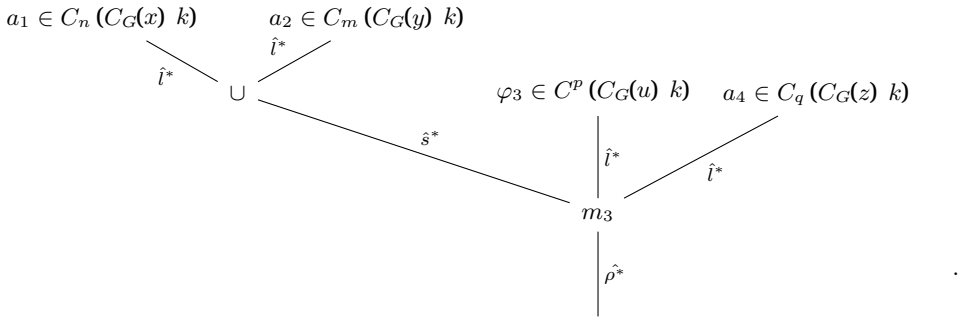


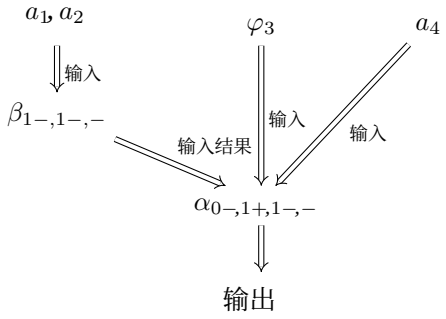
图1。与平面 n 叉树对应的算法流程图。

现在我们给出一个具体示例，以演示上述算法。

例 3.1. 对于以下 PT_4 图，我们计算对应乘法 $\widehat{m}_4$ 中的一项，其中$n>0$， $m>0$， $p>0$， $q>0$和 $n+m\geq p-q-2$:



上述图中有一个二分支结构和一个三分支结构，我们先通过运算 $\beta_{1-,\ 1-,\ -}$ 进行计算，然后通过运算 $\alpha_{0-,\ 1+,\ 1-,\ -}$ 进行计算。具体证明如下:



事实上，运算 $\alpha_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$ 的所有输出结果都是 $\widehat{m}_2$ 的所有可能情形。为了计算 A_∞-结构，还需要考虑运算 $\alpha_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$、 $\beta_{i\pm,\ j\pm,\ \pm}$、 $\alpha_{i+,\ j-,\ k+,\ +}$、 $\alpha_{i-,\ j+,\ k-,\ -}$、 $\beta_{i+,\ j-,\ k+,\ +}$ 以及 $\beta_{i-,\ j+,\ k-,\ -}$。在以下各节中，我们给出 $\alpha_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$、 $\alpha_{i+,\ j+,\ +}$、 $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$、 $\beta_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$、 $\alpha_{i+,\ j+,\ +}$ 和 $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$ 的计算。读者可以将这些示例作为处理其余情形的依据。

3.2. $\widehat{m}_2$ (= $\alpha_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$) 以及 $\beta_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$ 的计算。

回顾第 2.5 节中关于 Tate-Hochschild 上同调在复形层面上的加法分解的同伦收缩

$$\hat{s}^* \circlearrowright \quad \mathcal{D}^*(kG,kG) \underset{\hat{\imath}^*}{\overset{\hat{\rho}^*}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{x\in X} \widehat{C}^*\left(C_G(x),k\right),$$

其中，对于 $m\geq 0$，我们有

$$\hat{\imath}^m=\rho^m,\ \hat{\imath}^{-m-1}=\iota_m;\quad \hat{\rho}^m=\iota^m,\ \hat{\rho}^{-m-1}=\rho_m;\quad \hat{s}^m=s^m,\ \hat{s}^{-m-1}=s_m.$$

关于 $\mathcal{D}^{\geq 0}(kG,\ kG)$ 的杯积公式见 [11],，关于 $\mathcal{D}^{<0}(kG,\ kG)$ 的杯积公式见 [10]。现在我们回顾这两篇论文中的公式，并给出 $\widehat{m}_2$ (= $\alpha_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$) 和 $\beta_{1\pm,\ 1\pm,\ \pm}$ 的所有公式。

记号约定：设 X 是 G 中元素共轭类的一组代表。对于每个 $x\in X$， $C_G(x)\subset G$ 是 x 的中心化子子群。固定 G 关于 $C_G(x)$ 的右陪集分解:

$$G=C_G(x)\gamma_{1,x}\cup C_G(x)\gamma_{2,x}\cup\cdots\cup C_G(x)\gamma_{n_x,x},$$

其中， n_x 是共轭类 C_x中的元素个数。于是，共轭类 C_x 可写为:

$$C_x=\left\{\gamma_{1,x}^{-1}x\gamma_{1,x},\cdots,\gamma_{n_x,x}^{-1}x\gamma_{n_x,x}\right\}.$$

我们记 $x_i=\gamma_i^{-1}{}_{,x}x\gamma_{i,x}$，并且不失一般性地，令 $\gamma_{1,x}=1$，因此 $x_1=x_\circ$

情形1. $\alpha_{1+,1+,+}$ [11] **以及** $\beta_{1+,1+,+}$

令 $\widehat{\varphi}_x\colon \overline{C_G(x)}^n\to k\in C^n(C_G(x),k)$，且 $\widehat{\varphi}_y\colon \overline{C_G(y)}^m\to k\in C^n(C_G(y),k)$，其中 $x,\ y\in X$ 以及 $m,\ n\geq 0_\circ$ 我们首先计算 $\alpha_{1+,1+,+}{}_\circ$ 我们有 $\alpha_{1+,1+,+}(\widehat{\varphi}_x,\ \widehat{\varphi}_y)=\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\ \widehat{\varphi}_y)_\circ$ 假设

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)=\sum_{z\in X}\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z\in\bigoplus_{z\in X}C^{n+m}(C_G(z),k),$$

并根据同伦传递定理，对于任意 $z\in X$, $\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\ \widehat{\varphi}_y)_z$ 定义如下：

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z=\iota^{z,n+m}(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z.$$

更具体地，对于 $h_1,\ \cdots,\ h_{n+m}\in\overline{C_G(z)}$,

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z(h_{1,n+m})=\sum_{(i,j)\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(h_{i,1}^x,\cdots,h_{i,n}^x\right)\widehat{\varphi}_y\left(h_{j,1}^y,\cdots,h_{j,m}^y\right)$$

其中

- $I_z=\left\{(i,j)|\ i\in\{1,\cdots,n_x\},j\in\{1,\cdots,n_y\}\text{ and }x_i\left(h_1\cdots h_n\right)y_j\left(h_1\cdots h_n\right)^{-1}=z\right\}$,
- $h_{i,1}^x,\cdots,h_{i,n}^x\in\overline{C_G(x)}$ are determined by $\{h_1,\cdots h_n\}$, x, and i from process ♠, that is,

$$\gamma_{i,x}h_1=h_{i,1}^x\gamma_{s_i^1,x},\quad \gamma_{s_i^1,x}h_2=h_{i,2}^x\gamma_{s_i^2,x},\cdots,\gamma_{s_i^{n-1},x}h_n=h_{i,n}^x\gamma_{s_i^n,x},$$

  we write $\{h_{i,1}^x,\cdots,h_{i,n}^x\}=\spadesuit_{x,i}\{h_1,\cdots,h_n\}$.
- $h_{j,1}^y,\cdots,h_{j,m}^y\in\overline{C_G(y)}$ and $\{h_{j,1}^y,\cdots,h_{j,m}^y\}=\spadesuit_{y,j}\{h_{n+1},\cdots,h_{n+m}\}$.

现在我们计算 $\beta_{1+,1+,+}$，得到

$$\beta_{1+,1+,+}\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)=\sum_{z\in X}s^{z,n+m}(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z,$$

根据 s^z 的定义，对于 $g_1,\ \cdots,\ g_{m+n-1}\in\overline{G}$,

$$\begin{aligned}&s^{z,n+m}(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(g_{1,m+n-1})\\=&\sum_{l=0}^{m+n-1}\sum_{a=1}^{n_z}(-1)^le_{a,l}^1z_ag_1\cdots g_{m+n-1},\end{aligned}$$

其中 $e_{a,\ l}^1$ 是，对于每个 $l\in\{0,\ 1,\ .....,\ m+n-1\}$ 和 $a\in\{1,\ .....,\ n_z\}$，由下式确定

$$(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(h_{a,1}^z,\ldots,h_{a,l}^z,\gamma_{s_a^l,z},g_{l+1},\ldots,g_{m+n-1})g_{m+n-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}\gamma_{a,z}^{-1}=\sum_{t=1}^{n_z}e_{a,l}^tz_t,$$

其中 $(h_{a,}^z1,\ldots,h_{a,m+n-1}^z)=\spadesuit_{z,a}(g_1,\ldots,g_{m+n-1})$，并且通过计算 $\alpha_{1+,1+,+}$, $e_{a,l}^1$，可利用运算 $\alpha_{1+,1+,+}$ 作用于 $h_{a,}^z1,\ldots,h_{a,l}^z,\gamma_{s_a^l,z},g_{l+1},\ldots,g_{m+n-1}$ 得到，也就是说，

$$\begin{aligned}e_{a,l}^1&=\iota^z(\rho^x\left(\widehat{\varphi}_x\right)\cup\rho^y\left(\widehat{\varphi}_y\right))_z(h_{a,1}^z,\ldots,h_{a,l}^z,\gamma_{s_a^l,z},g_{l+1},\ldots,g_{m+n-1})\\&=\sum_{(i,j)\in I_z^{a,l}}\widehat{\varphi}_x(h_{i,1}^x,\ldots,h_{i,n}^x)\widehat{\varphi}_y(h_{j,1}^y,\ldots,h_{j,m}^y),\end{aligned}$$

其中对于每个 $a,\ l$,

- $I_{z}^{a,\ l}=\{(i,\ j)|\ 1\leq i\leq n_x,\ 1\leq j\leq n_y$ 以及 $x_i(g^{a,}{}_1{}^l\cdots g^{a,}{}_n{}^l)y_j(g^{a,}{}_1{}^l\cdots g^{a,}{}_n{}^l)^{-1}=z\}$，这里我们改写为

$$(g_1^{a,l},g_2^{a,l},\cdots,g_{m+n}^{a,l})=(h_{a,1}^z,\ldots,h_{a,l}^z,\gamma_{s_a^l,z},g_{l+1},\ldots,g_{m+n-1}),$$

  并且对于每个 $(i,\ j)\in I^{a,}{}_z{}^l$,
- $\{h_{i,\ 1}^x,\ .....,\ h_{i,\ n}^x\}=\spadesuit_{x,\ i}\{g^{a,}{}_1{}^l,\ \cdots,\ g^{a,}{}_n{}^l\}$,
- $\{h_{j,\ 1}^y,\ .....,\ h_{j,\ m}^y\}=\spadesuit_{y,\ j}\{g^{a,}{}_{n+1}^l,\ \cdots,\ g^{a,}{}_{n+m}^l\}_\circ$

情形2。 $\alpha_{1-,\ 1-,\ -}$ [10] 和$\beta_{1-,1-,+}$

设 $\widehat{\alpha}_x = (g_{1,s}) \in \widehat{C}^{-s-1}(C_G(x)\ k) = C_s(C_G(x)\ k) = k\left[\overline{C_G(x)}^{\times s}\right]$ 和 $\widehat{\alpha}_y = (h_{1,t}) \in C_t(C_G(y)\ k)$，其中$x, y \in X$, $s, t \geq 0$。

回忆一下，利用 [10]，可得

$$\alpha_{1-,1-,-}(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\alpha}_y) = \widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\alpha}_y) = \sum_{z\in X} \rho_{z,s+t}\left(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x) \cup \iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\right)_z .$$

对于任意 $z \in X$，定义

$$I_z := \left\{g \in G | h_1 \cdots h_t g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x g_1 \cdots g_s g h_t^{-1} \cdots h_1^{-1} y = \Phi(g)^{-1} z \Phi(g) \text{ for some } \Phi(g) \in G\right\}.$$

Then

$$\begin{aligned}
& \rho_{z,s+t}\left(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x) \cup \iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\right)_z \\
= \ & \rho_{z,s+t}\Big(\sum_{g\in G}(g h_t^{-1} \cdots h_1^{-1} y,\ h_{1,t},\ g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x,\ g_{1,s})\Big)_z \\
= \ & \rho_{z,s+t}\Big(\sum_{g\in I_z}(g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x^{-1} g_1 \cdots g_s g h_t^{-1} \cdots h_1^{-1} \Phi(g)^{-1} z \Phi(g),\ h_{1,t},\ g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x,\ g_{1,s})\Big) \\
= \ & \sum_{g\in I_z} \left(k^z_{i_g,1}, \cdots, k^z_{i_g,s+t+1}\right) \in C_{s+t+1}(C_G(z), k),
\end{aligned}$$

$$\widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\alpha}_y) = \sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z} \left(k^z_{i_g,1}, \cdots, k^z_{i_g,s+t+1}\right) \in \bigoplus_{z\in Z} C_{s+t+1}(C_G(z), k),$$

其中，对每个 $z \in X$, $k^z_{i_g,1}, \ldots, k^z_{i_g,s+t+1} \in C_{\overline{G(z)}}$，它们由以下方程唯一确定：

$$\Phi(g) \in C_G(z)\gamma_{i_g,z},\ \gamma_{i_g,z} h_1 = k^z_{i_g,1}\gamma_{s^1_{i_g},z},\ \gamma_{s^1_{i_g},z} h_2 = k^z_{i_g,2}\gamma_{s^2_{i_g},z}, \cdots, \gamma_{s^{t-1}_{i_g},z} h_t = k^z_{i_g,t}\gamma_{s^t_{i_g},z},$$

$$\gamma_{s^t_{i_g},z} g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x = k^z_{i_g,t+1}\gamma_{s^{t+1}_{i_g},z},\ \gamma_{s^{t+1}_{i_g},z} g_1 = k^z_{i_g,t+2}\gamma_{s^{t+2}_{i_g},z}, \cdots, \gamma_{s^{t+s}_{i_g},z} g_s = k^z_{i,t+s+1}\gamma_{s^{t+s+1}_{i_g},z},$$

这意味着 $\Phi(g) \in C_G(z)\gamma_{i_g,z}$ 并且

$$\{k^z_{i_g,1}, \cdots, k^z_{i_g,s+t+1}\} = \spadesuit_{z,i_g}\{h_1, \cdots, h_t, g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x, g_1, \cdots, g_s\}.$$

注3.2. 注意到 $k^z_{i_g,1}, \cdots, k^z_{i_g,s+t+1} \in C_G(z)$ 不依赖于 $\overline{\Phi(g)} \in G$ 的选择。如果我们还选择 $\Phi(g') \in G$ 使得

$$h_1 \cdots h_t g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x g_1 \cdots g_s g h_t^{-1} \cdots h_1^{-1} y = \Phi'(g)^{-1} z \Phi'(g) = \Phi(g)^{-1} z \Phi(g),$$

那么 $\Phi'(g)\Phi(g)^{-1} \in C_G(z)$、 $\Phi'(g) = \Phi'(g)\Phi(g)^{-1}\Phi(g) \in C_G(z)\gamma_{i_g,z}$。

现在我们计算 $\beta_{1-,1-,-}$。

对于任意 $z \in X$和 $g \in I_z$，我们将 $\{h_1,\ \cdots,\ h_t,\ g^{-1} g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x,\ g_1,\ \cdots,\ g_s\}$改写为$\{h_{g,\ 1},\ \cdots,\ h_{g,\ s+t+1}\}$。由 $\alpha_{1-,\ 1-,\ -}$的计算可得，

$$\{k^z_{i_g,1}, \cdots, k^z_{i_g,s+t+1}\} = \spadesuit_{z,i_g}\{h_{g,1}, \cdots, h_{g,s+t+1}\}.$$

