无名稿件编号（将由编辑插入）

具有线性不等式约束的多项式优化问题的完全正重构

Haibin Chen · Hong Yan · Guanglu Zhou

arXiv:2601.00375v1 [math.OC] 1 Jan 2026

收稿日期：date / 接受日期：date

摘要 多项式优化涵盖了一大类问题，其中目标函数和约束均为决策变量的多项式函数。近年来，大量研究致力于将多项式优化问题（多项式优化问题）重构为完全正张量锥（完全正张量）上的锥规划。本文针对一类具有线性不等式约束的多项式优化问题，提出了若干新的完全正重构方法。我们首先将这些问题提升到一个新的凸优化框架中，在该框架下，变量表示为对称秩一张量的组合。基于这一提升形式，我们给出了具有线性不等式约束且可重构为完全正张量锥上的锥规划的多项式优化问题的一般刻画。此外，我们构造了所得完全正规划的对偶形式。在温和的假设下，我们证明这些对偶问题严格可行，且强对偶性成立。

关键词 多项式优化 - 对称张量 - 完全正张量 - 余正优化。

数学主题分类（2010）65H17 - 15A18 - 90C3

作者按字母顺序排列。H. Chen 曲阜师范大学管理科学学院，中国山东日照，邮编 276800。电子邮件：chenhaibin508@163.com H. Yan 智能多维数据分析中心，香港科学园，香港沙田。香港城市大学电机工程学系，中国香港。电子邮件：h.yan@cityu.edu.hk G. Zhou 科廷优化与决策科学中心，科廷大学电气工程、计算机与数学科学学院（EECMS），澳大利亚西澳大利亚州珀斯 6845。电子邮件：g.zhou@curtin.edu.au

1 引言

多项式优化问题（POP）是一种优化模型，其目标函数和约束条件均为多项式函数。过去几十年来，该问题一直受到广泛关注。这部分是由于其自身强大的理论吸引力，以及数值线性代数 [4,12,28], 材料科学 [6,34], 量子物理 [9,38],和信号处理 [29,31]等应用领域日益增长的需求。一般而言，求解多项式优化问题是一项具有挑战性的任务，因为它是NP难问题。例如，即使是最简单的多项式优化实例——如在球面上最大化一个三次多项式——也是NP难的 [22,33]。对于对具有简单约束的多项式优化感兴趣的读者，请参阅 [10] 该综述，了解在单纯形、超立方体或球面上优化各类多项式函数的计算复杂性。

在数学领域，多项式优化问题主要有两个研究方向。第一个方向旨在通过针对给定多项式优化问题直接设计的算法，求得该问题的近似解。第二个方向则着眼于通过原问题的松弛问题，求得原多项式优化问题的近似最优解，或其最优值的下界（或上界）。从算法的角度来看，研究者致力于开发有效的近似算法，以求得近似最优解，其中包括半定规划（SDP）方法 [11,16,17,18,19,20,25], 交替方向乘子法 [13],块坐标下降法 [5,30,35] 以及上述算法的一些变体 [8,39,23,32]。另一方面，一条成熟的研究路线是将多项式优化问题重构（或松弛）为完全正张量规划（CPTP），或其对偶问题，即共正张量规划（CTP）。CPTP 和 CTP 是分别定义在完全正张量锥及其对偶锥（即共正张量锥）上的线性规划。该研究路线的早期重要成果见 [27], , 关于这两类锥的更多细节见 [6,7,40]。

2015年，Pe˜na *et al.* in [27] 给出了可表述为完全正张量锥上锥规划的多项式优化问题类别的一般刻画。由此刻画可知，近期关于二次问题的相关结果可以进一步加强，并推广到高阶多项式优化问题。Zuluaga *etal.* in [15] 研究了特殊约束下的一般多项式优化问题的 CPTP 松弛和完全正半定张量松弛。通过这些松弛，他们获得了比对多项式优化问题进行拉格朗日松弛所得界更紧的界。随后，Xia *et al.* in [37] 提出了若干针对多项式优化问题的新型凸重构结果，这些结果显式考虑了线性约束集，可视为对 [27], 中定理5的细化，以及对 [1]中定理4的推广。此外，CPTP 方法还可应用于实际问题。Chen *et al.* [5] 的一项重要工作展示了这一方法：均匀超图的团数计算可以重构为一个 CPTP。

本文考虑多项式优化问题的等价 CPTP 重构。其中，我们不再假设多项式约束在 $\mathbb{R}^n_+$ [27] 上非负，而只要求其在满足线性不等式约束的可行集上非负。通过这种重构方法，我们希望建立多项式优化与锥

规划之间更深层次的联系。借助锥规划中的工具，尤其是经过广泛研究的完全正张量锥和共正张量锥，这一联系为一般多项式优化问题开发新的求解方案提供了可能。本文的结果与 [27] 的主要区别在于对不等式约束的处理：虽然 [27]引入松弛变量来处理不等式，但我们的方法直接处理等式约束和不等式约束，无需进行此类变换。为此，我们首先提出一个通用的提升框架，将多项式优化问题映射为一个含有张量变量的凸规划。通过分析相应可行集的衰退锥，我们证明，所有可行的多项式优化问题都可以等价重构为凸问题，其变量是对称秩一张量的组合。在此框架基础上，我们给出一类可重构为 CPTP 的线性不等式约束多项式优化问题的一般刻画。我们还构造了所得 CPTP 的对偶形式，其表现为共正张量规划。我们证明，这些对偶问题严格可行，并且在温和条件下强对偶性成立。因此，针对原问题和对偶问题开发的现有数值方法均可有效用于求解这些重构模型。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾与张量和多项式相关的一些基本定义。第 3节介绍一般 POP 的提升模型，并证明其与原始表述等价。第 4 节给出带线性不等式约束的 POP 的等价完全正重构，并证明由此得到的 CPTP 与其对偶问题之间满足强对偶性。第 5 节给出最后的评述和结论。

2 预备知识

本节首先回顾必要的记号和相关预备知识。随后，我们将详细比较本文的结果与 [27,37]中已有的重构方法。

2.1 基本记号

对于正整数 n，记作 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$。来自 $\mathbb{R}$ 的实标量用非粗体小写字母表示，例如 λ、 a ；向量用粗体小写字母表示，例如 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$。记 $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n_+)$ 为包含所有 n 维向量（非负向量）的集合，并令 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 为包含所有 $m\times n$ 矩阵的集合。此外，矩阵用大写字母表示，例如 A、B。张量用大写字母表示，例如 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$。一个 d 阶、 n 维的张量 $\mathcal{A}$ 可定义为 $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_d})$，其中 i_1、 $\cdots$、 $i_d \in [n]$ 和 $a_{i_1 i_2 \cdots i_d}$ 是 $\mathcal{A}$ 的（i_1、$\cdots$、i_d）-阶元素。若对于 $[d]$ 的任意置换 σ ，均有 $a_{i_1 i_2 \cdots i_d} = a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \cdots i_{\sigma(d)}}$，则称张量 $\mathcal{A}$ 为对称张量。我们将 S^{d}、^{n} 记为所有 d 阶、 n 维对称张量的集合。

