将 h-杨ian 与 A 型量子椭圆代数的模同 h-进量子顶点代数关联

ˇ ´LUCIA BAGNOLI、NAIHUAN JING 和 SLAVEN KOZIC

arXiv:2601.00371v1 [math.QA] 1 Jan 2026

ABSTRACT. 我们考察与 A 型三角及椭圆 R-矩阵相关联的 Etingof–Kazhdan 量子顶点代数 $\mathcal{V}^c(R)$。我们建立了 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 的（受限）模与零级椭圆量子代数 $\widehat{\text{bra}}\,\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$ 以及变形（扭曲） ϕ-协调 $\mathcal{V}^c(R)$-模之间的联系。作为应用，在三角情形下，我们构造了临界层 $c=-N$， 处 $\mathcal{V}^c(R)$ 的新一族中心元，并据此导出 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 中的交换族。

1. 引言

量子顶点代数的定义及其首批例子，即量子仿射顶点代数，由 Etingof 和 Kazhdan 提出 [13]。随后，Li [34] 发展了 ϕ-协调模理论，该理论在将量子顶点代数理论与量子仿射代数的表示联系起来方面发挥了重要作用；参见 [24, 29, 30]及其中的参考文献。本文旨在建立上述 Etingof–Kazhdan 量子顶点代数 $\mathcal{V}^c(R)$，与 A 型三角和椭圆 R-矩阵 R 相关的理论，以及 h-$\widehat{\text{杨}}$ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 和零级量子椭圆代数$\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$ 的表示理论之间的联系。

这两类量子代数均由乘法型定义关系刻画，这些关系可利用 R-矩阵形式写成 *FRT*形式 [40]。另一方面， $\mathcal{V}^c(R)$本质上具有加法型特征，其 $\mathcal{S}$-局部性性质体现为 Reshetikhin 和 Semenov-Tian-Shansky [39]提出的量子流交换关系。为协调这些根本差异，我们采用变形 ϕ-协调模 [5]的概念。粗略地说，我们利用 ϕ-协调模理论连接加法与乘法框架，并采用变形模的概念；这一概念部分受到 Anguelova 和 Bergvelt [1], 工作的启发，用以建立 FRT 关系与量子流交换关系之间的联系。此外，在椭圆情形下，由于八顶点模型底层 R-矩阵的形式，我们采用扭曲变形 ϕ-协调模的概念。这一概念同样受到 Li、Tan 和 Wang [36],提出的扭曲 ϕ-协调模的启发，并且我们对 Etingof–Kazhdan 关于 $\mathcal{V}^c(R)$的原始构造作了小幅扩展。

本文的主要结果是定理6.3、6.6 和6.7，这些定理建立了（扭曲的）变形 ϕ-坐标化 $\mathcal{V}^c$（R）-模与（受限）模之间的联系

(L. Bagnoli) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, P.LE ALDO MORO5, 00185 ROME, ITALY(N. Jing) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NORTH CAROLINA STATE UNIVERSITY, RALEIGH, NC27695, USA(S. Ko˘zi´c) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF ZAGREB, BIJENIČKA CESTA 30, 10000 ZAGREB, CROATIA电子邮箱地址: lucia.bagnoli@uniroma1.it, jing@ncsu.edu, slaven.kozic@math.hr.1

^对于代数 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 和$\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$。此外，在三角情形下，我们展示了这些结果在构造量子*Feigin–Frenkel* 中心 [14], , 即临界层处 $\mathcal{V}^c(R)$ 的中心 $c=-N$，以及 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 中交换族的应用。 最后，Frappat、Issing 和 Ragoucy 的融合过程 [17] 表明，这些结果也可能类似地应用并推广到椭圆代数 $\mathcal{A}_{q,\,p}(\mathfrak{gl}_N)$ 的情形。

2. Preliminaries

本节回顾 type A. 的三角和椭圆 R-矩阵。我们调整其定义，使其定义在交换环 $\mathbb{C}[[h]]$ 上，即参数 h 的形式幂级数环，而不是有理函数域 $\mathbb{C}(q^{1/2})$ 上，其中有理函数的变量为 $q^{1/2}$。在这两种情形中，参数 h 和 q 通过 $q^{1/2}=e^{h/4}$. 相关联。全文中，在三角情形下，我们用 N 表示一个大于或等于 2 的固定整数，而在椭圆情形下，我们令 $N=2$.

2.1. 三角 R-矩阵。本小节回顾 type A 的三角 R-矩阵^，它出现在量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 的 FRT 实现中；更多信息请参见文献 [23, 38–40]。

根据 [18], , 存在唯一的形式幂级数

$$f_q(z)=1+\sum_{r=1}^{\infty} f_{q,r}\frac{z^r}{(1-z)^r}\in\mathbb{C}(q)[[z]], \tag{2.1}$$

使得所有 $f_{q,r}(q-1)^{-r}$ 在 $q=1$ 处正则，并满足

$$f_q(zq^{2N})=f_q(z)(1-zq^2)(1-zq^{2N-2})(1-z)^{-1}(1-zq^{2N})^{-1}.$$

令 $q=e^{h/2}$, , 可得

$$f(z)\coloneqq f_{e^{h/2}}(z)=1+\sum_{r=1}^{\infty} f_r\frac{z^r}{(1-z)^r}\in\mathbb{C}[[h,z]],\quad \text{where}\quad f_r=f_{q,r}\big|_{q=e^{h/2}}.$$

有关级数 $f(z)$ 的更多信息，另见 [31]。

Let $V=$端 $\mathbb{C}^N\otimes$端 $\mathbb{C}^N$. 考虑三角形 R-矩阵 $R(z)\in V[[z,h]]$ — ,

$$\begin{aligned}\overline{R}(z)=&\sum_{i=1}^{N} e_{ii}\otimes e_{ii}+e^{-h/2}\frac{1-z}{1-ze^{-h}}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} e_{ii}\otimes e_{jj}\\ &+\frac{\left(1-e^{-h}\right)z}{1-ze^{-h}}\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{N} e_{ij}\otimes e_{ji}+\frac{1-e^{-h}}{1-ze^{-h}}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} e_{ij}\otimes e_{ji},\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $e_{ij}\in$端$\mathbb{C}^N$ 是矩阵单位。最后，定义归一化的 R-矩阵如下

$$R(z)=f(z)\overline{R}(z). \tag{2.3}$$

由于项 $f(z)$ 的形式， R-矩阵 $R(z)$ 也可视为 $V(z)[[h]]$. 的一个元素。它满足（乘法）量子 *Yang–Baxter* 方程，

$$R_{12}(z_1)\,R_{13}(z_1z_2)\,R_{23}(z_2)=R_{23}(z_2)\,R_{13}(z_1z_2)\,R_{12}(z_1) \tag{2.4}$$

以及 交叉对称性性质，

$$R(ze^{Nh})^{t_1}\,D_1\,(R(z)^{-1})^{t_1}=D_1\quad\text{and}\quad (R(z)^{-1})^{t_2}\,D_2\,R(ze^{Nh})^{t_2}=D_2. \tag{2.5}$$

这里， t_k 表示作用于第 k 个张量因子上的矩阵转置 $e_{ij} \mapsto e_{ji}$ $D_1 = D \otimes 1$， $D_2 = 1 \otimes D$ 而 D 是对角 $N \times N$ 矩阵

$$D = \operatorname{diag}\left(e^{(N-1)h/2}, e^{(N-3)h/2}, \dots, e^{-(N-1)h/2}\right). \tag{2.6}$$

考虑唯一的嵌入 $\mathbb{C}_*(u) \hookrightarrow \mathbb{C}((u))$，其中 $\mathbb{C}_*(u)$表示形式泰勒级数环 $\mathbb{C}[[u]]$ 在 $\mathbb{C}[u] \setminus \{0\}$. 处的局部化。它自然地扩展为该嵌入

$$\iota_u \colon \mathbb{C}_*(u)[[h]] \hookrightarrow \mathbb{C}((u))[[h]]. \tag{2.7}$$

将（2.3）中的表达式视为关于 h. 的形式泰勒级数。应用代换 $z = e^u$ ，再应用映射 ι_u，可得到一个元素 $R'(u)$，属于 $V((u))[[h]]$；更多细节请参见 [31] 。此外，根据 [12, 命题1。2]和 [31,命题2。1]，存在唯一的 $\psi \in 1 + h\mathbb{C}[[h]]$ 使得该 R-矩阵

$$R(e^u) \coloneqq \psi R'(u) \in \operatorname{End}\mathbb{C}^N \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^N((u))[[h]] \tag{2.8}$$

具有幺正性， $R_{12}(e^u)R_{21}(e^{-u})$， $= 1$，并具有交叉对称性，

$$R(e^{u+Nh})^{t_1} D_1 \left(R(e^u)^{-1}\right)^{t_1} = D_1 \quad \text{and} \quad \left(R(e^u)^{-1}\right)^{t_2} D_2 R(e^{u+Nh})^{t_2} = D_2. \tag{2.9}$$

此外， R-矩阵（2.8）满足（加法）量子 *Yang–Baxter* 方程，

$$R_{12}(e^u)\, R_{13}(e^{u+v})\, R_{23}(e^v) = R_{23}(e^v)\, R_{13}(e^{u+v})\, R_{12}(e^u).$$

2.2. 椭圆 R-矩阵。本节我们遵循 Foda等人 [15, 第 2] 节，回顾八顶点模型的椭圆 R-矩阵；更多信息请参见 [6, 7, 9, 41, 42]。

I为了引入 R-矩阵，我们需要无穷 *q-Pochhammer* 符号 s,

$$(z;p)_\infty = \prod_{k \geqslant 0} (1 - zp^k) \in \mathbb{C}[[z,p]].$$

考虑由（2.1）在 $N = 2$ 时得到的形式幂级数，

$$f(z) = \frac{(z;q^4)_\infty (zq^4;q^4)_\infty}{(zq^2;q^4)_\infty^2} \in \mathbb{C}(q)[[z]].$$

令 p 为另一个形式参数，即椭圆模数。引入形式级数

$$\alpha(z) = \frac{(p^{1/2}qz;p)_\infty}{(p^{1/2}q^{-1}z;p)_\infty} \prod_{k \geqslant 1} f(p^k z^2) \qquad \text{and} \qquad \beta(z) = \frac{(-pqz;p)_\infty}{(-pq^{-1}z;p)_\infty} \prod_{k \geqslant 1} f(p^k z^2).$$

显然， $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 属于 $\mathbb{C}(q)[z][[p^{1/2}]]$. 最后，关于空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 的标准基 $e_1 \otimes e_1$, $e_1 \otimes e_2$， $e_2 \otimes e_1$， $e_2 \otimes e_2$ ，椭圆 R-矩阵由下式给出，其中 $e_1 = (1, 0)$ 和 $e_2 = (0, 1)$，

$$R(z) = \begin{pmatrix} a(z) & 0 & 0 & d(z) \\ 0 & b(z) & c(z) & 0 \\ 0 & c(z) & b(z) & 0 \\ d(z) & 0 & 0 & a(z) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

其矩阵元由以下恒等式唯一确定

$$a(z) + d(z) = q^{-1/2} f(z^2)^{-1} \frac{\alpha(z^{-1})}{\alpha(z)} \quad \text{and} \quad b(z) + c(z) = q^{1/2} f(z^2)^{-1} \frac{1 + q^{-1}z}{1 + qz} \frac{\beta(z^{-1})}{\beta(z)}$$

并要求 $a(z)$ 和 $b(z)$（分别为 $c(z)$ 和 $d(z)$）仅含有 z. 的偶（分别为奇）次幂。所有元素都属于 $\mathbb{C}(q^{1/2})((z))[[p^{1/2}]]$ ，此外，它们还可以用雅可比 theta 函数表示；显式公式见 [16, 第 2 节 1]。

现在我们调整上述设定，使得 R-矩阵（2.10）定义在环$\mathbb{C}[[h]]$上；一些技术细节在 [3, 第 2 节2]中已有介绍，故此处略去。首先，令 $q^{1/2}=e^{h/4}\in\mathbb{C}[[h]]$. 接下来，固定 $a\in\mathbb{R}_{>0}$ 和 $b\in\mathbb{Z}_{>0}$ 然后令

$$p=ah^{2b}\in\mathbb{C}[[h]]. \tag{2.11}$$

该 R-矩阵（2.10）现在定义在 $\mathbb{C}[[h]]$ 上，并且有

$$R(z)\in\operatorname{End}\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{End}\mathbb{C}^2((z))[[h]]. \tag{2.12}$$

它满足（乘法型）量子 *Yang–Baxter* 方程，

$$R_{12}(z_1)\,R_{13}(z_1z_2)\,R_{23}(z_2)=R_{23}(z_2)\,R_{13}(z_1z_2)\,R_{12}(z_1), \tag{2.13}$$

并且具有如下性质

$$R_{12}(z)\,R_{21}(1/z)=\mathcal{U}(z),\qquad\text{where}\qquad\mathcal{U}(z)=e^{-h/2}f(z^2)^{-1}f(z^{-2})^{-1}. \tag{2.14}$$

