arXiv:2601.00356v1 [math.NT] 1 Jan 2026

退化伯努利数与欧拉数的退化算法

Taekyun Kim 和 Dae San Kim

摘要。本文通过将参数 λ 纳入各自的递推关系，介绍并研究了 A-算法和 B- 算法的退化版本。我们根据初始序列和第二类退化斯特林数，推导出这些算法最终序列的显式公式。此外，我们还建立了初始序列的普通生成函数与最终序列的指数生成函数之间的函数关系。具体而言，我们证明，在特定初始条件下，这些退化算法会生成退化伯努利数与欧拉数。

1. 引言

对于任意非零 $\lambda \in \mathbb{R}$，退化指数函数使用 Kim-Kim记号定义如下

$$e_\lambda^x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (x)_{k,\lambda} \frac{t^k}{k!}, \quad e_\lambda(t) = e_\lambda^1(t), \ (\text{see } [10,11]), \tag{1}$$

其中

$$(x)_{0,\lambda} = 1, \quad (x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)\cdots\big(x-(n-1)\lambda\big), \ (n \geq 1).$$

第二类退化斯特林数定义为

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda (x)_k, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [14,16]), \tag{2}$$

其中

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), \ (n \geq 1).$$

注意

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda = \left\{ {n \atop k} \right\},$$

其中 $\left\{ {n \atop k} \right\}$是第二类普通斯特林数，其定义为

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [6,21). \tag{3}$$

令 $\log_\lambda t$ 为 $e_\lambda(t)$ 的复合逆。于是，由 (1) 可得

$$\log_\lambda(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n-1-\lambda}{n-1} t^n, \quad (\text{see } [19,20]), \tag{4}$$

2010数学主题分类。11B68；11B73。关键词与短语。退化 A-算法；退化 B-算法；退化伯努利数；退化欧拉数；退化贝尔数。

其中

$$\lim_{\lambda\to 0}\log_\lambda(1+t)=\log(1+t).$$

由（1）和（2），我们注意到

$$\frac{1}{k!}\big(e_\lambda(t)-1\big)^k=\sum_{n=k}^{\infty}\left\{{n\atop k}\right\}_\lambda\frac{t^n}{n!},\quad (k\geq 0),\quad (\text{see }[14,16]). \tag{5}$$

Carlitz 考虑了如下定义的退化伯努利多项式

$$\frac{t}{e_\lambda(t)-1}e_\lambda^x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},\quad (\text{see }[3,4]). \tag{6}$$

当 $x=0$, $\beta_{n,\lambda}=\beta_{n,\lambda}(0)$ 时，称为退化伯努利数。由（6），容易得到

$$\beta_{n,\lambda}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_{n-k,\lambda}\beta_{k,\lambda},\quad (n\geq 0),\quad (\text{see }[3,4]).$$

他还引入了如下定义的退化欧拉多项式

$$\frac{2}{e_\lambda(t)+1}e_\lambda^x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{E}_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},\quad (\text{see }[3,4]). \tag{7}$$

当 $x=0$, $\mathscr{E}_{n,\lambda}=\mathscr{E}_{n,\lambda}(0)$ 时，称为退化欧拉数。由（6）和（7），我们有

$$\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}(x)=B_n(x),\quad \lim_{\lambda\to 0}\mathscr{E}_{n,\lambda}(x)=E_n(x),$$

其中$B_n(x)$和$E_n(x)$分别是由下式给出的伯努利多项式和欧拉多项式（参见 [6,21]）

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\quad \frac{2}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{8}$$

当$x=0$, $B_n=B_n(0)$ 和$E_n=E_n(0)$分别称为伯努利数和欧拉数。

众所周知,

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)_{n,\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_\lambda x^k\left(\frac{d}{dx}\right)^k,\quad (n\geq 0),\quad (\text{see }[13]). \tag{9}$$

近年来，退化贝尔多项式定义如下:

$$\phi_{n,\lambda}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_\lambda x^k,\quad (n\geq 0),\quad (\text{see }[14-16]). \tag{10}$$

当$x=1$, $\phi_{n,\lambda}=\phi_{n,\lambda}(1)$时，称为退化贝尔数。由 (5) 可得

$$e^{x(e_\lambda(t)-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!},\quad (\text{see }[14-16]). \tag{11}$$

关于本文的一般性参考资料，读者可参阅 [1,2,6-8,17,18,21]。

最近，通过在经典递推关系中引入参数 λ，提出了 Euler-Seidel 矩阵方法的一个退化版本（见[12]）。此外，这还导出了指数生成函数的退化 Seidel公式：$S_\lambda(t)=e_\lambda^{1-\lambda}(t)S_\lambda(t)$。在 [5]，中，对于给定的初始

序列 $(a_n)_{n\geq 0}$，即所谓的 B-算法矩阵 $(a_{n,\ m})_{n,\ m\geq 0}$ 递归定义为

$$\begin{aligned} &a_{0,n}=a_n,\quad (n\geq 0),\\ &a_{n,m}=ma_{n-1,m}-(m+1)a_{n-1,m+1},\quad (n\geq 1,m\geq 0). \end{aligned} \tag{12}$$