设 $\mathcal{A}=(a_{i_1i_2\cdots i_d})$、$\mathcal{B}=(b_{i_1i_2\cdots i_d})\in S^{d,\ n}$ 为两个对称张量。$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的内积定义为

$$\langle \mathcal{A},\ \mathcal{B}\rangle = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_d\in[n]} a_{i_1i_2\cdots i_d}b_{i_1i_2\cdots i_d}.$$

设 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_d\in\mathbb{R}^{p\times n}$。张量 $\mathcal{A}$ 与矩阵的模乘积记为 $\mathcal{A}\times_1 D_1\times_2 D_2\cdots\times_d D_d$，其元素满足

$$(\mathcal{A}\times_1 D_1\times_2 D_2\cdots\times_d D_d)_{i_1i_2\cdots i_d} = \sum_{j_1,j_2,\cdots j_d\in[n]} a_{j_1j_2\cdots j_d}(D_1)_{i_1j_1}\cdots(D_d)_{i_dj_d},$$

对所有 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_d\in[p]$均成立。注意，$\mathcal{A}\times_1 D_1\times_2 D_2\cdots\times_d D_d$可能不是对称的。此外，对于 $\mathcal{X}\in\mathbb{S}^{d,\ p}$，有

$$\langle \mathcal{X},\ \mathcal{A}\times_1 D_1\times_2 D_2\cdots\times_d D_d\rangle = \langle \mathcal{X}\times_1 D_1^\top\times_2 D_2^\top\cdots\times_d D_d^\top,\ \mathcal{A}\rangle.$$

令 $\mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$ 表示次数不超过 d的实系数多项式集合。众所周知，任意给定的高阶齐次多项式都唯一对应一个对称张量。接下来，我们引入如下定义，它将向量映射为对称秩一张量。

定义 1 [27] 对于任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，定义映射 $M_d:\mathbb{R}^n\to S^{d,\ n}$，使得

$$M_d(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{x}\circ\mathbf{x}\circ\cdots\circ\mathbf{x}}_{d},$$

其中“$\circ$”表示外积，$\mathbf{x}\circ\mathbf{x}\circ\cdots\circ\mathbf{x}$ 表示一个对称秩一d张量。

对于齐次多项式 $f(\mathbf{x})\in\mathbb{R}_d[\mathbf{x}],\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，其对应的张量记为 $\mathcal{A}_f=(a_{i_1i_2\cdots i_d})\in S^{d,\ n}$，则有如下表示:

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_f\mathbf{x}^d = \langle \mathcal{A}_f, M_d(\mathbf{x})\rangle = \sum_{i_1,\cdots,i_d\in[n]} a_{i_1i_2\cdots i_d}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d}.$$

在第3节中，我们建立了从多项式系统到对称张量集合的映射，并证明非齐次多项式与对称张量之间存在一一对应关系。

对于任意子集 $F\subseteq\mathbb{R}^n$，F 的衰退锥定义如下:

$$REC_F = \{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n \mid \forall\ \mathbf{x}\in F,\ \forall\ \lambda\geq 0,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}\in F\}.$$

此外，以下凸集在后续内容中很有用:

$$C_F^h = \mathrm{conv}\{M_d(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in F\},\quad R_F^h = \mathrm{conv}\{M_d(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\in REC_F\}. \tag{1}$$

根据 REC_F 的概念，显然 R_F 是一个凸锥。文中已明确说明了 C_F^h 和 R_F^h 中张量的阶。一般而言，计算高次多项式约束的衰退锥颇具挑战性，不过在某些特殊情形下仍可行 [14]。以下示例展示了分别对应于由线性约束和二次约束定义的简单可行集的衰退锥。

Example 1 假设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个矩阵，且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。如果 $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x}+\mathbf{b} \geq \mathbf{0}\}$，那么 $REC_F = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$。此外，假设 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个对称矩阵。如果 $F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top B\mathbf{x} = 0\}$，那么 $REC_F = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^\top B\mathbf{y} = \mathbf{0},\ \mathbf{x}^\top B\mathbf{y} = 0,\ \ \forall\, \mathbf{x} \in F\}$。

作为本节的结尾，我们回顾共正张量和完全正张量的定义。对于 $\mathcal{A},\ \mathcal{X} \in S^{d,}$ ^{n}, $\mathcal{A}$ ，若 $\mathcal{A}\mathbf{x}^d \geq 0,$ 对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ 均成立，则称 ^{n}, $\mathcal{A}$ 为共正张量（或简称共正）；若 $\mathcal{X}$ 可分解为若干非负对称秩一张量之和，即 $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^k M_d(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^n_+$，则称其为完全正张量。共正张量锥和完全正张量锥分别记为 $\mathcal{C}_{n,\ d}$ 和 $\mathcal{C}^*_{n,\ d}$。众所周知，$\mathcal{C}_{n,}$ $_{d}$ 和 $\mathcal{C}^*_{n,\ d}$ 互为对偶。

2.2 多项式优化问题上的完全正张量重构

众所周知，在适当条件下，多项式优化问题可重构为 CPTP，即在完全正张量锥上求解的锥规划（线性规划）（参见例如 [27,37]）。接下来，我们总结若干定理，这些定理揭示了保证多项式优化问题与其相应的 CPTP 松弛等价的条件。

在开创性工作 [27], Pe˜na 等人中，他们考虑了以下多项式优化问题:

$$\inf\ q(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } h_i(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

对于给定的 n元多项式 $q,\ h_i \in \mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$。以下 CPTP 是（2）的松弛:

$$\begin{array}{ll} \inf & \langle C_d(q), \mathcal{Y}\rangle \\ \text{s.t} & \langle C_d(h_i), \mathcal{Y}\rangle = 0, i = 1, 2, \ldots, m, \\ & \langle C_d(1), \mathcal{Y}\rangle = 1, \\ & \mathcal{Y} \in \mathcal{C}^*_{n+1,d}, \end{array} \tag{3}$$

其中 $C_d(q)$ 是多项式 $q(\mathbf{x})$ 对应的系数张量。

注意，（3）是多项式优化问题（2）的一种自然凸提升，且如 [27] 所示，该松弛并不总是紧的。为了刻画松弛（3）成立的条件，还需要进一步验证。我们在定理1中总结了这些充分条件，这些条件最初由 [27]提出。接下来，˜令 $h(\mathbf{x})$表示 h 的最高阶齐次分量。对于非空集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，其地平锥定义为

$$S^\infty := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \exists\, \mathbf{x}^k \in S, \lambda^k \geq 0, \lambda^k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, \text{such that } \lambda^k \to 0, \lambda^k\mathbf{x}^k \to \mathbf{y}\}$$

定理 1 [27] *Let* $q\ h_i \in \mathbb{R}_d[\ ]$ *for* $i = 1$ *problems (2) and (3) are*, $\mathbf{x}$, ..., m. *Then, equivalent in any of the following two cases.*