我们还需要 R（z）的一个加法对应物。令 $z=(-1)^{\varepsilon}e^u\in\mathbb{C}[[u]]$，$\varepsilon=0,1$，代入（2.12）。所得的 R-矩阵 $R(e^{u+\varepsilon\pi\mathrm{i}}):=R((-1)^{\varepsilon}e^u)$，其中 $\mathrm{i}\in\mathbb{C}$ 表示虚数单位，满足

$$R(e^{u+\varepsilon\pi\mathrm{i}})\in\operatorname{End}\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{End}\mathbb{C}^2((u))[[h]]. \tag{2.15}$$

此外，它满足（加法型）量子 *Yang–Baxter* 方程，

$$\begin{aligned}&R_{12}(e^{u_1+\varepsilon_1\pi\mathrm{i}})\,R_{13}(e^{u_1+u_2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\pi\mathrm{i}})\,R_{23}(e^{u_2+\varepsilon_2\pi\mathrm{i}})\\&=R_{23}(e^{u_2+\varepsilon_2\pi\mathrm{i}})\,R_{13}(e^{u_1+u_2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\pi\mathrm{i}})\,R_{12}(e^{u_1+\varepsilon_1\pi\mathrm{i}}),\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中 ε_1，$\varepsilon_2\in\{0,1\}$，并且具有如下性质

$$R_{12}(e^{u+\varepsilon\pi\mathrm{i}})\,R_{21}(e^{-(u+\varepsilon\pi\mathrm{i})})=\mathcal{U}(e^u),\qquad\text{where}\qquad\mathcal{U}(e^u)=e^{-h/2}f(e^{2u})^{-1}f(e^{-2u})^{-1}.$$

注 2.1.考虑 R-矩阵（2.12）。由（2.11），椭圆极限 $p\to0$ 的R（$\pm z$）可通过令 $a\to0$ 得到。由此得到三角 R-矩阵

$$R^{trig}_{\pm}(z):=\frac{e^{-h/4}}{f(z^2)}\left(\sum_{i=1,2}e_{ii}\otimes e_{ii}+r(z)\sum_{\substack{i,j=1,2\\i\neq j}}e_{ii}\otimes e_{jj}\pm s(z)\sum_{\substack{i,j=1,2\\i\neq j}}e_{ij}\otimes e_{ji}\right),$$

其中

$$r(z)=\frac{e^{h/2}(1-z^2)}{(1-e^hz^2)}\quad\text{and}\quad s(z)=\frac{(1-e^h)z}{(1-e^hz^2)},$$

除重标度参数外，它与 R-矩阵（2.3）具有相同形式；$N=2$；有关三角情形与椭圆情形之间联系的更多信息，参见 [2,17]。接下来，在 $z=e^u$ 中令 $R^{trig}_{\pm}$（z），然后提取关于次数算子 $\deg u^kh^l=-k-l$ 的最高次数分量，可得到有理 R-矩阵

$$R^{rat}_{\pm}(u):=\frac{1}{1+\frac{h}{2u}}\left(I+\frac{h}{2u}P_{\pm}\right),$$

其中 P_+ 是置换算子，

$$P_+=\sum_{i,j=1,2}e_{ij}\otimes e_{ji},\qquad\text{and}\qquad P_-=\sum_{i,j=1,2}(-1)^{i+j}e_{ij}\otimes e_{ji}. \tag{2.17}$$

显然，$R^{rat}_{+}(u)$ 是（归一化的）Yang R-矩阵。另一方面，R-矩阵$R^{rat}_{-}(u)$ 可以通过对斜可逆对合对称性 P_-. 应用巴克斯特化过程 [20,Prop. 12] 得到

2.3. 记号。从现在起，我们将 $R^{trig}(z) = R(z)$（分别地， $R^{ell}(z) = R(z)$）记为三角（分别地，椭圆） R-矩阵 (2.3)（分别地，(2.12)），并将 $R^{trig}(e^u) = R(e^u)$（分别地，$R^{ell}(e^{u+\varepsilon\pi\mathrm{i}}) = R(e^{u+\varepsilon\pi\mathrm{i}})$）记为三角（分别地，椭圆） R- 矩阵 (2.8)（分别地，(2.15)）。为简化记号，只要根据上下文可以明确所讨论的是三角情形还是椭圆情形，我们就省略上标“$trig$”和“ell”。在本小节的其余部分，我们将介绍适用于这两种情形的记号。

对于任意正整数 n 和 m，令

$$u = (u_1, \dots, u_n) \quad \text{and} \quad v = (v_1, \dots, v_m) \tag{2.18}$$

为变量族和

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\times n} \quad \text{and} \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \{0,1\}^{\times m} \tag{2.19}$$

二元组。定义

$$u^\varepsilon = (u_1 + \varepsilon_1\pi\mathrm{i}, \dots, u_n + \varepsilon_n\pi\mathrm{i}) \quad \text{and} \quad v^\nu = (v_1 + \nu_1\pi\mathrm{i}, \dots, v_m + \nu_m\pi\mathrm{i}). \tag{2.20}$$

在三角情形中，我们只考虑 $\varepsilon = (0, \dots, 0)$ 和 $\nu = (0, \dots, 0)$ 的情形，因此族 (2.18) 和 (2.20) 重合，即我们有 $u = u^\varepsilon$ 和 $v = v^\nu$. 令 z 为单个变量。我们将系数取自张量代数 $(\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N)^{\otimes n} \otimes (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N)^{\otimes m}$（椭圆情形中取 $N = 2$）的 R-矩阵乘积与 $(n+m)$-元组 (u^ε, v^ν) 和 $d \in \mathbb{C}$ 伴随。

$$R^{12}_{nm}(e^{z+u^\varepsilon - v^\nu + dh}) = \prod_{p=1,\dots,n}^{\longrightarrow} \prod_{q=n+1,\dots,n+m}^{\longleftarrow} R_{pq}(e^{z+u_p - v_{q-n} + (\varepsilon_p - \nu_{q-n})\pi\mathrm{i} + dh}), \tag{2.21}$$

其中，箭头表示各因子的次序，上标 1（分别为 2）对应张量因子 $1, \dots, n$（分别为 $n+1, \dots, n+m$）。此外，我们记

$$R^{12}_{nm}(e^{u^\varepsilon - v^\nu + dh}) = \prod_{p=1,\dots,n}^{\longrightarrow} \prod_{q=n+1,\dots,n+m}^{\longleftarrow} R_{pq}(e^{u_p - v_{q-n} + (\varepsilon_p - \nu_{q-n})\pi\mathrm{i} + dh}). \tag{2.22}$$

最后，我们将这一记号推广到乘法型 R-矩阵的情形：

$$R^{12}_{nm}(ze^{u^\varepsilon - v^\nu + dh}) = \prod_{p=1,\dots,n}^{\longrightarrow} \prod_{q=n+1,\dots,n+m}^{\longleftarrow} R_{pq}(ze^{u_p - v_{q-n} + (\varepsilon_p - \nu_{q-n})\pi\mathrm{i} + dh}). \tag{2.23}$$

此外，对于 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_m)$，我们记

$$R^{12}_{nm}(x/y) = \prod_{p=1,\dots,n}^{\longrightarrow} \prod_{q=n+1,\dots,n+m}^{\longleftarrow} R_{pq}(x_p/y_{q-n}). \tag{2.24}$$

例如，令 $n = 3$ 且 $m = 2$. 记 R_{pq} 为对应于右侧 $(p, q) \in \{1,2,3\} \times \{4,5\}$ 的因子，其中（2.21）– （2.24）。则由（2.21）– （2.24）定义的乘积可写为 $R_{15}R_{14}R_{25}R_{24}R_{35}R_{34}$.

3. Quantum algebras associated with R-matrices

本节采用第 2 节中的 R-矩阵，回顾 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 和 椭圆量子代数 $\mathcal{A}_{h,p}(\mathfrak{gl}_2)$。与它们最初的定义不同，我们将这两个代数都视为交换环 $\mathbb{C}[[h]]$,上的代数，从而使其与 h-进量子顶点代数理论 [13]相适应。

3.1. h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$。为回顾 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 的定义，我们使用 A 型量子仿射代数的 FRT 实现，该实现源自 Reshetikhin 和 Semenov-Tian-Shansky [39]；另见 I. Frenkel 和 Reshetikhin 的论文 [18]。代数 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 由元素 $\ell_{ij}^{(r)}$ 生成，其中 $i,j = 1,\ldots,N$ 以及 $r = 0, 1, \ldots$。它们被组织成形式幂级数矩阵

$$L^-(z) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes \ell_{ij}(x), \quad \text{where} \quad \ell_{ij}(z) = \delta_{ij} - h \sum_{r\geqslant 0} \ell_{ij}^{(r)} z^{-r}. \tag{3.1}$$

定义关系[1] 对于 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 由三角 R-矩阵 (2.3) 给出，

$$R(z_1/z_2)\, L_1^-(z_1)\, L_2^-(z_2) = L_2^-(z_2)\, L_1^-(z_1)\, R(z_1/z_2). \tag{3.2}$$

在本文中，我们经常使用下标来表示张量积代数中的因子，例如 (端 $\mathbb{C}^N)^{\otimes n} \otimes \mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$，例如，对于任意 $n \geqslant k > 0$，我们记作

$$L_k^-(z) = \sum_{i,j=1}^{N} 1^{\otimes(k-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(n-k)} \otimes \ell_{ij}(z). \tag{3.3}$$

特别地，在 (3.2) 中，以上记号用于 $n = 2$ 和 $k = 1,\ 2$。

将 (R-矩阵 $R(z)$ 中的 (3.2) 替换为 $R(z)$，其由 (2.2) 定义，所得关系等价，因为级数 $L^-(z)$ 仅含有 z 的非负次幂，因此归一化因子相互抵消。在本文中，假设 h- 杨 ian 是拓扑自由的。

利用 R-矩阵记号 (2.24)，关系 (3.2) 可推广如下。对于任意 $m,\ n = 1,\ 2$、.....以及变量 $z = (z_1,\ \ldots\ldots,\ z_n)$ 和 $w = (w_1,\ \ldots\ldots,\ w_m)$，有

$$R_{nm}^{12}(z/w)\, L_{[n]}^{-13}(z)\, L_{[m]}^{-23}(w) = L_{[m]}^{-23}(w)\, L_{[n]}^{-13}(z)\, R_{nm}^{12}(z/w), \tag{3.4}$$

其中

$$L_{[n]}^{-13}(z) = L_{1\,n+m+1}^-(z_1) \ldots L_{n\,n+m+1}^-(z_n), \tag{3.5}$$

$$L_{[m]}^{-23}(w) = L_{n+1\,n+m+1}^-(w_1) \ldots L_{n+m\,n+m+1}^-(w_m). \tag{3.6}$$

3.2. **椭圆量子代数** $\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$。 在本小节中，我们遵循Foda等人[15, 16] 的做法，回顾椭圆量子代数 $\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$。 与前文相同，我们假设参数 h 和 p 满足关系式（2.11）。为简便起见，我们只给出零级下的定义，后文将用到该定义。代数$\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$由个元素$L_{ij,\,n}$组成，其中 $i,\ j \in \{1, 2\}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$构成幂级数，

$$L_{ij}(z) = \delta_{ij} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_{ij,n} z^{-n}, \quad \text{where} \quad L_{ij,n} = (-p^{1/2})^{\max\{n,0\}} \bar{L}_{ij,n}. \tag{3.7}$$

此外，我们假设

$$\bar{L}_{ij,n} = 0 \quad \text{if} \quad (-1)^{i+j} \neq (-1)^n. \tag{3.8}$$

对于$\mathcal{A}_{h,\,p}(\mathfrak{gl}_2)$，其定义关系可用矩阵表示为

$$L(z) = \sum_{i,j=1,2} e_{ij} \otimes L_{ij}(z)$$

以及椭圆 R-矩阵（2.12），采用张量积记号约定（3.3），如下

$$R(z_1/z_2)\, L_1(z_1)\, L_2(z_2) = L_2(z_2)\, L_1(z_1)\, R(z_1/z_2). \tag{3.9}$$

[1]原始的 h-杨ian定义还包含关于 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$的附加关系，本文的讨论不需要这些关系，因此将其略去。不过请注意，若假设 h-杨ian经过 h-进完备化，则所有对角元素 $\ell_{ii}^{(0)}$ 都是可逆的。

^全文中，假设代数 $\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$ 是拓扑自由的 .