根据 $s_{z,\ s+t}$的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&s_{z,s+t}(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y))_z\\
=&s_{z,s+t}\Big(\sum_{g\in I_z}(h_{g,s+t+1}^{-1}\cdots h_{g,1}^{-1}\Phi(g)^{-1}z\Phi(g),\ h_{g,1},\cdots,h_{g,s+t+1})\Big)\\
=&\sum_{g\in I_z}\sum_{j=0}^{s+t+1}(-1)^j(h_{g,s+t+1}^{-1}\cdots h_{g,1}^{-1}\Phi(g)^{-1}zh,\ k_{i_g,1}^z,\cdots,k_{i_g,j}^z,\gamma_{s_{i_g}^j,z},h_{g,j+1},\cdots,h_{g,s+t+1})\\
=&\sum_{g\in I_z}\sum_{j=0}^{s+t+1}(-1)^j\big((k_{i_g,1}^z\cdots k_{i_g,j}^z\gamma_{s_{i_g}^j,z}h_{g,j+1}\cdots h_{g,s+t+1})^{-1}z,\ k_{i_g,1}^z,\cdots,k_{i_g,j}^z,\gamma_{s_{i_g}^j,z},h_{g,j+1},\cdots,h_{g,s+t+1}\big).
\end{aligned}
$$

$s+t+1$因此，$\beta_{1-,\ 1-,\ -}(\widehat{\alpha}_x,\ \widehat{\alpha}_y)$

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}\sum_{j=0}(-1)^j\\
&\big((k_{i_g,1}^z\cdots k_{i_g,j}^z\gamma_{s_{i_g}^j,z}h_{g,j+1}\cdots h_{g,s+t+1})^{-1}z,\ k_{i_g,1}^z,\cdots,k_{i_g,j}^z,\gamma_{s_{i_g}^j,z},h_{g,j+1},\cdots,h_{g,s+t+1}\big).
\end{aligned}
$$

情形 3. $\alpha_{1+,1-,-}$ **和** $\beta_{1+,1-,-}$

设 $\widehat{\varphi}_x\colon\overline{C_G(x)}^n\to k\in C^n(C_G(x),\ k)$ 和 $\widehat{\alpha}_y=(h_{1,\ t})\in C_t(C_G(y),\ k)$，其中 $x,\ y\in X, n,\ t\geq 0$和 $n-t-1<0$。我们想要计算

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1+,1-,-}(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y)=\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y)&=\rho_{t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)\\
&=\sum_{z\in X}\rho_{z,t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z.
\end{aligned}
$$

首先，我们计算 $\rho^{x,\ n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\in C_{t-n}(kG,\ kG)$:

$$
\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x):=\varphi_x:\overline{G}^{\times n}\to kG,\quad \varphi_x(g_{1,n})=\sum_{i=1}^{n_x}\widehat{\varphi}_x\left(k_{i,1}^x,\cdots k_{i,n}^x\right)x_ig_1g_2\cdots g_n,
$$

其中 $k_{i,\ 1}^x,\ \cdots,\ k_{i,\ n}^x\in\overline{C_G(x)}$和 $\{k_{i,\ 1}^x,\ \cdots,\ k_{i,\ n}^x\}=\spadesuit_{x,\ i}\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$;

$$
\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)=\iota_{y,t}(h_{1,t})=\left(h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t}\right)\in\mathcal{H}_{y,t};
$$

$$
\begin{aligned}
\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)&=\left(\varphi_x\left(h_{t-n+1,t}\right)h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t-n}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n_x}\left(\widehat{\varphi}_x\left(k_{i,1}^x,\cdots,k_{i,n}^x\right)x_ih_{t-n}^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t-n}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n_x}\widehat{\varphi}_x\left(k_{i,1}^x,\cdots,k_{i,n}^x\right)\left(x_ih_{t-n}^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t-n}\right)\in C_{t-n}(kG,kG)
\end{aligned}
$$

取 $\{k_{i,\ 1}^x,\ \cdots,\ k_{i,\ n}^x\}=\spadesuit_{x,\ i}\{h_{t-n+1},\ \cdots,\ h_t\}$; 然后

$$
\begin{aligned}
\rho_{t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)&=\sum_{z\in X}\rho_{z,t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)\\
&=\sum_{z\in X}\sum_{i\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(k_{i,1}^x,\cdots,k_{i,n}^x\right)\rho_{t-n,z}(h_{t-n}^{-1}\cdots h_1^{-1}\phi(x_i)^{-1}z\phi(x_i),h_{1,t-n})\\
&=\sum_{z\in X}\sum_{i\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(k_{i,1}^x,\cdots,k_{i,n}^x\right)(h_{j_i,1}^z,\cdots,h_{j_i,t-n}^z)
\end{aligned}
$$

其中

- 对于任意 $z\in X,\ I_z$ 定义为

$$
I_z:=\left\{i\mid 1\leq i\leq n_x,\ h_1\cdots h_{t-n}x_ih_{t-n}^{-1}\cdots h_1^{-1}y=\phi(x_i)^{-1}z\phi(x_i)\text{ for some }\phi(x_i)\in G\right\};
$$

- $h^z_{j_i,\ 1},\ \cdots,\ h^z_{j_i,\ t-n} \in C_G(z)$ 由 $\Phi(x_i) = h\gamma_{j_i,\ z} \in C_G(z)\gamma_{j_i,\ z}$唯一确定, 并且

$$\{h^z_{j_i,1},\cdots,h^z_{j_i,t-n}\} = \spadesuit_{z,j_i}\{h_1,\cdots,h_{t-n}\}.$$

现在我们计算 $\beta_{1+,\ 1-,\ -}$。

$$\begin{aligned}\beta_{1+,1-,-}(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y) &= s_{t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)\\ &= \sum_{z\in X} s_{z,t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

对于任意 $z\in X$，根据 $s_{z,\ t-n}$ 的定义：$\mathcal{H}_{z,\ t-n}\to\mathcal{H}_{z,\ t-n+1}$，我们有

$$\begin{aligned}s_{z,t-n}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z = \sum_{i\in I_z}\sum_{u=0}^{t-n}(-1)^u\widehat{\varphi}_x\left(k^x_{i,1},\cdots,k^x_{i,n}\right)\\ \big((h^z_{j_i,1}\cdots h^z_{j_i,u}\gamma_{s^u_{j_i},z}h_{u+1}\cdots h_{t-n})^{-1}z,\ h^z_{j_i,1},\cdots,h^z_{j_i,u},\gamma_{s^u_{j_i},z},h_{u+1},\cdots,h_{t-n}\big).\end{aligned}$$

情形 4。$\alpha_{1+,1-,+}$ **和** $\beta_{1+,1-,+}$

设 $\widehat{\varphi}_x\colon \overline{C_G(x)}^n\to k\in C^n(C_G(x),\ k)$，且 $\widehat{\alpha}_y=(h_{1,\ t})\in C_t(C_G(y),\ k)$，其中 $x,\ y\in X, n,\ t\geq 0$ 和 $n-t-1\geq 0$。我们希望计算

$$\begin{aligned}\alpha_{1+,1-,+}(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y) = \widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y) &= \iota^{n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)\\ &= \sum_{z\in X}\iota^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

首先，我们计算

$$\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\in C^{n-t-1}(kG,kG)=\bigoplus_{z\in X}\mathcal{H}^{z,n-t-1},$$

对于 $(g_{1,n-t-1})\ \in\overline{G}^{\times n-t-1}$，

$$\begin{aligned}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)(g_{1,n-t-1}) &= \sum_{g\in G}\varphi_x\left(g_{1,n-t-1},g^{-1},h_{1,t}\right)h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}yg\\ &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n_x}\widehat{\varphi}_x(h^x_{i_g,1},\cdots,h^x_{i_g,n})x_ig_1\cdots g_{n-t-1}g^{-1}yg\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{j=1}^{n_z}\sum_{(g,i)\in I_{z_j}}\widehat{\varphi}_x(h^x_{i_g,1},\cdots,h^x_{i_g,n})z_jg_1g_2\cdots g_{n-t-1}\end{aligned}$$

其中

- 对于任意 $z\in X, g\in G$和 $i\in\{1,\cdots,n_x\}$, $\{h^x_{i_g,1},\ldots,h^x_{i_g,n}\}\subset\overline{C_G(x)}$, 定义如下 s

$$\{h^x_{i_g,1},\cdots,h^x_{i_g,n}\}=\spadesuit_{x,i}\{g_1,\cdots,g_{n-t-1},g^{-1},h_1,\cdots,h_t\},$$

- $I_{z_j}:=\{(g,i)\mid g\in G,1\leq i\leq n_x, x_ig_1\cdots g_{n-t-1}g^{-1}yg(g_1\cdots g_{n-t-1})^{-1}=z_j\}$.

那么，对于 $(g_{1,n-t-1})\ \in\overline{C_G(z)}^{\times n-t-1}$，我们得到

$$\iota^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z(g_{1,n-t-1})=\sum_{(g,i)\in I_z}\widehat{\varphi}_x(h^x_{i_g,1},\cdots,h^x_{i_g,n})$$

与 $I_z=I_{z_1}$。

现在我们计算 $\beta_{1+,\ 1-,\ +}$。

$$\begin{aligned}\beta_{1+,1-,+}(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y)&=s^{n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)\\&=\sum_{z\in X}s^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

对于任意 $z\in X$ 和 $(g_{1,n-t-2})\in\overline{G}^{n-t-2}$，根据 $s^{z,n-t-1}$ 的定义

$$s^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z(g_{1,n-t-2})=\sum_{l=0}^{n-t-2}\sum_{a=1}^{n_z}(-1)^l e^1_{a,l}z_a g_1\cdots g_{n-t-2},$$

其中 $e^1_{a,l}$ 由下列方程确定

$$\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z(h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},g_{l+1},\cdots,g_{n-t-2})g^{-1}_{n-t-2}\cdots g_1^{-1}\gamma^{-1}_{a,z}=\sum_{t=1}^{n_z}e^t_{a,l}z_t,$$

并根据 $\alpha_{1+,1-,+}$ 的计算，我们得到

$$\begin{aligned}e^1_{a,l}&=\iota^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z(h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},g_{l+1},\cdots,g_{n-t-2})\\&=\sum_{(g,i)\in I_z}\widehat{\varphi}_x(h^{x,a,l}_{i_g,1},\cdots,h^{x,a,l}_{i_g,n})\end{aligned}$$

其中，对于每个 $a\in\{1,\cdots,n_z\}$ 和 $l\in\{1,\cdots,n-t-2\}$，

- $\{h^z_{a,1},\ldots,h^z_{a,n-t-2}\}=\spadesuit_{z,a}\{g_1,\cdots,g_{n-t-2}\}$；
- $I_z:=\{(g,i)\mid g\in G,1\le i\le n_x,x_i\gamma_{a,l}g_1\cdots g_{n-t-2}g^{-1}yg(\gamma_{a,l}g_1\cdots g_{n-t-2})^{-1}=z\}$；
- 对于任意 $(g,i)\in I_z$，

$$\{h^{x,a,l}_{i_g,1},\cdots,h^{x,a,l}_{i_g,n}\}=\spadesuit_{x,i}\{h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},g_{l+1},\cdots,g_{n-t-2},g^{-1},h_1,\cdots,h_t\}.$$

情形5. $\alpha_{1-,1+,-}$ **和** $\beta_{1-,1+,-}$

设 $\widehat{\alpha}_x=(g_{1,s})\in C_s(C_G(x),k)$，且 $\widehat{\varphi}_y\colon\overline{C_G(y)}^m\to k\in C^m(C_G(y),k)$，其中 $x,y\in X$，$s,m\ge 0$ 和 $m-s-1<0$。我们想要计算

$$\begin{aligned}\alpha_{1-,1+,-}(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y)=\widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y)&=\rho_{s-m}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)\\&=\sum_{z\in X}\rho_{z,s-m}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

首先，我们计算 $\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\in C_{s-m}(kG,kG)$：

$$\iota_{x,s}\left(\widehat{\alpha}_x\right)=\iota_{x,s}\left(g_{1,s}\right)=\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}\right)\in\mathcal{H}_{x,s};$$

$$\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y):=\varphi_y:\overline{G}^{\times m}\to kG,\quad\varphi_y\left(h_{1,m}\right)=\sum_{i=1}^{n_y}\widehat{\varphi}_y\left(k^y_{i,1},\cdots k^y_{i,m}\right)y_ih_1h_2\cdots h_m,$$

其中 $k^y_{i,\ 1},\ \cdots,\ k^y_{i,\ m}\in\cancel{C_G(y)}$ 和 $\{k^y_{i,\ 1},\ \cdots,\ k^y_{i,\ m}\}=\spadesuit_{y,\ i}\{h_1,\ \cdots,\ h_m\}$；

$$\begin{aligned}\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)&=\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x\ \varphi_y(g_{1,m}),g_{m+1,s}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n_y}\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x\ \widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right)y_jg_1\cdots g_m,g_{m+1,s}\right)\\&=\sum_{z\in X}\sum_{j\in I_z}\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right)\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}\phi(y_j)^{-1}z\phi(y_j)g_1\cdots g_m,g_{m+1,s}\right)\end{aligned}$$

其中 $\{h^y_{j,1},\ \cdots,\ h^y_{j,m}\} = \spadesuit_{y,j}\{g_1,\ \cdots,\ g_m\}$; 然后

$$\begin{aligned}\rho_{s-m}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big) &= \sum_{z\in X}\rho_{z,s-m}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{j\in I_z}\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right)\rho_{s-m,z}(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}\phi(y_j)^{-1}z\phi(y_j)g_1\cdots g_m,g_{m+1,s})\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{j\in I_z}\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right)(h^z_{i_j,1},\cdots,h^z_{i_j,s-m})\end{aligned}$$

其中

- 对于任意 $z\in X$, I_z 定义为
$$I_z := \left\{j \mid 1\le j\le n_y,\ xy_j=\phi(y_j)^{-1}z\phi(y_j) \text{ for some } \phi(y_j)\in G\right\};$$
- $h^z_{i_j1},\ldots\ h^z_{i_j,s-m}\in C_{\overline{G}(z)}$ 由 $\Phi(y_j)g_1\cdots g_m = h\gamma_{i_j,z}\in C_G(z)\gamma_{i_j,z}$ 唯一确定
$$\{h^z_{i_j,1},\cdots,h^z_{i_j,s-m}\} = \spadesuit_{z,i_j}\{g_{m+1},\cdots,g_s\}.$$

现在我们计算 $\beta_{1-,1+,-}$。

$$\begin{aligned}\beta_{1-,1+,-}(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y) &= s_{s-m}\big(\iota^{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho_{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)\\ &= \sum_{z\in X}s_{z,s-m}\big(\iota^{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho_{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

对于任意 $z\in X$，根据 $s_{z,s-m}$ 的定义：$\mathcal{H}_{z,s-m}\to\mathcal{H}_{z,s-m+1}$，我们有

$$\begin{aligned}s_{z,s-m}\big(\iota^{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho_{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z &= \sum_{j\in I_z}\sum_{u=0}^{s-m}(-1)^u\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right)\\ &\big((h^z_{i_j,1}\cdots h^z_{i_j,u}\gamma_{s^u_{i_j},z}\ g_{m+u+1}\cdots g_s)^{-1}z,\ h^z_{i_j,1},\cdots,h^z_{i_j,u},\gamma_{s^u_{i_j},z},g_{m+u+1},\cdots,g_s\big).\end{aligned}$$

情形6。 $\alpha_{1-,1+,+}$ **和** $\beta_{1-,1+,+}$

令 $\widehat{\alpha}_x = (g_{1,s}) \in C_s(C_G(x)\ k)$，且 $\widehat{\varphi}_y\colon C_{\overline{G}(y)}{}^{m}\to k\in C^m(C_G(y)\ k)$，其中 $x,y\in X$，$s,m\ge 0$和 $m-s-1\ge 0$。我们要计算

$$\begin{aligned}\alpha_{1-,1+,+}(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y) = \widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y) &= \iota^{m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)\\ &= \sum_{z\in X}\iota^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

首先，我们计算

$$\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\in C^{m-s-1}(kG,kG) = \bigoplus_{z\in X}\mathcal{H}^{z,m-s-1},$$

对于 $(h_{1,m-s-1})\ \in\overline{G}^{\times m-s-1}$,

$$\begin{aligned}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)(h_{1,m-s-1}) &= \sum_{g\in G}gg_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x\ \varphi_y\left(g_{1,s},g^{-1},h_{1,m-s-1}\right)\\ &= \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n_y}\widehat{\varphi}_y(h^y_{j_g,1},\cdots,h^y_{j_g,m})gg_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xy_jg_1\cdots g_sg^{-1}h_1\cdots h_{m-s-1}\\ &= \sum_{z\in X}\sum_{i=1}^{n_z}\sum_{(g,j)\in I_{z_i}}\widehat{\varphi}_y(h^y_{j_g,1},\cdots,h^y_{j_g,m})z_ih_1h_2\cdots h_{m-s-1}\end{aligned}$$

其中

- 对于任意 $z\in X$、$g\in G$和 $j\in\{1,\cdots,n_x\}$、$\{h^y_{j_g,1},\cdots,h^y_{j_g,m}\}\subset C_G(y)$，定义如下

$$\{h^y_{j_g,1},\cdots,h^y_{j_g,n}\}=\spadesuit_{y,j}\{g_1,\cdots,g_s,g^{-1},h_1,\cdots,h_{m-s-1}\},$$

- $I_{z_i}:=\{(g,j)\mid g\in G,1\le j\le n_y,\ gg_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xy_jg_1\cdots g_sg^{-1}=z_i\}$.

