基于带框架辫的大气河相互作用拓扑框架

Ioannis Diamantis马斯特里赫特大学数据分析与数字化系，马斯特里赫特，荷兰i.diamantis@maastrichtuniversity.nl

arXiv:2601.00354v1 [nlin.CD] 1 Jan 2026

摘要

大气河是丝状水汽通道，造成了很大比例的极端降水，并且常在同一天气尺度环流型中以相互作用的丝状束形式出现。现有诊断方法通常孤立地分析大气河，尽管多条丝状结构频繁共存并相互作用。我们提出一种基于带框架辫和带框 braidoid 的大气河分析拓扑框架，用于同时编码大气河质心的几何相互作用和水汽输送的内部演变。

在此方法中，大气河丝状结构被表示为辫股，其按时间排序的交叉构成辫子词；基于水汽的框架化则刻画每条丝状结构内部的增强或减弱。我们将该框架应用于再分析数据推导的大气河轨迹数据，在滑动时间窗内构建辫表示和带框架辫表示，并分析北太平洋一个强相互作用的多丝状大气河事件。结果表明，基于辫的指标能够捕捉质心几何或 IVT 幅度本身无法揭示的结构重组和水汽增强事件，为大气水汽输送提供了一种互补的结构视角。

1 引言

大气河（AR）是位于中纬度、能够输送大量向极地输送的水汽的狭长丝状结构 [39, 34, 31]。它们贡献了世界许多区域相当大一部分的极端降水和洪水，对水文学、水资源管理和气候变率具有重要影响 [17, 16, 25]。通常利用整层水汽输送（IVT）等欧拉场，或通过拉格朗日质心轨迹和拉格朗日相干结构诊断来分析大气河 [20]。然而，这些方法通常将大气河丝状结构视为彼此孤立的对象。实际上，多个大气河往往共存于同一天气尺度环流型中，并可能在急流核、斜压发展和罗斯贝波动力学的驱动下发生相互作用、合并、分叉或快速结构重组 [29, 13, 3]。

越来越多的研究开始利用骨架化技术、丝状结构追踪算法、欧拉度量和动力系统工具来刻画大气河的几何形态与演变 [34, 14, 7]。尽管这些方法能够捕捉强度、形状和持续性，但它们并未明确编码多个大气河丝状结构的相互作用拓扑 ——即作为连贯水汽输送网络的一部分，其相对位置、交叉和结构交换随时间有序重组的过程 [9, 17]。理解这种由相互作用驱动的结构十分重要，因为它往往伴随着大气河的快速增强、碎裂或重新定向。

在本研究中，我们介绍一种用于大气河分析的拓扑框架，该框架基于辫理论、带框架辫和带框架辫状物。辫子编码多条轨迹按时间排序的交叉；带框架辫 为每条辫股赋予整数值结构，以刻画其内部变化；而辫状物 则通过允许辫股出现

或消失，对这些构造进行了推广。这些工具已在动力系统、流体混合和数学物理领域证明了强大的应用价值 [6, 37, 15, 23], 但此前尚未用于模拟大气河细丝的结构相互作用及其内部水汽演变。

我们将每条大气河丝状体表示为一条携带水分的股线，其质心随时间演变，内部结构则通过基于IVT的水分积分 [17]进行量化。当多个大气河同时演变时，其路径可能发生几何交叉，同时水分含量也会增强、减弱或发生切变。利用代数生成元（即交叉 σ_i 和框架 τ_i）对这些过程进行编码，可对大气河演变作出简洁的符号描述；这种描述对平滑的几何形变具有稳健性，同时又能反映具有物理意义的重组。利用基于再分析的大气河流轨迹数据，我们通过滑动时间窗提取辫表示，借助水分诊断量将其扩展为带框架辫，并通过多细丝大气河相互作用的详细案例研究展示其阐释价值。

本文其余部分安排如下。第2节回顾大气河的几何和物理结构，并介绍拓扑模型中使用的基于水分的量。第3节介绍辫理论、带框架辫和带框 braidoid 的必要背景，并阐释它们在大气河语境下的物理意义。第4节描述如何从再分析数据得到的大气河质心轨迹中提取定向辫表示；第5节则借助水分诊断量，将这一构造扩展为带框架辫。第6节展示相互作用的多细丝大气河事件案例，并讨论由此得到的拓扑指标。最后，第7节讨论本文的局限性与未来研究方向。

2 大气河：几何、动力学与水汽结构

大气河（AR）是嵌入中纬度西风带中的狭长丝状通道，集中输送水汽 [39, 34, 17]。尽管其只占副热带和温带大气的一小部分，却主导着向极水分输送，并在强降水、洪水和水文极端事件中发挥重要作用 [10, 31, 29]。要运用辫理论及其框架扩展建立大气河演变的拓扑模型，首先必须对其进行几何和结构描述，以把握这些细丝的内在物理特征。

2.1 大气河的几何描述

大气河通常被定义为一条水汽输送增强的连贯通道，其长度超过约 2,000 km，宽度为 200–500 km，并通过整层水汽输送（IVT）或积分水汽（IWV）的强度阈值加以识别 [35, 17]。这条通道的中心轴通常称为质心线或核心轨迹，它勾勒出水分通量最大的路径，并为组织大气河带的丝状结构提供一维表示 [28, 27]。这一质心是后文引入的辫表示中描述大气河演变的自然数学对象。

尽管在天气尺度上，质心的演变通常较为平滑，但周围的动力环境往往会引入局部结构变化。与温带气旋、瞬变急流核、大气阻塞以及行星波扰动的相互作用，可能导致丝带骨架出现急剧曲率变化、突然的拐点、局部变细或变粗，以及偶发的短暂分岔 [21, 30, 16]。此类几何偏差在下文构建的基于辫的描述中发挥着核心作用。多个大气河质心在纬向方向上的相对排序决定了辫表示的生成元，而这种排序的变化对应于拓扑交叉，其序列编码了AR系统的几何复杂性。我们强调，此类交叉反映的是经向

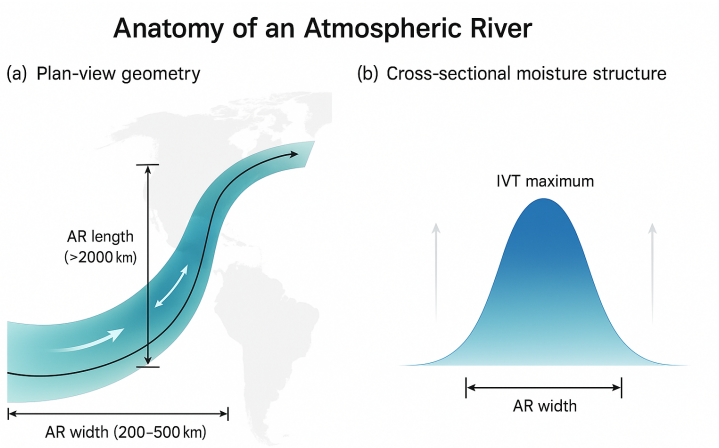


图 1：大气河的结构示意图。(a) 平面几何形态，显示质心和由整层水汽输送定义的带。(b) 横截面整层水汽输送廓线，展示富水汽核心和大气河宽度。

质心排序的变化，而不是水汽丝状结构的物理交汇；它们是对几何重组的符号编码，而非字面意义上的接触。

2.2 横截面结构与带状模型

质心提供了对大气河的一维刻画，而其物理影响则源自围绕这一主干的二维横截面水汽分布。在质心上的每一点处，整层水汽输送场的垂直横截面通常呈现细长的各向异性结构，并具有一个显著的水汽最大值[27, 26]。因此，整层水汽输送超过既定阈值的区域会形成一条环绕质心的连续带 [18, 34]。这种带状表示捕捉了决定大气河诱发的降水和水文影响的关键几何与结构特征。

带具有可测量的宽度，反映了水汽高效输送通道的几何厚度 [35]。更重要的是，就本文而言，整层水汽输送的横截面分布包含了水汽输送场内部切变的程度，以及沿丝状结构变化的水汽负载 [27]。这一量会因动力强迫而漂移、增强或局地化，并为下文拓扑模型中股线框架的构建提供物理解释。带的外边界形成连贯的输送边界，将大气河与周围水汽含量较低的区域分隔开来；其演变会影响丝状结构与环境流场的相互作用 [17]。

大气河的内部结构远非刚性不变。水汽极大值可能发生横向偏移、分裂成多个核心，或在高空动力过程、急流诱发的切变或位涡梯度的作用下发生旋转 [16, 9]。这些形变不仅会改变带的几何形态，还会引入局部扭转和切变，而这些现象可自然地表示为加粗股线框架的变化。从这个意义上说，AR带同时携带几何信息（其质心和宽度）与结构信息（其内部水汽状态），而带框架辫理论提供了一种直接的代数机制来封装这两个组成部分。

2.3 动力演化与相互作用

大气河很少以孤立形态演变。其结构、强度和路径会持续响应周围的天气尺度环境。当大气河与温带气旋相互作用时，由此形成的暖输送带气流可能会拉伸并增强

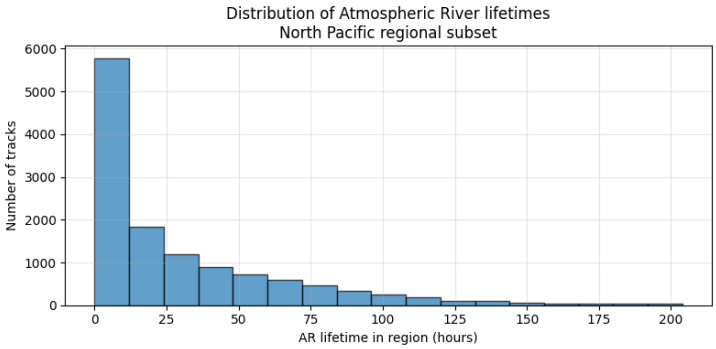


图2：北太平洋区域内大气河生命周期的分布。持续时间较长的细丝更可能发生相互作用和结构重组。

水汽廊道，而锋面波发展可能会使细丝断裂成两条或更多分支 [30, 3]。反气旋阻塞可能导致方向突然改变，使细丝沿阻塞外围偏转，偶尔形成高度弯曲或停滞的路径[16]。来自副热带区域的水汽羽流可能会并入现有大气河，形成输送能力更强的多核心结构 [31]。破碎罗斯贝波和急流核变化可能更迅速地重组AR几何形态，导致细丝出现瞬态褶皱、分岔或重叠 [21]。

这些动力影响会引发不同的结构转变。当两条细丝在差异平流作用下彼此靠近时，其一维质心原则上可能相互超越，或交换经向顺序。在强烈增强过程中，内部切变或急流诱导旋转在概念上可能会使水汽带局部发生扭转。当环境强迫削弱细丝的某一部分时，原本连续的廊道有时可能分裂成独立的片段，或出现次级分支。相反，在连贯的大尺度流引导下，两条相邻的细丝可能合并为一条增强的水汽廊道。最后，随着局部水汽异常的形成和消散，单条短生命周期的细丝可能在较大的多细丝环境中出现并彻底消散。

这些转变在几何上连贯，却在时间上离散，会改变水汽路径的连通性或相对位置。平滑演变与间歇出现的构型变化相结合，使大气河适合采用拓扑表示。下一节介绍的拓扑框架将对如何编码和分析这些重组进行形式化处理，从而能够在统一的数学模型中表示几何相互作用和内部结构。

因此，大气河演变可视为由天气尺度大气动力学驱动、按时间排序的一系列带框架辫操作。基于辫子的视角并不会改变大气河行为背后的物理驱动因素，而是提供了一种符号化且结构稳健的表示方法，用以描述多条水汽丝状结构如何随时间重组、相互作用并发生变化。

2.4 水汽累积与框架的作用

尽管大气河通常以一维质心的形式呈现，但其物理影响源于核心轨迹周围不断演变的二维水汽场。横截面内整层水汽输送的局部增强会提高丝状结构的凝结潜势，并与下游极端降水密切相关 [32, 27, 17]。为以附着于股线的方式编码大气河内部沿线的这些结构变化，我们为质心上的每个点赋予一个水汽负荷度量，该度量根据垂直方向上的整层水汽输送场推导得出。