假设 U 是一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模，也就是说，等价地， $U = U^0[[h]]$ 对某个复向量空间 U^0.。我们将 $U((z_1, \dots, z_n))_h$ 记为截断形式洛朗级数 $U((z_1, \dots, z_n))$ 所构成的 $\mathbb{C}[[h]]$-模的 h-进完备化，因此有$U((z_1, \dots, z_n))_h = U^0((z_1, \dots, z_n))[[h]]$. 在本节余下部分，我们推导生成元矩阵 $L(z)$ 的两个简单性质。首先注意到，由于 (3.7)，对于任意$n = 1, 2, \dots$ 以及变量族 $z = (z_1, \dots, z_n)$，我们有

$$L_1(z_1) \dots L_n(z_n) \in \left(\operatorname{End} \mathbb{C}^2\right)^{\otimes n} \otimes \operatorname{Hom}\left(\mathcal{A}_{h,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_2), \mathcal{A}_{h,p}(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)((z_1, \dots, z_n))_h\right). \tag{3.10}$$

我们将 (3.10) 中的表达式简记为 $L_{[n]}(z) = L_{[n]}(z_1, \dots, z_n)$。令$m$ 为一个正整数，并令 $w = (w_1, \dots, w_m)$ 为另一族变量。与^h-杨ian（回顾 (3.4)）一样，$\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$ 的定义关系 (3.9) 可以推广为

$$R^{12}_{nm}(z/w)\, L^{13}_{[n]}(z)\, L^{23}_{[m]}(w) = L^{23}_{[m]}(w)\, L^{13}_{[n]}(z)\, R^{12}_{nm}(z/w),$$

其中上标 1、2、3 的含义与（3.5）和（3.6）中相同。

4. Etingof–Kazhdan's quantum vertex algebra construction

本节回顾 Etingof–Kazhdan 构造 [13]，该构造由 A 型三角 R-矩阵关联得到量子仿射顶点代数。接下来，在椭圆情形下，我们将原始构造从 [13] 扩展，得到一个与椭圆量子代数 $\mathcal{A}_{h,p}(\mathfrak{gl}_2)$相关的 h-进量子顶点^代数，其意义见下文定理 6.6 和 6.7。关于（h-进）量子顶点代数概念的精确定义，参见 [13,第 1.4 节。1] 以及 [33, 定义 2。20]。从现在起，假定拓扑自由 $\mathbb{C}[[h]]$-模的张量积均取 h-进完备化，例如，对于$U = U^0[[h]]$, 其中 U^0是一个复向量空间，我们将（$U^0 \otimes_{\mathbb{C}} U^0$）$[[h]]$ 记为 $U \otimes U$.

4.1. **三角情形。** 在本小节中，我们考虑三角 R-矩阵（2.8）。首先，沿用 [11, 12], 我们引入某个代数 $\mathrm{U}(R) = \mathrm{U}(R^{trig})$；另见[39, 40]。它是环 $\mathbb{C}[[h]]$ 上的结合代数，由元素 $t_{ij}^{(-r)}$、 i、 $j = 1$、.....、 N 以及 $r = 1$、2、.....、生成，并满足定义关系

$$R(e^{u-v})\, T_1^+(u)\, T_2^+(v) = T_2^+(v)\, T_1^+(u)\, R(e^{u-v}), \tag{4.1}$$

其中，矩阵 $T^+(u)$ 由下式给出

$$T^+(u) = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes t_{ij}^+(u) \qquad \text{for} \qquad t_{ij}^+(u) = \delta_{ij} - h \sum_{r=1}^{\infty} t_{ij}^{(-r)} u^{r-1}. \tag{4.2}$$

显然，$\mathrm{U}(R)$ 可以看作一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_N$ 的对偶 Yangian 的三角对应物；例如参见 [21]。

记 $\mathbf{1}$ 为 $\mathrm{U}(R)$ 中的单位元。令 $\mathcal{V}^c(R) = \mathcal{V}^c(R^{trig})$ 表示 $\mathrm{U}(R)$ 的 $\mathbb{C}[[h]]$-模的 h-进完备化，其中上标中的复参数 c 决定算子级数 $T^-(u)$ 的作用，如下一个可追溯至 [13, 的引理 2.1] 所述。从现在起，我们将 $T^+(u)$ 视为 $\mathcal{V}^c(R)$ 上的算子级数，其作用由代数乘法给出。

引理 4.1. *For any $c \in \mathbb{C}$ there exists a unique invertible operator series*

$$T^-(u) \in \operatorname{End} \mathbb{C}^N \otimes \operatorname{Hom}(\mathcal{V}^c(R), \mathcal{V}^c(R)((u))_h)$$

such that for all $n \geqslant 0$ we have

$$T_0^-(u) T_1^+(v_1) \dots T_n^+(v_n)\mathbf{1} = R^{01}_{1n}(e^{u-v+hc/2})^{-1} T_1^+(v_1) \dots T_n^+(v_n)\, R^{01}_{1n}(e^{u-v-hc/2})\mathbf{1}. \tag{4.3}$$

对于任意的 $n \geqslant 1$ 以及变量 $u = (u_1, \dots, u_n)$，令

$$T^{\pm}_{[n]}(u) = T^{\pm}_1(u_1) \dots T^{\pm}_n(u_n) \quad \text{and} \quad T^{\pm}_{[n]}(u|z) = T^{\pm}_1(z+u_1) \dots T^{\pm}_n(z+u_n). \tag{4.4}$$

最后，我们回顾 Etingof–Kazhdan 的构造 [13, 定理 2。3]。

定理 4.2. *For any $c \in \mathbb{C}$, there exists a unique h-adic quantum vertex algebra structure on $\mathcal{V}^c(R)$ such that the vertex operator map $Y(\cdot, z)$ is given by*

$$Y\big(T^{+}_{[n]}(u)\mathbf{1}, z\big) = T^{+}_{[n]}(u|z) T^{-}_{[n]}(u|z + hc/2)^{-1}, \tag{4.5}$$

the vacuum vector is $\mathbf{1}$ and the braiding map $\mathcal{S}$ is defined by the relation

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}(z)\big(R^{12}_{nm}(e^{z+u-v})^{-1} T^{+24}_{[m]}(v) R^{12}_{nm}(e^{z+u-v-hc}) T^{+13}_{[n]}(u)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\big) \\ &= T^{+13}_{[n]}(u) R^{12}_{nm}(e^{z+u-v+hc})^{-1} T^{+24}_{[m]}(v) R^{12}_{nm}(e^{z+u-v})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}). \end{aligned} \tag{4.6}$$

下一个引理给出了（4.6）的乘法对应物；参见 [30, 引理 2。6]。

引理 4.3. *For any $c \in \mathbb{C}$, there exists a unique $\mathbb{C}[[h]]$-module map*

$$\widehat{\mathcal{S}}(z) \colon \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathbb{C}(z)[[h]]$$

which satisfies

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{S}}(z)\big(R^{12}_{nm}(ze^{u-v})^{-1} T^{+24}_{[m]}(v) R^{12}_{nm}(ze^{u-v-hc}) T^{+13}_{[n]}(u)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\big) \\ &= T^{+13}_{[n]}(u) R^{12}_{nm}(ze^{u-v+hc})^{-1} T^{+24}_{[m]}(v) R^{12}_{nm}(ze^{u-v})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2. 椭圆情形。在本小节中，我们考虑椭圆 R-矩阵 (2.15)。与三角情形一样，我们首先引入某个代数 $\mathrm{U}(R) = \mathrm{U}(R^{ell})$。与促使其定义的论文 [11, 12], 不同，该代数包含两类不同的生成元；在下文的 h-进量子顶点代数构造中，这两类生成元都起到产生算子的作用。我们将采用缩写 $\varepsilon_{12} = (-1)^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$表示 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. 令 $\mathrm{U}(R)$ 为环$\mathbb{C}[[h]]$ 上的拓扑自由结合代数，由元素 $t_{ij}^{(\varepsilon,-r)}$ 生成，其中 $i, j = 1, 2$, $\varepsilon = 0, 1$, $r = 1, 2, \dots$，并满足以下定义关系

$$R_{12}(\varepsilon_{12}e^{u_1-u_2}) T^{\varepsilon_1}_1(u_1) T^{\varepsilon_2}_2(u_2) = T^{\varepsilon_2}_2(u_2) T^{\varepsilon_1}_1(u_1) R_{12}(\varepsilon_{12}e^{u_1-u_2}) \text{ 对于 } \varepsilon_1, \ \varepsilon_2 = 0, \tag{4.8}$$

1，其中矩阵 $T^{\varepsilon}(u)$ $\varepsilon = 0$，1，由下式给出

$$T^{\varepsilon}(u) = \sum_{i,j=1}^{2} e_{ij} \otimes t^{\varepsilon}_{ij}(u) \qquad \text{for} \qquad t^{\varepsilon}_{ij}(u) = \delta_{ij} - \sum_{r \geqslant 1} t_{ij}^{(\varepsilon,-r)} u^{r-1}.$$

注 4.4. 由于矩阵 $T^{\varepsilon}(u)$ 只包含 u 的非负次幂，FRT 关系（4.8）等价于

$$R_{12}(\varepsilon_{12}e^{-u_2+u_1}) T^{\varepsilon_1}_1(u_1) T^{\varepsilon_2}_2(u_2) = T^{\varepsilon_2}_2(u_2) T^{\varepsilon_1}_1(u_1) R_{12}(\varepsilon_{12}e^{-u_2+u_1}) \quad \text{for} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1.$$

注 4.5. 注意，（4.8）只给出三族定义关系，因为配对（ε_1，ε_2）$= (0, 1)$ 和（ε_1，ε_2）$= (1, 0)$ 给出等价关系。事实上，利用 R-矩阵性质（2.14）即可轻易验证这一点。

注 4.6.定义关系（4.8）的有理对应物，按注 2.1 的含义，由 $\mathfrak{gl}_2$ 的对偶 杨ian 定义关系的两份拷贝构成（有关对偶 Yangian 的更多细节，参见例如 Iohara 的论文 [21]），

$$R^{rat}_{+12}(u-v) T^{\varepsilon}_1(u) T^{\varepsilon}_2(v) = T^{\varepsilon}_2(v) T^{\varepsilon}_1(u) R^{rat}_{+12}(u-v) \quad \text{for} \quad \varepsilon = 0, 1.$$

此外，还有两组等价的关系

$$R^{rat}_{-12}(u-v) T^{\varepsilon}_1(u) T^{1-\varepsilon}_2(v) = T^{1-\varepsilon}_2(v) T^{\varepsilon}_1(u) R^{rat}_{-12}(u-v) \quad \text{for} \quad \varepsilon = 0, 1.$$

以下命题是注 4.4 和 4.5的简单推论。

命题 4.7. *There exists a unique involutive automorphism τ of $\mathrm{U}(R)$ such that*

$$\tau\colon t_{ij}^{(\varepsilon,-r)} \mapsto t_{ij}^{(1-\varepsilon,-r)} \quad \text{for all} \quad i,j=1,2,\ \varepsilon=0,1,\ r=1,2,\dots. \tag{4.9}$$

记 $\mathrm{U}(R)$ 中的单位元为 $\mathbf{1}$ R。 从现在起，我们将 $T^{\varepsilon}(u)$ 视为 $\mathrm{U}(R)$ 上的算子级数，其作用由代数乘法给出。我们着手在 $\mathrm{U}(R)$ 的 $\mathbb{C}[[h]]$-模上构造一个 h-进量子顶点代数结构。首先，我们改编 [13, 引理 2.1] 中湮灭算子的构造。

引理 4.8. *For any $c\in\mathbb{C}$, there exists a unique invertible operator series*

$$T^{-}(u)\in \operatorname{End}\mathbb{C}^2\otimes \operatorname{Hom}(\mathrm{U}(R),\mathrm{U}(R)((u))_h)$$

such that for all $n\geqslant 0$ and $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ we have

$$\begin{aligned} &T_0^{-}(u)T_1^{\varepsilon_1}(v_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(v_n)\mathbf{1}\\ &=R_{1n}^{01}(e^{u-v^{\varepsilon}+hc/2})^{-1}T_1^{\varepsilon_1}(v_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(v_n)\,R_{1n}^{01}(e^{u-v^{\varepsilon}-hc/2})\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

证明。与 [13, 引理 2.1], 一样，该引理可由直接计算得出，计算依据是定义关系 (4.8) 和杨–巴克斯特方程 (2.16)。 □

从现在起，我们将 $\mathrm{U}(R)$ 记为 $\mathcal{V}^c(R)$，以表示其带有引理 4.8中的算子级数作用，该作用取决于复参数 c。记 $T^{-}(u+\pi\mathrm{i})$ 为由 $T^{-}(u)$ 得到的算子级数，方法是改变（4.10）中 R-矩阵的参数符号，从而其作用为

$$\begin{aligned} &T_0^{-}(u+\pi\mathrm{i})T_{1\,n+1}^{\varepsilon_1}(v_1)\dots T_{n\,n+1}^{\varepsilon_n}(v_n)\\ &=R_{1n}^{01}(e^{u-v^{\varepsilon'}+hc/2})^{-1}T_1^{\varepsilon_1}(v_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(v_n)\,R_{0n}^{+}\dots R_{1n}^{01}(e^{u-v^{\varepsilon'}-hc/2})\mathbf{1}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\varepsilon'=(1-\varepsilon_1,\ \dots\dots,\ 1-\varepsilon_n)$。 与 $T^{-}(u)$ 一样，这是 $\operatorname{End}\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{Hom}(\mathrm{U}(R),\mathrm{U}(R)((u))_h)$ 中的可逆级数。 此外，它还具有以下性质，这直接由（4.9）、（4.10）和（4.11）得到。