在 [5, 命题 2], 中，证明了最终序列由下式给出（见（3））

$$a_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}a_{0,m}.$$

正如 [5], 中所指出的，对于初始序列 $a_{0,\ m}=\ ^{1}{}_{m+1,}$ 我们有（见（8））

$$a_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}\frac{1}{m+1}=B_n=B_n(0).$$

令 $A(t)\ =\sum_{n=0}^{\infty}a_{0,\ n}t^n$ 为初始序列（$a_{0,\ n}$）$_{n\geq 0}$的普通生成函数。则最终序列（$a_{n,\ 0}$）$_{n\geq 0}$的指数生成函数由下式给出

$$\overline{A}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,0}\frac{t^n}{n!}=A(1-e^t),\quad (\text{see [5]}).$$

在 [9], 中，对于给定的初始序列（b_n）$_{n\geq 0}$，所谓的 A-算法矩阵（$b_{n,\ m}$）$_{n,\ m\geq 0}$ 递归定义如下

$$\begin{aligned} &b_{0,n}=b_n,\quad (n\geq 0),\\ &b_{n,m}=(m+1)(b_{n-1,m}-b_{n-1,m+1}),\quad (n\geq 1,m\geq 0). \end{aligned} \tag{13}$$

在 [9], 中，证明了最终序列由下式给出

$$b_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}b_{0,m}.$$

如 [9], 对于初始序列 $b_{0,m}=\ ^{1}{}_{m+1}$ 所述，我们有（见（8））

$$b_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}\frac{1}{m+1}=B_n(1).$$

设 $B(t)\ =\sum_{n=0}^{\infty}b_{0,n}t^n$ 为初始序列（$b_{0,n}$）$_{n\geq 0}$ 的普通生成函数。那么，最终序列（$b_{n,0}$）$_{n\geq 0}$ 的指数生成函数为

$$\overline{B}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n,0}\frac{t^n}{n!}=e^tB(1-e^t),\quad (\text{see [9]}).$$

本文旨在通过研究 B-算法和 A-算法的退化版本来推广这些结果。这些推广都在其递推关系中引入了一个参数 λ。退化 B-算法矩阵 $\left(a_{n,\ k}(\lambda)\right)_{n,\ k\geq 0}$ 递归定义如下：

$$\begin{aligned} &a_{0,n}(\lambda)=a_n(\lambda),\ (n\geq 0),\\ &a_{n,m}(\lambda)=\big(m-(n-1)\lambda\big)a_{n-1,m}(\lambda)-(m+1)a_{n-1,m+1}(\lambda),\ (n\geq 1,m\geq 0), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\left(a_n(\lambda)\right)_{n\geq 0}$ 是给定数列。

我们在定理 2.3 中证明，最终序列（$a_{n,}\ 0(\lambda))_{n\geq 0}$ 由下式给出

$$a_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k} \right\}_{\lambda} a_{0,k}(\lambda).$$

接着，定理 2.4 证明，对于初始序列 $a0,_{\ k}=\binom{k-\lambda}{k}_{k+1}$，我们有

$$a_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left\{ {n \atop k} \right\}_{\lambda}\frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1}=\beta_{n,\lambda}.$$

令 $F_\lambda(t)$ 为初始序列（$a0,_{\ n}(\lambda))_{n\geq 0}$的普通生成函数，并令 $F_\lambda(t)$ 为最终序列（$a_{n,}\ \overline{0(\lambda)})_{n\geq 0}$的指数生成函数。由此得到以下恒等式（见定理 2.5）：

$$\overline{F}_\lambda(t)=F_\lambda\left(1-e_\lambda(t)\right).$$

退化 A-算法矩阵 $\left(b_{n,\ k}(\lambda)\right)_{n,\ k\geq 0}$ 递归定义如下

(15)

$$b_{0,n}(\lambda)=b_n(\lambda),\ (n\geq 0),$$

$$b_{n,m}(\lambda)=(m+1)\left(\left(1-\frac{(n-1)\lambda}{m+1}\right)b_{n-1,m}(\lambda)-b_{n-1,m+1}(\lambda)\right),\ (n\geq 1,m\geq 0),$$

其中 $\left(b_n(\lambda)\right)_{n\geq 0}$ 是一个给定序列。

我们在定理 3.1 中证明，最终序列（$b_{n,}0(\lambda))_{n\geq 0}$ 由下式给出：

$$b_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left(\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}_{\lambda}+n\lambda\left\{ {n \atop k+1} \right\}_{\lambda}\right)b_{0,k}(\lambda).$$

随后，定理 3.3 证明了，对于初始序列 $b0,_k=\binom{k-\lambda}{k}_{k+1}$，有

$$b_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left(\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}_{\lambda}+n\lambda\left\{ {n \atop k+1} \right\}_{\lambda}\right)\frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1}=\beta_{n,\lambda}(1).$$