定义　见 2.1（大气河丝状体上的水汽负荷）设 s 表示沿大气河的弧长　　n

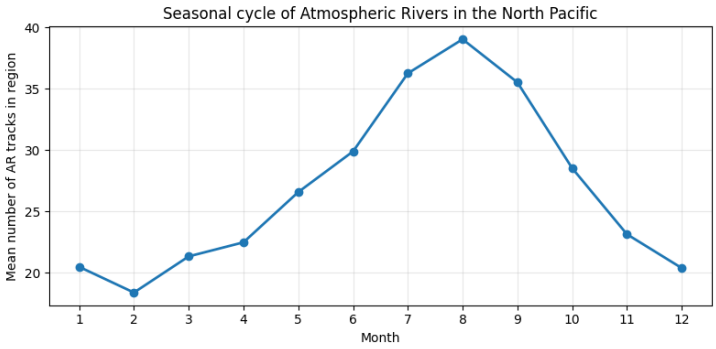


图3：所选区域域内大气河轨迹出现次数的季节循环，显示每月检测到的大气河丝状结构平均数量。

大气河质心，并设 $\Sigma(s)$ 为在 s 处垂直于质心的 *AR*带横截面切片。我们将 s 处的水汽负荷 定义为

$$M(s) \propto \int_{\Sigma(s)} \mathrm{IVT}(x, y, s)\, \mathrm{d}A, \tag{1}$$

其中，整层水汽输送表示积分水汽输送的标准标量模长。

备注 2.2 基于横截面积分整层水汽输送的量，过去已在大气科学文献中用作水汽输送强度的诊断量。然而，在此处，$M(s)$与不断演变的AR质心相联系，并专门作为一种股层级结构变量引入；其离散变化将被解释为拓扑辫模型中的框架。

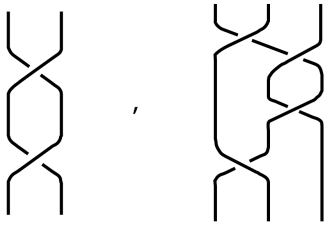
较大的 $M(s)$ 对应于紧凑、富含水汽且内部梯度强烈的区段；相反，数值降低则反映丝状结构减弱、展宽或部分脱离[28, 14]。在实际操作中，我们在原生网格上离散 $\Sigma(s)$ ，并对所得积分进行归一化，以确保不同大气河之间以及空间分辨率各异的数据集之间具有可比性。

这种对内部结构的标量描述，与广泛使用的大气诊断量一致，例如整层水汽输送极大值和梯度 [17], 整层可降水量集中区 [26], 经向水汽通量异常 [35], 以及羽流的位势涡度驱动的变形和旋转 [22], ，但不同之处在于，它提供的是基于轨迹而非纯欧拉视角的表征。通过将 $M(s)$ 与不断演变的质心相联系，我们得到一个一维序列，能够捕捉大气河与其环境相互作用时，内部水汽组织如何增强、重组或消散。

注 2.3 在本文后续构建的拓扑表示中，基于水分的量 $M(s)$ 起到沿每条股线的框架变量的作用。在经典带框架辫理论中，框架记录加粗股线绕其核心曲线 [24]的扭转情况。这里，这一抽象概念被赋予了物理解释：内部水分含量和横截面切变的变化可作为这种扭转的替代量。 $M(s)$ 的取值经过归一化，使其量级为 1 的变化对应于具有物理意义的水汽输送变化，从而确保结果在网格分辨率变化下保持稳健，并可在不同 AR事件之间进行比较。

2.5 为什么大气河可以采用拓扑模型

尽管大气河是动力流体结构，其演变却呈现出一些从拓扑视角来描述十分自然的特性。大气河丝状结构在数千公里的范围内以及多日时间尺度上都能保持相干身份 [34]。在较长时间内，它们平滑而连续地演变；然而，最显著的结构变化，



F图 4：2 股辫子和 3 股辫子的示例。时间向上递增。

包括分岔、合并、曲率突然变化和丝状体消散，都是由周围天气尺度环境所引发的离散事件 [21]。多个大气河共存时，它们的轨迹可能相互交织，或改变经向顺序；这反映的是有序的几何相互作用，而非随机变化 [25, 13]。与此同时，它们的物理特征，包括长度、宽度、方向和内部水汽组织结构，都是依赖于几何形态的属性，会沿着丝状结构连续的主干协调演变 [35, 27]。综合来看，这些特征正是拓扑模型旨在捕捉的行为：连续形变被离散重组所打断，而这些重组会改变连通性或相对位置。

因此，拓扑表示提供了一种补充而非替代 AR 动力学表述和统计描述的视角。通过聚焦于结构演化（例如细丝如何相互作用、分裂、合并和增强），它以数学上易于处理的形式提取出 AR 行为的组织主干。下一节构建的框架通过将 AR质心及其内部水汽结构表示为辫股，并将其随时间的演化进行符号编码，使这一视角形式化。这为刻画水汽输送网络中的结构转变提供了一种简洁方式，并为 AR 组织和相互作用的新诊断方法奠定了基础。

3 带框架辫和辫子体：数学背景

本节介绍我们用于表示大气河（AR）的拓扑结构。经典辫理论 [2, 5] 为编码多个 AR 质心按时间排序的交叉提供了基础。为考虑 AR 的有限宽度和内部结构，每条辫股都被加粗为一个带，从而形成带框架辫理论 [24]。然而，一个区域内存在的大气河丝状体数量会随时间变化，因为它们可能出现、消散、分裂或合并。这些过程需要采用更为一般的带框 *braidoid*框架，该框架允许辫股具有自由端点，并允许发生分裂和合并行为。下文各小节将严谨地概述这些构造，同时保持与 AR动力学一致的物理解释。

3.1 经典辫子

由 n 股线构成的经典辫，是嵌入在 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 中的 n 条互不相交的光滑曲线的集合，其中每条曲线都沿垂直方向单调递增。各股线在三维空间中不会相交，但它们在 $\mathbb{R}^2$ 上的投影可能会出现横截交叉。

如果两个辫子可以在周围空间中平滑变形为彼此，则认为它们等价：变形过程中不得切断或交叉辫股，不得反转时间方向，并且端点须保持固定在边界平面上。这种变形称为环境同痕。$\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ 。

[1]信息　地，一个辫子可以通过“摆动”变成另一个辫子，而无需切断或重新连接辫股，也无需反转时间　　e,

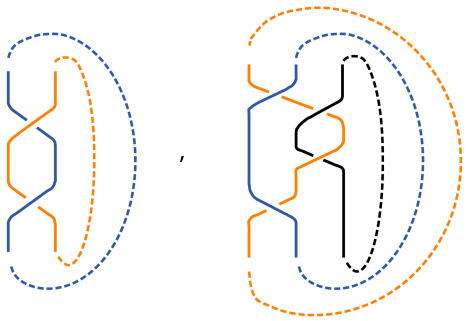


图 5：2股辫和3股辫的闭合，生成两个链环。

注 3.1 辫子的一种重要操作是 闭合：用不相交的弧将每条股线的顶部端点与对应的底部端点连接起来，弧位于 $\mathbb{R}^3$中。由此得到一个 S^3中的链环。根据亚历山大定理，每个链环都可以表示为一个辫子的闭合[1]。

所有 n股辫的集合都具有一种自然的复合运算，即垂直拼接（堆叠）：将一条辫子的底部端点与下一条辫子的顶部端点识别起来，所得嵌入仍是一条辫子。保持辫股不相交、时间方向单调以及端点不变的平滑变形（环境同痕）不会改变辫子的本质结构。将辫子视为在此类变形下等价时，所得等价类构成一个群，称为辫群 B_n。

B_n 的一个经典表示由 Artin生成元给出

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1},$$

其中， σ_i 表示股线 i 横向穿过股线 i+1的上方，而 σ_i^{-1}表示相应的下交叉。这些生成元满足以下定义关系

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{if } |i-j| > 1, \qquad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}.$$

B_n 的每个元素都可以用 $\sigma_i^{\pm 1}$中的辫子词 表示；表示同一元素的不同词由上述关系联系起来。

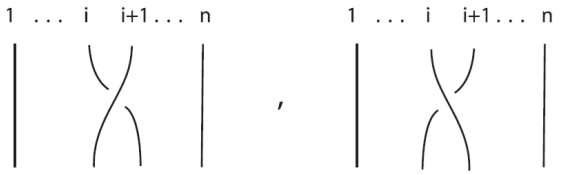


图 6：辫群生成元 σ_i （右）和 σ_i^{-1}（左）。

该群结构以形式化方式编码了辫股之间横向位置按时间排序的交换。在我们的大气应用中，这些辫股将表示大气河丝状结构的质心轨迹，而由此产生的辫子词则以符号方式捕捉它们之间的几何相互作用。

B_n 中的代数关系对应于经典的第 2 类和第 3 类 Reidemeister 变换，它们允许对股投影进行局部变形，同时不改变底层拓扑。

或改变 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处的连接点。

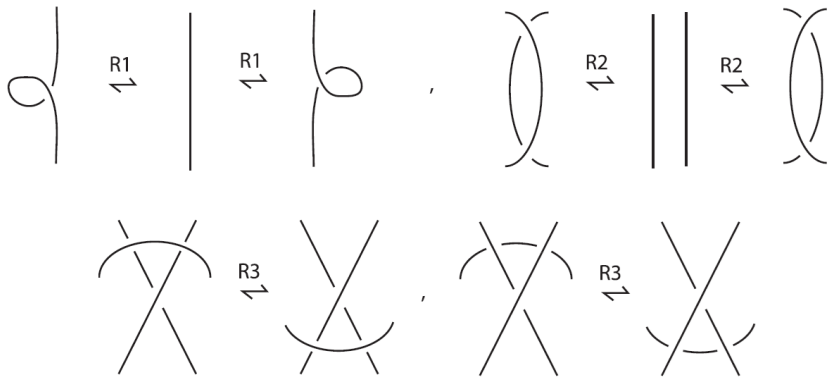


图7：Reidemeister 变换。

最后值得一提的是，辫子的等价类与有向链环的同痕类一一对应。更准确地说：

定理3.2（Markov）两个辫子的闭包同伦当且仅当一个辫子可以通过以下变换的有限序列变为另一个辫子（示意见图*8*）：

$$\text{Conjugation}: \quad a \sim bab^{-1}, \quad a, b \in B_n,$$

$$\text{稳定化}: a \sim a\sigma_n^{-1}, \quad a \in B_n.$$

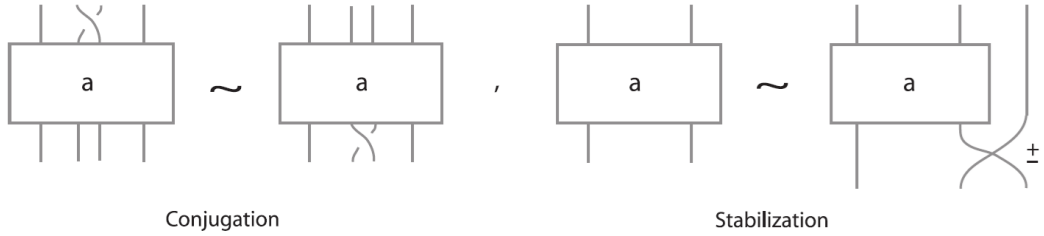


图8：辫子等价。

3.2 带框架辫

经典辫子表示一维股线轨迹。为模拟具有有限宽度和内部结构的物体，可以将每条股线替换为一条互不相交的嵌入带（或带状体），从而在$\mathbb{R}^2 \times [0,1]$中构成带框架辫。框架记录每条带绕其核心曲线的扭转，并以整数衡量。虽然在拓扑背景下，框架取整数值，但其物理解释将在第3.3节中通过对连续的基于湿度的量进行离散化来定义。