˜(i) $h_i = d\ h_i \geq 0$ *for all* $\in S_{i-1}$ *and* $\{\ \in S^\infty_{i-1}\ \ h_i = 0\} \subseteq S^\infty_i$ *where* 度0,(x),x:(x),x:(x),,, $S_0 = \mathbb{R}^n_+$ *and* $S_i = \{\ \in S_{i-1}\ \ h_i = 0\}\ i = 1\ \ldots\ m.$

˜ *˜(ii)* $\deg(h_i) = d, h_i(\mathbf{x}) \geq 0$ *for all* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, *and* $q(\mathbf{x}) \geq 0$ *for all* $\mathbf{x}_\in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : h_i(\mathbf{x})\, 0\ i = 1\ \ldots\ m\}.$,,,

Xia 等人 [37] 随后改进了定理1中提出的充分条件（ii），并考虑了以下多项式优化问题：

$$\begin{aligned} \inf \quad & q(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & l_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, m_l \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \ldots, m_n \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $l_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i = 0$ 满足 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ 且 $b_i \in \mathbb{R}$。因此，CPTP 松弛表述如下：

$$\begin{aligned} \inf \quad & \langle C_d(q), \mathcal{Y} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle C_d(h_j), \mathcal{Y} \rangle = 0, j = 1, \ldots, m_n \\ & \langle C_d(l_i^d), \mathcal{Y} \rangle = 0, i = 1, \ldots, m_l \\ & \langle C_d(1), \mathcal{Y} \rangle = 1 \\ & \mathcal{Y} \in \mathcal{C}^*_{n+1,d}. \end{aligned} \tag{5}$$

为了证明 (4) 与 (5) 的等价性，Xia 等人 [37] 提出了以下充分条件。

定理 2 [37] *Let h_t $t = 1$ m_n denote polynomials on $\in \mathbb{R}^n$ of degree ($d > 1$ and $L = \{ \in \mathbb{R}^n_+ \quad ^\top_i - b_i = 0 \ i = 1 \ \ldots \ m_l\}$. If the following conditions are* $\mathbf{x})$, ……, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$: $\mathbf{ax}$, , , *satisfied, then (4) and (5) are equivalent:*

(i) $h_t(\mathbf{x}) \geq 0$ for all$\mathbf{x} \in L$, where $t = 1, \ldots\ldots, m_n$,(ii) $\tilde{q}$ ≥ 0 for all $\in \{ \in \mathbb{R}^n_+ \ \tilde{l}_i = 0 \ \tilde{h}_t$ $(\mathbf{x}) \, \mathbf{x} \, \mathbf{x} : (\mathbf{x}), (\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots\ldots, m_b \, t = 1, \ldots\ldots, m_n\}$.

本文的主要动机是建立 POPs 与 CPTPs 之间等价性的一种替代表征，而无需进行额外验证。与 [27,37], 中的现有方法相比，我们的方法仅需要原问题可行集的衰退锥。由此，通过对 POP 进行自然的提升凸形式（见第3节），揭示了原问题的解与等价 CPTP 的解之间的内在联系。

为了应用提升凸重构并给出一个显式的等价 CPTP，我们关注具有线性不等式约束的POPs。值得注意的是，对于更一般的 POPs，只要满足定理 1 和 2 中所述的充分条件，方程（3）和（5）中的 CPTPs 就等价于本文提出的 CPTP。一方面，如果不满足这些条件，（2）与（3），或（4）与（5）之间的等价性可能不成立。然而，本文引入的 CPTP 模型仍然与原问题等价（见例 [27]，或 [27,37],的第 4.3 节）。另一方面，探索涉及衰退锥等不同定义之间的数值权衡，是一个富有吸引力且意义重大的研究方向。这一问题也是 [27,37],作者共同面临的，继续对其加以研究仍将是未来理论发展的一个有意义方向。

我们希望澄清，本文的目的并不是降低定理 1 和 2中充分条件所涉及的计算复杂度。相反，我们的主要目标是在不引入额外充分条件的情况下，为具有特殊结构的多项式优化问题构造等价的完全正优化表述。这种方法有望推动未来数值算法开发方面的研究。

3 多项式优化问题的提升凸形式

本节将若干可能非凸的多项式优化问题提升为涉及张量变量的等价凸表述。随后，我们将这一提升框架应用于一类受线性不等式约束的多项式优化问题，该类问题可以被重新表述为等价的完全正优化问题（详见第 4 节）。

3.1 非齐次多项式优化问题的提升模型

本小节考察非齐次多项式优化问题的等价提升凸形式。为此，我们首先介绍一种有用的映射，用以刻画多项式与对称张量之间的关系。

定义2 令 $\mathbb{R}_d[\mathbf{x}] = \{p(\mathbf{x}) \mid \deg(p) \le d\}$ 表示维数为 n 且次数至多为 d的多项式集合。对于一般多项式 $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} f_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$, ，相应的张量 $\mathcal{A}_f \in S^{d,n+1}$ 定义如下:

$$(\mathcal{A}_f)_{\pi(i_1,i_2,\cdots,i_d)} = \frac{(d-|\alpha|)!\alpha_1!\cdots\alpha_n!}{d!} f_\alpha,$$

其中 $\pi(i_1, i_2, \cdots, i_d)$ 表示 $(i_1, i_2, \cdots, i_d)$ 的任意置换， α 是满足 $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d}$ 且 $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的唯一指数。

在定义 2中， $\mathcal{A}_f$ 是一个对称张量，其元素由 $f(\mathbf{x})$ 的系数定义。根据定义 1，为简便起见，我们采用 $M_d(\mathbf{1},\mathbf{x}) = M_d((\mathbf{1},\mathbf{x}^\top)^\top) \in S^{d,n+1}$。于是可得

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{A}_f, M_d(1,\mathbf{x})\rangle.$$

为帮助读者理解上面的方程细节，我们给出一个例子。

Example 2 假设 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_3[\mathbf{x}]$ 是一个满足以下条件的多项式函数

$$f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1 + x_2 - 3.$$

令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f \in S^{3,4}$ 和 $\mathcal{M} = M_d(\mathbf{1},\mathbf{x}) \in S^{3,4}$。那么，对于任意$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$，都有$f(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{M}\rangle$，其中

$$\mathcal{A}_{0,:,:} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{1,:,:} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{2,:,:} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{3,:,:} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$\mathcal{M}_{0,:,:}=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_2 & x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_3 & x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2\end{pmatrix},\qquad \mathcal{M}_{1,:,:}=\begin{pmatrix}x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^2x_3\\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1x_2x_3\\ x_1x_3 & x_1^2x_3 & x_1x_2x_3 & x_1x_3^2\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{2,:,:}=\begin{pmatrix}x_2 & x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_2x_1 & x_2x_1^2 & x_2^2x_1 & x_2x_1x_3\\ x_2^2 & x_2^2x_1 & x_2^3 & x_2^2x_3\\ x_2x_3 & x_2x_3x_1 & x_2^2x_3 & x_2x_3^2\end{pmatrix},\quad \mathcal{M}_{3,:,:}=\begin{pmatrix}x_3 & x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2\\ x_3x_1 & x_3x_1^2 & x_3x_1x_2 & x_3^2x_1\\ x_3x_2 & x_3x_2x_1 & x_3x_2^2 & x_3^2x_2\\ x_3^2 & x_3^2x_1 & x_3^2x_2 & x_3^3\end{pmatrix}.$$