设 $G_\lambda(t)$ 是初始序列（$b0,_n(\lambda))_{n\geq 0}$ 的普通生成函数，设 $G_\lambda(t)$ 是最终序列（$b_{n,}\ \overline{0(\lambda)})_{n\geq 0}$ 的指数生成函数。那么，定理 3.2 给出了以下恒等式：

$$\overline{G}_\lambda(t)=e_\lambda(t)G_\lambda\left(1-e_\lambda(t)\right).$$

此外，我们还证明，对于具有 $a0,_n(\lambda)=(\frac{1}{2})^n$ 的退化 B-算法，$a_{n,}0(\lambda)=\mathscr{E}_{n,\lambda}$；对于具有 $b0,_n(\lambda)=(\frac{1}{2})^n(1)$ 的退化 A-算法，$b_{n,}0(\lambda)=\mathscr{E}_{n,\lambda}$（见定理 2.6 和 3.4）。

继 Carlitz 关于退化伯努利多项式和欧拉多项式的奠基性研究（见 [3,4]）之后，近年来人们对特殊多项式和数的退化版本产生了浓厚兴趣。研究人员运用了广泛的工具来探索这些变体，从幕标演算和p进分析，到量子力学和概率论。著名的例子包括第一类和第二类退化斯特林数、退化第二类伯努利数，以及退化贝尔数和多项式（见[10,11,13-16,19,20,22] 及其中的参考文献）。

注 *1.1.* 假设当 $\lambda \to 0$ 时，对于所有 $n \geq 0$，$a_n(\lambda) \to a_n$。那么，由 *(12)* 和 *(14)* 可知，当 $\lambda \to 0$ 时，对于所有 $n, k \geq 0$，$a_{n,k}(\lambda) \to a_{n,k}$。这是因为当 $\lambda \to 0$ 时，*(14)* 中的递推关系收敛到 *(12)* 中的递推关系。特别地，公式 $F_\lambda(t) = F_\lambda\big(1-e_\lambda(t)\big)$ 会变成原始公式 $A(t) = A(1-e^t)$，当 $\lambda \to 0$ 时。因此，我们的方法不仅在参数 $\lambda \to 0$ 时保留了 *B*-算法的结构，还为研究组合数列的退化版本提供了强大的框架。对于 *A*-算法，*(13)* 和 *(15)* 也有类似的结论。

2. 退化伯努利数与欧拉数的退化 B-算法

本节中，我们介绍 B-算法的一个退化版本（见 [5]），即退化 B-算法（见 (18)），并将我们的结果应用于$a_{0,n} = (^{n-\lambda}{}_n)_{n+1}$或$a_{0,n} = (\frac{1}{2})^n$，以得到退化伯努利数 $\beta_{n,\lambda}$和退化欧拉数 $\mathscr{E}_{n,\lambda}$ 作为它们的最终序列。由 (4) 和 (6)，我们注意到

(16)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e_\lambda(t)-1} = \frac{1}{e_\lambda(t)-1} \log_\lambda\left(e_\lambda(t)\right) \\
&= \frac{1}{e_\lambda(t)-1} \log_\lambda\Big(e_\lambda(t)-1+1\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k-1-\lambda}{k-1} \big(e_\lambda(t)-1\big)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{k-\lambda}{k} k! \frac{1}{k!} \big(e_\lambda(t)-1\big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{k-\lambda}{k} k! \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda (-1)^k k! \frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1} \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

因此，通过比较 (16) 两边的系数，我们得到以下定理。

定理2.1. 对于 $n \geq 0$，我们有

$$\beta_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left\{ {n \atop k} \right\}_\lambda \frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1}. \tag{17}$$

退化 B-算法矩阵 $\big(a_{n,k}(\lambda)\big)_{n,k\geq 0}$ 递归定义如下

(18)

$$\begin{aligned}
&a_{0,n}(\lambda) = a_n(\lambda), \ (n \geq 0), \\
&a_{n,m}(\lambda) = \big(m-(n-1)\lambda\big) a_{n-1,m}(\lambda) - (m+1) a_{n-1,m+1}(\lambda), \ (n \geq 1, m \geq 0),
\end{aligned}$$

其中 $\big(a_n(\lambda)\big)_{n\geq 0}$ 是给定的序列。与 $\big(a_n(\lambda)\big)_{n\geq 0}$ 相关联的退化 B-算法矩阵为

$$A = \Big(a_{ij}(\lambda)\Big) = \begin{pmatrix}
a_{00}(\lambda) & a_{01}(\lambda) & a_{02}(\lambda) & a_{03}(\lambda) & \cdots \\
a_{10}(\lambda) & a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & \cdots \\
a_{20}(\lambda) & a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix},$$

其中，$a_{n,m}(\lambda)$ 表示该矩阵的第 n 行、第 m 列元素。

Let

$$f_n(t|\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}(\lambda)t^m,\quad (n\geq 0).$$