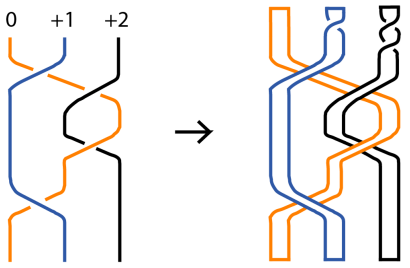


图 9：应用于辫子三条股线的整数框架示例（0、 +1、 +2 次扭转）。

带框架辫的代数理论由 Ko & Smolinsky 提出 [24]，他们证明， n 股的带框架辫群可以表示为一个半直积

$$FB_n \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n,$$

其中， B_n 分量编码辫股相互作用，而 $\mathbb{Z}^n$ 分量则记录辫股交换过程中每条带的整数扭转。关于曲面辫子的推广，参见 [4]。

令 σ_i 表示辫群 B_n的标准 Artin 生成元，并令 τ_i 表示第 i条带绕其核心的一次整圈扭转。则 FB_n 具有如下表示：

$$FB_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1},\, \tau_1, \dots, \tau_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (|i-j|>1), \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \\ \sigma_i\tau_i = \tau_{i+1}\sigma_i, \\ \sigma_i\tau_{i+1} = \tau_i\sigma_i, \\ \sigma_i\tau_j = \tau_j\sigma_i \quad (j \neq i, i{+}1), \end{array} \right\rangle.$$

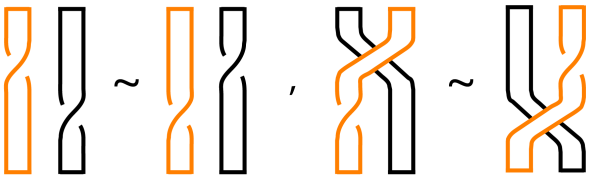


图 10：左：扭转之间的关系：$\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$，其中 $i \neq j$。右：扭转与交叉之间的关系：$\tau_i\sigma_i = \sigma_i\tau_{i+1}$。

生成元 σ_i 编码股线横向位置按时间排序的交换，而 τ_i 则度量每条带的内部扭转。在后文提出的大气学解释中，这些扭转值对应于大气河丝状结构内部水汽结构沿线具有物理意义的变化。

3.3 框架的物理解释

如上所述，在带框架辫理论中，与一条股线相关联的整数框架用于衡量嵌入带围绕其核心曲线旋转的整圈数。这种拓扑扭转量化了股线几何形态之外的结构信息。对于大气河，我们用物理术语重新诠释同一概念：

“带”表示围绕大气河质心的二维水汽廊道，其内部旋转或压实对应于水汽输送的空间积分变化。

令 s 表示沿质心的弧长，并令 $\Sigma(s)$ 表示该位置处穿过水汽廊道的垂直横截面。我们将标量 $M(s)$ （定义见方程（1））与质心上的每个点相关联，该标量反映通过横截面输送的整层水汽总量。增强的 $M(s)$ 区域表示湿润、紧实且横向梯度较强的丝状结构，而其减小则意味着水汽扩散、减弱或部分脱水。实际上， $M(s)$ 是一个连续量；为得到整数框架，我们使用上述归一化方法对其变化进行离散化，使得 $M(s)$ 中约一个归一化单位的变化对应一个框架单位。因此，我们将 $M(s)$ 的正增量解释为正框架变化，负增量则解释为负框架变化；这些变化是在超过预设弧长尺度的质心线段上进行判定的，该尺度与再分析分辨率相关。从这个意义上说，带的拓扑扭转可作为大气水汽内部重组的替代指标。

这种表示的一个关键优势是其稳健性：大气河路径的平滑变形（例如天气尺度气流引起的轻微曲率或波动）主要影响质心的几何形态，不一定会使 $M(s)$发生足以越过框架阈值的变化，因此不会改变整数框架。只有显著的内部重组（例如增强、切变驱动旋转或大幅减弱）才会使 $M(s)$发生足以改变框架值的变化。因此，框架提供了一种离散诊断量，能够滤除高频几何噪声，同时保留水汽输送结构在动力学上具有意义的演变。

$M(s)$的物理解释与已有诊断量相符，例如整层水汽输送极大值和梯度 [17], 、整层可降水量浓度 [26], ，以及位涡强迫 [22], 和急流核边界相关切变 [9]所引起的倾斜与旋转。其新颖之处在于，它内在地依附于不断演变的丝带骨架，从而形成对内部变化的类拉格朗日表示。当多个大气河同时存在时，不同股线上的框架值构成 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个向量，并随着天气尺度环境调节其水汽负载而随时间演变。

这样一来，带框架辫群中的 $\mathbb{Z}^n$ 因子 FB_n 便获得了可作物理解释的作用：它记录了水汽驱动的大气河丝状结构变形。结合 σ_i 生成元所刻画的几何相互作用，它构成了一种统一的代数描述，同时编码了水汽廊道的路径几何与热力演变。

3.4 带框同痕与大气学解释

带框架辫的拓扑等价性由一组经过修改的 Reidemeister 变换决定。虽然第 2 类和第 3 类变换与经典情形保持一致，但第 1 类变换受到限制。具体而言，在带框架情形下，拉直一个卷曲或环圈并不构成环境同痕，除非我们将带状体内部扭转的变化纳入考量。如图 11所示，消除一个环圈对应于框架整数发生单位变化（± 1）。

从物理视角来看，这一限制确保大气河丝状体的“内部历史”（例如其亚网格尺度旋转或水汽增强）不会在全局轨迹变形过程中丢失。因此，框架起到了记录丝状体演化的拓扑记忆作用。

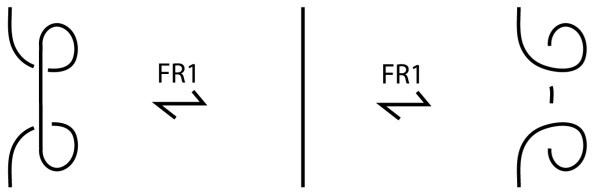


图11：带框架情形下的 Reidemeister 1变换。带框架I型变换（FR1）体现了物理环与一个框架单位（±1扭转）之间的对应关系。

如果两个带框架辫可以在保持以下性质不变的情况下彼此平滑变形，则称它们等价：

(i) 嵌入式带状结构，

(ii) 时间方向上的单调性，以及

(iii) 带及其端点的不相交性。

这种形变称为带框架同痕。通俗地说，图中的交叉总数可以通过局部几何调整而改变，但股线的连接方式以及附着在每条股线上的整数框架保持不变。

在图示层面，带框架同痕由实现FB_n中的关系的变换生成：

1. 带几何形状的微小几何扰动，不改变投影交叉的拓扑类型（ $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$中的环境同痕）；
2. 独立交叉的局部重排，对应于Artin辫关系（例如，交换涉及不相交的两对股线的两个交叉的顺序）；
3. 沿带重新分配扭转，同时保持其总整数框架不变（例如，沿股线滑动局部扭转，而不增加或移除一个完整的额外扭转）。

这些变换具有明确的大气学解释。天气尺度气流引起的AR质心平滑摆动，或附近细丝彼此交织方式的微小几何调整，对应于底层辫状结构的框架同痕：质心发生形变，但细丝之间的连通性和离散化的框架值保持不变。相比之下，水汽廊道的持续增强或减弱，或横截面结构的持续切变驱动旋转，会以产生相关整数框架显著变化的方式修改标量场$M(s)$。在我们的模型中，这类事件并非由同痕表示，而是由扭转生成元 τ_i作用于相应股线来表示。

因此，框架充当一种离散诊断量：对于仅使大气河丝状结构发生平流并轻微变形的物理变形，它保持不变；只有当丝状结构的内部水汽组织结构发生实质性重组时，它才会改变。框架同痕（框架固定时纯粹的几何演化）与扭转操作（内部结构的变化）之间的这种区分，将是下文所发展的基于辫的大气河动力学描述的核心。

注3.3 我们注意到，引入辫子等价和带框架辫等价，仅仅是为了说明该表示的稳健性和物理可解释性；我们并不试图将AR事件按等价关系进行分类，也不构造等价类不变量。

3.5 带框架辫状物：有限大气河丝状结构的正确背景

经典辫子假设股线数量固定，并在整个时间区间内持续存在。然而，大气河并不以这种理想化方式运动：新的细丝可能作为连贯水汽羽流出现，现有细丝可能消散或逐渐减弱直至消失，而单个细丝也可能随着天气尺度气流的重组而分裂或合并。由于这些过程会改变细丝的数量和连通性，仅凭带框架辫无法编码大气河结构的完整生命周期。

为描述这些有限时间内发生且改变拓扑结构的事件，我们采用了辫子体理论，该理论由 [19], 提出，作为拓扑背景。辫子体是在 $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$中的开放辫子：其股线可以终止于边界平面，也可以在内部自由结束，还可以在内部具有自由端点。因此，对于细丝可能以非守恒方式出现、消失或相互作用的系统，辫子体构成了自然的拓扑框架。若进一步为每条股线赋予整数框架，就得到带框 *braidoid*，能够同时描述大气河丝状结构的几何演变和内部水汽动力学。

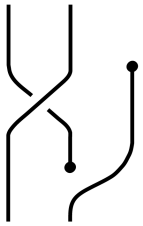


图 12：一个辫子体。

定义 3.4 一个带框 *braidoid* 由一个辫子体图构成，其中每条股线都替换为一条带，并带有整数框架。允许的同痕必须保持：（i）时间方向上的单调性；（ii）带内部的不相交性；（iii）自由端点的连接方式；以及（iv）每条股线上的整数框架。特别是，任何改变股线总扭转量的局部变换，或以不符合辫子体同痕的方式重新定位自由端点的局部变换，都是不允许的。

在这一设定中会出现两类禁用变换。第一类继承自经典辫状物：一个端点不得从另一条股线上方或下方穿过。从物理角度看，这反映了大气河丝状体的头部或尾部无法在没有实际动力学重联事件的情况下“跳过”另一条丝状结构。

第二个禁行变换是带框架情形下的新概念，对于本文采用的物理解释至关重要：自由端点不能绕其带轴旋转，从而改变其整数框架。此类旋转会产生或消除一整圈扭转；在大气模型中，这对应于横截面水汽结构的实质性重组。由于 AR 生成点和消散点若不发生真正的水汽通量重组，就不能进行此类旋转，因此这些变换不被允许。这一限制将带框架辫状物与经典带框架辫区分开来，并确保框架变化所编码的是 $M(s)$ 中具有物理意义的变化，而非图示伪象。

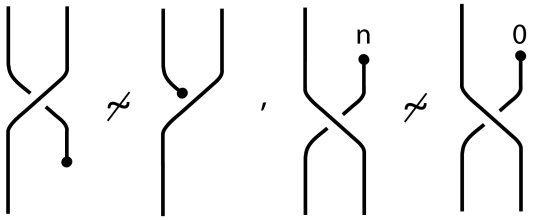


图 13：带框 braidoid 中的禁用变换。左：一个端点从另一股线下方穿过。右：端点的旋转运动改变了整数框架。

注 3.5 本文引入的带框架编织拟态结构，包括对端点处同伦变形的限制，构成了本文所考虑的带框架情形下的一种新拓扑对象。后续论文将系统地研究带框架辫状物、其代数表示及相关不变量。

辫状物与 Knotoids。辫状物形式与*Knotoids*理论密切相关，该理论由 Turaev 提出 [38]。Knotoid 是一种带有两个特定端点的开结图，其等价关系由 Reidemeister 变换给出，但端点不得滑过交叉。Knotoids 为辫状物提供了一种图示对应形式：将辫状物闭合可得到 Knotoid 图，而沿单调高度函数切开 Knotoid 则可得到辫状物。从这个意义上说，辫状物可视为 Knotoids 的“时间参数化”版本。Knotoid 理论中对端点运动的限制，与辫状物中对端点的禁用变换相呼应，也有助于进一步理解自由端点在表示有限长度大气河丝状结构中的作用。本文采用的带框扩展，只是在这种对应关系中加入了整数值扭转结构。

生成元与大气学解释。我们对大气河演变进行建模所需的基本代数运算为：

$$\{\sigma_i^{\pm 1}\} \cup \{\tau_i\},$$

其中

- $\sigma_i^{\pm 1}$：股交叉 （大气河质心的横向重排），
- τ_i：带 i 上的整圈扭转（水汽增强或切变驱动旋转）。

注 3.6 虽然大气河生成、耗散和分支事件在图示中可以分别解释为局部端点生成、端点移除或三价分裂/合并，但我们不为这些操作引入代数生成元。此类扩展可借助打结三价图理论形式化（例如 Caprau 关于三价图的研究 [8]），但当前模型只需采用辫状物结构所编码的拓扑约束，以及上文所述的带框端点限制。这些条件足以对大气河丝状结构在有限时间内的出现、消失和相互作用进行概念性建模。

3.6 何时辫子足以描述?