那么，对于 $(h_{1,\ m-s-1})\in C_G(z)^{\times m-s-1}$，我们得到

$$\iota^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z(h_{1,m-s-1})=\sum_{(g,j)\in I_z}\widehat{\varphi}_y(h^y_{j_g,1},\cdots,h^y_{j_g,m})$$

其中 $I_z=I_{z_1}$。

现在我们计算 $\beta_{1-,\ 1+,\ +}$。

$$\begin{aligned}\beta_{1-,1+,+}(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\varphi}_y)&=s^{m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)\\&=\sum_{z\in X}s^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z.\end{aligned}$$

对于任意 $z\in X$ 和 $(h_{1,\ m-s-2})\in G^{m-s-2}$，根据 $s^{z,\ m-s-1}$ 的定义

$$s^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z(h_{1,m-s-2})=\sum_{l=0}^{m-s-2}\sum_{a=1}^{n_z}(-1)^le^1_{a,l}z_ah_1\cdots h_{n-t-2},$$

其中，$e^1_{a,l}$ 由下列方程确定

$$\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z(h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},h_{l+1},\cdots,h_{m-s-2})h^{-1}_{m-s-2}\cdots h^{-1}_1\gamma^{-1}_{a,z}=\sum_{t=1}^{n_z}e^t_{a,l}z_t,$$

并且根据对 $\alpha_{1-,1+,+}$ 的计算，我们有

$$\begin{aligned}e^1_{a,l}&=\iota^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z(h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},h_{l+1},\cdots,h_{m-s-2})\\&=\sum_{(g,j)\in I_z}\widehat{\varphi}_y(h^{y,a,l}_{j_g,1},\cdots,h^{y,a,l}_{j_g,n})\end{aligned}$$

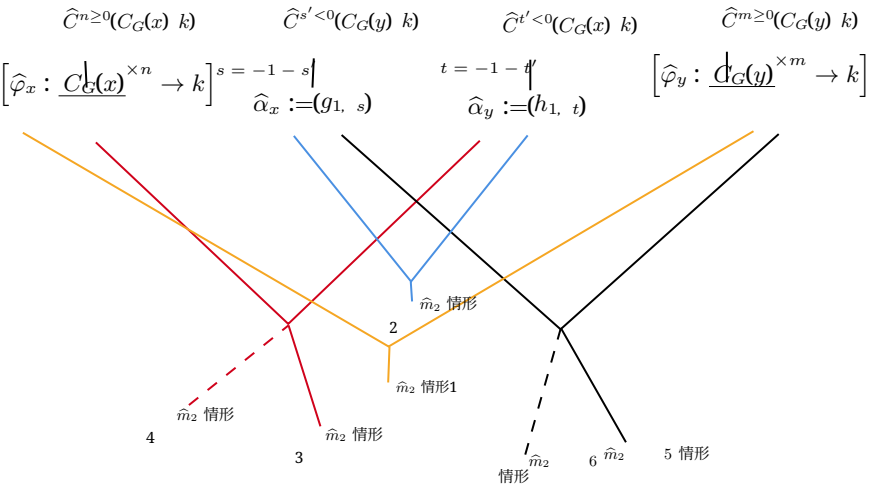
其中，对每个 $a\in\{1,\cdots,n_z\}$ 和 $l\in\{1,\cdots,m-s-2\}$，

- $\{h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,m-s-2}\}=\spadesuit_{z,a}\{h_1,\cdots,h_{n-t-2}\}$；- $I_z:=\{(g,j)\mid g\in G,$ $1\le j\le n_y,\ gg_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xy_jg_1\cdots g_sg^{-1}=z\}$；- 对于任意 $(g,j)\in I_z$，

$$\{h^{y,a,l}_{j_g,1},\cdots,h^{y,a,l}_{j_g,m}\}=\spadesuit_{y,j}\{h^z_{a,1},\cdots,h^z_{a,l},\gamma_{s^l_a,z},h_{l+1},\cdots,h_{m-s-2},g^{-1},g_1,\cdots,g_s\}.$$

为了便于计算和阅读，基于上述计算，我们给出如下指标图，用于计算 $\widehat{m}_2$。由此得到本文的第一个主要定理。

定理 3.3。设 G 是一个有限群，则 $\bigoplus C^*(C_G(x),k)$ 上的杯积 $\widehat{m}_2$ 可分为以下$x\in X$6 种情形：



具体而言，相应的结果如下:

1 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ **情形**

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)=\sum_{z\in X}\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z\in\bigoplus_{z\in X}C^{n+m}(C_G(z),k),$$

with

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z\left(h_{1,n+m}\right)=\sum_{(i,j)\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(h^x_{i,1},\cdots,h^x_{i,n}\right)\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right),$$

对于 $h_1,\ \cdots,\ h_{n+m}\in C_G(z)$, 其中

- $I_z=\left\{(i,j)\middle|\ 1\leq i\leq n_x,\ 1\leq j\leq n_y \text{ and } x_i\left(h_1\cdots h_n\right)y_j\left(h_1\cdots h_n\right)^{-1}=z\right\}$,
- $h^x_{i,1},\cdots,h^x_{i,n}\in\overline{C_G(x)}$由 $\{h_1,\ \cdots h_n\}$、 x 和 i 由过程 $\spadesuit$确定，即

$$\gamma_{i,x}h_1=h^x_{i,1}\gamma_{s^1_i,x},\quad \gamma_{s^1_i,x}h_2=h^x_{i,2}\gamma_{s^2_i,x},\cdots,\gamma_{s^{n-1}_i,x}h_n=h^x_{i,n}\gamma_{s^n_i,x},$$

我们记作$\{h^x_{i,\ 1},\ \cdots,\ h^x_{i,\ n}\}=\spadesuit_{x,\ i}\{h_1,\ \cdots h_n\}$。

- $h^y_{j,\ 1},\ \cdots,\ h^y_{j,\ m}\in\overline{C_G\ (y)}$ 和$\{h^y_{j,\ 1},\ \cdots,\ h^y_{j,\ m}\}=\spadesuit_{y,\ j}\{h_{n+1},\ \cdots,\ h_{n+m}\}$。

2 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ **情形**

$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\alpha}_y\right)=\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}\left(k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\right)\in\bigoplus_{z\in Z}C_{s+t+1}\left(C_G(z),k\right),$$

其中

- $I_z:=\left\{g\in G|h_1\cdots h_tg^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xg_1\cdots g_sgh_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y=\Phi(g)^{-1}z\Phi(g)\right.$ 对于某个 $\left.\Phi(g)\ \in G\right\}$.
- 对任意 $g\in I_z$, $\Phi(g)\ \in C_G(z)\gamma_{i_g,\ z}$ 并且

$$\{k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\}=\spadesuit_{z,i_g}\{h_1,\cdots,h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_1,\cdots,g_s\}.$$

3 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ **情形**

$$\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\alpha}_y)=\sum_{z\in X}\sum_{i\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(k^x_{i,1},\cdots,k^x_{i,n}\right)\left(h^z_{j_i,1},\cdots,h^z_{j_i,t-n}\right)$$

其中

- $\{k^x_{i,\ 1},\ \cdots,\ k^x_{i,\ n}\}=\spadesuit_{x,\ i}\{h_{t-n+1},$
$\cdots,\ h_t\}$; 对于任意 $z\in X,\ I_z$ 定义为

$$I_z:=\left\{i\mid 1\leq i\leq n_x,\ h_1\cdots h_{t-n}x_ih^{-1}_{t-n}\cdots h_1^{-1}y=\phi(x_i)^{-1}z\phi(x_i)\text{ for some }\phi(x_i)\in G\right\};$$

- $h^z_{j_i,\ 1},\ \cdots,\ h^z_{j_i,\ t-n} \overline{\in C_G(z)}$ 由 $\Phi(x_i) = h\gamma_{j_i,\ z} \in C_G(z)\gamma_{j_i,\ z}$ 唯一确定, 并且

$$\{h^z_{j_i,1}, \cdots, h^z_{j_i,t-n}\} = \spadesuit_{z,j_i}\{h_1, \cdots, h_{t-n}\}.$$

4 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ 情形

$$\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x, \widehat{\alpha}_y) = \sum_{z\in X} \iota^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x) \cup \iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z \in \bigoplus_{z\in X} C^{n-t-1}(C_G(z), k),$$

并且对于 $(g_{1,\ n-t-1}) \overline{\in C_G(z)}^{\times n-t-1}$, 我们得到

$$\iota^{z,n-t-1}\big(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x) \cup \iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y)\big)_z(g_{1,n-t-1}) = \sum_{(g,i)\in I_z} \widehat{\varphi}_x(h^x_{i_g,1}, \cdots, h^x_{i_g,n})$$

其中

- $I_z := \{(g,i) \mid g \in G, 1 \le i \le n_x, x_i g_1 \cdots g_{n-t-1} g^{-1} y g (g_1 \cdots g_{n-t-1})^{-1} = z\}$,
- 对于任意 $z \in X$, $(g,\ i) \in I_z$, $\{h^x_{i_g,\ 1},\ \cdots,\ \overline{h^x_{i_g,\ n}}\} \subset C_G(x)$ 定义如下

$$\{h^x_{i_g,1}, \cdots, h^x_{i_g,n}\} = \spadesuit_{x,i}\{g_1, \cdots, g_{n-t-1}, g^{-1}, h_1, \cdots, h_t\}.$$

5 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ 情形

$$\widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\varphi}_y) = \sum_{z\in X} \sum_{j\in I_z} \widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1}, \cdots, h^y_{j,m}\right)(h^z_{i_j,1}, \cdots, h^z_{i_j,s-m}),$$

其中

- 对任意 $z \in X$, I_z 定义为

$$I_z := \left\{j \mid 1 \le j \le n_y,\ xy_j = \phi(y_j)^{-1} z \phi(y_j) \text{ for some } \phi(y_j) \in G\right\};$$

- 对任意 $j \in I_z$, $\{h^y_{j,\ 1},\ \cdots,\ h^y_{j,\ m}\} = \spadesuit_{y,\ j}\{g_{1,}\ \cdots,\ g_m\}$;
- $h^z_{i_j,\ 1},\ \cdots,\ h^z_{i_j,\ s-m} \overline{\in C_G(z)}$ 由 $\Phi(y_j) g_1 \cdots g_m = h\gamma_{i_j,\ z} \in C_G(z)\gamma_{i_j,\ z}$ 唯一确定, 且

$$\{h^z_{i_j,1}, \cdots, h^z_{i_j,s-m}\} = \spadesuit_{z,i_j}\{g_{m+1}, \cdots, g_s\}.$$

6 $\widehat{\mathbf{m}}_2$ 情形

$$\widehat{m}_2(\widehat{\alpha}_x, \widehat{\varphi}_y) = \sum_{z\in X} \iota^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x) \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z,$$

且对于任意 $z \in X$ 以及 $(h_{1,m-s-1}) \overline{\in C_G(z)}^{\times m-s-1}$,

$$\iota^{z,m-s-1}\big(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x) \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)\big)_z(h_{1,m-s-1}) = \sum_{(g,j)\in I_z} \widehat{\varphi}_y(h^y_{j_g,1}, \cdots, h^y_{j_g,m})$$

其中

- $I_z := \{(g,j) \mid g \in G, 1 \le j \le n_y,\ g g_s^{-1} \cdots g_1^{-1} x y_j g_1 \cdots g_s g^{-1} = z\}$,
- for any $(g,j) \in I_z$, $\{h^y_{j_g,1}, \cdots, h^y_{j_g,m}\} \subset \overline{C_G(y)}$ is defined as follows

$$\{h^y_{j_g,1}, \cdots, h^y_{j_g,n}\} = \spadesuit_{y,j}\{g_1, \cdots, g_s, g^{-1}, h_1, \cdots, h_{m-s-1}\},$$

3.3. A_∞-结构在复形层面的 Hochschild 上同调加法分解上的表现。

根据同伦传递定理，与 PBT 中任意一个有 n 个叶子的平面二叉树相关联的运算，是通过将 $\iota^{*\geq 0} = \rho^*$ 赋给叶子、将 $\hat{s}^{*\geq 0} = s^*$ 赋给内部边、将 $\widehat{m}_2$ 赋给内部顶点，并将 $\hat{\rho}^{*\geq 0} = \iota^*$ 赋给根来定义的。因此，该平面二叉树的每个二叉子树都对应于 $\alpha_{i+,\ j+,\ +}$ 运算，或 $\beta_{i+,\ j+,\ +}(i,\ j \in \{0,\ 1\})$。

特别地，只有最底层的二叉子树对应于 α-型运算，而所有其他子树则与 β-型运算相关联。此外，当 $n = 2$ 时，最底层的子树对应于运算 $\alpha_{1+,1++}$；否则，它对应于 $\alpha_{0+,1+,+}$, $\alpha_{1+,0+,+}$ 或 $\alpha_{0+,0+,+}$ 之一。此外，只有最顶层对应于运算 $\beta_{1+,1+,+}$ (for $n \geq 3$)，而顶层与底层之间的所有其他层则对应于运算 $\beta_{0+,1+,+}$, $\beta_{1+,0+,+}$ 或 $\beta_{0+,0+,+}$ 之一。因此，与任意一棵有 n 个叶子的平面二叉树相关联的运算，由一系列 β-运算组成，后接一个最终的 α-运算。

在本节中，我们讨论 $\alpha_{i+,\ j+,\ +}$ 和 $\beta_{i+,\ j+,\ +}(i,\ j \in \{0,\ 1\})$ 的所有结果，然后证明本节中的以下主要结果。

定理 3.4。Hochschild上同调复形 $C^*(kG,\ kG)_{x\in X}$ 的加法分解 $\bigoplus C^*(C_G(x)\ k)$ 具有 A_∞-代数结构。公式除符号差异外给出如下：

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \partial,\\
m_n(\widehat{\varphi_1},\ldots,\widehat{\varphi_n})(g_{1,1}\ldots,g_{1,j_1},g_{2,1},\ldots,g_{2,j_2},\ldots,g_{n,1},\ldots,g_{n,j_n}) &\\
= \sum \pm\widehat{\varphi_1}(h_{1,1},\ldots,h_{1,j_1})\cdots\widehat{\varphi_n}(h_{n,1}\ldots,h_{n,j_n}) &
\end{aligned}
$$