对于非齐次多项式 $f(\mathbf{x})=\mathcal{A}_f\mathbf{x}^d\in\mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$，，可将其写成如下形式：

$$f(\mathbf{x})=\mathcal{A}_d\mathbf{x}^d+\mathcal{A}_{d-1}\mathbf{x}^{d-1}+\cdots+\mathcal{A}_1\mathbf{x}+\mathcal{A}_0,$$

其中 $\mathcal{A}_i\in S^{i,\,n}$。特别地，$\mathcal{A}_0$ 是零阶张量（标量），$\mathcal{A}_1\in\mathbb{R}^n$ 是一阶张量（向量），而 $\mathcal{A}_1\mathbf{x}$ 表示 $\mathcal{A}_1^\top\mathbf{x}$。令 $\tilde{f}(\mathbf{x})$ 表示 $f(\mathbf{x})$ 中次数最高的齐次分量，即

$$\tilde{f}(\mathbf{x})=\mathcal{A}_d\mathbf{x}^d=\langle\mathcal{A}_d,M_d(\mathbf{x})\rangle=\langle\mathcal{A}_f,M_d(0,\mathbf{x})\rangle.$$

现在考虑以下非齐次多项式优化问题：

$$\min f(\mathbf{x})\quad\text{s.t.}\quad\mathbf{x}\in F,\tag{6}$$

其中 $f(x)\in\mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$ 且 $F\subseteq\mathbb{R}^n$ 是非空可行集。类似于齐次情形下的（13），我们得到以下提升后的凸优化问题：

$$\min\ \langle\mathcal{A}_f,\mathcal{X}\rangle\quad\text{s.t.}\quad\mathcal{X}\in C_F+R_F,\tag{7}$$

其中

$$C_F=\operatorname{conv}\{M_d(1,\mathbf{x})\mid\mathbf{x}\in F\},\quad R_F=\operatorname{conv}\{M_d(0,\mathbf{x})\mid\mathbf{x}\in REC_F\}.$$

引理 **1** *Assume that (6) has an optimal solution* $\bar{\mathbf{x}}$ *for any* $\bar{\mathbf{y}}\in REC_F$ *it* $\mathbf{x}$. *Then,* $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ *holds that* $\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{y}}^d\geq 0$.

证明。我们用反证法证明结论。假设存在一个 $\bar{\mathbf{y}}\in REC_F$满足 $\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{y}}^d<0$。根据衰退锥的定义，我们知道，对于任意$\lambda\geq 0$，都有 $\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}}\in F$且 $f(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}})\geq f(\bar{\mathbf{x}})$。然而，我们有

$$\begin{aligned}&f(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}})=\mathcal{A}_d(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}})^d+\mathcal{A}_{d-1}(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}})^{d-1}+\cdots+\mathcal{A}_1(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\bar{\mathbf{y}})+\mathcal{A}_0\\&=C_d^d\lambda^d\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{y}}^d+C_d^{d-1}\lambda^{d-1}\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}^{d-1}+\cdots+C_d^1\lambda\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{x}}^{d-1}\bar{\mathbf{y}}+\mathcal{A}_d\bar{\mathbf{x}}^d+\cdots+\mathcal{A}_0\\&\to-\infty,\quad\text{as}\quad\lambda\to\infty,\end{aligned}$$

这与条件矛盾，因此所需结果成立。□

当 (6) 和 (7) 的最优值能够达到时，令 $\mathbb{S}_1$，$\mathbb{S}_2$ 分别为 (6) 和 (7) 的最优解集。由引理 1，可得以下结论。

定理 3. *Assume the optimal value of (6) is attained. Suppose $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}_1$. Then the problems (6) and (7) are equivalent in the sense that they share the same optimal value. Furthermore it holds that $\mathbb{S}_2 = \{M_d(1, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}_1\}$.*

证明。 由于 $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_1$，我们有最优值满足 $f(\bar{\mathbf{x}}) = \langle \mathcal{A}_f, M_d(1, \bar{\mathbf{x}})\rangle$，且 $M_d(1, \bar{\mathbf{x}})$ 是问题 (7) 的可行解。这意味着 (6) 的最优值大于 (7) 的最优值。假设 $\bar{\mathcal{X}} \in \mathbb{S}_2$ 并假定

$$\bar{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_d(1, \mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j M_d(0, \mathbf{y}_j),$$

其中 $\lambda_i \geq 0,\ i \in [k],\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ 和 $\mu_j \geq 0,\ j \in [l]$。于是，有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_f, \bar{\mathcal{X}} \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \mathcal{A}_f, M_d(1, \mathbf{x}_i)\rangle + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \langle \mathcal{A}_f, M_d(0, \mathbf{y}_j)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \mathcal{A}_f, M_d(1, \mathbf{x}_i)\rangle + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \mathcal{A}_d \mathbf{y}_j^d. \end{aligned} \tag{8}$$

由引理 1，可得

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_f, \bar{\mathcal{X}} \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \mathcal{A}_f, M_d(1, \mathbf{x}_i)\rangle + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \mathcal{A}_d \mathbf{y}_j^d \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \mathcal{A}_f, M_d(1, \mathbf{x}_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{x}_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\bar{\mathbf{x}}) = f(\bar{\mathbf{x}}) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = f(\bar{\mathbf{x}}), \end{aligned} \tag{9}$$

这意味着 (6) 和 (7) 具有相同的最优值。

再由 (8) 和 (9)，由于 $\langle \mathcal{A}_f, \bar{\mathcal{X}} \rangle = f(\bar{\mathbf{x}})$，我们可以选择 $\mu_j = 0,\ j \in [l]$并取 $\bar{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M_d(1, \mathbf{x}_i)$，这意味着 $\bar{\mathcal{X}}$是$M_d(1, \mathbf{x}_i)$ $i \in [k]$ 和 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{S}_1$的凸组合。因此，所需结果成立。□

Remark 1 当可行集 F 不是凸集时，多项式优化问题（6）不是凸问题。因此，直接求解（6）具有挑战性。根据（6）与（7）的等价性，在第 4 节中，我们将说明，对于某些特殊情形，提升凸形式（7）可以重新表述为完全正优化问题。此外，还可以证明，在某些条件下，原完全正优化问题的对偶问题严格可行，这意味着强对偶性成立，并且可以应用现有的原问题和对偶问题数值方法。

为验证定理 3的性能，我们考虑以下示例[27]。

Example 3 考虑问题

$$\begin{aligned} \min\ & f = 4x - y - 2x^2 - 2xy - y^2 \\ \text{s.t.}\ & x^2 - xy = 0, \\ & y^2 - y = 0, \\ & x \geq 0,\ y \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