尽管带框 braidoid 能为大气河演变提供最一般的拓扑表示，但在中等长度的时间区间内，带框架辫通常已经足够。特别是在约 12–48 小时的时段内，大气河往往呈现出：

- 数量固定的相干丝状结构，
- 没有显著的分支或合并，且

- 稳定的横截面水汽组织结构。

在这些条件下，丝状体网络的拓扑结构不会改变，其演化可以完全用 FB_n 中的一个带框架辫词来编码。随着时间推移，唯一需要更新的内容对应于细丝之间的几何相互作用（由 σ_i记录）和内部水分演化（编码在 τ_i中）。

相比之下，一旦出现以下任一情况，辫状物便不可或缺：

1. **生成或耗散：**新的水汽羽流形成，或现有丝状结构终止；2. **拓扑重构：**丝状结构在环境流场作用下分叉或合并；3. **子结构的空间脱离：**次级连贯核心或局部最大值漂移离开主要丝状结构；4. **长时段重建：**大气河演变持续数日，期间丝状结构的数量、身份或连通性发生变化。

4 从 FromARTrack 数据到辫子

本节介绍如何将预先识别的大气河（AR）质心轨迹转换为定向辫子词，以编码按时间排序的几何相互作用。该流程提取有限时间窗口内大气河丝状结构之间的交叉序列，从而以符号形式表示它们的相互缠绕。辫复杂度较高的区域对应丝状结构强烈相互作用或快速发生几何重构的时段。基于水汽的框架化和分支事件将在第 5和第 3.5节中介绍。



图 14：使用带符号有向面积（行列式 D）检测股线交叉。在时间 t_k 和 t_{k+1} 之间，经向顺序发生变化会产生交叉。若 $D > 0$，我们指定 σ_i （左图）；若 $D < 0$，我们指定 σ_i^{-1}（右图）。

输入由质心轨迹组成

$$(x_i(t_k), y_i(t_k)), \qquad i = 1, \ldots, N, \quad k = 0, \ldots, T,$$

从大气河目录或自动检测算法中获取离散时间采样数据。核心思想是，质心纵向排序的变化表明发生了交叉，而交叉的方向 则由类叉积行列式的符号决定。

算法 1： 从 AR 质心轨迹中提取定向辫子

输入： $i = 1, \ldots, N$在$k = 0, \ldots, T$时的质心轨迹（$x_i(t_k)$ $y_i(t_k)$）。输出：定向辫子词 β。 1 1. 预处理与时间平滑：插值或填补缺失的质心位置。 2 应用时间平滑（例如 Savitzky–Golay 滤波器）以抑制高频噪声。 3 可选：将范围限制为纵向窗口宽度为 Δ_{span}内的细丝。 4 2. 计算纵向排序：对于 $k = 0, \ldots, T$，执行 5 排序$_k \leftarrow$ argsort($x_1(t_k)$ $\ldots, x_N(t_k)$) 6 3. 检测连续时间步之间的交叉：对于 $k = 0, \ldots, T-1$，执行 7 对排序 $_k$ 中的每个相邻对（a, b），执行 8 如果（a, b）的顺序在时间 t_{k+1} 发生反转，则 9 计算有向面积$D = \Delta x_a \Delta y_b - \Delta y_a \Delta x_b$。 10 如果 $|D| < \varepsilon$，则 11 舍弃近退化相互作用 12 否则，如果 $D > 0$，则 13 将σ_j 追加到 β14 否则，如果 $D < 0$，则 15 将 σ_j^{-1}追加到 β

16 **4. 返回辫子词** β。

经向排序的变化可识别潜在交叉，但仅凭排序无法确定方向。为指定一致的带符号交叉方向（辫群生成元符号），我们计算：

$$D = \Delta x_a \Delta y_b \; - \; \Delta y_a \Delta x_b,$$

股线 a和 b 在时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$内的位移向量之间的带符号有向面积（或二维叉积）。由于经纬度坐标位于球面上且以度为单位表示，我们先将$(\lambda, \; \phi)$映射到局部笛卡尔投影（例如采用 $\Delta x = \cos(\phi_0)\,\Delta\lambda, \;\; \Delta y = \Delta\phi$的等距圆柱投影，或局部切平面投影），再计算$(\Delta x, \; \Delta y)$，其中 ϕ_0 为适当的参考纬度（例如两条股线在$[t_k, t_{k+1}]$内的平均纬度）。这样可以确保有符号面积行列式 D 在不同纬度之间具有几何可比性。因此，相切阈值 ε 以所得投影单位设定（如有需要，也可转换回基于度的单位进行报告）。

若记录了 $D > 0$, σ_j；若 $D < 0$，则相反的方向会产生 σ_j^{-1}。$|D|$ 的值较小表示运动近乎平行或存在数值不稳定交叉，因此会使用阈值 ε 将其剔除。

行列式检验在几何上十分自然，并且对中等程度的位置误差具有鲁棒性。它能得到一致的方向赋值，并确保生成的辫子词忠实地表示 AR 质心网络按时间排序的演化。

4.1 大气河轨迹数据

我们使用从 ERA5 再分析中提取的大气河（AR）轨迹目录，提取时采用了 [17, 18, 34] 的检测与追踪方法。每条六小时记录对应于某一时间步的一个大气河特征，并包含：

- `time`：检测的时间戳，

- `trackid`：连贯大气河丝状体的唯一标识符，
- `centroid_x`、 `centroid_y`：由整层水汽输送定义的质心的经度和纬度，
- 其他大气河属性，例如IVT幅度 [28, 17]，检测面积和陆地相互作用。

对于每个 `trackid` ，我们都会获得一条离散的质心轨迹

$$t_k \longmapsto (x(t_k),\, y(t_k)), \qquad k = 0, \ldots, T,$$

在有限的时间窗口内，按时间顺序表示最大水汽输送的路径。

将CSV档案加载到 `pandas` DataFrame后，我们执行以下预处理步骤：(i) 删除持续时间短于12小时的细丝；(ii) 对孤立的缺失坐标进行前向/后向填充；(iii) 使用低阶Savitzky–Golay滤波器进行时间平滑，以抑制高频位置噪声。

为聚焦于与北美风暴路径具有强烈天气尺度耦合的太平洋源大气河事件，我们将研究范围限定在以下区域

$$10^\circ\mathrm{N} \le \phi \le 70^\circ\mathrm{N}, \qquad 150^\circ\mathrm{E} \le \lambda \le 110^\circ\mathrm{W},$$

以 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 经度约定 [35, 33, 29] 表示。由此得到的区域子集记为 df_{reg}，并作为后续所有基于辫子的诊断方法的基础。

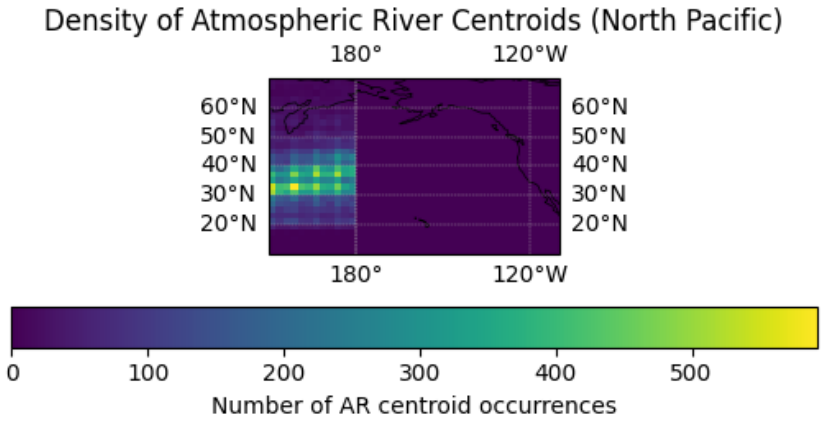


图15：大气河质心在北太平洋区域（10°N–70°N，150°E–110°W）内的空间分布。阴影表示质心出现的频率，突显了作为辫子提取输入的大气河主要通道。

4.2 滑动时间窗与股线选择

为分析大气河演变过程中的局部缠绕结构，我们采用固定时长 T_{win} （通常为48小时）的滑动时间窗，这与既有的大气河生命周期诊断方法 [10, 28] 一致。对于预先设定的一组时间戳中每个中心分析时间 t_0 ，我们定义时间区间

$$[t_{\mathrm{start}}, t_{\mathrm{end}}] = \Big[t_0 - \frac{T_{\mathrm{win}}}{2},\; t_0 + \frac{T_{\mathrm{win}}}{2}\Big].$$

在此时间窗口内，我们提取子集

$$df_{\mathrm{win}} = \{\text{rows of } df_{\mathrm{reg}} \mid t_{\mathrm{start}} \le \texttt{time} \le t_{\mathrm{end}}\}.$$

我们识别该时间区间内存在的所有细丝（不同的 `trackid` 值），并最多保留其中 `max_strands` 个，选择采样时间步数量最多的细丝。由此得到一个集合

$$M \ \leq \ \texttt{max_strands}$$

在所选时间窗口内具有足够完整且分辨率良好的轨迹。

令$\{t_k\}_{k=0}^{T-1}$表示 df_{win}中经排序的时间戳，并令$\{s_i{}_{i=1}^{M}$ 表示保留的轨迹 ID。然后我们构造矩阵

$$X_{k,i} = x_{s_i}(t_k), \qquad Y_{k,i} = y_{s_i}(t_k),$$

其中缺失值通过前向和后向插值（`ffill`/`bfill` 在`pandas`中）填补，从而为所有 M 辫股生成连续的经度—纬度轨迹。

紧凑细丝簇。 并非时间窗口内所有 M 细丝都存在紧密的几何或动力学相互作用。为提取相干束，我们计算平均经度

$$\bar{x}_i = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} X_{k,i},$$

按 $\bar{x}_i$对 M 辫股排序，并搜索满足条件的子集

$$S \subseteq \{1, \ldots, M\}, \qquad |S| = \texttt{cluster_size} = N,$$

其平均经度满足紧凑性条件

$$\max_{i \in S} \bar{x}_i - \min_{i \in S} \bar{x}_i \ \leq \ \Delta_{\text{span}},$$

其中 Δ_{span} 通常选取约为 $80°$。此选择步骤可确保选出的股线构成几何上连贯的一组，这与先前通过空间邻近性和共同的天气尺度强迫来识别活动区束的研究一致 [16, 25]。如果在给定时间窗口中找不到这样的子集，则会将该窗口从后续分析中剔除。

总结如下：

- M 表示窗口中存在且采样充分的候选细丝数量，
- `cluster_size` $= N$ 表示实际用于构建辫子的股线数量，
- 通常为 $N < M$，选择依据是基于经度的紧凑性。

4.3 从离散轨迹中提取有向辫子

给定所选簇的 N条辫股在 $t_0, \ldots, t_{T-1}$这些时刻采样得到的矩阵 X, Y，我们使用离散排序与交叉过程提取定向辫子词。这遵循动力系统中既有的拉格朗日辫子诊断方法 [37, 15]。

在每个时间 t_k，我们确定辫股的纬向（经度）排序：

$$\text{order}_k = \text{argsort}(X_{k,\cdot}),$$

该坐标将股线从西向东排序。比较排序$_k$ 和排序$_{k+1}$ ，即可识别系统演化过程中潜在的交叉。

辫轴约定。我们将时间作为辫轴（单调垂直坐标）。使用经度作为排序坐标（东西向投影），以确定辫股置换和交叉。

对于按顺序$_k$排列的每个相邻对，索引为 $(j,\ j+1)$，定义：

$$(a_{\text{now}}, b_{\text{now}}) = \big(\text{order}_k[j],\, \text{order}_k[j{+}1]\big), \qquad (a_{\text{next}}, b_{\text{next}}) = \big(\text{order}_{k+1}[j],\, \text{order}_{k+1}[j{+}1]\big).$$

当满足以下条件时，检测到交换

$$a_{\text{now}} = b_{\text{next}} \quad \text{and} \quad b_{\text{now}} = a_{\text{next}},$$