对于 $n \geq 2$ 以及对于 $\widehat{\varphi_s}:\ \overline{C_G(x_s)}^{\times j_s} \to k$、$x_s \in X$、$s = 1,\ 2$、$\cdots$、$n$，以及序列

$$(h_{1,1},\ldots,h_{1,j_1},\cdots,h_{n,1}\ldots,h_{n,j_n})$$

由该序列确定（该序列属于某个给定 $v \in X$ 的 $\overline{C_G(v)}$）

$$(g_{1,1}\ldots,g_{1,j_1},\ldots,g_{n,1},\ldots,g_{n,j_n})$$

通过将一系列类型为 α 或类型为 β 的复合变换与作用 ι^*、^{v} 结合起来。

我们将在第 3.3.1 节证明该定理。为证明该定理，我们需要以下断言。

断言 3.5。设 $\widehat{\varphi}_s$ 是 $C^{j_s}(C_G(x_s)\ k)$ 中的元素，其中 $s = 1,\ \cdots,\ n$，且 $j_s \geq 0$ 和 $x_s \in X$。对它们进行 $n-1$ 次 β 运算的结果，差一个符号，可表示为

$$
\begin{aligned}
&\beta(\widehat{\varphi_1},\ldots,\widehat{\varphi_n})(g_1,\ldots,g_{j_1+\cdots+j_n-n+1})\\
&= \sum_{z\in X}\sum_{a=1}^{n_z} \pm\widehat{\varphi_1}(h_{1,1},\ldots,h_{1,j_1})\cdots\widehat{\varphi_n}(h_{n,1}\ldots,h_{n,j_n})z_a g_1\ldots g_{j_1+\cdots+j_n-n+1},
\end{aligned}
$$

而序列

$$(h_{1,1},\ldots,h_{1,j_1},\cdots,h_{n,1}\ldots,h_{n,j_n})$$

由序列确定

$$(g_1,\ldots,g_{j_1+\cdots+j_n-n+1}) \in \overline{G}^{\times j_1+\cdots+j_n-n+1}$$

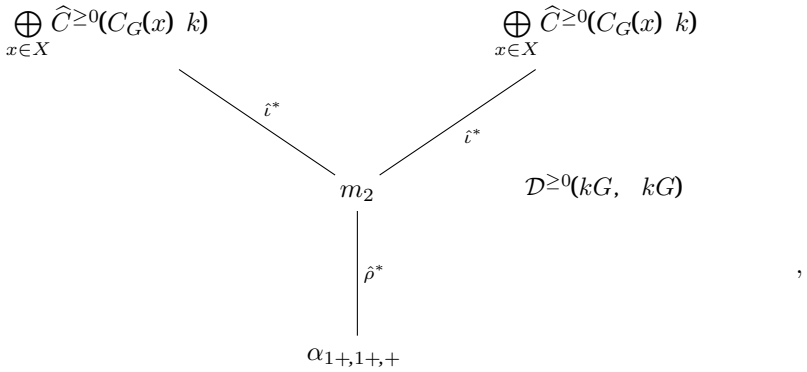
通过组合一列关于 z，a 的 β 型复合变换。

在我们的计算过程中，我们多次使用了过程 $\spadesuit$。回想一下，$\{h^x_{i,\ 1},\ \cdots,\ h^x_{i,\ n}\} = \spadesuit_{x,\ i}\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$ 表示序列 $\{h^x_{i,\ 1},\ \cdots,\ h^x_{i,\ n}\}$ 由以下过程中的序列 $\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$、$x \in X$ 和 $i \in \{1,\ \cdots,\ n_x\}$ 确定：

$$\gamma_{i,x}g_1 = h^x_{i,1}\gamma_{s^1_i,x},\quad \gamma_{s^1_i,x}g_2 = h^x_{i,2}\gamma_{s^2_i,x},\ \cdots,\gamma_{s^{n-1}_i,x}g_n = h^x_{i,n}\gamma_{s^n_i,x}.$$

3.3.1. $\alpha_{i+,\ j+,\ +}$。

(1) 考虑平面二叉树 $\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$,



,

我们将此图记为 $\alpha_{1+,1+,+}(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y)\ =\widehat{m}_2(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y)$。

取定 $z\in X$，由定理 3.3，对于 $(h_{1,n+m})\ \in \overline{C_G(z)}^{\times(n+m)}$，我们有

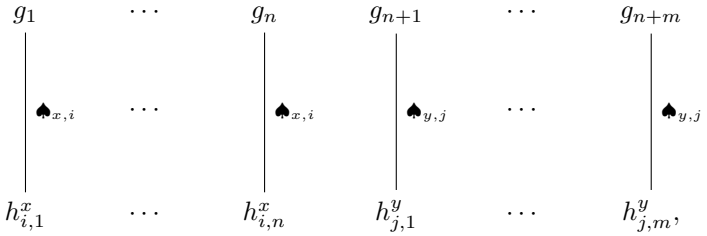
$$\widehat{m}_2\left(\widehat{\varphi}_x,\widehat{\varphi}_y\right)_z\left(h_{1,n+m}\right)=\sum_{(i,j)\in I_z}\widehat{\varphi}_x\left(h^x_{i,1},\cdots,h^x_{i,n}\right)\widehat{\varphi}_y\left(h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\right).$$

我们注意到, 从这棵平面二叉树得到结果的关键步骤是从序列中得到序列 e

$$\{h^x_{i,1},\cdots,h^x_{i,n},h^y_{j,1},\cdots,h^y_{j,m}\}$$

由序列 $\{h_1,\cdots,h_{n+m}\}$。

因此，我们可以将上述计算过程视为：对于平面二叉树 $\alpha_{1+,1+,+}$，输入 $n+m$ 个元素 $h_1,\cdots,h_{n+m}\in \underline{C_G(z)}$, 并输出 $n+m$ 个元素 $h^x_{i,1},\overline{\cdots,h^x_{i,n}}\in C_G(x)$ 和 $h^y_{j,1},\ldots,h^y_{j,m}\in C_G(y)$。我们将计算过程简化如下:



第二行由第一行经过两次 ♠过程得到：$\{h^x_{i,\ 1},\ \cdots,\ h^x_{i,\ n}\}=\spadesuit_{x,\ i}\{h_1,\ \cdots,\ h_n\}\subset C_G(x)$ 和 $\{h^y_{j,\ 1},\ \cdots,\ h^y_{j,\ m}\}=\spadesuit_{y,\ j}\{h_{n+1},\ \cdots,\ h_{n+m}\}\subset C_G(y)$，其中固定 $(i,\ \overline{j})\in I_{z^\circ}$

因此，标记为类型 $\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$ 的平面二叉树将序列 $\{h_1,\ \cdots,\ h_n,\ h_{n+1},\ \cdots,\ h_{n+m}\}$ 变为序列 $\{h^x_{i,\ 1},\ \ldots,\ h^x_{i,\ n},\ h^y_{j,\ 1},\ \cdots,\ h^y_{j,\ m}\}$，我们称这一过程为 $\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$ 变换。

(2) 不 w 我们考虑标记为类型 $\alpha_{0+,1+,+}$、 $\alpha_{1+,0+,+}$ 和 $\alpha_{0+,0+,+}$的平面二叉树 .

现在，我们以情形 $\alpha_{0+,\ 1+,\ +}$ 为例进行详细分析，另外两种情形也可类似推得。设 $\varphi_x\in\mathcal{H}^{x,\ n}$ 和 $\widehat{\varphi}_y\in C^m(C_G(y)\ k)$，其中 x、$y\in X$ 和 m、$n\geq 0$,

$$\alpha_{0+,1+,+}(\varphi_x,\widehat{\varphi}_y)=\iota^{n+m}(\varphi_x\cup\rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)),$$

这里，元素 φ_x 位于 0-端，是此前一系列 β-型运算的结果。根据断言 3.5，我们假设前一个 β-型运算的输出为

$$\varphi_x(g_1,\cdots,g_n)=\sum_{i=1}^{n_x}\pm\widehat{\varphi_1}(h_1,\ldots,h_{i_1})\widehat{\varphi_2}(h_{i_1+1},\ldots,h_{i_2})\cdots\widehat{\varphi_k}(h_{i_{k-1}+1}\ldots,h_{n+k-1})x_ig_1\cdots g_n.$$

对于 $z \in X$ 和序列 $\{g_1, \cdots, g_{n+m}\} \in \overline{C_G(z)}^{n+m}$，我们有

$$\iota^{z,n+m}(\varphi_x \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)) = \sum_{(i,j)\in I_z} \varphi_x(g_1, \cdots, g_n)\widehat{\varphi}_y(h^y_{j,1}, \cdots, h^y_{j,m}) y_j g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} z^{-1}.$$

因此，利用 φ_x 的公式，我们得到

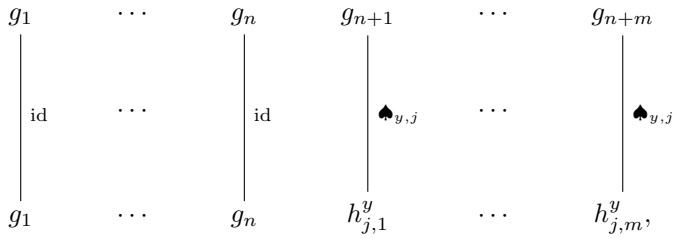
$$\iota^{z,n+m}(\varphi_x \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y)) = \sum_{(i,j)\in I_z} \pm\widehat{\varphi_1}(h_1, \ldots, h_{i_1})\widehat{\varphi_2}(h_{i_1+1}, \ldots, h_{i_2}) \cdots \widehat{\varphi_k}(h_{i_{k-1}+1} \ldots, h_{n+k-1}),$$

其中 $I_z = \{(i,\ j) \mid 1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y,\ x_i g_1 \cdots g_n y_j g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} = z\}$ 且

$$\{h^y_{j,1}, \cdots, h^y_{j,m}\} = \spadesuit_{y,j}\{g_{n+1}, \cdots, g_{n+m}.\}$$

另外两种情形类似，由此我们证明定理 3.4。

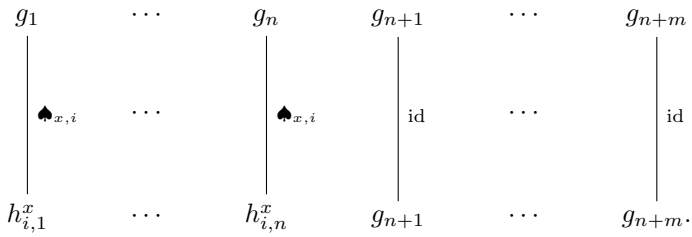
与变换 $\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$ 类似，我们现在给出 $\alpha_{0+,\ 1+,\ +}$ 的变换。为便于以下讨论，我们将 0 端的输入序列记为 $\{g_1,\ \cdots,\ g_n\}$，将 1 端的输入序列记为 $\{g_{n+1},\ \cdots,\ g_{n+m}\}$。对固定的 $z \in X$ 和 $(i,\ j) \in I_z$，我们将这个计算过程简记为 ($\alpha_{0+,\ 1+,\ +}$-变换)：



第二行由第一行确定：0端上的元素保持不变，而1端上的元素则通过 $\spadesuit_{y,j}$-变换得到，即 $\{h^y_{j,1}, \cdots, h^y_{j,m}\} = \spadesuit_{y,j}\{g_{n+1}, \cdots, g_{n+m}\}$。

同理，我们定义 $\alpha_{1+,0+,+}$-变换：

设 $\{g_1, \ldots, g_n\}$ 为1端上的输入，$\{g_{n+1}, \ldots, g_{n+m}\}$ 为0端上的输入。对于固定的 $z \in X$ 和 $(i,j) \in I_z$，我们将此计算过程简记为 ($\alpha_{1+,0+,+}$-变换)：



3.3.2. $\beta_{i+,j+,+}$.

(1) 考虑标记为 $\beta_{1+,\ 1+,\ +}$ 的平面二叉树。

回忆第 3.2 节中的结果，对于固定的 $z \in X$ 和 $(g_1,\ \cdots,\ g_{m+n-1}) \in G^{\times \cancel{m}+n-1}$

$$\begin{aligned}\beta_{1+,1+,+}\left(\widehat{\varphi}_x, \widehat{\varphi}_y\right)_z (g_{1,n+m-1}) &= s^{z,n+m}(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x) \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(g_{1,n+m-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{m+n-1} \sum_{a=1}^{n_z} (-1)^l e^1_{a,l} z_a g_1 \cdots g_{n+m-1},\end{aligned}$$

其中 $e^1_{a,\ l}$ 对于每个 $l \in \{0,\ 1、\ .....、\ m+n-1\}$ 和 $a \in \{1、\ .....、\ n_z\}$，由下式给出

$$\begin{aligned} e^1_{a,l} &= \iota^{z,n+m}(\rho^{x,n}(\widehat{\varphi}_x) \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,l}, \gamma_{s^l_a,z}, g_{l+1}, \ldots, g_{n+m-1}) \\ &= \alpha_{1+,1+,+}(\widehat{\varphi}_x, \widehat{\varphi}_y)_z(h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,l}, \gamma_{s^l_a,z}, g_{l+1}, \ldots, g_{n+m-1}) \\ &= \sum_{(i,j)\in I^{a,l}_z} \widehat{\varphi}_x(h^x_{i,1}, \ldots, h^x_{i,n})\widehat{\varphi}_y(h^y_{j,1}, \ldots, h^y_{j,m}), \end{aligned}$$

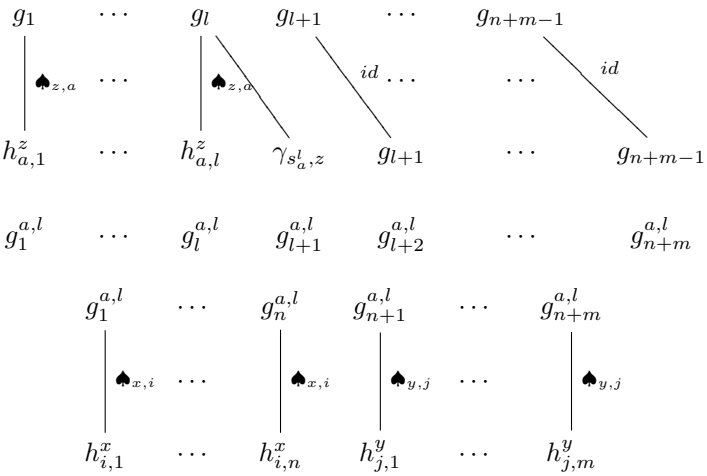
其中

- $(h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,n+m-1}) = \spadesuit_{z,a}(g_1, \ldots, g_{n+m-1})$,
- $I^{a,l}_z = \{(i,j) |\ 1 \le i \le n_x, 1 \le j \le n_y \text{ and } x_i(g^{a,l}_1 \cdots g^{a,l}_n)y_j(g^{a,l}_1 \cdots g^{a,l}_n)^{-1} = z\}$, here we rewrite

$$(g^{a,l}_1, g^{a,l}_2, \cdots, g^{a,l}_{n+m}) = (h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,l}, \gamma_{s^l_a,z}, g_{l+1}, \ldots, g_{n+m-1}),$$

  对于每个 $(i,j) \in I^{a,\ l}_{,z}$,
- $\{h^x_{i,1}, \ldots, h^x_{i,n}\} = \spadesuit_{x,i}\{g^{a,l}_1 \cdots,\ g^{a,\ l}_{,\ n}\}$,
- $\{h^y_{j,\ 1},\ .....,\ h^y_{j,\ m}\} = \spadesuit_{y,\ j}\{g^{a,\ l}_{,\ n+1},\ \cdots,\ g^{a,\ l}_{,\ n+m}\}$。

通过对 $\alpha_{1+1+,\ +}$ 的分析，可以明显看出，计算 $e^1_{a,\ l}$ 相当于对输入 $\{h^z_{a,\ 1},\ .....,\ h^z_{a,\ l},\ \gamma_{s^l_a,\ z},\ g_{l+1},\ ....., g_{n+m-1}\}$ 应用变换 $\alpha_{1+,\ 1+,\ +}$。因此，计算 $\beta_{1+1+,\ +}$ 可以用下面的图示简洁地表示:



这个图示可以分为三个步骤来理解:

步骤 1。第二行由第一行确定，这符合同伦 s^* 的显式公式。具体而言，$\{h^z_{a,\ 1},\ \cdots,\ h^z_{a,\ l}\} = \spadesuit_{z,\ a}\{g_1,\ \cdots, g_l\}$，以及位于第 $l+1$ 个位置的元素 $\gamma_{s^l_a,\ z}$。我们将此变换记为一个 s^l-变换。

步骤 2. 我们将第二行中的元素重新标记为 $\{g^{a,\ l}_{,1}, \cdots, g^{a,\ l}_{,n+m}\}$。重新标记不会改变元素本身，只改变它们的记号。此步骤的目的是避免根据 l 和 m的取值区分不同情形。