不难看出，该问题只有三个可行点 $F=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$，且 (10) 的最优解为 $(0,1),(1,\mathbf{1})$，最优值为 -2。根据定义2，我们有相应的二阶张量$\mathcal{A}_f$ 使得

$$\mathcal{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

由于 F 的衰退锥包含唯一的零向量，我们得到提升模型:

$$\min \langle \mathcal{A}_f, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in \operatorname{conv}\{M_2(1,\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in F\}, \tag{11}$$

且（12）的最优解集合为

$$\operatorname{conv}\{M_2(1,0,1), M_2(1,1,1)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} : 0 \le \alpha \le 1 \right\}.$$

最优值为 -2。

3.2 齐次多项式优化问题的提升模型

本节考虑齐次多项式优化问题的提升模型，因为许多实际问题都与齐次多项式优化问题相关，而这些问题并非凸优化问题。

设 $f\mathbf{x} \in \mathbb{R}_d[\mathbf{x}], \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是一个齐次多项式。考虑以下多项式优化问题:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in F, \tag{12}$$

其中 $f(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_f^h \mathbf{x}^d$，且 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个非空可行集。张量$\mathcal{A}_f^h$ 的各项由多项式的系数构造。根据 (1)，可得以下提升优化问题:

$$\min \langle \mathcal{A}_f^h, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in C_F^h + R_F^h. \tag{13}$$

为证明 (12) 与 (13) 的等价性，与非齐次情形一样，令 $\mathcal{A}_i$, $i \in \{0,1,\cdots,d-1\}$ 为零张量，则问题化为齐次多项式情形。令 $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{S}_4$ 分别为 (12) 和 (13) 的最优解集。由定理 3的类似证明，可得以下结果。

定理 4 *Assume the optimal value of (12) is attained. Suppose $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_3$. Then the problems (12) and (13) are equivalent in the sense that they share the same optimal value. Furthermore it holds that $\mathbb{S}_4 = \{M_d(1, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{S}_3\}$.*

Remark 2 原问题（12）与提升模型（13）的主要区别在于它们的结构性质：原问题可能涉及定义在非凸可行集上的非凸目标函数，而等价形式（13）构成一个凸优化问题。因此，（13）的最优解包含（12）的全局最优解。对于某些

特殊情形，例如 $M_d(\mathbf{x}) \in C_F^h + R_F^h$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$，（13）是一个完全正张量规划。我们将在下一节研究这一情形。

需要注意的是，构造提升问题（13）并非旨在消除原始表述（12）所涉及的难题；相反，根据集合 F 的定义，这些困难被嵌入了（13）的可行集中。

根据定理 4 及衰退锥的定义，我们得到以下推论。

推论 **1** *Assume that the feasible set F of (12) is bounded and the optimal solution is attained. Then (12) shares the same optimal value with the following convex optimization problem:*

$$\min \langle \mathcal{A}_f^h, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in \operatorname{conv}\{M_d(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in F\}.$$

Furthermore, any optimal solution of the convex optimization problem can be denoted as a convex combination of symmetric rank-1 tensors $M_d(\mathbf{x})$ where $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_3$.

证明。由于 F 有界，其衰退锥仅包含零向量，因此所需结论成立。□

Remark 3 问题（12）和（13）仍然等价，只需将（13）中的约束替换为

$$\min \langle \mathcal{A}_f, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in C_F^h. \tag{14}$$

然而，我们仍将保留（13）中的约束，因为无论原多项式是齐次还是非齐次，模型（13）在一些典型情形下都有利于构造完全正重构。

请注意，许多实际问题都与齐次多项式优化问题有关，而这些问题并非凸优化问题。根据定理4，一些典型问题可以通过引入张量变量提升为凸问题。

Example 4 假设 $\mathcal{A} \in S^{d,\,n}$ 是一个对称张量。其最小Z特征值等于以下优化问题的最优值：

$$\min \mathcal{A}\mathbf{x}^d \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示该向量的欧几里得范数。通过直接计算，最小Z特征值问题的等价凸优化问题为

$$\min \langle \mathcal{A}, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in \operatorname{conv}\{M_d(\mathbf{x}) \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

将欧几里得范数替换为范数 $\|\cdot\|_m$后，该问题便化为对称张量的最小H特征值问题。

Example 5 假设 $\mathcal{A} \in S^{d,\,n}$ 是一个对称张量。为了验证 $\mathcal{A}$ 的余正性，等价于求解以下优化问题：

$$\min \mathcal{A}\mathbf{x}^d \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n.$$

通过直接计算，我们知道 $\mathbb{R}_+^n$ 的衰退锥就是其自身。因此，其等价的凸优化问题是一个完全正张量优化问题：

$$\min \langle \mathcal{A}, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{X} \in \operatorname{conv}\{M_d(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

4 线性不等式约束下一般多项式优化问题的等价 CPTP

现在，我们可以陈述主要结果了。通过提升凸模型（7）和（13），我们构造了具有显式线性不等式约束的多项式优化问题的等价 CPTP。随后，给出了 CPTP 的对偶问题，即共正优化问题。为保证所考虑的原始-对偶对具有强对偶性，我们证明了该共正优化问题严格可行。

在以下各节中，我们首先考虑问题（12）和（6），其约束由有限个半空间的交集定义，例如

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{15}$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{m,\ n}$ 且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。由（1）和定理 4，只需给出 $C_F + R_F$ 在完全正张量锥上的等价刻画。

为介绍本节的主要结果，我们首先指出，一般情况下最优解未必存在。据我们所知，需要施加额外的充分条件。例如，目标函数有下界、约束集紧，或者与目标多项式对应的对称张量是半正定张量等。为方便起见，本文不针对任何特定情形进行研究，并始终假设最优值能够达到。

4.1 约束集 (15)下的齐次多项式优化问题

设 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_d[\mathbf{x}],\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为齐次多项式。考虑以下多项式优化问题:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x} \in F, \tag{16}$$

其中 $f(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_f^h \mathbf{x}^d$。

为建立等价的 CPTP 表述，我们分两步进行。此方法受 [24], 中关于二次多项式问题的证明启发，作者在该文中研究了二次多项式问题的等价完全正优化框架。接下来，我们先介绍一些有用的符号。根据 F 的定义，始终存在一个向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$，使得$\alpha^\top \mathbf{x} \leq 1$ 对于 $\mathbf{x} \in F$（平凡的取法是 $\alpha = \mathbf{0}$）。

令 $\mathbf{a} = (\alpha^\top,1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}_+$。定义矩阵 A，其元素为:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}\mathbf{a}^\top - (B,\mathbf{0}) \\ I_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(n+1)},$$

其中 I_{n+1} 是单位矩阵。假设在 (16) 中， $\mathcal{A}_f^h = (a_{i_1 i_2 \cdots i_d})$。定义$\bar{\mathcal{A}} = (\bar{a}_{i_1 i_2 \cdots i_d}) \in S^{m,n+1}$，使其满足

$$\bar{a}_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \begin{cases} a_{i_1 i_2 \cdots i_d}, & i_1, i_2, \cdots, i_d \in [n], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $\bar{f}(\mathbf{y}) = \bar{\mathcal{A}}\mathbf{y}^d$。那么，我们得到以下多项式优化问题：

$$\min \bar{f}(\mathbf{y}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} \in \overline{F} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid A\mathbf{y} \geq 0,\ \mathbf{a}^\top \mathbf{y} = 1\}. \tag{17}$$