这表明辫股 a 和 b在 t_k 与 t_{k+1}之间发生了交叉。

通过速度行列式确定方向。为了指定上下穿越方向，我们近似计算辫股速度：

$$\mathbf{v}_a = (\Delta x_a, \Delta y_a) = \big(X_{k+1,a_{\text{now}}} - X_{k,a_{\text{now}}}, Y_{k+1,a_{\text{now}}} - Y_{k,a_{\text{now}}}\big),$$

$$\mathbf{v}_b = (\Delta x_b, \Delta y_b) = \big(X_{k+1,b_{\text{now}}} - X_{k,b_{\text{now}}}, Y_{k+1,b_{\text{now}}} - Y_{k,b_{\text{now}}}\big).$$

我们计算有向面积

$$D = \Delta x_a\, \Delta y_b - \Delta y_a\, \Delta x_b,$$

其符号可区分顺时针交换与逆时针交换。 D 的值较小时，对应近切向运动，因此予以忽略。

因此：

$$D > 0 \Rightarrow \sigma_j, \qquad D < 0 \Rightarrow \sigma_j^{-1}.$$

（此处 j 为采用标准从一开始的编号法的辫指数。）

扫描所有成对组合和时间步后，得到定向辫子词

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_m}^{\varepsilon_m}, \qquad \varepsilon_\ell \in \{+1, -1\},$$

及其相关元数据（股线标签、时间戳、行列式值）。

相切阈值。 由于质心位置来自每六小时一次的再分析场，微小的经纬度扰动可能产生虚假交叉信号。我们设定容差ε ，仅当 $|D| > \varepsilon$时才接受交叉。选择 ε 在 10^{-6}–10^{-5} 度[2] 的范围内，与典型的亚网格位移噪声相符。辫子词在此范围内保持稳定，这表明该阈值在物理和数值层面均具有稳健性。

4.4 辫子复杂度与代表性事件的筛选

对于每个滑动窗口，我们提取一个定向辫子词 β，用于描述所选大气河丝状结构的几何相互作用。我们使用交叉数量化相关的拓扑活动，该交叉数定义为词长

$$C(t_0) = m,$$

其中， m 是 β 中出现的生成元总数（每次出现σ_j 或 σ_j^{-1}均计为一个单位）。这一指标沿用基于辫子的输运诊断方法 [6, 15]。较大的 C（t_0）表示大气河质心之间横向排序变化更频繁，因此动力学相互作用更强。

注 4.1 我们使用词长作为一种简单的相互作用代理指标；更精细的辫子复杂度度量（例如基于熵的度量）虽有可能，但超出本文范围。

为了识别某一区域中纠缠最深的事件，我们将中心时间 t_0 按固定步长（通常为 10 个数据步长，例如对于每六小时一次的场， ≈ 2.5 天）在一组候选时间戳上滑动，针对每个时间窗计算 $C(t_0)$，并记录

$$C_{\max} = \max_{t_0} C(t_0).$$

达到此最大值的时间 t_0^* 定义了一个具有代表性的多丝状结构相互作用事件，并对应一个辫子词和股线标签

$$(t_0^*,\ \beta^*,\ \{s_i^*\},\ [t_{\text{start}}^*, t_{\text{end}}^*]).$$

归一化选项。由于词长取决于窗口时长 T_{win} 和采样间隔，因此通常适合考察归一化量

$$\widehat{C}(t_0) = \frac{C(t_0)}{T_{\text{win}}},$$

该量表示单位时间内的穿越率。本文在 C（t_0）第6节报告该量。在该节中，我们使用复杂度扫描来识别纠缠程度最高的三股线事件，并分析这一过程，同时与更大的六股大气河流束进行比较。前文所述的相切阈值可确保这些指标不受轨迹数据中微小位置噪声的影响。

4.5 时间–经度辫图与交叉可视化

为可视化提取的辫结构，我们为选定股线$\{s_i^*\}$构建时间–经度图。每条股线均以其离散经度序列表示

$$t_k \longmapsto X_{k,i}^*, \qquad k = 0, \ldots, T-1,$$

在（t， λ）平面中绘制为一条彩色曲线。这将生成一幅平面几何辫图，其投影与第4节中使用的排序程序完全一致。

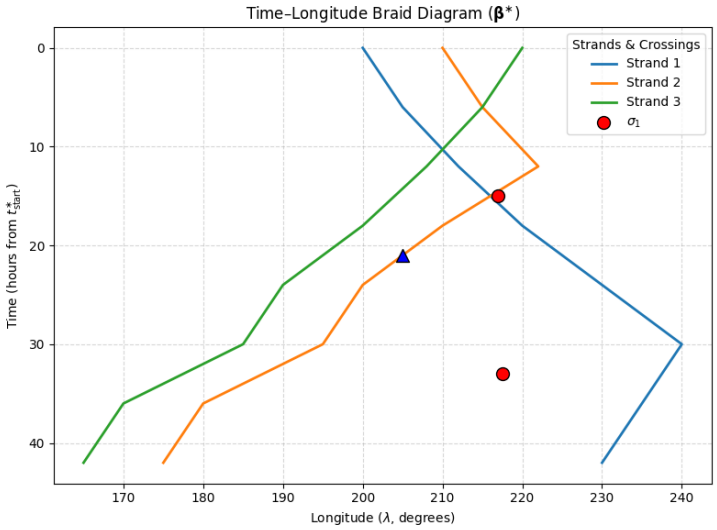


图 16：代表性事件的时间–经度辫图 t_0^*。该图展示了分析窗口 $[t_{\text{start}}^*, t_{\text{end}}^*]$内 $N = 3$ 选定 AR 股线的按时间排序的演化（曲线， λ 对 t）。图中在交叉位置附近叠加了标记，并用不同符号区分代数生成元 σ_j （正交叉）和 σ_j^{-1}（负交叉）。该图给出了提取的辫子词 β^*的平面几何投影，直观地呈现了大气河之间的动力学相互作用与其拓扑纠缠之间的对应关系。

利用与辫子词 β^{*}相关联的交叉元数据，我们在近似交叉时刻和经度处叠加标记。不同符号表示正交叉（σ_j）和负交叉（σ_j^{-1}），从而在代数词形式与丝状体位置的物理交换之间建立直接对应关系。

由于所有经度均采用相同的 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 惯例表示，绘制的曲线在区域域内保持连续，并避免在国际日期变更线处出现人为跳变。在离散采样时刻之间发生的相互作用被置于区间 $[t_k, t_{k+1}]$的中点；鉴于再分析场的时间分辨率为六小时，这引入的时间误差可以忽略不计。

这些图示直观地展示了拓扑纠缠：紧密的几何聚集和频繁的交叉对应于活跃的多丝状体相互作用。在下一节中，我们将通过纳入基于水汽的框架化和横截面带状结构来丰富这一表示，从而能够结合几何与热力学视角解读大气河演变 [27, 14]。

5 从定向辫到大气河带框架辫

第4 节中的定向辫表示对大气河质心之间横向位置的变化进行了编码，从而量化其几何缠绕。然而，大气河并非一维细丝：其内部水汽负载和切变会显著影响降水结果及水文影响。为纳入这些结构信息，我们依据带框架辫的经典理论，以大气河不断演变的水汽场所确定的框架来丰富辫子的每一股线 [24, 23]。

5.1 基于水汽的框架化

令 s_i 表示在离散时间 $t_0, \dots, t_{T-1}$采样的第 i 条选定大气河质心轨迹。在每个时间点 t_k，我们提取一条垂直于该轨迹的横截面 $\Sigma_i(t_k)$，以获取其周围的整层水汽输送场 s_i。该场根据网格化再分析数据中的整层水汽输送 $\mathrm{IVT}(x, y, t_k)$，并使用区域大气河掩膜 [17, 27]计算。积分水汽负载定义为

$$M_i(t_k) = \int_{\Sigma_i(t_k)} \mathrm{IVT}(x, y, t_k)\, \mathrm{d}A, \tag{2}$$

通过对横截面中检测到的大气河带像素的整层水汽输送求和进行数值近似。

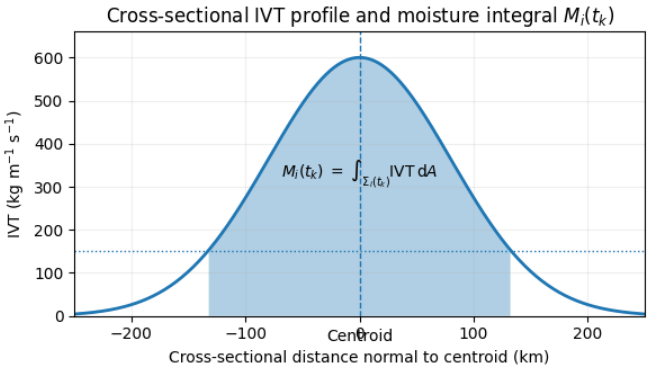


图 17：时间 t_k处垂直于大气河质心的横截面整层水汽输送廓线。阴影区域表示区域 $\Sigma_i(t_k)$，水汽积分 $M_i(t_k) = \int_{\Sigma_i(t_k)} \mathrm{IVT}\, \mathrm{d}A$ 在该区域上计算。较大的阴影区域对应紧凑且富含水汽的细丝，其横截面梯度增强，从而使辫子表示中的框架值更高。

较大的 $M_i(t_k)$ 值表示紧凑、富含水汽且切变强烈的受强切变丝状段，而数值降低则反映水汽减弱、横向扩散或部分脱水[28, 14]。

为获得无量纲且与分辨率无关的框架序列，我们用特征区域尺度 κ （例如窗口内 IVT-面积积分的标准差）对 $M_i(t_k)$进行归一化，并设

$$\tau_i(t_k) = \mathrm{round}\left(\frac{M_i(t_k)}{\kappa}\right) \in \mathbb{Z}.$$

整数 $\tau_i(t_k)$被解释为股线 i 在时间 t_k的框架，在拓扑意义上表示湿润大气河带围绕其质心的有效框架，而非字面意义上的物理旋转。正增量 $\tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k)$反映水分积累或切变诱导压实，负增量则对应减弱或横向展宽。

序列$\{\tau_i(t_k)\}_{k=0}^{T-1}$因此为每条大气河丝状体的内部结构演化提供了具有物理意义且拓扑稳健的描述。

注 5.1 我们强调，只有框架中的变化， $\Delta\tau_i(k) = \tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k)$，才会进入带框架辫表示。 $\tau_i(t_k)$的绝对值仅作为记账工具，而具有拓扑意义的信息由其增量承载，这些增量编码了沿每条丝状结构的内部水汽结构的积累或释放。

5.2 带框架辫词

Let

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{i_m}^{\varepsilon_m} \qquad (\varepsilon_\ell \in \{\pm 1\})$$

设为第4节中从质心交叉提取的定向辫子词。在时刻 t_k 和t_{k+1}之间，我们将框架贡献定义为

$$\Theta_k = \prod_{i=1}^{N} \tau_i^{\Delta\tau_i(k)}, \qquad \Delta\tau_i(k) = \tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k),$$

其中， τ_i 表示与带框架辫群FB_N [24]中第 i股线关联的扭转生成元。正（分别为负）增量会产生正（分别为负）整数扭转。

因此，表示该时间窗口内大气河演变的完整带框架辫词为

$$\beta_{\mathrm{fr}} = \Theta_0\,\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\,\Theta_1\,\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\,\cdots\,\Theta_{m-1}\,\sigma_{i_m}^{\varepsilon_m}\,\Theta_m.$$

此处，生成元 $\sigma_i^{\pm 1}$表示几何股线交叉，而扭转生成元 $\tau_i^{\pm 1}$则表示沿每条丝状结构的水分演化。因此，带框架辫提供了大气河动力学的双层表示，将位置重排与具有物理意义的内部变形结合起来。

注 5.2 扭转元 Θ_k 与几何生成元 $\sigma_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$ 交错排列，反映了演变的时间结构：框架变化会随时间连续累积，因此被赋予相邻质心交叉之间的时间间隔。若将所有扭转生成元集中放在辫子词的开头或结尾，就会掩盖这种时间顺序，也无法再对应大气河系统的物理演变。

示例 5.3（三丝状大气河事件的带框架辫词）考虑一个存在三条大气河丝状结构的时间窗口($N = 3$) ，第4 节的几何辫提取给出了如下有向辫词

$$\beta = \sigma_1\,\sigma_2^{-1}.$$

因此，在 t_0 和 t_3 之间检测到两次交叉：股线 1 和 2 发生了一次正交叉，随后股线 2 和 3 发生了一次负交叉。

假设第 5 节基于水分的框架诊断给出每条股线的以下整数框架：

	t_0	t_1	t_2	t_3
$\tau_1(t_k)$	0	1	1	2
$\tau_2(t_k)$	0	0	1	1
$\tau_3(t_k)$	0	0	0	-1