步骤 3. 第三行由第二行通过对序列$\{g^{a,\ l}_{,1}, \cdots, g^{a,\ l}_{,n+m}\}$应用变换 $\alpha_{1+,1+,+}$ 得到。具体而言，$\{h^x_{i,1}, \ldots, h^x_{i,n}\} = \spadesuit_{x,i}\{g^{a,\ l}_{,1}, \cdots, g^{a,\ l}_{,n}\}$ 以及 $\{h^y_{j,1}, \ldots, h^y_{j,m}\} = \spadesuit_{y,j}\{g^{a,\ l}_{,n+1}, \cdots, g^{a,\ l}_{,n+m}\}$。

因此，这个变换将序列映射

$$\{g_1, \cdots, g_{n+m-1}\}$$

到序列

$$\{h^x_{i,1}, \ldots, h^x_{i,n}, h^y_{j,1}, \ldots, h^y_{j,m}\},$$

并将其记为 $\beta_{1+,1+,+}$**-变换**。

(2) 现在我们计算 $\beta_{0+,1+,+}$, $\beta_{1+,0+,+}$ 和 $\beta_{0+,0+,+}$。

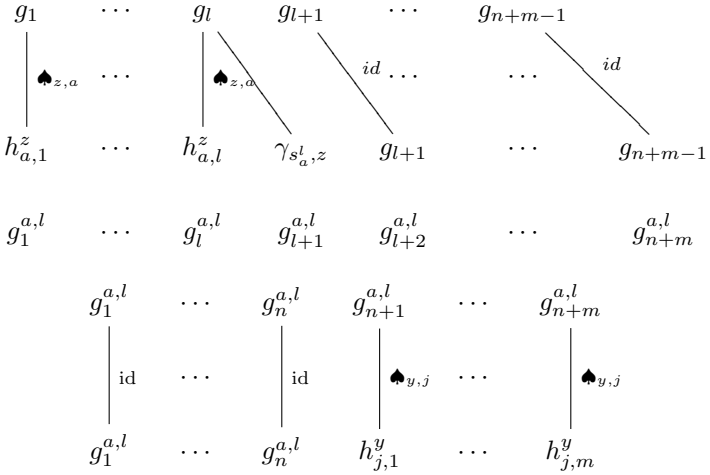
对于固定的 $z \in X$ 和 $(g_1, \cdots, g_{m+n-1}) \in \overline{G}^{\times m+n-1}$

$$\begin{aligned}\beta_{0+,1+,+}\left(\varphi_x, \widehat{\varphi}_y\right)_z (g_{1,n+m-1}) &= s^{z,n+m}(\varphi_x \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(g_{1,n+m-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{m+n-1} \sum_{a=1}^{n_z} (-1)^l e^1_{a,l} z_a g_1 \cdots g_{n+m-1},\end{aligned}$$

其在给定 $e^1_{a,l}$ 的情况下，对每个 $l \in \{0, \mathbf{1}, \ldots, m+n-1\}$ 和 $a \in \{1, \ldots, n_z\}$，定义如下：

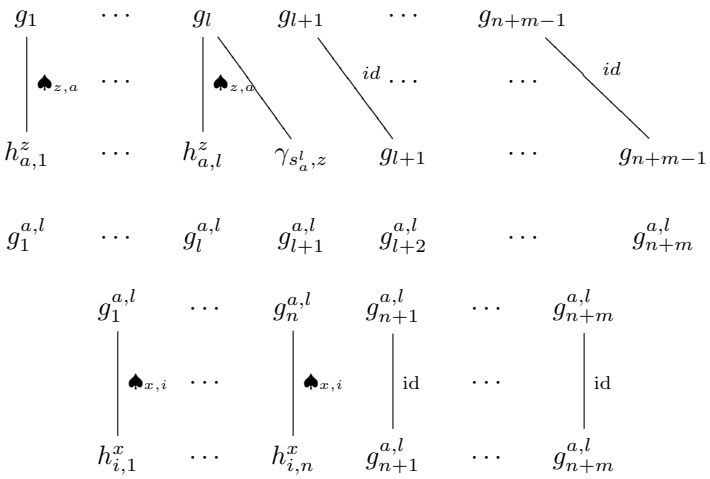
$$\begin{aligned} e^1_{a,l} &= \iota^{z,n+m}(\varphi_x \cup \rho^{y,m}(\widehat{\varphi}_y))_z(h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,l}, \gamma_{s^l_a,z}, g_{l+1}, \ldots, g_{n+m-1}) \\ &= \alpha_{0+,1+,+}(\varphi_x, \widehat{\varphi}_y)_z(h^z_{a,1}, \ldots, h^z_{a,l}, \gamma_{s^l_a,z}, g_{l+1}, \ldots, g_{n+m-1}) \\ &= \sum_{(i,j)\in I^{a,l}_z} \varphi_x(g^{a,l}_1, \ldots, g^{a,l}_n)\widehat{\varphi}_y(h^y_{j,1}, \ldots, h^y_{j,m}) y_j (g^{a,l}_1 \cdots g^{a,l}_n)^{-1} z^{-1}. \end{aligned}$$

与 $\beta_{1+,1+,+}$类似，我们可以将 $\beta_{0+1+,+}$-变换示意如下：



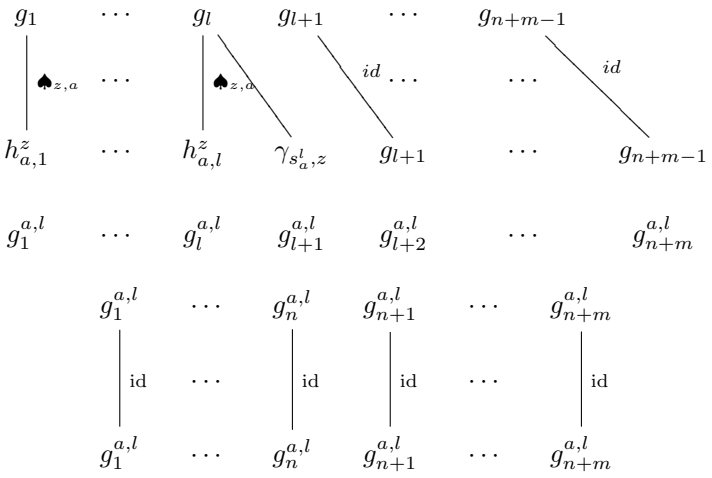
该图示也可以分为三个步骤来理解。前两步与 $\beta_{1+1+,+}$-变换相同，而在第三步中，所用的运算替换为 $\alpha_{0+,1+,+}$。

类似地，我们定义 $\beta_{1+,0+,+}$-变换：



这一迹 变换意味着我们先使用 s^l-变换，然后使用 $\alpha_{1+,\ 0+,\ +}$-变换 n.

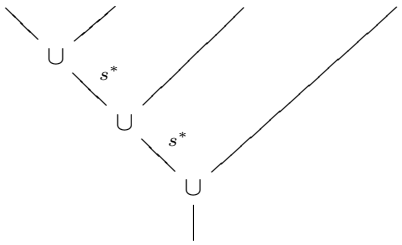
最后，我们定义 $\beta_{0+,\ 0+,\ +}$-变换：



3.3.3. $\widehat{m}_n$ 的计算。

根据本节开头的分析，我们有定理 3.4 ，并已在第 3.3.1 节中证明。现在，我们给出一个具体例子，以帮助理解其内容。

例 3.6。 设 $\widehat{\varphi}_1 : C_G(x)^{\times m} \xrightarrow{} k$, $\widehat{\varphi}_2 : C_G(y)^{\times n} \xrightarrow{} k$, $\widehat{\varphi}_3 : C_G(z)^{\times p} \xrightarrow{} k$, $\widehat{\varphi}_4 : C_G(u)^{\times q} \xrightarrow{} k$, 其中$x$, y, z, $u \in X$。考虑 PBT_4 中的以下平面二叉树：



与此平面二叉树对应的运算是以下内容的一个求和项

$$\widehat{m}_4(\widehat{\varphi}_1,\widehat{\varphi}_2,\widehat{\varphi}_3,\widehat{\varphi}_4)(g_1,\cdots,g_{m-1},g_m,\cdots,g_{m+n-1},g_{m+n},\cdots,g_{m+n+p-1},\cdots,g_{m+n+p+q-2}),$$

具体而言，该运算涉及执行以下变换序列：$\beta_{1+,\ 1+,\ +} \times\mathrm{id}\ \times\mathrm{id}\ \to\beta_{0+,\ 1+,\ +} \times\mathrm{id} \to \alpha_{0+,\ 1+,\ +}$，也就是说，该运算为

$$\alpha_{0+,1+,+}(\beta_{0+,1+,+}(\beta_{1+,1+,+}(\widehat{\varphi}_1,\widehat{\varphi}_2),\widehat{\varphi}_3),\widehat{\varphi}_4).$$

为了精确计算这个运算，我们输入原始序列

$$(g_1,\cdots,g_{m-1},g_m,\cdots,g_{m+n-1},g_{m+n},\cdots,g_{m+n+p-2},g_{m+n+p-1},\cdots,g_{m+n+p+q-2}),$$

序列依次变化如下：

$$(g_1,\cdots,g_{m-1},g_m,\cdots,g_{m+n-1},g_{m+n},\cdots,g_{m+n+p-2},h^u_{d,1},\cdots,h^u_{d,q}),$$

经过第一次变换后 $\alpha_{0+,\ 1+,\ +}$，并且

$$(h_{a,1},\cdots,h_{a,l},\gamma,g_{l+1},\cdots,g_{m+n-2},h^z_{c,1},\cdots,h^z_{c,p},h^u_{d,1},\cdots,h^u_{d,q})$$

对于 $1 \le l \le m+n-2$，经过第二次变换 $\beta_{0+,\ 1+,\ +}$，并且

$$(h^x_{a,1},\cdots,h^x_{a,m},h^y_{b,1},\cdots,h^y_{b,n},h^z_{c,1},\cdots,h^z_{c,p},h^u_{d,1},\cdots,h^u_{d,q}).$$

在最后一次变换之后 n $\beta_{1+,\ 1+,\ +}$，那么与这棵平面二叉树对应的求和项为

$$\sum \pm\widehat{\varphi}_1(h^x_{a,1},\cdots,h^x_{a,m})\widehat{\varphi}_2(h^y_{b,1},\cdots,h^y_{b,n})\widehat{\varphi}_3(h^z_{c,1},\cdots,h^z_{c,p})\widehat{\varphi}_4(h^u_{d,1},\cdots,h^u_{d,q}).$$

3.4. A_∞-结构在复形层面的 Hochschild 同调加法分解上。

可以看到，在计算 $\widehat{m}_n$ 时， β 变换会多次出现，而 α 变换只出现一次。为便于计算，我们先计算 $\beta_{i-,\ j-,\ -}$。

3.4.1. $\beta_{i-,j-,-}$.

我们先计算 $\beta_{1-,\ 1-,\ -}$。

令 $\widehat{\alpha}_x=(g_{1,\ s})\in C_s(C_G(x)\ k)$ 且 $\widehat{\alpha}_y=(h_{1,\ t})\in C_t(C_G(y)\ k)$，则有

$$\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_x\right)=\iota_{x,s}\left(\widehat{\alpha}_x\right)=\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}\right)\in\mathcal{H}_{x,s};$$
$$\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_y\right)=\iota_{y,t}\left(\widehat{\alpha}_y\right)=\left(h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t}\right)\in\mathcal{H}_{y,t}.$$

由第2.3节的情形2可知

$$\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_x\right)\cup\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_y\right)=\sum_{g\in G}(gh_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t},g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}).$$

对于每个 $z\in X$，我们定义

$$I_z:=\{g\in G|\ h_1\cdots h_tg^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xg_1\cdots g_sgh_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y=\phi(g)^{-1}z\phi(g)\text{ for some }\phi(g)\in G\},$$

于是我们可以将 $\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_x\right)\cup\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_y\right)$ 写成

$$\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x^{-1}g_1\cdots g_sgh_t^{-1}\cdots h_1^{-1}\phi(g)^{-1}z\phi(g),h_{1,t},g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}).$$

对于任意 $z\in X$ 和 $g\in I_z$，存在 i_g 使得 $\phi(g)\in C_G(z)\gamma_{\overline{i_g,\ z}}$，假设

$$\{k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\}=\spadesuit_{z,i_g}\{h_1,\cdots,h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_1,\cdots,g_s\},$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&\hat{s}^*(\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_x\right)\cup\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_y\right))\\
=&\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}s_{z,s+t+1}(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x^{-1}g_1\cdots g_sgh_t^{-1}\cdots h_1^{-1}\phi(g)^{-1}z\phi(g),h_{1,t},g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s})\\
=&\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}\sum_{j=0}^{s+t+1}(-1)^j((k^z_{i_g,1}\cdots k^z_{i_g,j}\gamma_{s^j_{i_g},z}g'_{j+1}\cdots g'_{s+t+1})^{-1}z,k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,j},\gamma_{s^j_{i_g},z},g'_{j+1},\cdots,g'_{s+t+1}),
\end{aligned}$$

其中，我们在最后一步将 $\{h_1,\cdots,h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_1,\cdots,g_s\}$ 重新标记为 $\{g'_1,\cdots,g'_{s+t+1}\}$。由此可知，对于 0 端，只需考虑输入元素 $\alpha_x:=(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s})$。按照 $\beta_{0-,1-,-}$、 $\beta_{1-,0-,-}$ 和 $\beta_{0-,0-,-}$ 的计算，我们得到:
对于

$$\alpha_x=\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}\right)\in\mathcal{H}_{x,s};$$
$$\alpha_y=\left(h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t}\right)\in\mathcal{H}_{y,t};$$
$$\widehat{\alpha}_x:=(g_{1,s})\in C_s\left(C_G(x),k\right);$$
$$\widehat{\alpha}_y:=(h_{1,t})\in C_t\left(C_G(y),k\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{s}^*(\alpha_x\cup\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_y\right))=\hat{s}^*(\hat{\imath}^*\left(\widehat{\alpha}_x\right)\cup\alpha_y)=\hat{s}^*(\alpha_x\cup\alpha_y)\\
=&\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}\sum_{j=0}^{s+t+1}(-1)^j((k^z_{i_g,1}\cdots k^z_{i_g,j}\gamma_{s^j_{i_g},z}g'_{j+1}\cdots g'_{s+t+1})^{-1}z,k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,j},\gamma_{s^j_{i_g},z},g'_{j+1},\cdots,g'_{s+t+1}).
\end{aligned}$$

It 显然，上述计算的关键在于如何获得序列

$$\{k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,j},\gamma_{s^j_{i_g},z},g'_{j+1},\cdots,g'_{s+t+1}\}$$

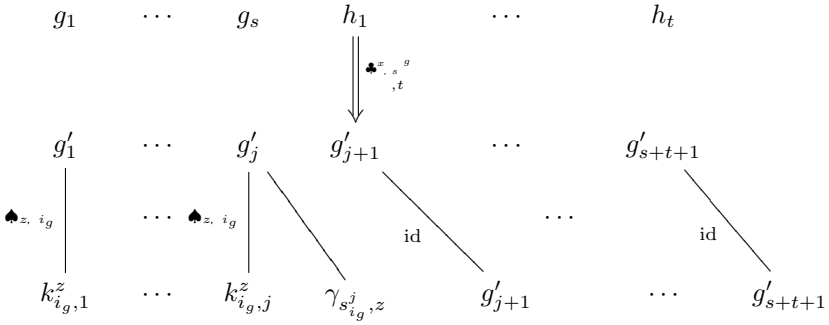
来自序列 $\{g_1,\ \cdots,\ g_s,\ h_1,\ \cdots,\ h_t\}$。为便于描述，我们将 $\clubsuit^{x,\ s\ t}_{,}{}^{g}$ 定义为

$$(g'_1,\cdots,g'_{s+t+1})=\clubsuit^{x,g}_{s,t}(g_1,\cdots,g_s,h_1,\cdots,h_t)=(h_1,\cdots,h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_1.\cdots,g_s)$$