于是，由（18）可得

(19)

$$\begin{aligned}
f_n(t|\lambda)&=\sum_{m=0}^{\infty}\Big((m-(n-1)\lambda)a_{n-1,m}(\lambda)-(m+1)a_{n-1,m+1}(\lambda)\Big)t^m\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}ma_{n-1,m}(\lambda)t^m-\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{n-1,m+1}(\lambda)t^m-(n-1)\lambda\sum_{m=0}^{\infty}a_{n-1,m}(\lambda)t^m\\
&=(t-1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{n-1,m+1}(\lambda)t^m-(n-1)\lambda f_{n-1}(t|\lambda)\\
&=(t-1)\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n-1,m}(\lambda)t^m-(n-1)\lambda f_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-1)\lambda\right)f_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\cdots\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-1)\lambda\right)\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-2)\lambda\right)\cdots(t-1)\frac{d}{dt}f_0(t|\lambda)\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)_{n,\lambda}f_0(t|\lambda).
\end{aligned}$$

因此，由（19）可得以下定理。

定理 2.2. 对于任意整数 $n\geq 0$，令

$$f_n(t|\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m}(\lambda)t^m.$$

则有

$$f_n(t|\lambda)=\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)_{n,\lambda}f_0(t|\lambda).\tag{20}$$

注意

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dt^k}f_0(t|\lambda)\Big|_{t=0}&=\frac{d^k}{dt^k}\sum_{m=0}^{\infty}a_{0,m}(\lambda)t^m\Big|_{t=0}\\
&=\sum_{m=k}^{\infty}a_{0,m}(\lambda)(m)_k0^{m-k}=k!a_{0,k}(\lambda).
\end{aligned}\tag{21}$$

令 $t=0$ 属于（20）。那么，由（9）和（21）可得

$$\begin{aligned}
a_{n,0}(\lambda)=f_n(0|\lambda)&=\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)_{n,\lambda}f_0(t|\lambda)\Big|_{t=0}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}(t-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k f_0(t|\lambda)\Big|_{t=0}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}(-1)^k k!a_{0,k}(\lambda).
\end{aligned}\tag{22}$$

因此，由（22）可得以下定理。

定理 2.3。对于 $n \geq 0$，有

$$a_{n,0}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} a_{0,k}(\lambda). \tag{23}$$

设$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a0_{,n}(\lambda) t^n$ 为初始序列 $(a0_{,n}(\lambda))_{n\geq 0}$ 的普通生成函数，并设$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,}0(\lambda)^{t^n}{}_n!$ 为最终序列 $(a_{n,}0(\lambda))_{n\geq 0}$ 的指数生成函数。那么，由 (23) 可得

(24)

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\lambda}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0}(\lambda) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} a_{0,k}(\lambda) \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! a_{0,k}(\lambda) \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! a_{0,k}(\lambda) \frac{1}{k!} \big(e_{\lambda}(t) - 1\big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k}(\lambda) \big(1 - e_{\lambda}(t)\big)^k = F_{\lambda}\big(1 - e_{\lambda}(t)\big).
\end{aligned}$$

因此，由 (24) 可得

$$\overline{F}_{\lambda}(t) = F_{\lambda}\big(1 - e_{\lambda}(t)\big). \tag{25}$$

在 (25) 中以 $\log_{\lambda}(1-t)$ 替换t，得到

$$F_{\lambda}(t) = \overline{F}_{\lambda}(\log_{\lambda}(1-t)). \tag{26}$$

因此，由 (25) 和 (26) 可得以下定理。

定理 2.4. 设

$$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n}(\lambda) t^n.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\lambda}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0}(\lambda) \frac{t^n}{n!} = F_{\lambda}\big(1 - e_{\lambda}(t)\big), \\
F_{\lambda}(t) &= \overline{F}_{\lambda}(\log_{\lambda}(1-t)).
\end{aligned}$$

首先，令$a0_{,\,k}(\lambda) = \underline{\binom{k-\lambda}{k}}_{k+1}$，$(k \geq 0)$。然后，由(17)和(23)可得

$$a_{n,0}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1} = \beta_{n,\lambda}. \tag{27}$$

此外，由（26）可得

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\lambda}\big(\log_{\lambda}(1-t)\big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,\lambda} \frac{1}{k!} \big(\log_{\lambda}(1-t)\big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k,\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} S_{1,\lambda}(n,k) (-1)^n \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n S_{1,\lambda}(n,k) \beta_{k,\lambda} \frac{t^n}{n!},
\end{aligned} \tag{28}$$

and

$$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n-\lambda}{n}}{n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-\lambda)_n}{n+1} \frac{t^n}{n!}, \tag{29}$$

其中 $S1,\lambda(n,k)$ 是退化第一类斯特林数，其定义为

$$\frac{1}{k!}\big(\log_\lambda(1+t)\big)^k=\sum_{n=k}^{\infty}S_{1,\lambda}(n,k)\frac{t^n}{n!}.$$

因此，由 (27)、(28) 和 (29)，我们得到以下定理。

定理 2.5. 设 $n\geq 0$，令 $a_{0,n}(\lambda)=\binom{n-\lambda}{n}n+1$。则有

$$a_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_\lambda\frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1}=\beta_{n,\lambda}, \tag{30}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n}S_{1,\lambda}(n,k)\beta_{k,\lambda}=(-1)^n\frac{(n-\lambda)_n}{n+1}.$$