在连续的采样时刻之间，我们得到框架增量

$$\Delta\tau_i(k) = \tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k), \qquad k = 0, 1, 2,$$

即

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$\Delta\tau_1(k)$	$+1$	0	$+1$
$\Delta\tau_2(k)$	0	$+1$	0
$\Delta\tau_3(k)$	0	0	-1

带框架辫群 $FB_3 \cong \mathbb{Z}^3 \rtimes B_3$ 中相应的扭转元为

$$\Theta_0 = \tau_1^{+1}\tau_2^{0}\tau_3^{0} = \tau_1, \qquad \Theta_1 = \tau_1^{0}\tau_2^{+1}\tau_3^{0} = \tau_2, \qquad \Theta_2 = \tau_1^{+1}\tau_2^{0}\tau_3^{-1} = \tau_1\,\tau_3^{-1}.$$

我们假设检测到的交叉发生在不同的时间区间内，且其顺序与采样时刻一致 t_k，这由第 4 节的提取程序保证。编码几何演化和水分演化的带框架辫词为

$$\beta_{\mathrm{fr}} = \Theta_0\,\sigma_1\,\Theta_1\,\sigma_2^{-1}\,\Theta_2 = \tau_1\,\sigma_1\,\tau_2\,\sigma_2^{-1}\,\tau_1\,\tau_3^{-1}.$$

从几何角度看， σ_1 和 σ_2^{-1}记录了三个质心之间横向位置的交换。从物理角度看，交叉之间及之后的扭转增量 τ_1 和 τ_2 代表水分积累或切变过程；它们会诱发相应细丝的压实，而τ_3^{-1}则代表在时间窗口接近末尾时第三条细丝的减弱或展宽。因此， β_{fr} 以一个代数对象简洁地编码了质心交叉的序列以及 AR 系统的内部结构演化。

5.3 数值流程中的实现

第 4 节的方法可自然地扩展到带框架情形。对于每个区间 $[t_k, t_{k+1}]$，我们执行以下步骤：

1. 通过行列式判据检测定向质心交叉；2. 计算横截面水分负载 $M_i(t_k)$及其归一化框架值$\tau_i(t_k)$；3. 计算每条股线的框架增量 $\Delta\tau_i(k) = \tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k)$；4. 在连续的几何交叉之间插入相应的扭转元 $\tau^{\Delta\tau_i(k)\;i}$。

由此得到一个随时间变化的带框架辫子词

$$\beta_{\mathrm{fr}} \in FB_N,$$

同时编码丝状体位置的几何交换，以及每条股线的内部水分演化。在第6节中，我们将这一框架应用于一个交互性极强的多细丝AR事件，并展示带框架辫结构如何揭示仅凭质心几何无法发现的增强和减弱特征。

5.4 为什么大气河形成辫状物而非辫子

如第3.5节所述，大气河通常不符合经典辫理论的结构假设。区域域中的细丝数量会随时间变化：新的大气河可能在上游形成，现有细丝可能在登陆后消散，而连贯的水汽通道也可能分裂或合并。这些过程对应于基本的类辫事件：

- 端点生成（新丝状结构的生成），
- 端点消灭（耗散或衰减），
- 丝状结构分支为多个后代，
- 相邻细丝合并为单一水汽廊道。

虽然我们可以用符号表示这些图示事件（例如，用 $\varepsilon^{\pm}$ 表示端点的生成/消灭，用 η 表示分支），但这些符号仅用作拓扑变换的标签。我们不会为辫状物引入代数表示；目前文献中尚不存在此类表示。这与结辫理论的情况类似：其中带有自由端点的图形是在拓扑层面进行研究的，无需引入群结构。

同时允许自由端点和整数扭转，可得到一种带框 *braidoid*描述，其中 AR系统的演化可能涉及表示几何交叉的符号 $\sigma_i^{\pm 1}$、基于水汽的扭转变化 $\tau_j^{\pm 1}$，以及辫股的出现、消失或分支。这一扩展框架自然反映了大气河丝状结构的有限寿命和结构可塑性。

尽管大气河本质上是辫状物，但我们的滑动窗口分析仅关注有限区间，并要求其中固定的一组丝状结构始终存在。因此，分析中排除了生成和消失事件，从而能够在不损害物理相关性的前提下，建立定义良好的带框辫表示。未来的研究将进一步发展完整的框架辫状结构，明确建模生成、耗散、分裂和合并。

6 案例研究与结果

本节将说明，基于辫子的诊断方法和基于带框辫子的诊断方法如何捕捉北太平洋区域子集中大气河的几何相互作用和水汽驱动的相互作用。我们首先进行滑动窗口复杂度扫描，以识别拓扑活跃程度最高的区间；随后详细分析复杂度最高的三股辫，并将其与规模更大的六股大气河流束进行比较。接着，我们介绍带框辫表示，该表示纳入了沿每条大气河丝状体的水分演化。

6.1 滑动窗口复杂度扫描

我们使用第 C节t_0中所述的三股线方法，计算所有48小时窗口的辫复杂度。对于每个中心时间 t_0，该流程最多识别八条候选股线，选取三条地理位置相近的丝状结构，提取其时间—经度排序，检测定向交叉，并计算相应辫子词的长度。

图 18 展示了所得的复杂度曲线 $t_0 \mapsto C(t_0)$。大多数窗口的值为 $C(t_0) = 0$，表明不存在拓扑相互作用。少数窗口的值达到 $C = 1$ 或 $C = 2$，只有极少数窗口达到最大值 $C_{\max} = 3$。这些峰值窗口标示出拓扑最活跃的片段，将在第6.2节详细分析。

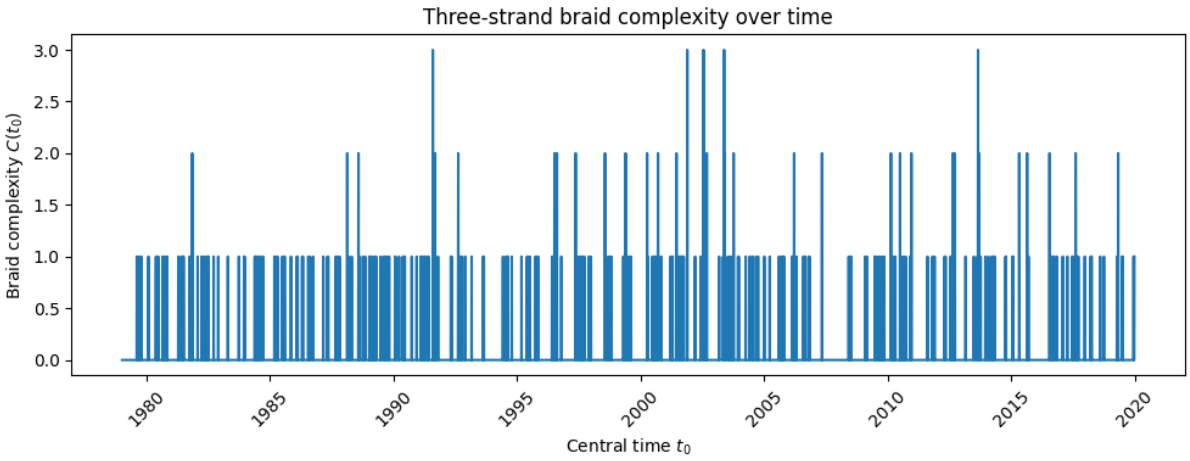


图18：北太平洋区域子集中所有48小时窗口的三股辫复杂度 $C(t_0)$。大多数窗口满足 $C(t_0) = 0$，只有少数窗口达到最大值 $C_{\max} = 3$，表明该时段大气河丝状结构之间存在独特而强烈的几何缠绕。

图 19所示的复杂度分布高度集中于 $C = 0$，这证实了非平凡的辫交互作用相对少见。只有一个窗口呈现$C = 3$，对应于下文考察的事件。

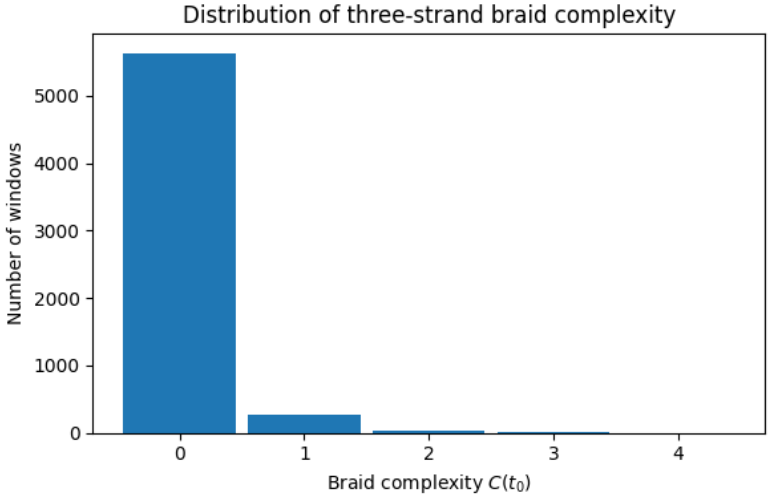


图19：三股辫复杂度直方图 $C(t_0)$。分布主要由满足 $C = 0$ 的平凡窗口构成；只有极少数窗口得到 $C = 3$，标志着数据集中拓扑活跃程度最高的大气河相互作用。

为探究拓扑活动的物理驱动因素，图20 比较了 $C(t_0)$ 与每个窗口内大气河的平均最大强度（IVT幅度）。观测发现，$C \geq 2$的窗口出现在动力强迫增强的时期，这表明强度较大的大气河更有可能表现出拓扑纠缠。

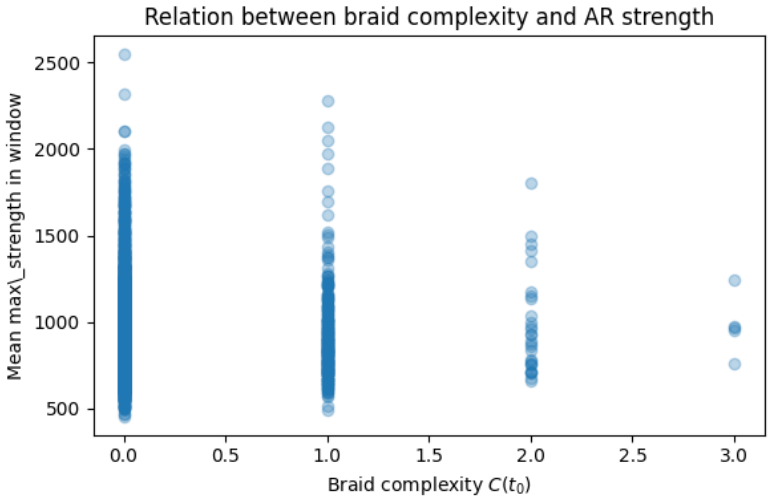


图20：每个48小时窗口内辫复杂度与大气河平均最大强度的散点图。较高的复杂度（$C \geq 2$）更常出现在水汽输送增强期间，表明动力强度与几何缠绕之间存在联系。

6.2 三股大气河辫子事件

在北太平洋区域子集中识别出的最大三股辫复杂度出现在四个不同的48小时窗口中，且均达到 $C_{\max} = 3$ （见第4节）。本文聚焦于这些事件中最早的一次，其中心时刻为

$$t_0^* = 05 \text{ July } 1996 \text{ 15:00 UTC},$$

涉及大气河轨迹

$$\texttt{39299},\ \texttt{39304},\ \texttt{39312},$$

并跨越以下时间区间

$$04 \text{ July } 1996 \text{ 15:00 UTC} \longrightarrow 06 \text{ July } 1996 \text{ 15:00 UTC}.$$

在此窗口期间，三条细丝在空间上始终彼此接近，并发生三次定向质心交换，从而生成辫子词

$$\beta^* = \sigma_2\, \sigma_2^{-1}\, \sigma_2$$

，长度为 $m = 3$。

我们强调， $C(t_0)$ 是从按时间排序的次序变化中提取的词长 （交叉数），而不是约化正规形；诸如 $\sigma_2\sigma_2^{-1}$这样的消去反映了连续的往返交换，在这一诊断中具有物理意义。