因此，对于类型为 $\beta_{i-,\ j-,\ -}$ 的平面二叉树，输入由以下部分组成：

$$g_1,\cdots,g_s\in\overline{C_G(x)},\quad h_1,\cdots,h_t\in\overline{C_G(y)}.$$

给定一个固定的 $z\in X$、$g\in I_z$ 和 $\phi(g)\in\overline{C_G(z)}\gamma_{i_g,\ z}$，我们固定 $j\in\{1、2,\ \cdots,\ s+t+1\}$，并将变换序列记作：

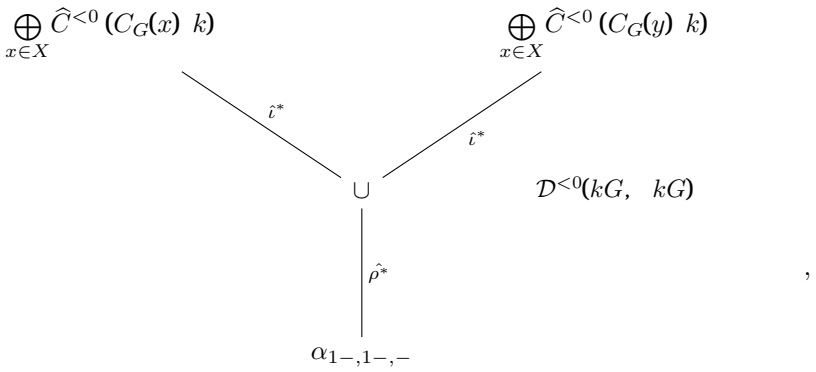


具体而言，对整个第一行序列应用运算 $\clubsuit^{x,\ s\ t}_{,}{}^{g}$，即可得到第二行序列。沿用上一节的记号，第三行序列由第二行序列得到：首先对前 j 个元素应用变换 $\spadesuit_{z,\ i}$，然后插入一个额外元素 $\gamma_{s^j_{i_g},\ z}$，同时保持最后 $s+t-j+1$ 个元素不变。

此外，对于变换类型 $\beta_{i-,\ j-,\ -}$，无论 $i,\ j=0$ 还是 1，序列变换都保持不变。因此，我们将上述变换序列统称为 $\beta_{-,\ -}$变换。

3.4.2. $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$。

我们首先计算 $\alpha_{1-,\ 1-,\ -}$，即进行如下运算



,

对于任意的 $x,y\in X$, $s,t\geq 0$。令

$$\widehat{\alpha}_x:=(g_{1,s})\in\widehat{C}^{-s-1}(C_G(x),k)=k\left[\overline{C_G(x)}^{\times s}\right]\ \text{and}\ \widehat{\alpha}_y:=(h_{1,t})\in\widehat{C}^{-t-1}(C_G(y),k)=k\left[\overline{C_G(y)}^{\times t}\right],$$

我们有

$$\rho_{z,s+t+1}(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y))=\sum_{g\in I_z}\left(k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\right),$$

$$m_2(\widehat{\alpha}_x,\widehat{\alpha}_y)=\sum_{z\in X}\sum_{g\in I_z}\left(k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\right),$$

其中

$$I_z:=\{g\in G|\ h_1\cdots h_t g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}xg_1\cdots g_s g h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y=\phi(g)^{-1}z\phi(g)\text{ for some }\phi(g)\in G\},$$

对于任意 $z\in X$ 和 $g\in I_z$, $\phi(g)\in C_G(z)\overline{\gamma_{i_g,\ z}}$，并且

$$\{k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\}=\spadesuit_{z,i_g}\{h_1,\cdots,h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_1,\cdots,g_s\}.$$

根据 $\beta_{-,\ -}$ 变换的结果，0端的输入元素为 $(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,\ g_{1,\ s})$，其中 g_1，……，$g_s\in G$。通过计算 $\overline{\alpha_{0-,\ 1-,\ -}}$, $\alpha_{1-,\ 0-,\ -}$ 和 $\alpha_{0-,\ 0-,\ -}$，对于

$$\alpha_x=\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x,g_{1,s}\right)\in\mathcal{H}_{x,s};$$

$$\alpha_y=\left(h_t^{-1}\cdots h_1^{-1}y,h_{1,t}\right)\in\mathcal{H}_{y,t};$$

$$\widehat{\alpha}_x:=(g_{1,s})\in C_s\left(C_G(x),k\right);$$

$$\widehat{\alpha}_y:=(h_{1,t})\in C_t\left(C_G(y),k\right),$$

then

$$\rho_{z,s+t+1}(\alpha_x\cup\iota_{y,t}(\widehat{\alpha}_y))=\rho_{z,s+t+1}(\iota_{x,s}(\widehat{\alpha}_x)\cup\alpha_y)=\rho_{z,s+t+1}(\alpha_x\cup\alpha_y)=\sum_{g\in I_z}\left(k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\right).$$

我们注意到，无论 $i,\ j=0$ 还是 1，$\alpha_{i-,\ j-,\ -}$ 型二叉树所得的关键结果都集中于：

$$\text{how to derive }\{k^z_{i_g,1},\cdots,k^z_{i_g,s+t+1}\}\text{ from }\{g_1,\cdots,g_s,h_1,\cdots,h_t\}.$$

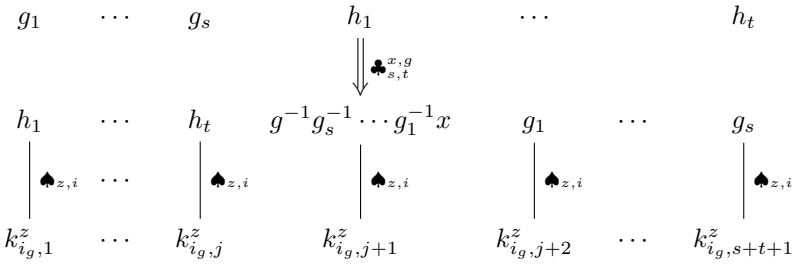
对于一个 $\alpha_{i-,\ j-,\ -}$型平面二叉树，其输入由以下部分组成

$$g_1,\cdots,g_s\in\overline{C_G(x)},\quad h_1,\cdots,h_t\in\overline{C_G(y)}.$$

给定固定的 $z\in X$、$g\in I_z$ 和 $\phi(g)\in C_G(z)\overline{\gamma_{i_g,\ z}}$ 我们固定

$$j\in\{1,\cdots,s+t+1\},$$

并将变换序列记为 $\alpha_{-,\ -}$ 变换。具体的变换过程如下：



这一序列变换过程如下：第二行由第一行应用变换$\clubsuit^{x}_{,\ s}{}^{g}_{t\ ,}$ 得到，第三行则由第二行应用变换 $\spadesuit_{z,\ i}$得到。

3.4.3. $\widehat{m}_n$的计算。

乘法 $\widehat{m}_n$ 是上述所有类型为 $\alpha_{-,-}$ 和 $\beta_{-,-}$ 的分支图的组合。我们说明如何复合这些序列变换，以便在Hochschild同调的背景下计算 $\widehat{m}_n$，从而得到以下定理。

定理 3.7. 群代数 kG 在复形层面上的 Hochschild同调的 A_∞-乘法公式中的展开项，除符号差异外，由以下内容确定：给定

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_1 &= (g_{1,1}, \cdots, g_{1,i_1}) \in \overline{C_G(y_1)}^{\times i_1},\\ \widehat{\alpha}_2 &= (g_{2,1}, \cdots, g_{2,i_2}) \in \overline{C_G(y_2)}^{\times i_2},\\ &\vdots\\ \widehat{\alpha}_n &= (g_{n,1} \ldots, g_{n,i_n}) \in \overline{C_G(y_n)}^{\times i_n},\end{aligned}$$

其中 $y_p \in X$ 对于 $p = 1$、$\cdots$、n。为计算 $\widehat{m}_n(\widehat{\alpha}_1$、$\cdots$、$\widehat{\alpha}_n)$，我们需要考察序列

$$(g_{1,1} \ldots, g_{1,i_1}, g_{2,1}, \ldots, g_{2,i_2}, \ldots, g_{n,1}, \ldots, g_{n,i_n})$$

作为变换 $\beta_{-,-}$的输入元素。正如上文所分析的，该序列将执行 $n-2$ $\beta_{-,-}$次变换，最后再执行一次 $\alpha_{-,-}$ 变换，由此得到输出序列

$$(k^z_{j,1}, k^z_{j,2}, \cdots, k^z_{j,\sum\limits_{p=1}^{n} i_p+2n-3}),$$

对于任意满足某些条件的 $z \in X$ 和 j，使得 $1 \le j \le n_x$ 和 j 满足某些条件。因此，我们有

$$\widehat{m}_n(\widehat{\alpha}_1, \cdots, \widehat{\alpha}_n) = \sum_{z\in X}\sum_{j} \pm(k^z_{j,1}, k^z_{j,2}, \cdots, k^z_{j,\sum\limits_{p=1}^{n} i_p+2n-3}).$$

4. 阿贝尔群情形下的 A_∞-结构

在本节中，我们始终设 G 为阿贝尔群。

4.1. 群 G 的 Tate-Hochschild上同调的同伦传递定理 .

(1) G **的 Hochschild上同调在复形层面的加法分解**

作为阿贝尔群， G 是 G中元素的共轭类代表元构成的集合。对于每个 $x \in G$，作为 x的共轭， $C_x = \{x\}$，以及中心化子子群 $C_G(x) = G$。定义

$$\mathcal{H}^{x,0} = k[x], \text{ and for } n \ge 1,$$

$$\mathcal{H}^{x,n} = \{\varphi : \overline{G}^{\times n} \longrightarrow kG \mid \varphi(g_1, \ldots, g_n) \in k[g_1 \cdots g_n x] \subset kG,\ \forall g_1, \ldots, g_n \in \overline{G}\}.$$

为简化计算，我们先介绍一下之前经常使用的 ♠ 过程，即对于任意$\{g_1, \cdots, g_n\} \in C_G(x)^{\times n} = G^{\times n}$，

$$\{g_1, \cdots, g_n\} = \spadesuit_x\{g_1, \cdots, g_n\}.$$

A m引理 2.12 的更具体版本可以在阿贝尔群的框架下表述 :

加法分解 $\mathrm{HH}^*(kG, kG) \simeq \bigoplus_{x\in X} \mathrm{H}^*(G, k)$ 可以提升为复形的同伦变形收缩

$$s^* \circlearrowright \quad C^*(kG, kG) \underset{\rho^*}{\overset{\iota^*}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{x\in G} C^*(G, k).$$

其中 $\iota^n = \sum_{x\in G} \iota^{x,n}$，$\rho^n = \sum_{x\in G} \rho^{x,n}$，且 $s^n = \sum_{x\in G} s^{x,n}$，对于 $n \ge 0$。

映射 $\iota^{x,n}$ 由以下公式给出

$$\iota^{x,n} : \mathcal{H}^{x,n} \to C^n(G, k), \quad [\varphi_x : \overline{G}^{\times n} \to kG] \mapsto [\widehat{\varphi}_x : \overline{G}^{\times n} \to k],$$

$$\text{with } \widehat{\varphi}_x(g_{1,n}) = a_x \text{ where } \varphi_x(g_{1,n})g_n^{-1}\cdots g_1^{-1} = a_x x \in k[x].$$

映射 $\rho^{x,n}$ 由以下公式给出

$$\rho^{x,n} : C^n(G,k) \to \mathcal{H}^{x,n}, \quad [\widehat{\varphi}_x : \overline{G}^{\times n} \to k] \mapsto [\varphi_x : \overline{G}^{\times n} \to kG],$$

$$\text{with } \varphi_x \in \mathcal{H}^{x,n}, \text{ and } \varphi_x(g_{1,n}) = \widehat{\varphi}_x(g_{1,n})xg_1\cdots g_n.$$

同伦 映射 $s^{x,n}$ 由下式给出：对于 $(\varphi_x : \overline{G}^{\times n} \to kG) \in \mathcal{H}^{x,n}$，定义 $s^{x,n}(\varphi_x) \in \mathcal{H}^{x,n-1}$ 为

$$s^{x,n}(\varphi_x)(g_{1,n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \widehat{\varphi}_x(g_1,\cdots,g_j,1,g_{j+1},\cdots,g_{n-1})xg_1\cdots g_{n-1} = 0.$$

注意，由于每一项中都出现了 1，因此 $s^{x,n}(\varphi_x)(g_{1,n-1}) = 0$。

(2) Hochschild 同调的加法分解：复形层面

对于任意 $x \in G$，记

$$\mathcal{H}_{x,0} = k[x], \text{ and for } s \geq 1,$$
$$\mathcal{H}_{x,s} = k\left[\left(g_s^{-1}\cdots g_1^{-1}x, g_{1,s}\right) \mid g_1,\cdots,g_s \in \overline{G}\right].$$

令 $\mathcal{H}_{x,*} = \bigoplus_{s\geq 0}\mathcal{H}_{x,s}$。容易验证，$C_*(kG,kG) = \bigoplus_{x\in G}\mathcal{H}_{x,*}$。

与 Hochschild 上同调的情形类似，引理 2.13 也可以在阿贝尔群的设定下表述：加法分解 $\mathrm{HH}_*(kG,kG)$ $\mathrm{H}_*(G,k)$ 可以提升为复形的同伦变形收缩

$$s_* \circlearrowright \quad C_*(kG,kG) = \bigoplus_{x\in G}\mathcal{H}_{x,*} \underset{\iota_*}{\overset{\rho_*}{\rightleftarrows}} \bigoplus_{x\in G} C_*(G,k),$$

其中 $\iota_n = \sum_{x\in G}\iota_{x,n}$，$\rho_n = \sum_{x\in G}\rho_{x,n}$ 以及 $s_n = \sum_{x\in G}s_{x,n}$，对于 $n \geq 0$。

单射 $\iota_{x,n}$ 由下式给出

$$\iota_{x,n} : C_n(G,k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{x,n},$$
$$\widehat{\alpha}_x = (g_1,\cdots,g_n) \in \overline{G}^{\times n} \longmapsto \alpha_x = \left(g_n^{-1}\cdots g_1^{-1}x, g_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n},$$

而满射 $\rho_{x,n}$ 由下式给出

$$\rho_{x,n} : \mathcal{H}_{x,n} \longrightarrow C_n(G,k),$$
$$\alpha_x = \left(g_n^{-1}\cdots g_1^{-1}x, g_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n} \longmapsto \widehat{\alpha}_x = (g_1,\cdots,g_n) \in \overline{G}^{\times n}.$$

同伦 $s_{x,n}$ 如下给出：对于 $\alpha_x = \left(g_n^{-1}\cdots g_1^{-1}x, g_{1,n}\right) \in \mathcal{H}_{x,n}$，

$$s_{x,n}(\alpha_x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(g_n^{-1}\cdots g_1^{-1}x, g_1,\cdots,g_j,1,g_{j+1},\cdots,g_n\right) = 0.$$

这意味着 $s_{x,n}(\alpha_x)$ 为空，因为每一项中都出现了 1。

由上可知 分析与定理 2.14 的阿贝尔群版本，我们得到如下定理 .