利用 (18) 和 (30)，可知与 $\big(a_{0,n}(\lambda)\big)_{n\geq 0}=\Big(\binom{n-\lambda}{n}n+1\Big)_{n\geq 0}$ 相关联的退化 B-算法矩阵为 ——

$$\begin{pmatrix}
1 & \frac{1-\lambda}{2} & \frac{\binom{2-\lambda}{2}}{3} & \cdots\\
-\frac{1-\lambda}{2} & \frac{(1-\lambda)(2\lambda-1)}{6} & \frac{(2-\lambda)(1-\lambda)(3\lambda-1)}{24} & \cdots\\
\frac{1-\lambda^2}{6} & \frac{-\lambda(1-\lambda)^2}{12} & -\frac{(2-\lambda)(1-\lambda)}{120}(27\lambda^2-6\lambda+1) & \cdots\\
\frac{\lambda(1-\lambda)^2(1-2\lambda)}{4} & \frac{(1-\lambda)(37\lambda^3-11\lambda^2+18\lambda-2)}{60} & \cdots & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}.$$

其次，令 $a_{0,n}(\lambda)=\big(\frac{1}{2}\big)^n,(n\geq 0)$。然后，由 (25) 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!}=\overline{F}_\lambda(t)&=F_\lambda\big(1-e_\lambda(t)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{0,n}(\lambda)\big(1-e_\lambda(t)\big)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-e_\lambda(t)}{2}\right)^n=\frac{2}{e_\lambda(t)+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{E}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{31}$$

比较 (31) 两边的系数，可得

$$a_{n,0}(\lambda)=\mathscr{E}_{n,\lambda},\quad (n\geq 0). \tag{32}$$

此外，由（26）可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}\frac{t^n}{n!}=F_\lambda(t)=\overline{F}_\lambda(\log_\lambda(1-t))&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{E}_{k,\lambda}\frac{1}{k!}\big(\log_\lambda(1-t)\big)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{E}_{k,\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}S_{1,\lambda}(n,k)(-1)^n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^nS_{1,\lambda}(n,k)\mathscr{E}_{k,\lambda}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{33}$$

因此，由（32）和（33）可得到以下定理。

定理 2.6。对于 $n\geq 0$，令 $a_{0,n}(\lambda)=(\frac{1}{2})^n$。则有

$$a_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^k=\mathscr{E}_{n,\lambda},\quad\sum_{k=0}^{n}S_{1,\lambda}(n,k)\mathscr{E}_{k,\lambda}=(-1)^n\frac{n!}{2^n}. \tag{34}$$

由 (18) 和 (34)，与 $\left(a_{0,n}(\lambda)\right)_{n\geq 0}=\left(\binom{1}{2}^n\right)_{n\geq 0}$ 相关联的退化算法矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8}+\frac{\lambda}{8} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}-\frac{3\lambda}{4} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

设 $a_{0,0}(\lambda)=0$，且设 $a_{0,n}(\lambda)=(-1)^n\underline{n!}$，$(n\geq 1)$。于是，由 (26) 得到

$$\begin{aligned}(35)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_{n,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!}&=\overline{F}_\lambda(t)=F_\lambda\left(1-e_\lambda(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{0,n}(\lambda)(1-e_\lambda(t))^n\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-e_\lambda(t))^n}{n!}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e_\lambda(t)-1)^n}{n!}=-1+e^{e_\lambda(t)-1}.\end{aligned}$$

由 (10)、(11) 和 (35)，我们有

$$(36)\qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}.$$

因此，由 (36) 可得以下定理。

定理 2.7. 设 $a_{0,0}(\lambda)=0$，且设 $a_{0,n}(\lambda)=(-1)^n\underline{n!}$，$(n\geq 1)$。则有

$$a_{n,0}(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_\lambda=\phi_{n,\lambda},\ (n\geq 1).$$

设 $a_{0,0}(\lambda)=0$，且设 $a_{0,n}(\lambda)=\underline{(-1)^n n!}$，$(n\geq 1)$。与 $\left(a_{0,n}(\lambda)\right)_{n\geq 0}$ 相关联的退化 B-算法矩阵由下式给出

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 1 & -2 & 5 & -7 & 9 & \cdots \\ 2-\lambda & -12+2\lambda & 31-5\lambda & -57+7\lambda & \cdots & \cdots \\ 6-8\lambda+2\lambda^2 & -74+36\lambda-4\lambda^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

3. 退化伯努利数与欧拉数的退化 A-算法

本节中，我们介绍 A-算法的一个退化版本（见 [5,9]），即退化 A-算法（见 (38)），并将我们的结果应用于 $b_{0,n}=(^{n-\lambda}{}_n)_{n+1}$ or $b_{0,n}=(\frac{1}{2})^n$，以得到数 $\beta_{n,\lambda}(1)$ 和 $\mathscr{E}_{n,\lambda}(1)$，作为它们的最终序列。由 (2)，我们注意到

$$(37)\qquad \left\{{n+1\atop k}\right\}_\lambda=\left\{{n\atop k-1}\right\}_\lambda+(k-n\lambda)\left\{{n\atop k}\right\}_\lambda,\quad (n,k\geq 0).$$