图21 展示了区域域中的大气河轨迹，并突出显示了三条相互作用的股线。

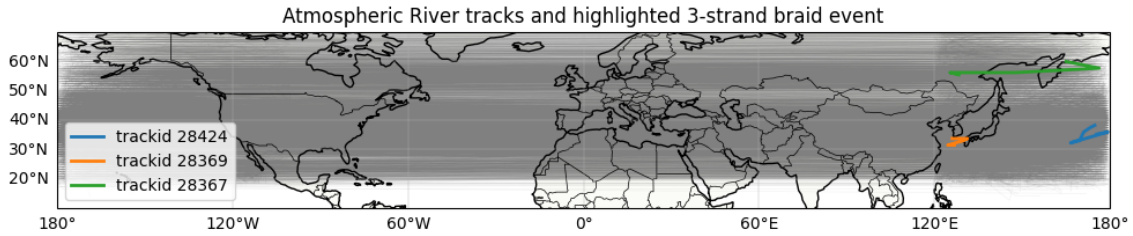


图21：1996年7月事件期间北太平洋区域子集中的大气河（AR）轨迹。灰色曲线显示区域 $10°\,\mathrm{N} \le \phi \le 70°\mathrm{N}$,$120°\mathrm{E} \le \lambda \le 260°\mathrm{E}$ 内所有 AR 质心。蓝色、橙色和绿色曲线对应的轨迹 ID 构成了复杂度最高的三股辫（$m = 3$）。

图22展示了相应的时间-经度辫图，其中的标记表示有向质心交叉，它们定义了辫子词的生成元。

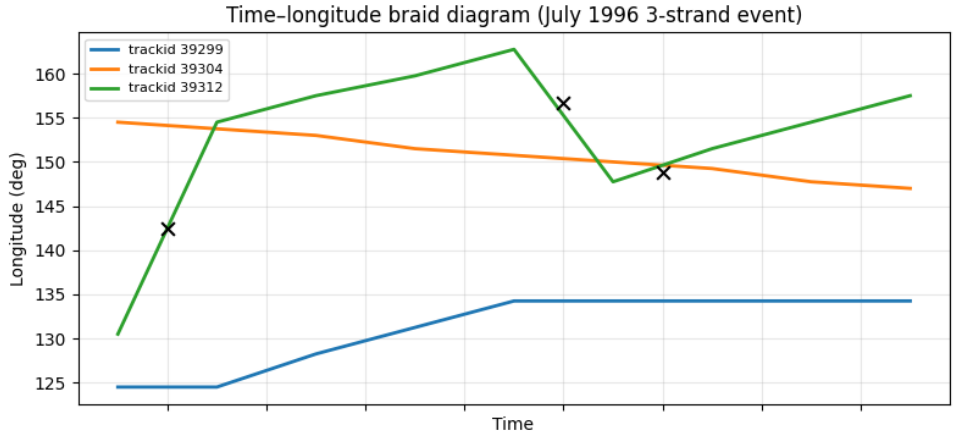


图22：1996年7月事件期间北太平洋区域子集中的大气河（AR）轨迹。灰色曲线显示区域 $10°\,\mathrm{N} \le \phi \le 70°\mathrm{N}$，$120°\mathrm{E} \le \lambda \le 260°\mathrm{E}$。为便于可视化，我们采用 $[0°, 360°]$ 经度约定，它等同于 $[-180°, 180°]$ 第 4 节中采用的约定，该约定经过标准回绕变换。

6.3 水分演化与框架辫结构

几何辫仅编码大气河质心的横向重排。为纳入具有物理意义的内部演化，我们利用第 β_{fr} 5 节中引入的基于水汽的框架 s_i 构造带框架辫，并计算每条股线的归一化水汽积分 $\tau_i(t_k)$ （通过 2），随后记录框架增量

$$\Delta\tau_i(k) = \tau_i(t_{k+1}) - \tau_i(t_k), \qquad k = 0, \ldots, T-2.$$

在两个连续的交叉事件之间，将相应的扭转生成元 $\tau^{\Delta\tau_{i(k)}\ i}$ 插入带框架辫词中。

图 23 展示了1996年7月事件中三条辫股的框架值随时间的演变 $\tau_i(t_k)$ 。竖直虚线标示有向交叉时刻。几何交叉附近发生了多次水汽增强过程，这表明大气河丝状结构之间的动力学相互作用伴随着内部水汽重组。

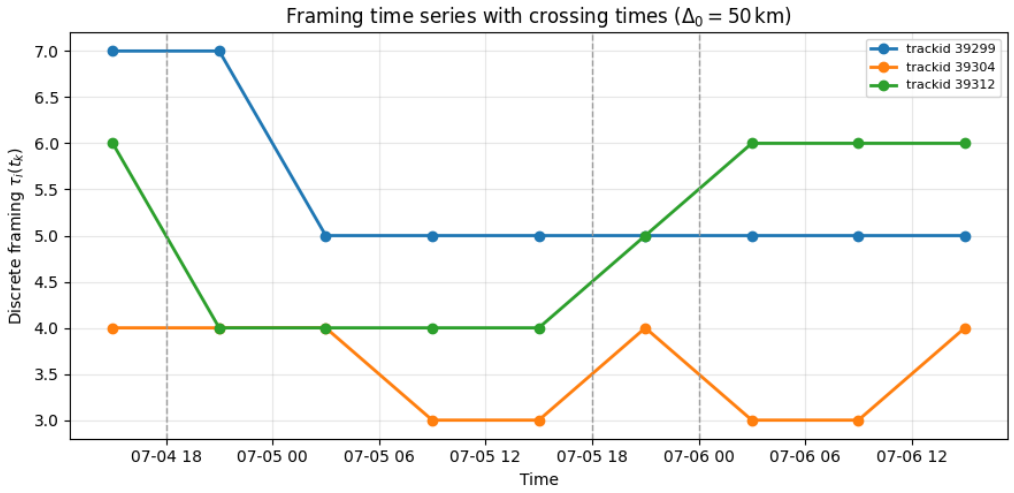


图23：1996年7月编织事件中三个相互作用丝状结构的框架序列 $\tau_i(t)$。垂直虚线表示定向质心交叉。该事件中的水汽增强发生在交叉时刻附近，这表明几何缠绕与大气河丝状结构的内部变形之间存在动力学耦合。

6.4 编织拟态转变：出现、耗散与分裂

1996年7月事件在整个48小时窗口内保持着三条相干丝状结构，因此可以采用经典的带框架辫表示。不过，一般而言，大气河丝状体网络在较长时间内并不满足 辫理论的假设：新的丝状结构可能在上游形成，现有丝状结构可能在陆地上消散，而随着天气尺度环境演变，相干通道也可能分裂或合并。

在编织拟态视角（第5.4节）下，这些过程对应于股线数量或连接模式的变化。虽然本文不尝试检测或建模此类转变，但需要指出的是，持续数日的大气河演变本质上具有编织拟态特征。

我们的滑动窗口框架通过选择整个窗口期间始终存在的固定细丝子集，明确避免了出现、耗散和分裂。这样便得到了定义明确的带框架辫表示，能够捕捉存续辫股的几何演变和水分演化。关于出现、衰减和分支现象的完整处理将在后续论文中展开，其中带框架编织拟态结构是自然的拓扑对象。

6.5 迈向拓扑早期预警指标

几何交叉与水汽增强之间观察到的对应关系表明，拓扑不稳定性捕捉到了大气河重构的某些方面，而这些方面先于丝状体网络发生重大结构变化。具体而言，带框架辫诊断突出显示了水分积累与几何缠绕同时出现的时间区间，这表明基于辫的度量可作为动态过程驱动的降水风险的早期指标。

定量拓扑指标。辫结构和带框架辫结构自然地给出了若干诊断量：

- 定向辫复杂度 C_{orb} =长度(β)，通过质心交叉衡量几何重排。
- 框架变化 $V_{\text{框架}} = \sum_{i,\,k} |\Delta\tau_i(k)|$，捕捉沿辫股的水汽驱动变形。

- 水汽扭转指数（*MTI*） $\mathrm{MTI} = V_{\text{框架}}/(T-1)$，内部水分演化的归一化估算。

- 几何–水汽耦合复杂度 $C_{\text{耦合}} = C_{\text{轨道}} + V_{\text{框架}}$，突出显示几何相互作用与水汽增强同时发生的时间窗口。

本文并未将这些指标开发为预测工具，但它们展示了如何量化拓扑结构，并为上文讨论的早期预警视角提供了依据。

这些结果推动了拓扑早期预警指标的开发，这类指标将综合辫复杂度、框架化变化和交叉时序。这些指标可以量化几何形态与水汽输送中的突变性重组，为传统欧拉预测因子提供补充信息。未来工作将探索此类方法的扩展形式，包括概率公式和多尺度公式。

6.6 1996年7月事件的框架指标

为评估拓扑框架的诊断与预测潜力，我们针对1996年7月5日至7日发生的三股线大气河事件，评估前文介绍的基于框架的指标——即框架变化 (V_{frame})、水汽扭转指数 (MTI)和耦合复杂度 (C_{coupled})。

框架变化量化了大气河丝状结构沿线由水汽驱动的总体变形：

$$V_{\text{frame}} = \sum_{i,k} |\Delta\tau_i(k)|,$$

而水汽扭转指数（*MTI*）则提供了归一化后的指标：

$$\mathrm{MTI} = \frac{V_{\text{frame}}}{T-1},$$

其中 T 为时间步数。为同时捕捉几何重组和内部水分演化，我们计算耦合复杂度：

$$C_{\text{coupled}} = C_{\text{orb}} + V_{\text{frame}}.$$

对于1996年7月的案例，我们发现 $C_{\text{orb}} = 3$，表明存在三次严格定向的质心交叉。框架变化达到 $V_{\text{frame}} = 19$，相应的MTI为 $= 2.375$。因此，耦合指数为 $C_{\text{coupled}} = 22$，显示在此次事件中，内部水汽重组主导了拓扑活动。比值 $V_{\text{frame}}/C_{\text{orb}} \approx 6.3$ 进一步表明，水汽增强的影响超过了几何缠绕。

对 τ_i（t）进行时间分辨绘图后发现，框架变化常在股线交叉前后数小时内发生，这表明几何相互作用与水汽重组在动态上相互耦合。这些同时出现的信号支持将 V_{frame} 和 C_{coupled}解读为大气河增强或结构转变的潜在早期指标。

这项分析表明，拓扑指标能够揭示大气河演变中具有物理意义的前兆，推动基于辫子的诊断方法进一步发展，以用于业务和气候学应用。

6.7 扩展：伪交叉与三价相互作用

伪交叉与不确定性。在本研究中，所有检测到的质心交换均被视为具有确定上/下方向的经典交叉。然而，粗略的六小时采样和亚网格变率可能会产生表面上的顺序反转，使得其方向无法可靠确定。此类含糊事件可以自然地使用

伪交叉进行建模，由此产生伪辫和伪框架辫。有关伪结的更多信息，请参阅 [11, 12]。这一扩展为在拓扑框架内表示观测不确定性提供了一种有原则的方法，并且直接衔接了概率伪结理论的最新进展。

三价相互作用与丝状结构重联。除了简单的形态变化和消散之外，大气河还经常发生合并与分裂，形成真正的 Y形连接点。这些事件无法用经典带框架辫群编码，在框架辫状结构中也只能得到部分处理。引入三价节点后，可形成拓扑辫–图结构，其中边承载辫或框架辫数据，顶点则表示分支或合并。这类混合拓扑对象为未来描述大气河丝状结构重联，以及量化水汽路径的结构重组，提供了数学上精确的基础。

7 拓扑解释与意义

本研究引入了一种拓扑框架，利用定向辫、带框架辫和带框 braidoid 来分析大气河。该框架将大气河丝状结构视为携带水汽的辫股，其质心和内部结构随时间演变，从而将几何相互作用与物理强度统一为一个代数对象。这一视角补充了动力学和统计方法，并为描述大气河演变的结构特征提供了一种简洁的语言。

7.1 辫表示的概念意义

辫公式的一个关键见解是，大气河并非孤立的特征，而是相互作用的丝状体。它们的轨迹可能交叉、扭转、合并或断裂，每一种事件都具有气象学意义。交叉通常源于差异平流和急流重组，而框架变化则反映了内部水汽再分布和切变。