此外，我们得到如下结果。

引理

2 *If problems (16) and (17) have optimal solutions then they share the same , optimal value.*

证明。假设 $\bar{\mathbf{x}} \in F$ 和 $\bar{\mathbf{y}} \in \overline{F}$ 分别是（16）和（17）的最优解。由此可得

$$B\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b},\ \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{a}^\top \mathbf{y} = \alpha^\top \bar{\mathbf{x}} + 1 - \alpha^\top \bar{\mathbf{x}} = 1,$$

其中

$$\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{x}}^\top, 1 - \alpha^\top \bar{\mathbf{x}})^\top \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

于是，我们有

$$A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} - B\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0},$$

这意味着$\mathbf{y} \in F$。因此，我们得到 $\bar{f}(\mathbf{y}) = f(\bar{\mathbf{x}}) \geq \bar{f}(\bar{\mathbf{y}})$，且（16）的最优值大于（17）的最优值。

另一方面，$\bar{\mathbf{y}}$ 可以写成两个块，使得 $\bar{\mathbf{y}}^\top = (\tilde{\mathbf{y}}^\top, y_{n+1})$，其中 $\tilde{\mathbf{y}}^\top = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。由于 $\bar{\mathbf{y}} \in F$且 $A\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$，我们得到

$$B\tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0},$$

这意味着 $\tilde{\mathbf{y}} \in F$ 且

$$\mathcal{A}\tilde{\mathbf{y}}^d = \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathbf{y}}^d \geq \mathcal{A}\bar{\mathbf{x}}^d,$$

这意味着（17）的最优值大于（16）的最优值，所需结果成立。□

Remark 4 根据引理 2的证明，我们知道 $\bar{\mathbf{x}}$ 是（16）的一个最优解，当且仅当 $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{\mathbf{x}}^\top, 1 - \alpha^\top \bar{\mathbf{x}})^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是（17）的一个最优解。

结合注记 4 与引理 2，只需构造（17）的等价 CPTP，而非（16）。

引理 3 *For optimization problem (17), we have the following results.*
(1) *The recession cone* $REC_{\overline{F}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid A\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{a}^\top \mathbf{y} = 0\}$.**(2)** *For feasible set* F, *it holds that*

$$C_{\overline{F}}^h + R_{\overline{F}}^h = \left\{\mathcal{X} \in \mathcal{C}_{n+1,d}^* \mid \langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a})\rangle = 1, \mathcal{X}_{\times 1} A_{\times 2} A_{\times 3} \cdots_{\times d} A \in \mathcal{C}_{m+n+1,d}^*\right\}.$$

证明。**(1)** 根据衰退锥的定义，可以直接证明该结论。

(2) 对任意 $\mathcal{X} \in C_{\overline{F}}^h + R_{\overline{F}}^h$，假设

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_d(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j M_d(\mathbf{y}_j),$$

其中 $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0, i \in [r], j \in [l]$ 和 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$。于是，$\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+1,d}$。由于 $\mathbf{x}_i \in F$、$\mathbf{y}_j \in REC_F$，我们有 $A\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}$, $A\mathbf{y}_j \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i = 1$, $\mathbf{a}^\top \mathbf{y}_j = 0$ 和

$$\langle \mathcal{X},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\mathbf{a}^\top \mathbf{x}_i)^d + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (\mathbf{a}^\top \mathbf{y}_j)^d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,$$

and

$$\mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \cdots \times_d A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_d(A\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j M_d(A\mathbf{y}_j) \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d},$$

这意味着

$$C^h_F + R^h_F \subseteq \left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+1} \mid \langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a})\rangle = 1, \mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \times_3 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d} \right\}.$$

为证明反向包含，对于满足 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{i_1 i_2 \ldots i_d}) \in \mathcal{C}^*_{n+1,d}$

$$\langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a})\rangle = 1, \quad \mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \times_3 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d},$$

令 $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d}$，其元素满足

$$\widehat{\mathcal{X}}_{i_1 i_2 \ldots i_d} = \begin{cases} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \ldots i_d}, & i_1, i_2, \ldots, i_d \in [n+1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

记作 $\widehat{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}^\top, \mathbf{0}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{m+n+1}_+$。显然，

$$\langle \widehat{\mathcal{X}}, M_d(\widehat{\mathbf{a}})\rangle = \langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a})\rangle = 1. \tag{18}$$

另一方面，存在矩阵 D，可将其附加到 A，使得 $\widehat{A} = (A, D) \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ 为非奇异矩阵。根据构造，有

$$\widehat{\mathcal{X}} \times_1 \widehat{A} \times_2 \widehat{A} \times_3 \cdots \times_d \widehat{A} = \mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \times_3 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d}.$$

因此，存在向量 $\widehat{\mathbf{z}}_1, \widehat{\mathbf{z}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{z}}_k \in \mathbb{R}^{m+n+1}_+$ 使得

$$\widehat{\mathcal{X}} \times_1 \widehat{A} \times_2 \widehat{A} \times_3 \cdots \times_d \widehat{A} = \sum_{i=1}^{k} M_d(\widehat{\mathbf{z}}_i).$$

令 $\widehat{\mathbf{y}}_i = \widehat{A}^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_i$，其中 $i = 1, \ldots, k$，$\widehat{A}^{-1}$ 表示 $\widehat{A}$ 的逆矩阵。于是，我们有

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}} &= \left(\widehat{\mathcal{X}} \times_1 \widehat{A} \times_2 \widehat{A} \times_3 \cdots \times_d \widehat{A} \right) \times_1 \widehat{A}^{-1}_{\times 2} \widehat{A}^{-1}_{\times 3} \cdots \times_d \widehat{A}^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} M_d(\widehat{A}^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_i) = \sum_{i=1}^{k} M_d(\widehat{\mathbf{y}}_i). \end{aligned}$$

由于对所有 $i = n+2,\ n+3,\ \ldots,\ m+n+1$，都有 $\widehat{\mathcal{X}}_{ii\ldots i} = 0$，因此可得 $\widehat{\mathbf{y}}_j = (\mathbf{y}_j^\top, \mathbf{0}^\top)^\top$，其中 $\mathbf{y}_j$ 表示 $\widehat{\mathbf{y}}_j$，$j \in [k]$ 的前 $n+1$ 个分量。根据 $\widehat{\mathcal{X}}$ 和 $\mathcal{X}$ 的结构，我们知道

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{k} M_d(\mathbf{y}_i) \quad \text{and} \quad A\mathbf{y}_i = \widehat{A}\widehat{\mathbf{y}}_i = \widehat{\mathbf{z}}_i \geq \mathbf{0}.$$

将此与.....的概念结合起来

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}\mathbf{a}^\top - (B, \mathbf{0}) \\ I_{n+1} \end{pmatrix},$$