引理 4.9。 *We have*

$$T^{-}(u)^{\pm1}(1\otimes\tau)=(1\otimes\tau)T^{-}(u+\pi\mathrm{i})^{\pm1}. \tag{4.12}$$

下一个引理可通过直接计算得到，该计算依赖于定义关系（4.8）和引理 4.8。

引理 4.10。 *The operator series $T^{\varepsilon}(u)$ and $T^{-}(u)$ satisfy the FRT-relation s*

$$\begin{aligned} R(e^{u_1-u_2})T_1^{-}(u_1)T_2^{-}(u_2)&=T_2^{-}(u_2)T_1^{-}(u_1)\,R(e^{u_1-u_2}),\\ R((-1)^{\varepsilon}e^{u_1-u_2+hc/2})T_1^{-}(u_1)T_2^{\varepsilon}(u_2)&=T_2^{\varepsilon}(u_2)T_1^{-}(u_1)\,R((-1)^{\varepsilon}e^{u_1-u_2-hc/2}). \end{aligned}$$

最后，对于 u,ε 以及 u^{ε} 如（2.18）–（2.20）所示，我们将使用以下记号表示系数取自 $(\operatorname{End}\mathbb{C}^2)^{\otimes n}\otimes\operatorname{End}\mathcal{V}^c(R)$ 的算子级数：

$$\begin{aligned} T_{[n]}^{\varepsilon}(u)&=T_1^{\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(u_n), \qquad T_{[n]}^{\varepsilon}(u|z)=T_1^{\varepsilon_1}(z+u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(z+u_n),\\ T_{[n]}^{-}(u^{\varepsilon}|z)&=T_1^{-}(z+u_1+\varepsilon_1\pi\mathrm{i})\dots T_n^{-}(z+u_n+\varepsilon_n\pi\mathrm{i}). \end{aligned}$$

下一个定理对 Etingof–Kazhdan 构造的椭圆情形作了略微扩展[13,定理 2.3]。

定理 4.11。 *For any $c \in \mathbb{C}$, there exists a unique structure of h-adic quantum vertex algebra over $\mathcal{V}^c(R)$ such that the vertex operator map $Y(\cdot, z)$ is given by*

$$Y(T^{\varepsilon}_{[n]}(u)\mathbf{1}, z) = T^{\varepsilon}_{[n]}(u|z)T^{-}_{[n]}(u^{\varepsilon}|z + hc/2)^{-1}, \tag{4.13}$$

the vacuum vector is $\mathbf{1}$ and the braiding map $\mathcal{S}$ is defined by the relation

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(z)\left(R^{12}_{nm}(e^{z+u^{\varepsilon}-v^{\nu}})^{-1}T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(e^{z+u^{\varepsilon}-v^{\nu}-hc})T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)\\ &= T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)\,R^{12}_{nm}(e^{z+u^{\varepsilon}-v^{\nu}+hc})^{-1}T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(e^{z+u^{\varepsilon}-v^{\nu}})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

证明。 细节从略，因为证明过程与 [13, 定理 2.3]平行。更具体地说，可以通过直接计算验证 h-进量子顶点代数公理 [33, 定义 2.20]。此外，所有细节也可以参照 [19,定理 2.3.8] 和 [25,定理 4.1]的证明推导出来。 □

与三角情形类似（回顾引理4.3），我们有以下简单引理。

引理 4.12。 *For any $c \in \mathbb{C}$ there exists a unique $\mathbb{C}[[h]]$-module map*

$$\widehat{\mathcal{S}}(z)\colon \mathcal{V}^c(R)\otimes\mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R)\otimes\mathcal{V}^c(R)\otimes\mathbb{C}(z)[[h]]$$

which satisfies

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathcal{S}}(z)\left(R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}})^{-1}T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}-hc})T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)\\ &= T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}+hc})^{-1}T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}).\end{aligned} \tag{4.15}$$

注 4.13。 回顾嵌入（2.7）。映射（4.14）和（4.15）之间的关系为

$$\mathcal{S}(z) = \iota_z\left(\widehat{\mathcal{S}}(x)\big|_{x=e^z}\right). \tag{4.16}$$

三角情形也同样适用，即映射（4.6）和（4.7）。

下一个定义是对顶点代数同态概念的直接推广；参见例如 Kac [28] 和 Lepowsky 与 Li 的著作 [32]。

定义 4.14. 设 $(V_{(i)}Y_{(i)}\,\mathbf{1}^{(i)}, \mathcal{S}^{(i)})$、 $i = 1, 2$, 是 h-进量子顶点代数。若一个 $\mathbb{C}[[h]]$-线性映射 $\psi\colon V_{(1)} \to V_{(2)}$ 满足以下条件，则称其为 h-进量子顶点代数的同态：

$$\psi\left(Y^{(1)}(v, z)w\right) = Y^{(2)}(\psi(v), z)\psi(w) \quad \text{for all} \quad v, w \in V^{(1)} \qquad \text{and} \qquad \phi(\mathbf{1}^{(1)}) = \mathbf{1}^{(2)}.$$

命题 4.15. *The map τ, as given by Proposition 4.7, is an involutive automorphism of the h-adic quantum vertex algebra $\mathcal{V}^c(R)$.*

证明。 要验证该命题，只需证明映射 τ 是一个 h-进顶点代数同态。事实上，其余断言由命题 4.7即可显然得出。根据定义 4.14，只需证明，对于任意变量族 u和 v 以及二元组 ε 和 ν，如式（2.18）和（2.19）所示，我们有

$$\tau\left(Y(T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)\mathbf{1}, z)T^{\nu\,23}_{[m]}(v)\mathbf{1}\right) = Y\left(\tau\left(T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)\mathbf{1}\right), z\right)\tau\left(T^{\nu\,23}_{[m]}(v)\mathbf{1}\right).$$

由（4.13），左边等于

$$\tau\left(T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(z+u)T^{-\,13}_{[n]}(z+u^{\varepsilon}+hc/2)^{-1}T^{\nu\,23}_{[m]}(v)\mathbf{1}\right). \tag{4.17}$$

另一方面，利用（4.9），再利用（4.13），可得右边等于

$$Y(T^{\varepsilon'\,13}_{[n]}(u)\mathbf{1}, z)T^{\nu'\,23}_{[m]}(v)\mathbf{1} = T^{\varepsilon'\,13}_{[n]}(z+u)T^{-\,13}_{[n]}(z+u^{\varepsilon'}+hc/2)^{-1}T^{\nu'\,23}_{[m]}(v)\mathbf{1}. \tag{4.18}$$

Fin因此，由 (4.9) 和 (4.12) 可知，(4.17) 与 (4.18) 相同，正如所要求的 d. □

5. Compatible pair $(\sigma,\ \rho)$ associated with $\mathcal{V}^c(R)$

本节中，我们在 $\mathcal{V}^c(R)$ =$\mathcal{V}^c(R^{trig})$ $\mathcal{V}^c(R^{ell})$ 的张量平方上引入一对特定的映射。为同时考察这两种情形，在三角情形下，我们将由 $(T^+(u)$ 定义的生成元矩阵 (4.2)，记作 $T^{\varepsilon}(u)$。此外，如第 2.3 小节所述，我们假设在三角情形下所有二元组均为平凡的。首先，为方便读者，我们回顾乘法相容对定义的一个特殊情形 [5, 定义 3。6], ，它适用于本文的设定。

定义 5.1。设 V 是一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模，并且

$$\sigma(z),\rho(z)\colon V\otimes V\to V\otimes V\otimes\mathbb{C}(z)[[h]]$$

$\mathbb{C}[[h]]$-模映射。若一对 $(\sigma,\ \rho)$ 具有以下性质，则称其为乘法相容对。

（1）映射 σ 满足量子 *Yang–Baxter* 方程，

$$\sigma_{12}(z_1)\sigma_{13}(z_1z_2)\sigma_{23}(z_2)=\sigma_{23}(z_2)\sigma_{13}(z_1z_2)\sigma_{12}(z_1) \tag{5.1}$$

以及幺正性条件，

$$\sigma(1/z)\sigma_{21}(z)=\sigma_{21}(z)\sigma(1/z)=1. \tag{5.2}$$

（2）映射 ρ 是可逆的，即存在一个映射

$$\rho^{-1}(z)\colon V\otimes V\to V\otimes V\otimes\mathbb{C}(z)[[h]]$$

使得 $\rho(z)\rho^{-1}(z)=\rho^{-1}(z)\rho(z)\ =1.$

(3) 该映射

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\sigma,\rho}(z)\colon V\otimes V\to V\otimes V\otimes\mathbb{C}(z)[[h]],\\ \mathcal{M}_{\sigma,\rho}(z)\coloneqq\rho(z)\sigma(z)\rho_{21}^{-1}(1/z)\end{aligned} \tag{5.3}$$

满足杨–巴克斯特方程 (5.1) 和幺正性条件 (5.2)。

从现在起，我们省略“乘法”一词，将任何满足定义 5.1 的映射对简称为相容对。在下一个命题中，我们给出一个 $\mathbb{C}[[h]]$-模 $\mathcal{V}^c(R)$ 上相容对的例子。其形式类似于 [4, 命题 4.3] 中给出的加法相容对。值得注意的是，该命题利用了这样一个事实： R-矩阵 $R(z)$（在椭圆情形和三角情形中均如此）可以视为关于变量 z的形式有理函数，即 End $\mathbb{C}^N\otimes$ End $\mathbb{C}^N(z)[[h]]$ 中的一个元素（椭圆情形下 $N=2$），这一点可由 [3, 注 2.4] 和 [30, 注 2.5] 得出。

命题 5.2. *There exist unique* $\mathbb{C}[[h]]$*-modules maps*

$$\sigma(z),\rho(z)\colon\mathcal{V}^c(R)\otimes\mathcal{V}^c(R)\to\mathcal{V}^c(R)\otimes\mathcal{V}^c(R)\otimes\mathbb{C}(z)[[h]]$$

such that

$$\sigma(z)\left(T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)T^{\nu\,24}_{[m]}(v)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)=R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}})T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}})^{-1}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}), \tag{5.4}$$

$$\rho(z)\left(T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)T^{\nu\,24}_{[m]}(v)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)=T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}+hc})^{-1}T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^{\varepsilon}-v^{\nu}})(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}). \tag{5.5}$$

Moreover, the maps σ *and* ρ *form a compatible pair.*

证明。 该命题可通过直接验证定义 5.1所施加的约束 (1)–(3) 得以证明。根据 (σ 和 ρ) 以及 (5.4) 和 (5.5) 定义良好的映射这一事实，可通过采用与 [5, 命题 3.5、3.9]的证明中相同的论证加以确立。

（1）映射 σ 所满足的杨–巴克斯特方程（5.1）源于相应的 R-矩阵（2.3）和（2.12）满足同一个恒等式这一事实；回顾（2.4）和（2.13）。至于幺正性条件（5.2），三角 R-矩阵（2.2）具有幺正性$R(z^{-1}) = R_{21}(z)^{-1}$，而椭圆 R-矩阵（2.12）满足类幺正恒等式（2.14）。特别地，出现在 σ的定义表达式（5.4）中的 R-矩阵（2.3）和（2.12）并非幺正矩阵。然而，上述性质仍然蕴含幺正性条件（5.2），因为由于（5.4）的特殊形式，附加的 R-矩阵项会相互抵消。

（2）映射 ρ 的可逆性可以通过写出其逆映射的显式公式来证明。例如，在三角情形下，我们有

$$\rho(z)^{-1} = \beta(z)\alpha(z), \tag{5.6}$$

其中 映射 $\alpha(z)$ $\beta(z)$: $\mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathbb{C}(z)[[h]]$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
&\alpha(z)\left(T^{\varepsilon 13}_{[n]}(u)T^{\nu 24}_{[m]}(v)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)\\
&= T^{\varepsilon 13}_{[n]}(u)\,D^1_{[n]}\,R^{12}_{nm}(ze^{u^\varepsilon - v^\nu + h(c+N)})\,(D^1_{[n]})^{-1}T^{\nu 24}_{[m]}(v)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}),\\
&\beta(z)\left(T^{\varepsilon 13}_{[n]}(u)T^{\nu 24}_{[m]}(v)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)\\
&= T^{\varepsilon 13}_{[n]}(u)T^{\nu 24}_{[m]}(v)\,R^{12}_{nm}(ze^{u^\varepsilon - v^\nu})^{-1}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})
\end{aligned}$$

其中 $D^1_{[n]} = D^{\otimes n} \otimes 1^{\otimes m}$；见（2.6）中矩阵的定义 D. 要验证（5.6）定义了 ρ的逆映射，需要使用（2.5）中的第一个交叉对称性。在椭圆情形下， ρ 的逆映射的显式公式也可再次利用交叉对称性推导得出，如 [16, 公式 213]所示。

（3）映射 $\mathcal{M}_{\sigma,\,\rho}$，由（5.3）定义，满足杨–巴克斯特方程（5.1）和幺正性条件（5.2），这一点将在下文注 5.5 中证明。□

本文始终关注 h-进量子顶点代数上的相容对，它们与底层编织映射相协调，具体含义如下。

定义 5.3. 设 $(V, Y, \mathcal{S}, \mathbf{1})$ 是一个 h-进量子顶点代数，而 (σ, ρ) 是其上的一个相容对。若映射 V，则称相容对 (σ, ρ) 与 该 h-进量子顶点代数相伴随， V 当映射$\mathcal{M}_{\sigma,\,\rho}$由 (5.3) 定义时满足

$$\mathcal{S}(z) = \iota_z\left(\mathcal{M}_{\sigma,\rho}(x)\big|_{x=e^z}\right). \tag{5.7}$$

考虑 h-进量子顶点代数 $\mathcal{V}^c(R)$ 以及命题 ^5.2 中的相容对。为验证条件 (5.7)，只需检查映射 $\mathcal{S}$，由引理 4.3 和 4.12 给出，满足恒等式

$$\widehat{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{M}_{\sigma,\rho}(x). \tag{5.8}$$

这可 由直接计算得出，因此有以下推论 .