将这些相互作用编码为代数生成元，可以简洁而充分地表征大气河演变。与经典的欧拉或拉格朗日诊断不同，基于辫的方法能够捕捉细丝的相对排列及其相互作用的时间顺序。这种结构性视角揭示了大气河网络中的重组，而这些变化可能无法通过传统的标量或基于轨迹的度量显现。

7.2 极端降雨的预测潜力

我们的案例研究表明，若干辫导出量可能会呈现与高影响降水事件相关的前兆或同期信号。具体而言：

- 定向辫复杂度的激增与曲率的急剧变化及天气尺度重组同时出现，
- 正框架跃变反映了整层水汽输送的快速增强和水汽负载，
- 出生、消亡或分裂等类辫事件在概念上与结构碎裂相关，
- 耦合拓扑复杂度指数可识别几何重构与水汽驱动的重构同时发生的时间区间。

这些结果表明，基于辫子的诊断方法有望补充整层水汽输送（IVT）幅度、大气河宽度或质心曲率等标准预测因子，并可能在与集合预报或机器学习系统结合时，改进早期预警方法。

我们强调，这些观测结果具有探索性，旨在提出假设，目前尚未构成经过验证的预测框架。

7.3 与动力学框架的关系

拓扑视角并非要取代现有的动力学或统计框架，而是提供一种互补的结构描述。拉格朗日相干结构方法识别流场中的吸引流形和排斥流形，而基于辫子的表示则捕捉相干丝状结构在演变过程中相互作用的拓扑，以及它们随时间交换相对位置的情况。位涡场描述大气河所处的大尺度引导环境，而框架的变化则刻画沿各条大气河路径的内部水分演化和结构重组。同样，持久同调从固定时刻的标量场中提取拓扑特征，而辫理论关注运动轨迹按时间顺序发生的相互作用。由此，辫框架占据了独特的结构性位置：它旨在分离由相互作用驱动的重组，与动力学诊断和基于标量场的拓扑工具互为补充。

7.4 局限性

当前框架存在若干局限，也自然指向了进一步完善的方向。大气河轨迹的提取取决于整层水汽输送阈值和分割算法，而采用其他追踪方法可能得到稳定性不同的质心轨迹，从而可能影响最终的辫结构。框架的估算依赖于作为水分含量代理指标的横截面；采用更具物理依据的定义，例如等熵积分或沿通量方向的整层水汽输送积分，可能提升框架变量的可解释性和准确性。此外，目前依据启发式标准识别对应丝状结构生成、耗散或分裂的类辫事件；自动丝状结构追踪或基于机器学习的分割或可提高稳健性和一致性。最后，本文未计算辫熵及相关的长时间窗拓扑指标，因为这类指标通常需要长寿命轨迹，因此对于持续时间较短或演变迅速的大气河过程适用性有限。

尽管存在这些局限，我们的探索性分析表明，辫表示和框架化辫表示所识别的主要拓扑特征在合理的方法变化范围内具有稳健性。

7.5 未来研究方向

本文提出的框架为未来研究开辟了若干富有前景的方向。一个自然的拓展方向是将辫指标和框架指标整合到数值天气预报工作流程中；从集合预报中实时提取这些指标，有望为大气河驱动的洪水风险预警系统提供支持。从方法论角度看，将辫表示与持久同调、尺度空间拓扑等多尺度拓扑工具相结合，或可从不同空间和时间分辨率提供互补视角，以分析水汽输送结构。大气河检测和轨迹估计固有的不确定性，也促使人们开发随机或概率辫模型，从而以严谨的方式表示集合离散度和模糊的丝状结构相互作用。与此同时，基于辫框架得出的拓扑指标，包括 C_{orb} 和 V_{frame}，可作为具有物理可解释性的特征，用于机器学习方法进行预测、聚类或状态分类。最后，将分析拓展至气候时间尺度，有望利用辫熵或框架化变化的长期统计特征，检测遥相关、状态转变或大气河行为中的气候驱动的重组。

8 结论

我们提出了一个以拓扑学为基础的框架，使用定向辫、带框架辫和带框架辫状物来表示大气河。该框架将大气河视为携带水汽的丝状结构，其质心和内部结构随时间演变，并通过统一的代数表示同时编码几何相互作用与水汽驱动的变形。

通过案例研究，我们表明，包括定向辫复杂度和框架变化在内的基于辫的指标，能够捕捉仅凭质心几何或标量强度度量难以直接发现的结构重组过程。这些结果表明，基于辫的拓扑为大气河分析提供了一种互补的结构诊断指标，从而丰富了现有的动力学和统计方法。

更广泛地说，所提出的方法为研究地球物理流中相互作用的丝状结构提供了一个通用的拓扑框架。通过聚焦于相互作用驱动的重组和内部结构演化，基于辫子的表示有望为复杂时变系统中相干结构的动力学提供新的认识。

参考文献

[1] J.W. Alexander，《关于纽结曲线系统的引理》（1923），《美国国家科学院院刊》，9（3），93-95。[2] Artin, E.（1947）。《辫理论》。《数学年刊》，48（1），101–126。[3] Baggett, C., Lee, S., & Feldstein, S.（2016）。研究行星尺度波动生命周期期间北太平洋上空大气河的出现及其在北极变暖中的作用。《大气科学杂志》，73，4329–4347。[4] Bellingeri, P., & Gervais, S.（2012）。曲面框架辫。《献给几何学》，159，51-69。[5] Birman, J. S.（1975）。《辫子、链环与映射类群。数学年刊研究丛书第82卷。普林斯顿大学出版社。[6] Boyland, P. L., Aref, H., & Stremler, M.（2000）。搅拌的拓扑流体力学。《流体力学杂志》，403，277–304。[7] Cao, Q., A. Gershunov, T. Shulgina, F. M. Ralph, N. Sun, and D. P. Lettenmaier，（2020）：变暖气候下美国西海岸由大气河导致的洪水：前期土壤湿度的作用。《水文气象学杂志》，21，1827–1845。[8] Carmen Caprau, Gabriel Coloma, Marguerite Davis（2020）：三价辫的 L-移动与马尔可夫定理。《*Involve*》*style>13*（*1*）：*21-50*。*Dacre, H. F., O. Martínez-Alvarado, and C. O. Mbengue,*（*2019*）：大气河与暖输送带气流的关联。《水文气象学杂志》，20，1183–1196。[10] Dettinger, M. D.，（2013）：大气河：美国西海岸的旱情终结者。《水文气象学杂志》，14，1721–1732。[11] I. Diamantis（2022），环面上的结拟群、伪结拟群、辫状物和伪辫拟群。《韩国数学会通讯》，37（4）：1221-1248。[12]带绳伪链环与伪结拟群。《地中海数学杂志》18，201（2021）。https://doi.org/10.1007/s00009-021-01842-1[13] DeFlorio, M. J., D. E. Waliser, B. Guan, D. A. Lavers, F. M. Ralph, and F. Vitart，（2018）：大气河预测技巧的全球评估。《水文气象学杂志》，19，409–426。

[14] Fernández-Alvarez, J. C., Pérez-Alarcón, A., Eiras-Barca, J., Ramos, A. M., Rahimi-Esfarjani, S., Nieto, R., & Gimeno, L.（2023）。借助WRF-FLEXPART研究登陆伊比利亚半岛的大气河水汽来源变化。*Journal of GeophysicalResearch: Atmospheres*，128（8），e2022JD037612。[15] Thiffeault Jean-Luc and Finn Matthew D.（2006），流体中的拓扑、辫子与混合，《皇家学会哲学汇刊*A*辑》。364（1849）：3251–3266。[16] Gorodetskaya, I. V., T. Silva, H. Schmithüsen, and N. Hirasawa，（2020）：东南极洲毛德皇后地海岸的探空廓线和再分析资料中的大气河特征。《大气科学进展》，37（5），455-476。[17] Guan, B., & Waliser, D. E.（2015）。大气河检测：用于全球研究的算法评估与应用。*Journal of Geophysical Research: Atmospheres*，120（24），12514–12535。[18] Guan, B., & Waliser, D. E.（2019）。全球追踪大气河：生命周期特征的空间分布与时间演变。*Journal of GeophysicalResearch: Atmospheres*，124，12523–12552。[19] N. Gűgűmcű & S. Lambropoulou，结拟群、辫状物及其应用，《对称性》**9**（2017），第12期，315。[20] Haller, G.（2015）。拉格朗日相干结构。《流体力学年度评论》，47，137–162。[21] Han, J., & Singh, V. P.（2021）。罗斯贝波包和大气河对美国本土气象干旱的影响。《水资源研究》，57，e2021WR029966。[22] Hoskins, B. J., McIntyre, M. E., & Robertson, A. W.（1985）。等熵位涡图的用途与意义。《英国皇家气象学会季刊》，111，877–946。[23] Kauffman, L. H.（1991）。《纽结与物理学》。世界科学出版社，《纽结与万物》丛书，第1卷。[24] Ko, Ki Hyoung and Smolinsky, Lawrence。带框架辫群及其表示。《纽结*90*：*1990*年*8*月*15*日至*19*日在大阪（日本）举行的国际纽结理论及相关主题会议论文集，Akio Kawauchi编，柏林、波士顿：De Gruyter，1992年，第289-298页。[25] Lavers, D. A., R. P. Allan, E. F. Wood, G. Villarini, D. J. Brayshaw, and A. J. Wade（2011），英国冬季洪水与大气河有关联，《地球物理研究快报》，38，L23803。[26] Li, Z., & Ding, Q.（2024）。大气河整体向极地迁移。《科学进展》，10（41），eadq0604。[27] Maclennan ML, Winters AC, Shields CA, Thaker R, Barthelemy L, Codron F, Wille JD.（2025）。大气水汽增加加剧大气河对未来南极气候系统的影响。《通讯·地球与环境6（1）：369。[28] Neiman, P. J., F. M. Ralph, G. A. Wick, J. D. Lundquist, and M. D. Dettinger，（2008）：基于八年SSM/I卫星观测的大气河气象特征及其对北美西海岸陆地降水的影响。《水文气象学杂志》，9，22–47。

[29] Payne, A.E., Demory, ME., Leung, L.R. 等（2020）大气河对气候变化的响应及其影响。*Nat Rev Earth Environ* 1, 143–157.[30] Payne, A. E., and G. Magnusdottir, 2014: MERRA再分析30年资料中北太平洋登陆大气河的动力学。*J. Climate*, 27, 7133–7150.[31] Ralph, F. M., and M. D. Dettinger,（2012）：与2010年12月大气河相关的西海岸极端降水的历史与全国视角。*Bull.Amer. Meteor. Soc.*, 93, 783–790.[32] Ralph, F. M., P. J. Neiman, and G. A. Wick,（2004）：1997/98年冬季东北太平洋上空大气河的卫星和CALJET飞机观测。*Mon. Wea. Rev.*, 132, 1721–1745.[33] Ralph, F. M., J. J. Rutz, J. M. Cordeira, M. Dettinger, M. Anderson, D. Reynolds, L. J. Schick, and C. Smallcomb,（2019）：用于表征大气河强度及其影响的尺度。*Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 100, 269–289.[34] Rutz, J. J., Shields, C. A., Lora, J. M., Payne, A. E., Guan, B., Ullrich, P., 等（2019）。大气河追踪方法比较项目（ARTMIP）：量化大气河气候学中的不确定性。*Journal of Geophysical Research: Atmospheres*; 124: 13777–13802.[35] Rutz, J. J., W. J. Steenburgh, and F. M. Ralph,（2014）：美国西部大气河及其向内陆延伸的气候特征。*Mon.Wea. Rev.*, 142, 905–921.[36] Shawn C. Shadden, Francois Lekien, Jerrold E. Marsden（2005）。二维非周期流中基于有限时间李雅普诺夫指数定义的拉格朗日相干结构及其性质， *Physica D*, 212, 271–304.[37] Thiffeault, J.-L.（2010）。纠缠粒子轨迹的辫子。*Chaos*, 20(1), 017516.[38] V. Turaev， *Knotoids*, Osaka J. Math. 49(1)（2012）， 195–223.[39] Zhu, Y., and R. E. Newell,（1998）：一种用于计算大气河水汽通量的算法。*Mon. Wea. Rev.*, 126, 725–735.