由此可得 $\mathbf{y}_i \geq \mathbf{0}$, $i \in [k]$。根据 $\mathbf{y}_i \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ 这一事实，这意味着$\mathbf{y}_i^\top \mathbf{a} \geq 0$, $i \in [k]$。接下来，记

$$K^+ = \left\{ i \in [k] \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i > 0 \right\}, \quad K^= = \{ i \in [k] \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i = 0 \}. \tag{19}$$

对于任意 $i \in K^+$，令 $\lambda_i = \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i$ 以及 $\mathbf{z}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{y}_i$。根据这一记法，可得

$$\mathcal{X} = \sum_{i \in K^+} \lambda_i^d M_d(\mathbf{z}_i) + \sum_{j \in K^=} M_d(\mathbf{y}_j).$$

接下来，我们将证明 $\mathcal{X} \in C_F^h + R_F^h$。由（19），可知 $A\mathbf{z}_i = \frac{1}{\lambda_i} A\mathbf{y}_i \geq \mathbf{0}, \forall i \in K^+$。此外，由（18），可推出

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{z}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i = 1, \quad \forall\, i \in K^+, \sum_{i \in K^+} \lambda_i^m = 1.$$

将此与（19）结合，可得

$$\sum_{i \in K^+} \lambda_i^d M_d(\mathbf{z}_i) \in C_F^h, \quad \sum_{j \in K^=} M_d(\mathbf{y}_j) \in R_F^h,$$

这意味着

$$C_F^h + R_F^h \supseteq \left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{C}_{n+1}^* \mid \langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a}) \rangle = 1, \mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \times_3 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}_{m+n+1,d}^* \right\},$$

并且所需结果成立。 □

根据定理4 和引理 2-3，我们得到以下结果。

定理 5 *Assume (16) has an optimal solution. Then, (16) is equivalent with the following completely positive optimization problem:*

$$\begin{aligned} &\min \langle \mathcal{A}_f^h, \mathcal{X} \rangle \\ &\text{s.t. } \mathcal{X} \in \left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{C}_{n+1}^* \mid \langle \mathcal{X}, M_d(\mathbf{a}) \rangle = 1, \mathcal{X} \times_1 A \times_2 A \times_3 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}_{m+n+1,d}^* \right\}. \end{aligned}$$

4.2 约束集（15）下的非齐次多项式优化问题

在本节中，我们考虑非齐次多项式优化问题。若 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_d[\mathbf{x}]$ 且 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，假设

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_d \mathbf{x}^d + \mathcal{A}_{d-1} \mathbf{x}^{d-1} + \cdots + \mathcal{A}_1 \mathbf{x} + \mathcal{A}_0,$$

其中 $\mathcal{A}_j = (a^j_{i_1 i_2 \cdots i_j}) \in S^{j,\ n}$ 且 $\mathcal{A}_d$ 是一个至少含有一个非零元素的张量。考虑具有约束（15）的多项式优化问题：

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } \mathbf{x} \in F. \tag{20}$$

为构造（20）的等价完全优化问题，定义对称张量 $\bar{\mathcal{A}}_j = (\bar{a}^j_{i_1 i_2 \cdots i_j}) \in S^{j,\ n+1}$ 使得

$$\bar{a}^j_{i_1 i_2 \cdots i_j} = \begin{cases} a^j_{i_1 i_2 \cdots i_j}, & i_1, i_2, \cdots, i_j \in [n], \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

由此，我们有多项式 $\bar{f}(\mathbf{y}),\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$\bar{f}(\mathbf{y}) = \bar{\mathcal{A}}_d \mathbf{y}^d + \bar{\mathcal{A}}_{d-1}\mathbf{y}^{d-1} + \cdots + \bar{\mathcal{A}}_1 \mathbf{y} + \bar{\mathcal{A}}_0.$$

于是，存在另一个多项式优化问题，使得

$$\min \bar{f}(\mathbf{y}) \quad \text{s.t.} \ \ \mathbf{y} \in \overline{F} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid A\mathbf{y} \geq 0,\ \mathbf{a}^\top \mathbf{y} = 1\}, \tag{21}$$

其中，矩阵 A和向量 $\mathbf{a}$ 的定义与第4.1小节中相同。若 $\mathbf{y}^\top = (\mathbf{x}^\top, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，显然有 $\bar{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$。通过与引理 2类似的证明，我们得到以下结果。

引理 4 *If problems (20) and (21) have optimal solutions they share the same optimal value.*

根据定理3，我们知道问题（21）等价于以下凸问题:

$$\min \langle \mathcal{A}_{\bar{f}}, \mathcal{X} \rangle \quad \text{s.t} \ \ \mathcal{X} \in C_{\overline{F}} + R_{\overline{F}}, \tag{22}$$

其中

$$C_{\overline{F}} = \text{conv}\{M_d(1, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \overline{F}\}, \quad R_{\overline{F}} = \text{conv}\{M_d(0, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in REC_{\overline{F}}\}.$$

为了构造（20）的等价 CPTP，定义 $\bar{A} \in \mathbb{R}^{t \times (n+2)}$，并令 $\bar{\mathcal{A}} \in S^{d,\ n+2}$ 为满足以下条件的对称秩一张量

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1, & -\mathbf{a}^\top \\ 1, & -\mathbf{a}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1, & -\mathbf{a}^\top \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix},$$

其中 t 是正整数。此外，有必要介绍另一个简单的缩写。对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+2})^\top \in \mathbb{R}^{n+2}$ 和 $\mathcal{X} = M_d(\mathbf{x}) \in S^{d,\ n+2}$，记 $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $\widetilde{\mathcal{X}} \in S^{d,\ n+1}$，使得

$$\widetilde{\mathbf{x}} = (x_2, \cdots, x_{n+2})^\top, \quad \widetilde{\mathcal{X}} = \widetilde{\mathbf{x}} \circ \widetilde{\mathbf{x}} \circ \cdots \circ \widetilde{\mathbf{x}}.$$

引理 5 *Assume that C_F, R_F are defined as in (22). Then, $C_F + R_F$ is equivalent with the following set:*

$$\left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+2} : \ \langle \widetilde{\mathcal{X}},\ M_d(\mathbf{a}) \rangle = 1,\ \langle \mathcal{X}, \bar{\mathcal{A}} \rangle = 0,\ \widetilde{\mathcal{X}} \times_1 A \times_2 \cdots \times_d A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,\ d},\right.$$
$$\left. \mathcal{X} \times_1 \bar{A} \times_2 \cdots \times_d \bar{A} \in \mathcal{C}^*_{t\ d} \right\}.$$

证明。对于满足以下条件的任意 $\mathcal{X}=(\mathcal{X}_{i_1i_2\ldots i_d})\in\mathcal{C}^*_{n+2}$

$$\begin{cases}\langle\widetilde{\mathcal{X}},M_d(\mathbf{a})\rangle=1,\ \ \langle\mathcal{X},\bar{\mathcal{A}}\rangle=0,\\ \widetilde{\mathcal{X}}\times_1A\times_2A\cdots\times_dA\in\mathcal{C}^*_{m+n+1,d},\ \ \mathcal{X}\times_1\bar{A}\times_2\bar{A}\cdots\times_d\bar{A}\in\mathcal{C}^*_{t,d},\end{cases}\tag{23}$$