推论 5.4。 *The pair* $(\sigma,\ \rho)$ *given by Proposition* 5。2, *is associated with* $\mathcal{V}^c(R)$ 。

注 5.5。特别要注意，恒等式（5.8）蕴含映射 $\mathcal{M}_{\sigma,\,\rho}$满足杨–巴克斯特方程（5.1）和幺正性方程（5.2），正如^定义 5.1 所要求的，因为这些方程对于编织映射 $\mathcal{S}$.

将嵌入 ι_z 应用于映射 $\sigma = \sigma(z)$，由（5.4）定义，我们得到映射

$$\iota_z\sigma(z)\colon \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathbb{C}((z))[[h]]. \tag{5.9}$$

接下来, 将代换 $x = e^z$ 应用于映射 $\rho = \rho(x)$，由（5.5）定义，我们得 t

$$\rho(x)\,|_{x=e^z} : \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathbb{C}_*(z)[[h]].$$

将其与嵌入 ι_z,复合，记为 $\rho(e^z)$

$$\rho(e^z) := \iota_z\,(\rho(x)\,|_{x=e^z}) : \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathbb{C}((z))[[h]]. \tag{5.10}$$

注意，顶点算子映射 Y（由（4.5）和（4.13）给出）与映射（5.10）的复合是良定义的。我们将其记为 Y^ρ, 于是有

$$Y^\rho(z) := Y(z)\rho(e^z) : \mathcal{V}^c(R) \otimes \mathcal{V}^c(R) \to \mathcal{V}^c(R)((z))_h \otimes \mathbb{C}((z))[[h]]. \tag{5.11}$$

上述映射（5.9）和（5.10）满足以下六边形型恒等式 s.

命题 5.6。 *We have*

$$\iota_{z_1}\sigma(z_1)\,(Y^\rho(z_2)\otimes 1) = (Y^\rho(z_2)\otimes 1)\,\iota_{z_1}\sigma_{23}(z_1)\,(\iota_z\sigma_{13}(z))\,\big|_{z=z_1e^{z_2}}, \tag{5.12}$$

$$\rho(e^{z_1})\,(Y^\rho(z_2)\otimes 1) = (Y^\rho(z_2)\otimes 1)\,\rho_{13}(e^{z_1+z_2})\rho_{23}(e^{z_1}). \tag{5.13}$$

证明。显然，所有形如以下表达式的矩阵元系数

$$T^{\varepsilon\,14}_{[n]}(u)T^{\nu\,25}_{[m]}(v)T^{\mu\,36}_{[k]}(w) \tag{5.14}$$

构成一个 h-进稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模 $\mathcal{V}^c(R)^{\otimes 3}$。因此，要证明该命题，只需证明将 (5.14) 作用于 (5.12) 和 (5.13) 两边所得的像相同。

首先，利用映射 Y 和 ρ 的定义，由 (4.5)、(4.13) 和 (5.10) 给出，可得 (5.11) 的作用的显式公式,

$$Y^\rho(z)\,T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u)T^{\nu\,24}_{[m]}(v) = T^{\varepsilon\,13}_{[n]}(u|z)T^{\nu\,23}_{[m]}(v). \tag{5.15}$$

利用映射 5.4 的定义 σ 以及 (5.15)，可得 (5.14) 作用于恒等式 (5.12) 两边所得的像相等，且均为

$$R^{12\,3}_{n+m\,k}(z_1e^{x^\eta - w^\mu})T^{\varepsilon\,14}_{[n]}(u|z_2)T^{\nu\,24}_{[m]}(v)T^{\mu\,35}_{[k]}(w)\,R^{12\,3}_{n+m\,k}(z_1e^{x^\eta - w^\mu})^{-1},$$

其中

$$x = (z_2+u_1,\dots,z_2+u_n,v_1,\dots,v_m) \quad \text{and} \quad \eta = (\varepsilon,\nu) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\nu_1,\dots,\nu_m). \tag{5.16}$$

类似地，利用映射 5.5 的定义 ρ 以及 (5.15)，可得 (5.14) 作用于恒等式 (5.13) 两边所得的像相等于

$$T^{\varepsilon\,14}_{[n]}(u|z_2)T^{\nu\,24}_{[m]}(v)\,R^{12\,3}_{n+m\,k}(e^{z_1+x^\eta-w^\mu+hc})^{-1}T^{\mu\,35}_{[k]}(w)\,R^{12\,3}_{n+m\,k}(e^{z_1+x^\eta-w^\mu}),$$

其中 x 和 η 仍由式（5.16）给出。因此，我们得出结论：该命题的两个断言均成立。□

与本节其余部分不同，以下简单推论仅适用于椭圆情形，在这种情形下，（扩张的） h-进量子顶点代数 $\mathcal{V}^c(R)$具有对合自同构 τ；回顾命题4.15。通过比较它们的定义表达式（4.9）、（5.4）和（5.5），可得映射 τ， σ 和 ρ.

推论 5.7. *For $i = 1$ (resp. $i = 2$) let τ_i denote the action of the automorphism τ on the first (resp. second) tensor factor of $\mathcal{V}^c(R)\otimes\mathcal{V}^c(R)$. We have*

$$\tau_i \circ \sigma(z) = \sigma(-z)\circ\tau_i \quad \text{and} \quad \tau_i\circ\rho(z) = \rho(-z)\circ\tau_i,$$

where $i = 1,2$, and, consequently,

$$(\tau\otimes\tau)\circ\sigma(z) = \sigma(z)\circ(\tau\otimes\tau) \quad \text{and} \quad (\tau\otimes\tau)\circ\rho(z) = \rho(z)\circ(\tau\otimes\tau)\,.$$

6. Constructing deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-modules

本节中，我们利用相容对来修订 h-进量子顶点代数的 (扭曲) ϕ-协调模的概念。最后，我们探讨这类结构与 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)\widehat{\ }$以及椭圆量子代数 $\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$。的表示理论之间的联系。

6.1. **关于 h-杨ian $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$。** 令 $\phi = \phi(z_2, z_0) = z_2 e^{z_0} \in \mathbb{C}[[z_0, z_2]]$为一维加法形式群的伴随函数；更多详情请参见 [34, 第 2] 节。下一个定义结合了以下概念： ϕ-协调模 [34, 定义 3。4] 和 (σ, ρ) - 变形模 [4, 定义 3。5]。

定义 6.1。 令 $(V, Y, \mathbf{1}, \mathcal{S})$ 为一个 h-adic 量子顶点代数，且令 (σ, ρ) 为与 V 相关联的相容对。令 W 为一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模，并配备一个 $\mathbb{C}[[h]]$-模映射

$$\begin{aligned} Y_W(\cdot, z)\colon V \otimes W &\to W((z))_h, \\ v \otimes w &\mapsto Y_W(z)(v \otimes w) = Y_W(v, z)w = \sum_{r \in \mathbb{Z}} v_{r-1} w z^{-r}. \end{aligned}$$

一对 (W, Y_W) 称为 (σ, ρ)-变形的 ϕ-协调的 V-模，如果映射 $Y_W(\cdot, z)$ 满足

$$Y_W(\mathbf{1}, z)w = w \quad \text{for all } w \in W,$$

弱 ρ-结合律：对于任意元素 $u, v \in V$和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得

$$(z_1 - z_2)^r Y_W(u, z_1) Y_W(v, z_2) \in \operatorname{Hom}\left(W, W((z_1, z_2))\right) \mod h^n, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &\left((z_1 - z_2)^r Y_W(u, z_1) Y_W(v, z_2)\right)\Big|^{\bmod h^n}_{z_1 = z_2 e^{z_0}} \\ &\quad - z_2^r (e^{z_0} - 1)^r Y_W\left(Y^\rho(u, z_0)v, z_2\right) \in h^n \operatorname{Hom}\left(W, W[[z_0^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]\right), \end{aligned} \tag{6.2}$$

以及 σ-局部性：对于任意 $u, v \in V$和 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，存在 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得对所有$w \in W$都有

$$\begin{aligned} &\left((z_1 - z_2)^r Y_W(z_1)\left(1 \otimes Y_W(z_2)\right)\left(\sigma(z_1/z_2)(u \otimes v) \otimes w\right)\right. \\ &\quad \left. - (z_1 - z_2)^r Y_W(v, z_2) Y_W(u, z_1) w\right) \in h^n W[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

注 6.2。 在本注中，我们解释定义 6.1的若干细微之处。首先，根据（6.1），我们要求给定表达式作用于任意元素 $w \in W$后，再模 h^n考虑时，关于 z_1 和 z_2. 的负次幂只有有限项。换言之，我们要求对任意 $w \in W$，都有

$$(z_1 - z_2)^r Y_W(u, z_1) Y_W(v, z_2) w = A_w(z_1, z_2) + h^n B_w(z_1, z_2) \tag{6.4}$$

存在形式级数 $A_w(z_1, z_2) \in W((z_1, z_2))$ 以及 $B_w(z_1, z_2) \in W[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$（二者都依赖于 w）。注意，这仍不能保证可以将代换$z_1 = z_2 e^{z_0}$ 应用于（6.4），因为所得表达式未必有定义。不过，此代换可以应用于 $A_w(z_1, z_2)$。式（6.2）中使用的记号表示，应在应用代换之前先模 h^n 考虑给定表达式。换言之，有

$$\left((z_1 - z_2)^r Y_W(u, z_1) Y_W(v, z_2)\right)\Big|^{\bmod h^n}_{z_1 = z_2 e^{z_0}} w = A_w(z_1, z_2).$$

最后，我们指出，定义 ρ 中弱 6.1-结合性性质的形式受 [34, 注 32] 的启发；另见 [35, 引理 29]。关于 σ-局部性性质

(6.3)，与（5.9）一样，我们假设 σ 的像嵌入在 $V\otimes V\otimes\mathbb{C}((z_1/z_2))$ 中，即，我们有 $\sigma(z_1/z_2)=(\iota_z\sigma(z))\big|_{z=z_1/z_2}$.

为了将 ϕ-协调的 (σ,ρ)-变形 $\mathcal{V}^c(R)$-模与 h-杨ian联系起来，我们引入受限 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-模的概念。其动机来自仿射 Kac–Moody 李代数的受限模；例如参见 Kac 的著作 [27]。若一个 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-模 W满足以下条件，则称其为 受限的： 它是一个拓扑自由 $\mathbb{C}[[h]]$-模，且生成元矩阵 $()_W$ 的相应作用 $L^-z3.1)$ 满足

$$L^-(z)_W\in\operatorname{End}\mathbb{C}^N\otimes\operatorname{Hom}(W,W[z^{-1}]_h).$$

从现在起，我们用 σ 和 ρ 分别表示映射 (5.4) 和 (5.5。

定理 6.3. *Let W be a restricted $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-module. For any $c\in\mathbb{C}$, there exists aunique structure of (σ,ρ)-deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-module over W such that themodule map is given by*

$$Y_W(T^+_{[n]}(u)\mathbf{1},z)=L^-_1(ze^{u_1})_W\dots L^-_n(ze^{u_n})_W. \tag{6.5}$$

Conversely, if $(W,\ Y_W)$ is a $(\sigma,\ \rho)$-deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-module such that

$$Y_W(t^+_{ij}(0)\mathbf{1},z)\in\delta_{ij}+h\operatorname{Hom}(W,W[z^{-1}]_h)\quad\text{for all } i,j=1,\dots,N, \tag{6.6}$$

then the assignment

$$L^-(z)_W:=Y_W(T^+(0)\mathbf{1},z) \tag{6.7}$$

defines a structure of restricted $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-module over W.