我们考虑如下递归定义的退化 A- 算法矩阵：

(38)

$$\begin{aligned}&b_{0,n}(\lambda)=b_{n,\lambda},\ (n\geq 0),\\ &b_{n,m}(\lambda)=(m+1)\left(\left(1-\frac{(n-1)\lambda}{m+1}\right)b_{n-1,m}(\lambda)-b_{n-1,m+1}(\lambda)\right),\ (n\geq 1,m\geq 0),\end{aligned}$$

其中（$b_{n,\ \lambda}$）$_{n\geq 0}$）是给定的序列。令

$$g_n(t|\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}b_{n,m}(\lambda)t^m,\quad (n\geq 0).$$

然后，由（38）可得

(39)

$$\begin{aligned}
g_n(t|\lambda)&=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\left(1-\frac{(n-1)\lambda}{m+1}\right)b_{n-1,m}(\lambda)-b_{n-1,m+1}(\lambda)\right)t^m\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_{n-1,m}(\lambda)t^m-\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_{n-1,m+1}(\lambda)t^m-(n-1)\lambda\sum_{m=0}^{\infty}b_{n-1,m}(\lambda)t^m\\
&=\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n-1,m}(\lambda)t^{m+1}-\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n-1,m+1}(\lambda)t^{m+1}-(n-1)\lambda g_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\frac{d}{dt}\left(tg_{n-1}(t|\lambda)\right)-\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}b_{n-1,m}(\lambda)t^m-(n-1)\lambda g_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\frac{d}{dt}\left(tg_{n-1}(t|\lambda)\right)-\frac{d}{dt}g_{n-1}(t|\lambda)-(n-1)\lambda g_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\frac{d}{dt}\left((t-1)g_{n-1}(t|\lambda)\right)-(n-1)\lambda g_{n-1}(t|\lambda).
\end{aligned}$$

由（39）可得

(40) $$(t-1)g_n(t|\lambda)=(t-1)\frac{d}{dt}\left((t-1)g_{n-1}(t|\lambda)\right)-(n-1)\lambda(t-1)g_{n-1}(t|\lambda).$$

令$h_n(t|\lambda)=(t-1)g_n(t|\lambda)$。然后，由（9）和（40）可得

(41)

$$\begin{aligned}
h_n(t|\lambda)&=(t-1)\frac{d}{dt}\left(h_{n-1}(t|\lambda)\right)-(n-1)\lambda h_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-1)\lambda\right)h_{n-1}(t|\lambda)\\
&=\cdots\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-1)\lambda\right)\left((t-1)\frac{d}{dt}-(n-2)\lambda\right)\cdots\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)h_0(t|\lambda)\\
&=\left((t-1)\frac{d}{dt}\right)_{n,\lambda}h_{0,\lambda}(t)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}(t-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k h_{0,\lambda}(t).
\end{aligned}$$

比较 (41) 两边的系数，得到

(42) $$h_n(t|\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\left\{{n\atop k}\right\}_{\lambda}(t-1)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k h_{0,\lambda}(t).$$

令$t = 0$属于 (42)。然后利用 (37)，可得

(43)

$$\begin{aligned}
-b_{n,0}(\lambda) = h_n(0|\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k h_0(t|\lambda)\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} (-1)^k k! \Big(b_{0,k-1}(\lambda) - b_{0,k}(\lambda) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} (-1)^k k! b_{0,k-1}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} (-1)^k k! b_{0,k}(\lambda) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} (-1)^{k+1} (k+1)! b_{0,k}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} (-1)^k k! b_{0,k}(\lambda) \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! b_{0,k}(\lambda) \left((k+1) \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} + \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \right) \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! b_{0,k}(\lambda) \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right).
\end{aligned}$$

因此，通过比较 (43) 两边的系数，我们得到以下定理。

定理 3.1. 对于 $n \geq 0$，我们有

$$b_{n,0}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right) b_{0,k}(\lambda). \tag{44}$$

在继续之前，我们注意到

$$e_{\lambda}(t) \frac{1}{k!} \big(e_{\lambda}(t) - 1 \big)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right) \frac{t^n}{n!}. \tag{45}$$

事实上，由 (37) 可得

$$\begin{aligned}
e_{\lambda}(t) \frac{1}{k!} \big(e_{\lambda}(t) - 1 \big)^k &= (k+1) \frac{1}{(k+1)!} \big(e_{\lambda}(t) - 1 \big)^{k+1} + \frac{1}{k!} \big(e_{\lambda}(t) - 1 \big)^k \\
&= (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \frac{t^n}{n!} \\
&= (k+1) \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \left((k+1) \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} + \left\{ n \atop k \right\}_{\lambda} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

设 $G_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b0_{,n}(\lambda) t^n$ 为初始序列（$b0_{,n}(\lambda)_{n \geq 0}$）的普通生成函数，并设 $G_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,}0(\lambda)^{t^n}{}_n!$ 为最终序列（$b_{\lambda},0(=\sum_{n=0}^{\infty})$）的指数生成函数