定理 4.1。定义 $\mathcal{H}_x^*$，使得对于 $m \geq 0$,

$$\widehat{\mathcal{H}}_x^m = \mathcal{H}^{x,m}, \text{ and } \widehat{\mathcal{H}}_x^{-m-1} = \mathcal{H}_{x,m},$$

那么作为复形，我们有 $\mathcal{H}_x^* \simeq C^*(G,k)$。

证明。容易验证，$\hat{\iota}^*\rho^* = \mathrm{id}$ 和 $\hat{\rho}^*\hat{\iota}^* = \mathrm{id}$。 □

4.2. **阿贝尔群上的运算** $\widehat{m}_n$。

回顾一下，我们在 $\mathcal{D}^*(kG, kG)$ 上有一个 A_∞-代数结构 $(m_1, m_2, m_3, \cdots)$，其中 $i > 3$ 时有 $m_1 = d^*$，$m_2 = \cup$ 和 $m_i = 0$。由于阿贝尔群的情形下 $\hat{s}^* = 0$，因此在计算 A_∞-结构 $(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \widehat{m}_3, \cdots)$ 时，我们有 $\widehat{m}_n = \pm\hat{\rho}^*(m_n(\hat{C}^{*\otimes n}))$，所以 $i > 3$ 时有 $\widehat{m}_i = 0$。此外，我们回顾 [10] 中的以下结果。

定理 4.2. [10,推论 4.11] 设 G 是有限阿贝尔群，则有

$$\bigoplus_{x\in X} \widehat{G}^*(C_G(x), k) = \bigoplus_{x\in G} \widehat{C}^*(G, k).$$

假设我们已经在 $C^*(G, k)$ 上定义了 A_∞-结构 $(\widehat{m}'_1, \widehat{m}'_2, \cdots)$，那么作为 A_∞ 代数，我们有以下同构：

$$\phi:\ D^*(kG, kG) \simeq \bigoplus_{x\in G} \widehat{C}^*(C_G(x), k) \simeq kG \otimes \widehat{C}^*(G, k).$$

更确切地说，$kG \otimes C^*(G, k)$ 上的 A_∞-结构 $(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \cdots)$ 如下所示。

$$\widehat{m}_p((g_1 \otimes \widehat{\alpha}_1), \cdots, (g_p \otimes \widehat{\alpha}_p)) = g_1 \cdots g_p \otimes \widehat{m}'_p(\widehat{\alpha}_1, \cdots, \widehat{\alpha}_p)$$

对于任意 $g_i \otimes \alpha_i \in kG \otimes C^*(G, k)$ $(i = 1, \cdots, p)$。

根据此定理，要计算 $\bigoplus C^*(C_G(x), k)$ 上的 A_∞-结构，只需计算 $C^*(G, k)$ 上的 A_∞-$x\in X$ 结构。现在我们来计算 $C^*(G, k)$ 上的 A_∞-结构 $(\widehat{m}'_1, \widehat{m}'_2, \cdots)$。

(1) 复形 $(C^*(G, k), \delta_*)$ 上的微分（即 $\widehat{m}'_1$）：

$$\widehat{C}^*(G, k) = \left(\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(G, k) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G, k) \xrightarrow{\tau} C^0(G, k) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G, k) \xrightarrow{\delta^1} \cdots\right),$$

(i) 对于 $n \geq 0$,

$$\widehat{C}^n(G, k) = C^n(G, k) = \mathrm{Map}(\overline{G}^{\times n}, k),$$

微分由 $\delta_n = \delta^n$ 给出，其中 $\delta^n(\varphi)$ 将 $g_{1,\ n+1} \in G^{\times n+1}$ 送到 —

$$g_1\varphi(g_{2,n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(g_{1,i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2,n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi(g_{1,n}).$$

(ii) 对于 $n \leq -1$（令 $s = -n - 1 \geq 0$），

$$\widehat{C}^n(G, k) = C_s(G, k) = k[\overline{G}^{\times s}], \text{ and for } n \leq -3,$$

$\delta_n = \partial_s : k[\overline{G}^{\times s}] \to k[\overline{G}^{\times(s-1)}]$ is defined by

$$g_{1,s} \mapsto g_{2,s} + \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i(g_{1,i-1}, g_ig_{i+1}, g_{i+2,s}) + (-1)^s(g_{1,s-1}).$$

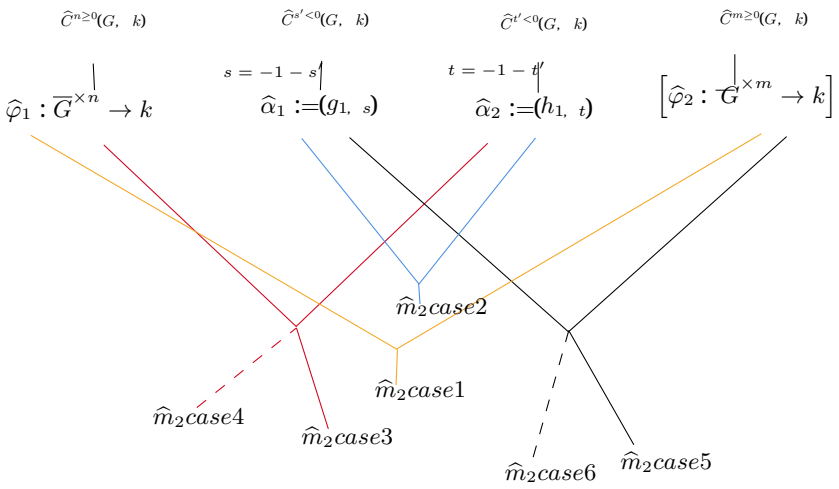
此外，$\delta_{-2} = \partial_1$：$k[\overline{G}] \to k$ 由 $\partial_1(g_1) = 0$定义。

(iii) $\delta_{-1} = \tau$：$C_0(G, k) = k \to k = C^0(G, k)$由 $\tau(1) = |G|$给出。

于是我们得到 $\widehat{m}'_1$的定义，

$$\widehat{m}'_1(\alpha) = \begin{cases} (-1)^{m+1}\partial_{-m-1}(\alpha) & \text{for } \alpha \in \widehat{C}^m(G, k) \text{ and } m < -1, \\ \tau(\alpha) & \text{for } \alpha \in \widehat{C}^{-1}(G, k), \\ \delta^m(\alpha) & \text{for } \alpha \in \widehat{C}^m(G, k) \text{ and } m \geq 0. \end{cases}$$

（2）$\widehat{m}'_2$ 的定义：



具体而言，结果如下:

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 1

$$\widehat{m}_2'\left(\widehat{\varphi}_1,\widehat{\varphi}_2\right)\left(h_1,\cdots,h_n,h_{n+1},\cdots,h_{n+m}\right)=\widehat{\varphi}_1\left(h_1,\cdots,h_n\right)\widehat{\varphi}_2\left(h_{n+1},\cdots,h_{n+m}\right).$$

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 2

$$\widehat{m}_2'\left(\widehat{\alpha}_1,\widehat{\alpha}_2\right)=\sum_{g\in G}\left(h_1,h_2,\cdots h_t,g^{-1}g_s^{-1}\cdots g_1^{-1},g_1,g_2,\cdots,g_s\right).$$

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 3

$$\begin{aligned}\widehat{m}_2'\left(\widehat{\varphi}_1,\widehat{\alpha}_2\right)&=\widehat{\varphi}_1\left(h_{t-n+1},\cdots,h_t\right)\left(h_1,\cdots,h_{t-n}\right)\\&=\left(\widehat{\varphi}_1\left(h_{t-n+1},\cdots,h_t\right)h_1,\cdots,h_{t-n}\right).\end{aligned}$$

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 4

$$\widehat{m}_2'\left(\widehat{\varphi}_1,\widehat{\alpha}_2\right)\left(g_{1,n-t-1}\right)=\sum_{g\in G}\widehat{\varphi}_1\left(g_{1,n-t-1},g^{-1},h_{1,t}\right).$$

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 5

$$\widehat{m}_2'\left(\widehat{\alpha}_1,\widehat{\varphi}_2\right)=\widehat{\varphi}_2\left(g_1,\cdots,g_m\right)\left(g_{m+1},\cdots,g_s\right)=\left(\widehat{\varphi}_2\left(g_1,\cdots,g_m\right)g_{m+1},\cdots,g_s\right).$$

$\widehat{\mathbf{m}}_2'$情形 6

$$\widehat{m}_2'\left(\widehat{\alpha}_1,\widehat{\varphi}_2\right)\left(h_{1,m-s-1}\right)=\sum_{g\in G}\widehat{\varphi}_2\left(g_{1,s},g^{-1},h_{1,m-s-1}\right).$$

(3) $\widehat{m}_3'$**的公式:**

$\widehat{m}_i'=0$ 适用于 $i>3$ 和 $\widehat{m}_3'=0$，但以下两种情形除外。

(i) 对于 $\phi\in C^m(G,k)$、$\widehat{\varphi}\in C^n(G,k)$ 和 $\widehat{\alpha}=(g_1,\cdots,g_r)$，$\in C_r(G,k)$，若 $r+2\leq m+n$，则 $\widehat{m}_3'(\phi,\widehat{\alpha},\widehat{\varphi})\in\widehat{C}^{m-r+n-2}(G,k)$ 定义为

$$\begin{aligned}&\widehat{m}_3'(\widehat{\phi},\widehat{\alpha},\widehat{\varphi})\left(h_1,\cdots,h_{m-r+n-2}\right)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{1,r+2-m\}}^{\min\{n,r+1\}}(-1)^{m+r+j-1}\widehat{\phi}\left(h_{1,m-r+j-2},g,g_{j,r}\right)\widehat{\varphi}\left(g_{1,j-1},g^{-1},\ h_{m-r+j-1,m-r+n-2}\right).\end{aligned}$$

(ii) 对于 $\widehat{\alpha}=(g_1,\ \cdots,\ g_r)\in\ \widehat{C}_r(G,\ k)$、$\beta=(h_1,\ \cdots,\ h_s)\in\ \widehat{C}_s(G,\ k)$和 $\widehat{\phi}\in\widehat{C}^m(G,\ k)$，若 $m-r\leq s+1$，则

$$\widehat{m}_3'(\widehat{\alpha},\widehat{\phi},\widehat{\beta})=\sum_{g\in G}\sum_{j=\max\{0,s+1-m\}}^{\min\{s,r-m+s+1\}}(-1)^{m+r+s-j}\widehat{\phi}\left(g_{1,m-s+j-1},g,h_{j+1,s}\right)\left(h_{1,j},g^{-1},g_{m-s+j,r}\right).$$

4.3. **阿贝尔群的例子。**

4.3.1. $G=\mathbb{Z}_2$。

假设 $G=\{g,\ 1\}$，其中 $g^2=1$。

我们回顾 $(C^*(G,\ k)\ \delta_*)$ 的定义：

$$\widehat{C}^*(G,k)=\left(\cdots\xrightarrow{\partial_2}C_1(G,k)\xrightarrow{\partial_1}C_0(G,k)\xrightarrow{\tau}C^0(G,k)\xrightarrow{\delta^0}C^1(G,k)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\right),$$

(i) 对于 $n\geq 0$,

$$\widehat{C}^n(G,k)=C^n(G,k)=\mathrm{Map}(\overline{G}^{\times n},k),$$

微分定义为 $\delta_n=\delta^n$，其中 $\delta^n(\varphi)$ 将 $g^{\times n+1}$ 映射到

$$g\varphi(g^{\times n})+(-1)^{n+1}\varphi(g^{\times n})=\varphi(g^{\times n})+(-1)^{n+1}\varphi(g^{\times n}).$$

(ii) 对于 $n\leq -1$ (设 $s=-n-1\geq 0$),

$$\widehat{C}^n(G,k)=C_s(G,k)=k[\overline{G}^{\times s}],\ \text{and for } n\leq -3,$$

$\delta_n=\partial_s: k[\overline{G}^{\times s}]\to k[\overline{G}^{\times(s-1)}]$ is defined by

$$g^{\times s}\mapsto g^{\times(s-1)}+(-1)^s g^{\times(s-1)}.$$

此外，$\delta_{-2}=\partial_1=0$。

(iii) $\delta_{-1}=\tau$：$C_0(G,\ k)=k\to k=C^0(G,\ k)$ 由 $\tau(1)=2$ 给出。

于是我们得到 $\widehat{m}_1'$，并注意到若 $\mathrm{char}(k)=2$，则 $\widehat{m}_1'=0$。

现在我们定义 $\widehat{m}_2'$。对任意 λ、$\mu\in k$，令 $\lambda^n\in C^n(G,k)$：$g^{\times n}\to\lambda$ 且 $\mu_t=\mu(g^{\times t})\in C_t(G,k)$。情形1. $\lambda^n\in C^n(G,k)$ 和 $\mu^m\in C^m(G,k)$，$\widehat{m}_2'(\lambda^n,\mu^m)=(\lambda\mu)^{n+m}$。情形2. $\lambda_s\in C_s(G,k)$ 和 $\mu_t\in C_t(G,k)$，$\widehat{m}_2'(\lambda_s,\mu_t)=\sum_{a=1}^3\lambda\mu_{s+t+1}$。情形 3. $\lambda^n\in C^n(G,k)$，$\mu_t\in C_t(G,k)$ 和 $n-t-1\leq -1$，$\widehat{m}_2'(\lambda^n,\mu_t)=\widehat{m}_2'(\mu_t,\lambda^n)=(\lambda\mu)_{t-n}$。情形 4. $\lambda^n\in C^n(G,k)$，$\mu_t\in C_t(G,k)$ 和 $n-t-1\geq 0$，$\widehat{m}_2'(\lambda^n,\mu_t)=\widehat{m}_2'(\mu_t,\lambda^n)=(\lambda\mu)^{n-t-1}$。

对于 $\widehat{m}_3'$，我们只需讨论以下两种情形：

(1) $\lambda^m\in C^m(G,\ k)$、$\mu^n\in C^n(G,\ k)$、$v_r\in C_r(G,\ k)$ 和 $r+2\leq m+n$，则

$$\widehat{m}_3'(\lambda^m,v_r,\mu^n)=\sum_{i=\max\{1,r+2-m\}}^{\min\{n,r+1\}}(-1)^{m+r+i-1}(\lambda\mu v)^{m-r+n-2}.$$

(2) $\lambda_r\in C_r(G,\ k)$、$v_s\in C_s(G,\ k)$、$\mu^m\in C^m(G,\ k)$ 和 $m-1\leq r+s$,

$$\widehat{m}_3'(\lambda_r,\mu^m,v_s)=\sum_{i=\max\{0,s+1-m\}}^{\min\{s,r-m+s+1\}}(-1)^{m+r+s-i}\lambda(\lambda\mu v)_{r-m+s+2}.$$

4.3.2. $G=\mathbb{Z}_4$。

假设 $G=\{g^3,\ g^2,\ g,\ 1\}$，其中 $g^4=1$。计算之前，我们先给出一些记号：

- 对于任意 n，将 $G^{\times n}$ 中的元素写作

$$g_{j_1,\cdots,j_n}:=(g^{j_1},\cdots,g^{j_n})\ \text{with}\ j_1,\cdots,j_n\in I_3=\mathbb{Z}_4/\{0\}=\{1,2,3\},$$

- 定义映射 $\lambda^{j_1,\cdots,j_n}\in$ 映射$(G^{\times n},k)$，定义为

$$\lambda^{j_1,\cdots,j_n}(g_{j_1',\cdots,j_n'})=\begin{cases}\lambda, & \text{if } j_1'=j_1,\cdots,j_n'=j_n;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

- 将映射 $c_i: I_3^{\times n}\to I_3^{\times n+1}$定义为

$$(j_1,\cdots,j_n)\mapsto\begin{cases}(j_1,\cdots,j_{i-1},2,3,j_{i+1},\cdots,j_n)+(j_1,\cdots,j_{i-1},3,2,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=1;\\ (j_1,\cdots,j_{i-1},3,3,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=2;\\ (j_1,\cdots,j_{i-1},1,2,j_{i+1},\cdots,j_n)+(j_1,\cdots,j_{i-1},2,1,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=3.\end{cases}$$

$\widehat{}$我们回顾一下（$C^*(G,k)$ δ_*）的定义:

$$\widehat{C}^*(G,k)=\left(\cdots\xrightarrow{\partial_2}C_1(G,k)\xrightarrow{\partial_1}C_0(G,k)\xrightarrow{\tau}C^0(G,k)\xrightarrow{\delta^0}C^1(G,k)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\right),$$

(i) 对于 $n\geq 0$,

$$\widehat{C}^n(G,k)=C^n(G,k)=\mathrm{Map}(\overline{G}^{\times n},k),$$

且微分由 $\delta_n=\delta^n$ 给出，将 $\lambda^{j_1,\ \cdots,\ j_n}$ 映射为

$$\sum_{j_0=1}^{3}\lambda^{j_0,j_1,\cdots,j_n}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\lambda^{c_i(j_1,\cdots,j_n)}+(-1)^{n+1}\sum_{j_{n+1}=1}^{3}\lambda^{j_1,\cdots,j_n,j_{n+1}}.$$

(ii) 对于 $n\leq -1$ （令 $s=-n-1\geq 0$）,

$$\widehat{C}^n(G,k)=C_s(G,k)=k[\overline{G}^{\times s}],\ \text{and for } n\leq -3,$$