证明。 设 W 是一个受限的 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-模。(6.5)定义了一个 (σ,ρ)-变形的 ϕ-协调 $\mathcal{V}^c(R)$-模在 W 上的结构，这一事实可通过直接计算得到证明；这些计算直接验证了定义6.3 所施加的约束。由于证明过程与 [5,定理 5.4],的证明类似，我们省略细节；不过，由于底层相容对的形式，证明稍显技术性。

反过来，设 (W,Y_W) 是一个 (σ,ρ)-变形的 ϕ-协调 $\mathcal{V}^c(R)$-模，且满足 (6.6)。为证明该定理的第二个断言，只需验证 (6.7) 满足 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 的定义关系 (3.2)。利用映射 σ 的表达式 (5.4) 以及 σ-局部性 (6.3)，可得对任意 $n\geqslant 1$，存在 $r\geqslant 0$ 使得

$(z_1-z_2)^rR(z_1/z_2)L^-_1(z_1)_WL^-_2(z_2)_Ww\,R(z_1/z_2)^{-1}=(z_1-z_2)^rL^-_2(z_2)_WL^-_1(z_1)_Ww$ 模 h^n，其中映射 $L^-(z)_W$ 由 (6.7) 定义。由 (6.6) 可知，项 $(z_1-z_2)^r$ 相消，因此将上述恒等式右乘 $R(z_1/z_2)$，得到

$$R(z_1/z_2)\,L^-_1(z_1)_WL^-_2(z_2)_Ww=L^-_2(z_2)_WL^-_1(z_1)_WR(z_1/z_2)w\mod h^n.$$

最后，分离出 W 后，可得

$$R(z_1/z_2)\,L^-_1(z_1)_WL^-_2(z_2)_Ww=L^-_2(z_2)_WL^-_1(z_1)_WR(z_1/z_2)w$$

对所有 $w\in W$，均成立，正如所需。 □

6.2. 椭圆量子代数上的模 $\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$。 在本小节中，我们考虑伴随函数 $\phi=\phi(z_2,z_0)=z_2e^{2z_0}\in\mathbb{C}[[z_0,z_2]]$。令 $\omega_M=e^{2\pi\mathrm{i}/M}$ 为 M 次本原单位根。下一个定义结合了 Def. 2.8] 中的 扭曲ϕ-坐标模 [36, 以及 Def. 3.5] 中的 $(\sigma,\ \rho)$-变形模 [4, 。

定义 6.4。 设 $(V,Y,\mathbf{1},\mathcal{S})$ 是一个 h-进量子顶点代数，τ 是 V 的一个周期为 M 的自同构，且 (σ,ρ) 是与 V. 伴随的相容对。设 W 是一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模，并配备一个 $\mathbb{C}[[h]]$-模映射

$$Y_W(\cdot,z)\colon V\otimes W\to W((z^{1/M}))_h,$$

$$v\otimes w\mapsto Y_W(z)(v\otimes w)=Y_W(v,z)w=\sum_{r\in\frac{1}{M}\mathbb{Z}}v_{r-1}wz^{-r}.$$

若映射 $Y_W(\cdot,z)$ 满足下述条件，则称一对 (W,Y_W) 为 (σ,ρ,τ)-变形的 ϕ-协调的 V-模

$$\begin{aligned}&Y_W(\mathbf{1},z)w=w\quad\text{for all } w\in W,\\&Y_W(\tau u,z)=\lim_{x^{1/M}\to\omega_M^{-1}z^{1/M}}Y_W(u,x)\quad\text{for all } u\in V,\end{aligned}\tag{6.8}$$

弱 ρ-结合性：对任意元素 $u,v\in V$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在 $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得我们有

$$(z_1-z_2)^rY_W(u,z_1)Y_W(v,z_2)\in\operatorname{Hom}\left(W,W((z_1^{1/M},z_2^{1/M}))\right)\mod h^n,\tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}&\left((z_1-z_2)^rY_W(u,z_1)Y_W(v,z_2)\right)\Big|^{\bmod h^n}_{z_1^{1/M}=(z_2e^{2z_0})^{1/M}}\\&\quad-z_2^r(e^{2z_0}-1)^rY_W\left(Y^\rho(u,z_0)v,z_2\right)\in h^n\operatorname{Hom}\left(W,W[[z_0^{\pm1/M},z_2^{\pm1/M}]]\right),\end{aligned}\tag{6.10}$$

以及 σ-局部性：对任意 $u,v\in V$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，存在 $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得对所有$w\in W$，我们有

$$\begin{aligned}&\left((z_1-z_2)^rY_W(z_1)\left(1\otimes Y_W(z_2)\right)\left(\sigma(z_1^{1/M}/z_2^{1/M})(u\otimes v)\otimes w\right)\right.\\&\quad\left.-(z_1-z_2)^rY_W(v,z_2)Y_W(u,z_1)w\right)\in h^nW[[z_1^{\pm1/M},z_2^{\pm1/M}]].\end{aligned}\tag{6.11}$$

在定义 6.4中，我们假设注 6.2 中说明的所有技术细节均适用于弱 ρ-结合性性质（6.9）–（6.10）以及 σ-局部性性质（6.11）。特别地，与（5.9）一样，假设 σ 在（6.11）中的像嵌入于$V\otimes V\otimes\mathbb{C}((z_1^{1/M}/z_2^{1/M}))$，即，我们有

$$\sigma(z_1^{1/M}/z_2^{1/M})=(\iota_z\sigma(z))\big|_{z=(z_1/z_2)^{1/M}}.$$

注 6.5. 令 $\sigma=\mathcal{S}$ 和 $\rho=1$ 在定义 6.4中取相应值，可得到 h-进版本的 Li、Tan 和 Wang 的扭曲 ϕ-协调模概念 [36, 定义 2。8]。

我们的下一个目标是构造一个关于 $\mathcal{A}_{h,p}(\mathfrak{gl}_2)$ 的 (σ,ρ,τ)-变形的 ϕ-协调 $\mathcal{V}^c(R)\widehat{\ }$模块结构。从现在起，我们分别用 τ, σ 和 ρ 表示由 (4.9)、(5.4) 和 (5.5) 给出的映射。根据命题 4.7，自同构 τ 的周期为 2，因此我们考虑定义 6.4，其中 $M=2$.

定理 6.6。 *For any $c\in\mathbb{C}$, there exists a unique structure of (σ,ρ,τ)-deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-module over $\mathcal{A}_{h,p}(\mathfrak{gl}_2)$ such that the module map is given by*

$$Y_{\mathcal{A}_{h,p}(\widehat{\mathfrak{gl}_2})}(T_1^{\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(u_n)\mathbf{1},z)=L_1(z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_1}e^{u_1})\dots L_n(z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_n}e^{u_n}).$$

Consequently, if W is an $\mathcal{A}_{h,p}(\mathfrak{gl}_2)$-module which is topologically free as a $\mathbb{C}[[h]]$-module, it is naturally equipped with a structure of (σ,ρ,τ)-deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-module such that the module map is given by

$$Y_W(T_1^{\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(u_n)\mathbf{1},z)=L_1(z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_1}e^{u_1})_W\dots L_n(z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_n}e^{u_n})_W.\tag{6.12}$$

证明。与定理 6.3一样，本定理可通过直接论证加以验证，而论证过程与 [5, 定理 5.4] 的证明非常相似。因此，我们只证明性质（6.8），该性质涉及自同构 τ，因为它没有出现在上述证明中。

这是（4.9）和（6.12）的直接推论。事实上，若 W 是一个 $\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$-模，且作为 $\mathbb{C}[[h]]$-模是拓扑自由的，则有

$$\begin{aligned}
&Y_W(\tau(T_1^{\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(u_n)\mathbf{1}),z)\\
&=Y_W(T_1^{1-\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{1-\varepsilon_n}(u_n)\mathbf{1},z)\\
&=L_1(z^{1/2}(-1)^{1-\varepsilon_1}e^{u_1})_W\dots L_n(z^{1/2}(-1)^{1-\varepsilon_n}e^{u_n})_W\\
&=L_1((-1)z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_1}e^{u_1})_W\dots L_n((-1)z^{1/2}(-1)^{\varepsilon_n}e^{u_n})_W\\
&=\lim_{x^{1/2}\to(-1)z^{1/2}} L_1(x^{1/2}(-1)^{\varepsilon_1}e^{u_1})_W\dots L_n(x^{1/2}(-1)^{\varepsilon_n}e^{u_n})_W\\
&=\lim_{x^{1/2}\to(-1)z^{1/2}} Y_W(T_1^{\varepsilon_1}(u_1)\dots T_n^{\varepsilon_n}(u_n)\mathbf{1},x),
\end{aligned}$$

这意味着（6.8），正如所需。 □

设（W，Y_W）是一个（σ，ρ，τ）-变形的 ϕ-协调 $\mathcal{V}^c$（R）-模。由于生成元矩阵 6.6 的特殊形式，定理 L（z）第二个断言的逆命题不一定成立；参见（3.7）和（3.8）。不过，通过对映射 Y_W（$\cdot$，z）施加适当条件，可以建立一个部分逆命题。更具体地，记

$$Y_W(t_{ij}^{(0,-1)}\mathbf{1},z^2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(t_{ij}^{(0,-1)}\mathbf{1})_n z^{-n},\quad \text{where}\quad i,j=1,2.$$

变量 z 的系数 $(t_{ij}^{(0,-1)}\mathbf{1})_n$ 对所有 $n.$ 都属于 $\operatorname{End}W$。设其像满足

$$\operatorname{Im}(t_{ij}^{(0,-1)}\mathbf{1})_n\subseteq h^{bn}W\quad\text{for all}\quad r>0, \tag{6.13}$$

其中 b 是由（2.11）给出的正整数。这意味着

$$\mathcal{L}(z)_W:=Y_W(T^{(0)}(0)\mathbf{1},z^2)\in\operatorname{End}\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{Hom}(W,W((z))_h)$$

满足（3.7）。此外，假设

$$(t_{ij}^{(0,-1)}\mathbf{1})_n=0\quad\text{if}\quad(-1)^{i+j}\neq(-1)^n. \tag{6.14}$$

那么，算子级数 $\mathcal{L}$（z）$_W$ 的矩阵元也满足条件（3.8）。最后，剩下要说明的是，σ-局部性（6.11）蕴含关系

$$R(z_1/z_2)\mathcal{L}_1(z_1)_W\mathcal{L}_2(z_2)_W=\mathcal{L}_2(z_2)_W\mathcal{L}_1(z_1)_W R(z_1/z_2).$$

特别地，条件 (6.13) 确保 $\mathcal{L}_1(z_1)_W\mathcal{L}_2(z_2)_W$ 和 $\mathcal{L}_2(z_2)_W\mathcal{L}_1(z_1)_W$ 的矩阵元属于 $\operatorname{Hom}(W,W((z_1,z_2))_h)$，因此 σ-局部性中的项 $(z_1-z_2)^r$ 会抵消。最后，前面的讨论推出以下定理。

定理 6.7. *Let (W,Y_W) be a (σ,ρ,τ)-deformed ϕ-coordinated $\mathcal{V}^c(R)$-module such that the map $Y_W(\cdot,z)$ satisfies (6.13) and (6.14). Then the assignment*

$$L(z)_W:=Y_W(T^0(0)\mathbf{1},z^2)$$

defines a structure of $\mathcal{A}_{h,\ p}(\mathfrak{gl}_2)$-module over W.

7. Central elements in $\mathcal{V}^{crit}(R^{trig})$ and commutative families in $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$

在本节中，我们仅考虑三角情形。记 $\mathcal{V}^{crit}(R)\ =\mathcal{V}^{crit}(R^{trig})$ 为定理 h-进量子顶点代数 $\mathcal{V}^c(R)$，它与临界层处的三角4.2 相关联 R-矩阵（2.8） $c=-N$.