最终序列的函数（$b_{n,}0(\lambda))_{n\geq 0}$。然后，根据（44）和（45），我们有

$$\begin{aligned}(46)\qquad \overline{G}_\lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\left(\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}_\lambda + n\lambda\left\{\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix}\right\}_\lambda\right)b_{0,k}(\lambda)\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k! b_{0,k}(\lambda)\sum_{n=k}^{\infty}\left(\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}_\lambda + n\lambda\left\{\begin{matrix}n\\k+1\end{matrix}\right\}_\lambda\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= e_\lambda(t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k! b_{0,k}(\lambda)\frac{1}{k!}\big(e_\lambda(t)-1\big)^k\\ &= e_\lambda(t)\sum_{k=0}^{\infty}b_{0,k}(\lambda)\big(1-e_\lambda(t)\big)^k = e_\lambda(t)G_\lambda(1-e_\lambda(t)).\end{aligned}$$

因此，由 (46) 可得以下结果。

定理 3.2. 设

$$G_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{0,n}(\lambda)t^n.$$

于是我们有

$$(47)\qquad \overline{G}_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!} = e_\lambda(t)G_\lambda\big(1-e_\lambda(t)\big),$$

$$(48)\qquad (1-t)G_\lambda(t) = \overline{G}_\lambda(\log_\lambda(1-t)).$$

首先，令 $b0_{,n}(\lambda) = \underline{\binom{n-\lambda}{n}_{n+1}}, (n \geq 0)$。然后，由 (4) 和 (47)，我们有

$$\begin{aligned}(49)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,0}(\lambda)\frac{t^n}{n!} &= e_\lambda(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n-\lambda}{n}}{n+1}\big(1-e_\lambda(t)\big)^n\\ &= \frac{e_\lambda(t)}{e_\lambda(t)-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n-1-\lambda}{n-1}\big(e_\lambda(t)-1\big)^n\\ &= \frac{t}{e_\lambda(t)-1}e_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}(1)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

此外，由（48）可得

$$\begin{aligned}(50)\qquad \overline{G}_\lambda(\log_\lambda(1-t)) &= \sum_{k=0}^{\infty}\beta_{k,\lambda}(1)\sum_{n=k}^{\infty}S_{1,\lambda}(n,k)(-1)^n\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n S_{1,\lambda}(n,k)\beta_{k,\lambda}(1)\frac{t^n}{n!},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(51)\qquad (1-t)G_\lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}b_{0,n}(\lambda)t^n - \sum_{n=0}^{\infty}b_{0,n}(\lambda)t^{n+1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_{0,n}(\lambda)-b_{0,n-1}(\lambda)\big)t^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{\binom{n-\lambda}{n}}{n+1}-\frac{\binom{n-1-\lambda}{n-1}}{n}\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= 1-(\lambda+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1-\lambda)_{n-1}}{n+1}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

因此，由（37）、（44）、（49）、（50）和（51），可得以下结果。

定理 3.3. 对于 $n \geq 0$，令 $b_{0,n}(\lambda) = (\underline{n-\lambda}_n)_{n+1}$。则有

$$b_{n,0}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right) \frac{\binom{k-\lambda}{k}}{k+1} = \beta_{n,\lambda}(1), \quad (n \geq 0),$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} S_{1,\lambda}(n,k)\beta_{k,\lambda}(1) = (\lambda+1)(-1)^{n-1} \frac{(n-1-\lambda)_{n-1}}{n+1}, \quad (n \geq 1).$$

其次，令 $b_{0,n}(\lambda) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, (n \geq 0)$。那么，由 (47) 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n,0}(\lambda) \frac{t^n}{n!} = e_{\lambda}(t) G_{\lambda}\left(1 - e_{\lambda}(t)\right) = e_{\lambda}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - e_{\lambda}(t)}{2} \right)^n \tag{52}$$

$$= \frac{2}{e_{\lambda}(t)+1} e_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_{n,\lambda}(1) \frac{t^n}{n!}.$$

比较 (52) 两边的系数，得到

$$b_{n,0}(\lambda) = \mathscr{E}_{n,\lambda}(1), \quad (n \geq 0). \tag{53}$$

此外，由 (48) 可得

(54)

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \frac{t^n}{n!} = (1-t) G_{\lambda}(t) = \overline{G}_{\lambda}(\log_{\lambda}(1-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_{k,\lambda}(1) \frac{1}{k!} \left(\log_{\lambda}(1-t)\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}_{k,\lambda}(1) \sum_{n=k}^{\infty} S_{1,\lambda}(n,k)(-1)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n S_{1,\lambda}(n,k) \mathscr{E}_{k,\lambda}(1) \frac{t^n}{n!}.$$

因此，由 (53) 和 (54)，我们得到以下定理。

定理 3.4。 对于 $n \geq 0$，令 $b_{0,\,n}(\lambda) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$。则有

$$b_{n,0}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left(\left\{ n+1 \atop k+1 \right\}_{\lambda} + n\lambda \left\{ n \atop k+1 \right\}_{\lambda} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \mathscr{E}_{n,\lambda}(1), \quad (n \geq 0),$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} S_{1,\lambda}(n,k) \mathscr{E}_{k,\lambda}(1) = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^n}, \quad (n \geq 1).$$