$\delta_n=\partial_s:k[\overline{G}^{\times s}]\to k[\overline{G}^{\times(s-1)}]$ is defined by

$$g_{j_1,\cdots,j_s}\mapsto g_{j_2,\cdots,j_s}+\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i g_{j_1,\cdots,j_{i-1},j_i+j_{i+1},j_{i+2},\cdots,j_s}+(-1)^s g_{j_1,\cdots,j_{s-1}}.$$

此外， $\delta_{-2}=\partial_1=0$。

(iii) $\delta_{-1}=\tau$： $C_0(G,\ k)=k\to k=C^0(G,\ k)$ 由 $\tau(1)=4$ 给出。

于是我们得到 $\widehat{m}_1'$, 下面定义 $\widehat{m}_2'$,

情形1. $\lambda^{j_1,\ \cdots,\ j_n}\in C^n(G,\ k)$ 和 $\mu^{k_1,\ \cdots,\ k_m}\in C^m(G,\ k)$,

$$\widehat{m}_2'(\lambda^{j_1,\cdots,j_n},\mu^{k_1,\cdots,k_m})=(\lambda\mu)^{j_1,\cdots,j_n,k_1,\cdots,k_m}.$$

情形2. $g_{j_1,\ \cdots,\ j_s}\in C_s(G,\ k)$ 和$g_{k_1,\ \cdots,\ k_t}\in C_t(G,\ k)$,

$$\widehat{m}_2'(g_{j_1,\cdots,j_s},g_{k_1,\cdots,k_t})=\sum_{a=1}^{3}g_{k_1,\cdots,k_t,a,j_1,\cdots,j_s}.$$

情形 3. $\lambda^{j_1,\ \cdots,\ j_n}\in C^n(G,\ k)$, $g_{k_1,\ \cdots,\ k_t}\in C_t(G,\ k)$ 和 $n-t-1\leq -1$,

$$\widehat{m}_2'(\lambda^{j_1,\cdots,j_n},g_{k_1,\cdots,k_t})=\begin{cases}\lambda g_{k_1,\cdots,k_{t-n}}, & \text{if } k_{t-n+1}=j_1,\cdots,k_t=j_n;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

情形 4. $\lambda^{j_1,\ \cdots,\ j_n}\in C^n(G,\ k)$, $g_{k_1,\ \cdots,\ k_t}\in C_t(G,\ k)$ 和 $n-t-1\geq 0$,

$$\widehat{m}_2'(\lambda^{j_1,\cdots,j_n},g_{k_1,\cdots,k_t})=\begin{cases}\lambda^{j_1,\cdots,j_{n-t-1}}, & \text{if } k_1=j_{n-t+1},\cdots,k_t=j_n;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

情形5. $g_{j_1,\cdots,j_s}\in C_s(G,k)$, $\mu^{k_1,\cdots,k_m}\in C^m(G,k)$ 和 $m-s-1\leq -1$,

$$\widehat{m}_2'(g_{j_1,\cdots,j_s},\mu^{k_1,\cdots,k_m})=\begin{cases}\mu g_{j_{m+1},\cdots,j_s}, & \text{if } j_1=k_1,\cdots,j_m=k_m;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

情形6. $g_{j_1,\cdots,j_s}\in C_s(G,k)$, $\mu^{k_1,\cdots,k_m}\in C^m(G,k)$ 和 $m-s-1\geq 0$,

$$\widehat{m}_2'(g_{j_1,\cdots,j_s},\mu^{k_1,\cdots,k_m})=\begin{cases}\mu^{k_{s+2},\cdots,k_m}, & \text{if } j_1=k_1,\cdots,j_s=k_s;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $\widehat{m}_3'$, 我们只需讨论以下两种情形,

(1) $\lambda^{j_1,\cdots,j_m}\in C^m(G,k)$、$\mu^{k_1,\cdots,k_n}\in C^n(G,k)$、$g_{l_1,\cdots,l_r}\in C_r(G,k)$和 $r+2\le m+n$，那么

$$\widehat{m}_3'(\lambda^{j_1,\cdots,j_m},g_{l_1,\cdots,l_r},\mu^{k_1,\cdots,k_n})=\sum_{i\in I}(-1)^{m+r+i-1}(\lambda\mu)^{j_1,j_2,\cdots,j_{m-r+i-2},k_{i+1},k_{i+2},\cdots,k_n},$$

其中 $I=\{i|\text{最大值}\{1,r+2-m\}\le i\le\text{最小值}\{n,r+1\},j_{m-r+i-1}+k_i=4,l_1=k_1,l_2=k_2,\cdots,l_{i-1}=k_{i-1},l_{i+1}=j_{m-r+i},l_{i+1}=j_{m-r+i+1},\cdots,l_r=j_m\}$。

特别地，如果 $r+2=m+n$，

$$\widehat{m}_3'(\lambda^{j_1,\cdots,j_m},g_{l_1,\cdots,l_r},\mu^{k_1,\cdots,k_n})=\begin{cases}-\lambda\mu, & \text{if } j_1+k_n=4,l_1=k_1,\cdots,l_{n-1}=k_{n-1},l_n=j_2,\cdots,l_r=j_m;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

(2) $g_{j_1,\cdots,j_r}\in C_r(G,k)$，$g_{l_1,\cdots,l_s}\in C_s(G,k)$，$\lambda^{k_1,\cdots,k_m}\in C^m(G,k)$以及 $m-1\le r+s$，

$$\widehat{m}_3'(g_{j_1,\cdots,j_r},\lambda^{k_1,\cdots,k_m},g_{l_1,\cdots,l_s})=\sum_{i\in J}(-1)^{m+r+s-i}\lambda g_{l_1,\cdots,l_i,4-k_{m-s+i},j_{m-s+i},\cdots,j_r},$$

其中 $J=\{i|\max\{0,s+1-m\}\le i\le\min\{s,r-m+s+1\},k_1=j_1,\cdots,k_{m-s+i-1}=j_{m-s+i-1};\ k_{m-s+i+1}=l_{i+1},\cdots,k_m=l_s\}$。

特别地，若 $m=1$，

$$\widehat{m}_3'(g_{j_1,\cdots,j_r},\lambda^{k_1},g_{l_1,\cdots,l_s})=(-1)^{r+1}\lambda g_{l_1,\cdots,l_s,4-k_1,j_1,\cdots,j_r}.$$

4.3.3. $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$。

设 $G=\{g_3,g_2,g_1,1\}$，其乘法表如下：

$\cdot$	1	g_1	g_2	g_3
1	1	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	1	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	1	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	1

与 $\mathbb{Z}_4$ 情形类似，我们也可以引入以下记号：对于任意 $n\ge1$，

- 定义映射 $\lambda^{j_1,\cdots,j_n}\in\text{Map}(G^{\times n},k)$如下：

$$\lambda^{j_1,\cdots,j_n}(g_{j_1',\cdots,j_n'})=\begin{cases}\lambda, & \text{if } j_1'=j_1,\cdots,j_n'=j_n;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

- 定义映射 $c_i:\ I_3^{\times n}\to I_3^{\times n+1}$为

$$(j_1,\cdots,j_n)\mapsto\begin{cases}(j_1,\cdots,j_{i-1},2,3,j_{i+1},\cdots,j_n)+(j_1,\cdots,j_{i-1},3,2,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=1;\\ (j_1,\cdots,j_{i-1},1,3,j_{i+1},\cdots,j_n)+(j_1,\cdots,j_{i-1},3,1,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=2;\\ (j_1,\cdots,j_{i-1},1,2,j_{i+1},\cdots,j_n)+(j_1,\cdots,j_{i-1},2,1,j_{i+1},\cdots,j_n), & \text{if } j_i=3.\end{cases}$$

- 定义映射 $d_i:\ I_3^{\times n}\to I_3^{\times n-1}$为

$$(j_1,\cdots,j_n)\mapsto\begin{cases}(j_1,\cdots,j_{i-1},6-j_i-j_{i+1},j_{i+2},\cdots,j_n), & \text{if } j_i\ne j_{i+1};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$\widehat{}$复形 $(C^*(G,k)\ \delta_*)$ 定义如下：

$$\widehat{C}^*(G,k)=\left(\cdots\xrightarrow{\partial_2}C_1(G,k)\xrightarrow{\partial_1}C_0(G,k)\xrightarrow{\tau}C^0(G,k)\xrightarrow{\delta^0}C^1(G,k)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\right),$$

(i) 对于 $n \geq 0$,

$$\widehat{C}^n(G,k) = C^n(G,k) = \mathrm{Map}(\overline{G}^{\times n}, k),$$

且微分由 $\delta_n = \delta^n$ 给出，将 $\lambda^{j_1,\cdots,j_n}$ 映射为

$$\sum_{j_0=1}^{3} \lambda^{j_0,j_1,\cdots,j_n} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \lambda^{c_i(j_1,\cdots,j_n)} + (-1)^{n+1} \sum_{j_{n+1}=1}^{3} \lambda^{j_1,\cdots,j_n,j_{n+1}}.$$

(ii) 对于 $n \leq -1$ （令 $s = -n-1 \geq 0$），

$$\widehat{C}^n(G,k) = C_s(G,k) = k[\overline{G}^{\times s}], \text{ and for } n \leq -3,$$

$\delta_n = \partial_s : k[\overline{G}^{\times s}] \to k[\overline{G}^{\times (s-1)}]$ is defined by

$$g_{j_1,\cdots,j_s} \mapsto g_{j_2,\cdots,j_s} + \sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i g_{d_i(j_1,\cdots,j_s)} + (-1)^s g_{j_1,\cdots,j_{s-1}}.$$

此外，$\delta_{-2} = \partial_1 = 0$。

(iii) $\delta_{-1} = \tau$: $C_0(G,k) = k \to k = C^0(G,k)$ 由 $\tau(1) = 4$ 给出。

于是我们得到 $\widehat{m}_1'$。$\widehat{m}_2'$ 的计算与 $\mathbb{Z}_4$ 情形相同。对于 $\widehat{m}_3'$，只有细微差别。为使结果更加清晰，我们在下文明确重写该结果。

(1) $\lambda^{j_1,\cdots,j_m} \in C^m(G,k)$、$\mu^{k_1,\cdots,k_n} \in C^n(G,k)$、$g_{l_1,\cdots,l_r} \in C_r(G,k)$ 以及 $r+2 \leq m+n$，则

$$\widehat{m}_3'(\lambda^{j_1,\cdots,j_m}, g_{l_1,\cdots,l_r}, \mu^{k_1,\cdots,k_n}) = \sum_{i\in I}(-1)^{m+r+i-1}(\lambda\mu)^{j_1,j_2,\cdots,j_{m-r+i-2},k_{i+1},k_{i+2},\cdots,k_n},$$

其中 $I = \{i \mid \text{最大值}\{1,\ r+2-m\} \leq i \leq \text{最小值}\{n,\ r+1\},\ j_{m-r+i-1} = k_i,\ l_1 = k_1,\ l_2 = k_2,\ \cdots,\ l_{i-1} = k_{i-1},\ l_{i+1} = j_{m-r+i},\ l_{i+1} = j_{m-r+i+1},\ \cdots,\ l_r = j_m\}$。

特别地，如果 $r+2 = m+n$,

$$\widehat{m}_3'(\lambda^{j_1,\cdots,j_m}, g_{l_1,\cdots,l_r}, \mu^{k_1,\cdots,k_n}) = \begin{cases} -\lambda\mu, & \text{if } j_1 = k_n, l_1 = k_1, \cdots, l_{n-1} = k_{n-1}, l_n = j_2, \cdots, l_r = j_m; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) $g_{j_1,\cdots,j_r} \in C_r(G,k)$、$g_{l_1,\cdots,l_s} \in C_s(G,k)$、$\lambda^{k_1,\cdots,k_m} \in C^m(G,k)$ 以及 $m-1 \leq r+s$，

$$\widehat{m}_3'(g_{j_1,\cdots,j_r}, \lambda^{k_1,\cdots,k_m}, g_{l_1,\cdots,l_s}) = \sum_{i\in J}(-1)^{m+r+s-i}\lambda g_{l_1,\cdots,l_i,k_{m-s+i},j_{m-s+i},\cdots,j_r},$$

其中 $J = \{i \mid \text{最大值}\{0,\ s+1-m\} \leq i \leq \text{最小值}\{s,\ r-m+s+1\},\ k_1 = j_1,\ \cdots,\ k_{m-s+i-1} = j_{m-s+i-1};\ k_{m-s+i+1} = l_{i+1},\ \cdots,\ k_m = l_s\}$。

特别地，若 $m = 1$,

$$\widehat{m}_3'(g_{j_1,\cdots,j_r}, \lambda^{k_1}, g_{l_1,\cdots,l_s}) = (-1)^{r+1}\lambda g_{l_1,\cdots,l_s,k_1,j_1,\cdots,j_r}.$$

致谢

本研究得到国家重点研发计划（编号：2024YFA1013803）、国家自然科学基金（编号：12031014、13004005 和 12371043））、中央高校基本科研业务费（编号：020314380037）以及上海市 PMMP 重点实验室（编号：22DZ2229014）的资助。

参考文献

[1] M. Broué，重新审视 Higman 判据，《密歇根数学杂志》，58（2009），125-179。[2] K. S. Brown，《群的上同调》，数学研究生教材，87（1982），纽约—柏林：施普林格。[3]R. O. Buchweitz，Gorenstein 环上的极大 Cohen-Macaulay 模与 Tate 上同调，手稿，汉诺威大学（1986），1-155。[4] J. Chen，Y. Liu，G. Zhou，通过同调扰动引理建立代数 Morse 理论，即将在《纯粹与应用代数杂志》发表，网址：http://math0.bnu.edu.cn/liuym/。[5] M. Gerstenhaber，结合环的上同调结构，《数学年刊》，78(2)（1963），267-288。[6] G. Hochschild，关于结合代数的上同调群，《数学年刊》，46(1)（1945），58–67。[7] B. Keller，A-无穷代数与模导论，《同调与同伦应用》，3(1)（2001），1-35。[8] M. Kontsevich，Poisson 流形的变形量子化，《数学物理通讯》，66(3)（2003），157-216。[9] L. Li，Tate-Hochschild 上同调代数上的广义杯积与 A_∞-乘法公式，硕士论文（中文）（2020），北京师范大学。[10] Y. Liu、Z. Wang 和 G. Zhou，群代数的 Tate-Hochschild 上同调环上的 Batalin-Vilkovisky 结构，《国际数学研究通知》，6（2021），4079-4139。[11] Y. Liu 和 G. Zhou，群代数的 Hochschild 上同调环上的 Batalin-Vilkovisky 结构，《非交换几何杂志》，10（2016），811-858。[12] J. L. Loday 和 B. Vallette，《代数歌剧》，数学科学基础丛书，346（2012），施普林格出版社，柏林。[13] M. Rivera 和 Z. Wang，奇异 Hochschild 上同调与代数弦运算，《非交换几何杂志》，13(1)（2019），297-361。[14] S. S. Siegel 和 S. J. Witherspoon，群代数的 Hochschild 上同调环，《伦敦数学会会刊》，79(3)（1999），131-157。[15] J. Stasheff，H-空间的同伦结合性。I、II，《美国数学会汇刊》108（1963），275-292。[16] J. Tate，类域论中的高维上同调群，《数学年刊》，56(2)（1952），294–297。[17] Z. Wang，Tate-Hochschild 上同调上的 Gerstenhaber 代数与 Deligne 猜想，《美国数学会汇刊》，374(7)（2021），4537-4577。

Xiuli Bian，Guodong Zhou 数学与科学学院 MEA重点实验室（教育部）上海 PMMP 重点实验室 华东师范大学 200241，中国上海电子邮箱：
52205500018@stu.ecnu.edu.cn电子邮箱：
gdzhou@math.ecnu.edu.cnLongfei Li 数学系 堪萨斯州立大学 66502，美国曼哈顿电子邮箱：
longfeili@ksu.eduYuming Liu 数学与科学学院 数学与复杂系统实验室 北京师范大学 100875，中国北京电子邮箱： ymliu@bnu.edu.cn

Tianyun Wang 首都师范大学附属中学
100048，中国北京电子邮箱：
850623539@163.com

Zhengfang Wang 南京大学数学系
210093，中国南京电子邮箱：
zhengfangw@nju.edu.cn