7.1. **伴随函数对的融合过程与不动点** $(\sigma,\ \rho)$。 在本小节中，按照 [26,第 2, 3], 节中的论述，我们回顾融合过程对 Hecke 代数 [8, 22, 37], 的一些推论，这些推论用 R-矩阵表示

$$\check{R}(z)=\frac{e^{h/2}-e^{-h/2}z}{1-z}\overline{R}(z)\qquad\text{and}\qquad\check{R}(e^u)=\frac{e^{h/2}-e^{u-h/2}}{1-e^u}\overline{R}(e^u),$$

其中 $R(\overline{z})$由（2.2）定义，而 $R(e^u)=\overline{(R(x))\,\big|_{x=e^u}}$. 最后，我们利用它们构造命题5.2给出的相容对（$\sigma,\ \rho$）的不动点族。

设 Λ 是形状为 $\lambda\vdash n$ 的标准杨表，并用 $c_k(\Lambda)$表示 λ 中由 k 占据的格（$i,\ j$）的内容 $j-i$。考虑所有对（$i,\ j$）构成的集合上的如下序关系，其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$,

$$(i,j)\prec(i',j')\qquad\text{if}\qquad j<j'\quad\text{or}\quad j=j'\text{ and }i<i'.\tag{7.1}$$

Let

$$\check{R}_\Lambda(z_1,\dots,z_n)=\prod_{(i,j)}^{\longrightarrow}\left(P_{j-ij-i+1}\check{R}_{j-ij-i+1}(z_ie^{(c_i(\Lambda)-c_j(\Lambda))h}/z_j)\right),$$

其中箭头表示所有满足 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的对（$i,\ j$）上的乘积按照（7.1）排序，而 P_{rs} 是置换算子$P=\sum_{i,\ j=1}^{N}e_{ij}\otimes e_{ji}$在（End $\mathbb{C}^N$）$^{\otimes n}$. 的第 r和第 s个张量因子上的作用。设 λ'是 λ的共轭分拆，$c_{\lambda'}$ 是与 λ' 伴随的舒尔元，$\check{}\,R_0$ 是（$\mathbb{C}^N$）$^{\otimes n}$上的某个可逆算子；详情见 [26] 。通过融合过程，

$$\mathcal{E}_\Lambda=\frac{1}{c_{\lambda'}}\check{R}_\Lambda(z_1,\dots,z_n)\check{R}_0^{-1}\Big|_{z_1=1}\Big|_{z_2=1}\dots\Big|_{z_n=1},$$

是一个定义良好的算子，满足 $\mathcal{E}_\Lambda^2=\mathcal{E}_\Lambda$. 显然，上述恒等式可以用 R-矩阵 $\check{}R(e^u)$ 表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\Lambda&=\frac{1}{c_{\lambda'}}\check{R}_\Lambda(e^{u_1},\dots,e^{u_n})\check{R}_0^{-1}\Big|_{u_1=0}\Big|_{u_2=0}\dots\Big|_{u_n=0},\qquad\text{where}\\ \check{R}_\Lambda(e^{u_1},\dots,e^{u_n})&=\check{R}_\Lambda(z_1,\dots,z_n)\Big|_{z_1=e^{u_1}}\Big|_{z_2=e^{u_2}}\dots\Big|_{z_n=e^{u_n}}.\end{aligned}\tag{7.2}$$

利用这一观察，可以很容易地推导出幂等元$\mathcal{E}_\Lambda$ 的以下性质（见 [26, 引理 3.2、3.3]）。

引理 7.1。 *Consider the n-tuples of variables*

$$\begin{aligned}u^{(\Lambda)}&=(u-c_1(\Lambda)h,\dots,u-c_n(\Lambda)h),\\ u^{(\Lambda)}-Nh/2&=(u-c_1(\Lambda)h-Nh/2,\dots,u-c_n(\Lambda)h-Nh/2),\\ z^{(\Lambda)}&=(ze^{-c_1(\Lambda)h},\dots,ze^{-c_n(\Lambda)h}).\end{aligned}$$

(a) The following relations hold for operators on $\mathcal{V}^{crit}(R)$:

$$T^+_{[n]}(u^{(\Lambda)})\mathcal{E}_\Lambda=\mathcal{E}_\Lambda T^+_{[n]}(u^{(\Lambda)})\mathcal{E}_\Lambda,\tag{7.3}$$

(b) The following relations hold for the R-matrices （2.3） and （2.8）:

$$R^{12}_{1n}(ze^{-u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda=\mathcal{E}_\Lambda R^{12}_{1n}(ze^{-u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda\quad\text{for all } d\in\mathbb{C},\tag{7.4}$$

$$R^{12}_{1n}(e^{v-u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda=\mathcal{E}_\Lambda R^{12}_{1n}(e^{v-u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda\quad\text{for all } d\in\mathbb{C},\tag{7.5}$$

*where $\mathcal{E}_\Lambda$ is applied on the tensor factors 2, ..., $n+1$ of*端 $\mathbb{C}^N\otimes$（端 $\mathbb{C}^N$）$^{\otimes n}$.

(c) The following relation holds for the R-matrix （2.3）:

$$R^{12}_{n1}(ze^{u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda=\mathcal{E}_\Lambda R^{12}_{n1}(ze^{u^{(\Lambda)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_\Lambda\quad\text{for all } d\in\mathbb{C},\tag{7.6}$$

where $\mathcal{E}_\Lambda$ *is applied on the tensor factors* $1,\dots,n$ *of*(端 $\mathbb{C}^N$)$^{\otimes n}\otimes$端 $\mathbb{C}^N$.

设 Γ 是形状为 $\gamma\vdash m$ 的标准杨表，并设 $\mathcal{E}_{\Lambda,\,\Gamma}=\mathcal{E}_\Lambda\otimes\mathcal{E}_\Gamma$. 结合 (7.4) 和 (7.6)，得到以下引理。

引理 7.2。 *The following relation holds for the* R*-matrix* (2.3)*:*

$$R^{12}_{nm}(ze^{u^{(\Lambda)}-v^{(\Gamma)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}=\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R^{12}_{nm}(ze^{u^{(\Lambda)}-v^{(\Gamma)}+dh})^{\pm1}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\quad \text{for all } d\in\mathbb{C}.$$

受类型 A [26, 的 q-杨ian 中交换族构造的启发，推论 3.4], ，我们引入形式幂级数

$$T_\Lambda(u)=\mathrm{tr}_{1,\dots,n}\,T^+_{[n]}(u^{(\Lambda)})\mathbf{1}\,D^{\otimes n}\mathcal{E}_\Lambda\in\mathcal{V}^{crit}(R)[[u]]. \tag{7.7}$$

此外，记作 $T_{\Lambda,\,\Gamma}(u,\ v)=T_\Lambda(u)\otimes T_\Gamma(v)\in\mathcal{V}^{crit}(R)^{\otimes2}[[u,v]]$. 下一个命题是 [4, 引理 4.9] 的三角对应物。

命题 7.3。 *The maps* σ *and* ρ*, as given by Proposition* 5.2*, satisfy*

$$\sigma(z)\left(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v)\right)=\rho(z)\left(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v)\right)=T_{\Lambda,\Gamma}(u,v).$$

证明。我们来证明

$$\sigma(z)\left(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v)\right)=T_{\Lambda,\Gamma}(u,v).$$

根据（5.4），我们有

$$\sigma(z)\left(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v)\right)=\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}R_{nm}(z,u,v)T_{nm}(u,v)R_{nm}(z,u,v)^{-1}D^{\otimes(n+m)}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}, \tag{7.8}$$

其中

$$\begin{aligned}R_{nm}(z,u,v)^{\pm1}&=R^{12}_{nm}(ze^{u^{(\Lambda)}-v^{(\Gamma)}})^{\pm1},\\ T_{nm}(u,v)&=T^+_{1\,n+m+1}(u-c_1(\Lambda)h)\dots T^+_{n\,n+m+1}(u-c_n(\Lambda)h)\\&\quad\times T^+_{n+1\,n+m+2}(v-c_1(\Gamma)h)\dots T^+_{n+m\,n+m+2}(v-c_m(\Gamma)h).\end{aligned} \tag{7.9}$$

我们现在将（7.8）的右侧改写如下。首先，我们使用 $R_{12}(z)\,D_1D_2=D_1D_2R_{12}(z)$，将项 $D^{\otimes(n+m)}$ 移到左侧，从而得到

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}R_{nm}(z,u,v)T_{nm}(u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,R_{nm}(z,u,v)^{-1}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}.$$

根据引理 7.2，这等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}R_{nm}(z,u,v)T_{nm}(u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R_{nm}(z,u,v)^{-1}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}.$$

由于 迹的循环性质，我们可以将 $\mathcal{E}_{\Lambda,\,\Gamma}$ 移到左侧，从而得到

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R_{nm}(z,u,v)T_{nm}(u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R_{nm}(z,u,v)^{-1}.$$

这等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R_{nm}(z,u,v)T_{nm}(u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}\,R_{nm}(z,u,v)^{-1},$$

因为$\mathcal{E}_{\Lambda,\,\Gamma}$ 并且 $D^{\otimes(n+m)}$ 彼此对易。接下来，我们应用（7.3）：

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}R_{nm}(z,u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}T_{nm}(u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}\,R_{nm}(z,u,v)^{-1}.$$

再次使用引理 7.2 ，我们得到

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}R_{nm}(z,u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}T_{nm}(u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}\,R_{nm}(z,u,v)^{-1}.$$

利用迹的循环性质，我们将项 $R_{nm}(z,\ u,\ v)$ 移到右侧，然后消去相应的 R-矩阵，从而得到

$$\begin{aligned}&=\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}T_{nm}(u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}\,R_{nm}(z,u,v)^{-1}R_{nm}(z,u,v)\\&=\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m}\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}T_{nm}(u,v)\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}.\end{aligned}$$

显然，这等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T_{nm}(u,v)\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}.$$

最后，利用 $\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}$ 与 $D^{\otimes(n+m)}$ 交换这一事实，再利用恒等式 $(\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma})^2 = \mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}$，，上式变为

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T_{nm}(u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma} = T_{\Lambda,\Gamma}(u,v),$$

即得所需结果。

下面验证该命题的第二个断言，

$$\rho(z)\,(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v)) = T_{\Lambda,\Gamma}(u,v). \tag{7.10}$$

由（5.5），表达式 $\rho(z)\,(T_{\Lambda,\Gamma}(u,v))$ 等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T^{13}_{\Lambda}(u)\,R_{nm}(ze^{-Nh},u,v)^{-1}\,T^{24}_{\Gamma}(v)\,R_{nm}(z,u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}, \tag{7.11}$$

其中我们使用记号（7.9），以及

$$\begin{aligned} T^{13}_{\Lambda}(u) &= T^{+}_{1\,n+m+1}(u-c_1(\Lambda)h)\dots T^{+}_{n\,n+m+1}(u-c_n(\Lambda)h),\\ T^{24}_{\Gamma}(v) &= T^{+}_{n+1\,n+m+2}(v-c_1(\Gamma)h)\dots T^{+}_{n+m\,n+m+2}(v-c_m(\Gamma)h). \end{aligned}$$

为证明（7.10），只需证明（7.11）等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T^{13}_{\Lambda}(u)\,\mathcal{E}_{\Lambda}\,R_{nm}(ze^{-Nh},u,v)^{-1}\,\mathcal{E}_{\Gamma}\,T^{24}_{\Gamma}(v)\,R_{nm}(z,u,v)\,D^{\otimes(n+m)}, \tag{7.12}$$

其中 $\mathcal{E}_{\Lambda}$（分别 $\mathcal{E}_{\Gamma}$）作用于张量因子 $1,\dots,n$（分别 $n+1,\dots,n+m$）。事实上，（7.12）与下式重合：

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T^{13}_{\Lambda}(u)\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,T^{24}_{\Gamma}(v)\,\Big(R_{nm}(ze^{-Nh},u,v)^{-1}\underset{\mathrm{LR}}{\cdot}\big(R_{nm}(z,u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\big)\Big), \tag{7.13}$$

其中符号“$\underset{\mathrm{LR}}{\cdot}$”表示代数 $(\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N)^{\otimes n}\otimes((\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N)^{op})^{\otimes m}$ 中的标准乘法，而 $(\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N)^{op}$ 表示 $\mathrm{End}\ \mathbb{C}^N$. 的反代数。由交叉对称性（2.5），可得

$$R_{nm}(ze^{-Nh},u,v)^{-1}\underset{\mathrm{LR}}{\cdot}\big(R_{nm}(z,u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\big) = D^{\otimes(n+m)},$$

因此（7.13）等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T^{13}_{\Lambda}(u)\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma}\,T^{24}_{\Gamma}(v)\,D^{\otimes(n+m)} = \mathrm{tr}_{1,\dots,n+m} T_{nm}(u,v)\,D^{\otimes(n+m)}\,\mathcal{E}_{\Lambda,\Gamma} = T_{\Lambda,\Gamma}(u,v),$$

如所要求的。因此，为完成证明，还需验证表达式（7.11）与（7.12）重合。这可由与定理第一项断言的证明平行的论证得到，并依赖于引理 7.1 和 7.2。 □

Pro位置7.3，连同（5.7）和（5.8），意味着映射（4.7）满足

$$\widehat{\mathcal{S}}(z)\,(T_{\Gamma,\Lambda}(u,v)) = T_{\Gamma,\Lambda}(u,v),$$

因此，对于4.6中 $\mathcal{V}^{crit}(R$的编织，我们也有

$$\mathcal{S}(z)\,(T_{\Gamma,\Lambda}(u,v)) = T_{\Gamma,\Lambda}(u,v).$$

因此，所有级数 $T_{\Lambda}(u)$ 的系数对应的顶点算子在 h-进意义下互相局部。在下一小节中，我们将进一步强化这一结果。

7.2. **-进量子顶点代数中的中心元** $\mathcal{V}^{crit}(R^{trig})$。 在本小节中，我们考虑 h-进量子顶点代数 $\mathcal{V}^{crit}(R)$的中心，

$$\mathfrak{z}(\mathcal{V}^{crit}(R)) = \left\{v \in \mathcal{V}^{crit}(R) \,:\, Y(u,z)v \in \mathcal{V}^{crit}(R)[[z]] \text{ for all } u \in \mathcal{V}^{crit}(R)\right\}.$$