4. 结论

我们成功地将经典的 A-算法和 B-算法扩展到了退化框架中。这一发现意义重大，因为它表明，原有算法的结构优雅性在退化域中得以保留，甚至更加丰富。我们推导出的恒等式

$$\overline{F}_{\lambda}(t) = F_{\lambda}\left(1 - e_{\lambda}(t)\right) \quad \text{and} \quad \overline{G}_{\lambda}(t) = e_{\lambda}(t) G_{\lambda}\left(1 - e_{\lambda}(t)\right)$$

证明这些算法并非只是计算上的新奇事物，而是在 λ-变形下将普通生成函数映射为指数生成函数的基本算子。通过选择适当的初始序列，例如 $(\underline{n-\lambda}_n)_{n+1}$ 或

– $(\frac{1}{2})^n$，我们重新得到了退化伯努利数与欧拉数。这些发现为通过递归矩阵算法研究退化特殊数与多项式提供了一种统一的组合方法。

资金支持
本研究未获得任何经费资助。

作者贡献
所有作者对稿件的贡献均等，并阅读并批准了最终稿。

参考文献

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.《数学函数手册》，含公式、图表和数学表格，美国国家标准局应用数学丛书第55号，美国政府印刷局，华盛顿特区，1964年。[2] Aguilar-Ch´avez, C.; Carvajal-G´amez, B.-E.; L´opez-Bonilla, J.-L. 矩阵指数函数研究，《希奥利艾数学研讨会》5（2010），第13期，5-17。[3] Carlitz, L. 退化斯特林数、伯努利数和欧拉数，《数学实用》15（1979），51-88。[4] Carlitz, L. 退化斯陶特-克劳森定理，《巴塞尔数学档案》7（1956），28-33。[5] Chen, K.-W. 伯努利数和欧拉数算法，《整数数列杂志》4（2001），第1期，文章01.1.6，共7页。[6] Comtet, L.《高级组合学：有限与无限展开的艺术》，修订增补版，D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1974年。[7] Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O.《具体数学：计算机科学基础》，Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州，1989年。[8] Gun, D.; Simsek, Y. 涉及斯特林数、富比尼数、伯努利数及卡特兰数近似值的组合和，《当代数学进展研究》（庆尚）30（2020），第4期，503-513。[9] Kaneko, M. 伯努利数的秋山-谷川算法，文章00.2.9，《整数数列杂志》3（2000），1-6。[10] 金，D. S.; 金，T. 关于一种新型退化伯努利数的注记，《俄罗斯数学物理杂志》27（2020），第2期，227-235。[11] Kim, H. K.; Lee, D. S. 一类新型退化多型2欧拉多项式和退化单多型2欧拉多项式，《长田数学会会刊》24（2021），第2期，205-222。[12] 金，T.; 金，D. S. 退化 Euler-Seidel 矩阵方法及其应用，即将在《数学方法与应用科学》发表。[13] 金，T.; 金，D. S. 利用玻色算子的退化贝尔多项式和道林多项式递推关系，《计算数学与数学物理》65（2025），第9期，2087-2096。[14] 金，T.; 金，D. S. 异质斯特林数和异质贝尔多项式，《俄罗斯数学物理杂志》32（2025），第3期，498-509。[15] 金，T.; 金，D. S. 退化贝尔多项式和道林多项式的斯派维型递推关系，《俄罗斯数学物理杂志》32（2025），第2期，288-296。[16] 金，T.; 金，D. S. 道林格的第一类和第二类退化惠特尼数，《俄罗斯数学物理杂志》29（2022），第3期，358-377。[17] Kizilaslan, G. 变异埃尔米特矩阵：影响与意义，《AIMS数学》9（2024），第9期，25360-25375。[18] Kizilaslan, G.; 金，T. 退化埃尔米特矩阵的多种分解及应用，《印度纯粹与应用数学杂志》（ 2025 10 1007 13226 025 00906 2 ）。[19] https://doi.org/ . /s - - - Lee, S.-H. 退化 r-斯特林-热诺基多项式，《当代数学进展研究》（庆尚）35（2025），第4期，335-344。[20] Park, J.-W.; Kim, B. M.; Kwon, J. 由 λ **24** 2021 3, -谢 323 342 弗序列导出的第二类退化伯努利多项式的一些恒等式，《长田数学会会刊》（），第-期。[21] Roman, S.《幕标演算》，纯粹与应用数学丛书111，Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich 出版社，], 纽约，1984年。

[22] 王，Q.; Hei, Y.; Dolgy, D. V.; 金，T.; 金，D. S.与退化调和数和超调和数相关的一些恒等式，数学计算模型与动力系统**31**（2025），第1期，论文编号2545196，共16页。

大韩民国首尔 139-701，光云大学数学系电子邮箱地址：tkkim@kw.ac.kr 大韩民国首尔 121-742，西江大学数学系电子邮箱地址：dskim@sogang.ac.kr