有关中心概念的更多信息，请参见 [10, 第 4] 和 [25, 第3节。2]下一个命题推广了 [31, 命题3。5],其中，在 Λ 由单列组成，即 $\mathcal{E}_\Lambda$ 是归一化反对称化算子的作用。

命题7.4。 *All coefficients of the series* T_Λ（u） *belong to the center of* $\mathcal{V}^{crit}$（R）。

证明。为了证明元素 $w \in \mathcal{V}^{crit}$（R）属于中心 $\mathfrak{z}$（$\mathcal{V}^{crit}$（R））， 只需验证它满足 T^-（u）$w = w$. 事实上，这立即由（4.5）给出的 $\mathcal{V}^{crit}$（R）的顶点算子映射表达式得到。因此，为证明该命题，只需验证恒等式

$$T^-(u)T_\Lambda(v) = T_\Lambda(v).$$

利用（4.3）和（7.7）中给出的 T^-（u）和 T_Λ（v）的定义，我们得到

$$\begin{aligned} T^-(u)T_\Lambda(v) &= \mathrm{tr}_{1,\dots,n}\, T_0^-(u)T_{[n]}^+(v^{(\Lambda)})\mathbf{1}\, D^{\otimes n}\mathcal{E}_\Lambda \\ &= \mathrm{tr}_{1,\dots,n}\, R_{1n}^{01}(e^{u-v(\Lambda)-Nh/2})^{-1}T_{[n]}^+(v^{(\Lambda)})\mathbf{1}\, R_{1n}^{01}(e^{u-v(\Lambda)+Nh/2})\, D^{\otimes n}\mathcal{E}_\Lambda. \end{aligned} \tag{7.14}$$

接下来，按照命题 7.3第一条断言的证明中的论证，可以证明 (7.14) 等于

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n}\, R_{1n}^{01}(e^{u-v(\Lambda)-Nh/2})^{-1}T_{[n]}^+(v^{(\Lambda)})\mathbf{1}\, D^{\otimes n}\mathcal{E}_\Lambda\, R_{1n}^{01}(e^{u-v(\Lambda)+Nh/2}). \tag{7.15}$$

显然，此处的论证不再使用引理 7.2，而是用到恒等式 (7.6)，因为我们使用的是（加法型） R-矩阵 (2.8)。最后，要得出 (7.15) 与.....一致

$$\mathrm{tr}_{1,\dots,n}\, T_{[n]}^+(v^{(\Lambda)})\mathbf{1}\, D^{\otimes n}\mathcal{E}_\Lambda = T_\Lambda(v),$$

也就是说，要消去 (R7.15) 中的矩阵项，就像命题 2.9）一样，使用交叉对称性 () 的方式与命题 7.3第二条断言的证明相同。 □

7.3. **杨ian h-杨ian 中的交换族** $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$。 本小节展示定理 6.3 和命题 7.3 在构造 h-杨ian 中交换族方面的应用。粗略地说，这些交换族是由命题 7.4 所确立的 $R()$ 的中心元族经某些 σ, ρ）变形的 ϕ-协调模映射所得的像。

令 $I^{(p)}$ with $p \geqslant 1$ 为代数 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$ 中由所有 $\ell_{ij}^{(r)}$ with $r > p$. 生成的 h-进完备理想。商 $W(p) := \mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)/I^{(p)}$ 自然具有受限 $\mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)$-模的结构。因此，由定理 6.3，存在一个 (σ,ρ)-变形的 ϕ-协调 $\mathcal{V}^{crit}(R^{trig})$-模 $W(p)$ 上的结构 $(W(p)\, Y_{W(p)})$，该结构由 (6.5) 唯一确定。特别地，我们有

$$Y_{W(p)}(T_\Lambda(0),z) = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, L_{[m]}^-(z^{(\Lambda)})\, D^{\otimes m}\mathcal{E}_\Lambda \quad \text{for all } p \geqslant 1.$$

Set

$$L_\Lambda(z)_{W(p)} = Y_{W(p)}(T_\Lambda(0),z). \tag{7.16}$$

根据 σ-局部性（6.3）和命题 7.3，我们有

$$L_\Lambda(z_1)_{W(p)}\, L_\Gamma(z_2)_{W(p)} = L_\Gamma(z_2)_{W(p)}\, L_\Lambda(z_1)_{W(p)} \quad \text{for all } p \geqslant 1. \tag{7.17}$$

事实上，(z_1-z_2) 的幂由 σ-局部性产生，彼此抵消，因为（7.16）中的表达式是关于 z^{-1}. 的多项式。因此，由于交集 $\cap_{p\geqslant 1} I^{(p)}$ 是平凡的，我们由（7.17）得出恒等式

$$L_\Lambda(z_1)L_\Gamma(z_2) = L_\Gamma(z_2)L_\Lambda(z_1)$$

对

$$L_\Lambda(z) = \mathrm{tr}_{1,\dots,m}\, L^-_{[m]}(z^{(\Lambda)})\, D^{\otimes m}\, \mathcal{E}_\Lambda \in \mathrm{Y}_h(\mathfrak{gl}_N)[[z^{-1}]].$$

因此，我们 证明了下一个命题，它是杨ian的对应于 [26,推论 3.4]的版本 .

命题 7.5。 *The coefficients of all series $L_\Lambda(z)$ pairwise commute.*

Acknowledgement

L. B. 是代数、几何及其应用国家研究组 (GNSAGA) 和意大利国家高等数学研究所 (INdAM) 的成员。本文所报告的研究是在第三位作者访问武汉华中师范大学数学与统计学院期间完成的。他感谢该学院的热情接待。S. K. 获克罗地亚科学基金会项目 IP-2025-02-4720 部分资助，并获项目“作为量子与复杂系统以及李代数表示卓越科学中心的一部分实施前沿研究及其应用”资助，项目编号 PK.1.1.10.0004。该项目由欧盟通过欧洲区域发展基金——2021–2027年竞争力与凝聚力计划共同资助。

References

[1] I. I. Anguelova, M. J. Bergvelt, H_D-量子顶点代数与双特征, Commun. Contemp. Math. 11 (2009) 937–991; arXiv:0706.1528 [math.QA].[2] D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, E. Ragoucy, M. Rossi, 双杨ian代数与椭圆代数的分类, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000), 6279–6309; arXiv:math/9906189 [math.QA].[3] L. Bagnoli, M. Butorac, S. Kožić, 关于两族FRT型量子顶点代数, Comm. Math. Phys. 406, 219 (2025) (37pp); arXiv:2501.17625 [math.QA].[4]L. Bagnoli, S. Kožić, 与编织相关的变形量子顶点代数模, arXiv:2405.04137 [math.QA].[5] L. Bagnoli, S. Kožić, 为量子仿射顶点代数伴随函数变形的 ϕ-协调模与正交扭曲 h-杨ian代数, Math. Res. Lett. 32 (2025), 1301–1330; arXiv:2407.00515[math.QA].[6] R. J. Baxter, 统计力学中的精确可解模型, Acad. Press, London, 1982.[7] A. A. Belavin, 可积量子系统的动力学对称性, Nuclear Phys. B 180 (1981) 189–200.[8] I. V. Cherednik, 盖尔范德–采特林基的一种新解释, Duke Math. J. 54 (1987), 563–577.[9] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, 与θ函数相对应的完全X-对称S矩阵, Phys. Lett. A 81 (1981) 105–110.[10] A. De Sole, M. Gardini, V. G. Kac, 关于量子顶点代数的结构, J. Math. Phys. 61 (2020), 011701 (29pp); arXiv:1906.05051 [math.QA].[11] P. Etingof, D. Kazhdan, 李双代数的量子化，III, Selecta Math. (N.S.) 4 (1998), 233–269; arXiv:q-alg/9610030.[12] P. Etingof, D. Kazhdan, 李双代数的量子化，IV, Selecta Math. (N.S.) 6 (2000), 79–104; arXiv:math/9801043 [math.QA].[13] P. Etingof, D. Kazhdan, 李双代数的量子化，V, Selecta Math. (N.S.) 6 (2000), 105–130; arXiv:math/9808121 [math.QA].[14] B. Feiginand E. Frenkel, 临界层上的仿射卡茨–穆迪代数与盖尔范德–迪基代数, Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1A (1992), 197–215.⌢[15] O. Foda, K. Iohara, M. Jimbo, R. Kedem, T. Miwa, H. Yan, 一个用于 sl_2的椭圆量子代数, Lett. Math. Phys. 32 (1994), 259–268; arXiv:hep-th/9403094.

[16] O. Foda, K. Iohara, M. Jimbo, R. Kedem, T. Miwa, H. Yan, 椭圆量子代数$\widehat{\ }$的最高权模$\mathcal{A}_q$的札记$_p$($\mathfrak{sl}_2$), Prog.Theor. Phys.Suppl. 118(1995), 1–34; arXiv:hep-th/9405058.↽[17] L. Frappat, D. Issing, E. Ragoucy, 椭圆代数$\mathcal{A}_q$的量子行列式$_p$($\mathfrak{gl}_N$), J. Phys. A: Math. Theor. 51 (2018), 445201; arXiv:1803.00311 [math.QA].[18] I. B. Frenkel, N. Yu. Reshetikhin, 量子仿射代数与全纯差分方程, Comm. Math. Phys. 146 (1992), 1–60.[19] M. Gardini, 量子顶点代数, 博士论文, 罗马萨皮恩扎大学, 2018.[20] D. Gurevich, P. Saponov, 编织杨ian代数, J. Geom. Phys. 138 (2019), 124–143; arXiv:1612.05929[math.QA].[21] K. Iohara, 杨ian双代数 $DY_\hbar(\mathfrak{g})$的玻色子表示及 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N, \mathfrak{sl}_N$, J. Phys. A 29 (1996), 4593–4621; arXiv:q-alg/9603033.[22] A. P. Isaev, A. I. Molev, A. F. Os'kin, 关于Hecke代数的幂等元, Lett. Math. Phys. 85 (2008), 79–90; arXiv:0804.4214 [math.QA].[23] M. Jimbo, U(G)的一个 q-差分类比与杨–巴克斯特方程, Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63–69.[24] N. Jing, F. Kong, H. Li, S. Tan, 扭曲量子仿射代数与量子顶点代数的等变 φ-协调模, arXiv:2212.01895 [math.QA].[25] N. Jing, S. Kožić, A. Molev, F. Yang, 类型 A量子仿射顶点代数的中心, J. Algebra 496 (2018), 138–186; arXiv:1603.00237 [math.QA].[26] N. Jing, M. Liu, A. Molev, 类型 A的量子Sugawara算子, Adv. Math. 454 (2024), 109907; arXiv:2212.11435 [math.QA].[27] V. G. Kac, 无限维李代数, 第3版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990.[28] V. Kac, 初学者的顶点代数, 大学讲义丛书, 第10卷。美国数学学会, 普罗维登斯, RI, 1997.[29] F. Kong, 与非扭曲量子仿射化代数相关的量子仿射顶点代数, Comm. Math. Phys. 402 (2023), 2577–2625; arXiv:2212.04888 [math.QA].[30] S. Kožić, 关于与三角 R-矩阵相关的量子仿射顶点代数, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021) 45 (49 pp); arXiv:1908.06517v2 [math.QA].[31] S. Kožić, A. Molev, 关于与三角 R-矩阵相关的量子仿射顶点代数的中心, J. Phys. A: Math. Theor. 50 (2017) 325201 (21pp); arXiv:1611.06700 [math.QA].[32] J. Lepowsky, H.-S. Li, 《顶点算子代数及其表示导论》, 数学进展, 第227卷, Birkhauser, 波士顿, 2004.[33] H.-S. Li, $\hbar$-进量子顶点代数及其模, Comm. Math. Phys. 296 (2010), 475– 523; arXiv:0812.3156 [math.QA].[34] H.-S. Li, 量子顶点代数的 ϕ-协调拟模, Comm. Math. Phys. 308 (2011), 703–741; arXiv:0906.2710 [math.QA].[35] H.-S. Li, S. Tan, Q. Wang, 量子顶点代数的扭曲模, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), 201–220; arXiv:0812.3365 [math.QA].[36] H.-S. Li, S. Tan, B. Wang, 非局部顶点代数的扭曲 ϕ-协调模, J. Algebra 533 (2019), 283–321.[37] M. Nazarov, 仿射Hecke代数的混合钩长公式, European J. Combin. 25 (2004), 1345–1376; arXiv:math/0307091 [math.RT].[38] J. H. H. Perk, C. L. Schultz, q态顶点模型中的新型对易传递矩阵族, Phys. Lett. A 84 (1981), 407–410.[39] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, 量子流群的中心扩张, Lett. Math. Phys., 19 (1990), 133–142.[40] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, 李群与李代数的量子化, Leningrad Math. J. 1 (1990), no. 1, 193–225.[41] M. P. Richey, C. A. Tracy, $\mathbb{Z}_n$ Baxter模型：对称性与Belavin参数化, J. Stat. Phys. 42 (1986), 311–248.[42] C. A. Tracy, 嵌入椭圆曲线与杨–巴克斯特方程, Phys. D 16 (1985), 203–220.