定义 $\mathcal{X}\in\mathcal{C}^*_{m+n+2,\ d}$ 其元素满足

$$\widehat{\mathcal{X}}_{i_1i_2\ldots i_d}=\begin{cases}\mathcal{X}_{i_1i_2\ldots i_d}, & i_1,i_2,\ldots,i_d\in[n+2],\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似地，定义如下张量 $\widehat{\mathcal{A}}\in\mathcal{C}^*_{m+n+2,\ d}$ 以及向量 $\widehat{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{m+n+1}$

$$\widehat{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{a}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{a}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\circ\cdots\circ\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{a}\\\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \ \widehat{\mathbf{a}}=(\mathbf{a}^\top,\mathbf{0}^\top)^\top\in\mathbb{R}^{m+n+1}.$$

显然，根据上述构造，有

$$\langle\widetilde{\widehat{\mathcal{X}}},M_d(\widehat{\mathbf{a}})\rangle=\langle\widetilde{\mathcal{X}},M_d(\mathbf{a})\rangle=1\ \ \text{and}\ \ \langle\widehat{\mathcal{X}},\widehat{\mathcal{A}}\rangle=\langle\mathcal{X},\bar{\mathcal{A}}\rangle=0.\tag{24}$$

令矩阵 $\widehat{A}$ 如引理 3中所定义，且 $\widehat{\bar{A}}=(\bar{A},\ \mathbf{0})\in\mathbb{R}^{t\times(m+n+2)}$。通过直接计算可知

$$\widetilde{\widehat{\mathcal{X}}}\times_1\widehat{A}\times_2\cdots\times_d\widehat{A}=\widetilde{\mathcal{X}}\times_1A\times_2\cdots\times_dA\in\mathcal{C}^*_{m+n+1,d}$$

and

$$\widehat{\mathcal{X}}\times_1\widehat{\bar{A}}\times_2\widehat{\bar{A}}\times_3\cdots\times_d\widehat{\bar{A}}=\mathcal{X}\times_1\bar{A}\times_2\bar{A}\times_3\cdots\times_d\bar{A}\in\mathcal{C}^*_{t,d}.\tag{25}$$

由于 $\widehat{\mathcal{X}}\times_1\widehat{A}\times_2\cdots\times_d\widehat{A}\in\mathcal{C}^*_{m+n+1,\ d}$存在向量 $\widehat{\mathbf{z}}_1,\ \widehat{\mathbf{z}}_2,\ \cdots,\ \widehat{\mathbf{z}}_k\in\mathbb{R}^{m+n+2}_+$使得

$$\widetilde{\widehat{\mathcal{X}}}\times_1\widehat{A}\times_2\widehat{A}\times_3\cdots\times_d\widehat{A}=\sum_{i=1}^k M_d(\widetilde{\widehat{\mathbf{z}}}_i).$$

定义 $\widehat{\mathbf{y}}_i\in\mathbb{R}^{m+n+2}$和 $\widetilde{\widehat{\mathbf{y}}}_i=\widehat{A}^{-1}\widetilde{\widehat{\mathbf{z}}}_i$，其中 $i=1,2,\cdots,k$。于是可得$\widehat{A}\widetilde{\widehat{\mathbf{y}}}_i=\widetilde{\widehat{\mathbf{z}}}_i\geq\mathbf{0}$ 和

$$\begin{aligned}\widetilde{\widehat{\mathcal{X}}}&=\left(\widetilde{\widehat{\mathcal{X}}}\times_1\widehat{A}\times_2\cdots\times_d\widehat{A}\right)\times_1\widehat{A}^{-1}_{\times2}\cdots\times_d\widehat{A}^{-1}\\&=\left(\sum_{i=1}^k M_d(\widetilde{\widehat{\mathbf{z}}}_i)\right)\times_1\widehat{A}^{-1}_{\times2}\cdots\times_d\widehat{A}^{-1}=\sum_{i=1}^k M_d(\widehat{A}^{-1}\widetilde{\widehat{\mathbf{z}}}_i)=\sum_{i=1}^k M_d\widetilde{\widehat{\mathbf{y}}}_i.\end{aligned}\tag{26}$$

由于对所有 $i=n+3,n+4,\cdots,m+n+2,\ \ \widehat{\mathcal{X}}_{ii\ldots i}=0$均成立，因此可得 $\widehat{\mathbf{y}}^j=(\mathbf{y}_j^\top,\mathbf{0}^\top)^\top$，其中$\mathbf{y}^j$ 表示 $\widehat{\mathbf{y}}^j,j\in[k]$的前 $n+2$ 个分量。结合式（26），可得 $\mathcal{X}=\sum_{i=1}^k M_d(\mathbf{y}_i)$。

另一方面，由（24）-（25）可知，对于所有 $i\in[k]$，有 $(\mathbf{y}_i)_1=\mathbf{a}^\top\widetilde{\mathbf{y}}_i$。由 $\mathbf{a}\geq\mathbf{0},\ \mathbf{y}_i\geq\mathbf{0}$这一事实可得 $\mathbf{a}^\top\widetilde{\mathbf{y}}_i\geq0$。记

$$L^+=\{i\in[k]\mid\mathbf{a}^\top\widetilde{\mathbf{y}}_i>0\},\quad L^=\{j\in[k]\mid\mathbf{a}^\top\widetilde{\mathbf{y}}_j=0\}.\tag{27}$$

对于 $i \in L^+$，令 $\lambda_i = \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i$，以及 $\mathbf{z}_i = \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{y}_i$。则 $\mathcal{X}$ 可等价地表示为

$$\mathcal{X} = \sum_{i\in L^+} \lambda_i^d M_d(\mathbf{z}_i) + \sum_{j\in L^=} M_d(\mathbf{y}_i).$$

接下来，我们将证明 $\sum_{i\in L^+} \lambda_i^d M_d(\mathbf{z}_i) \in C_F$ 和 $\sum_{j\in L^=} M_d(\mathbf{y}_i) \in R_{F^\circ}$。由（27），我们知道 $\mathbf{a}^\top \mathbf{z}_i = 1$，$\mathbf{z}_0$ $j \in L^=$ 24 $(\mathbf{y})_1 = \frac{1}{\lambda_i}(\mathbf{y})_1 = \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i = 1$，$i \in L^+$ 并且 $(\mathbf{y})\mathbf{a}^\top \mathbf{y}$，。此外，再次由（），可得

$$\langle \widetilde{\mathcal{X}},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = \sum_{i\in L^+} \lambda_i^d (\mathbf{a}^\top \widetilde{\mathbf{z}}_i)^d + \sum_{j\in L^=} (\mathbf{a}^\top \widetilde{\mathbf{y}}_j)^d = \sum_{i\in L^+} \lambda_i^d (\mathbf{a}^\top \widetilde{\mathbf{z}}_i)^d = \sum_{i\in L^+} \lambda_i^d = 1. \tag{28}$$

结合（28）与（23）和（27），可知 $\mathcal{X} \in C_F + R_{F^\circ}$

为证明反向包含，对于 $\mathcal{X} \in C_F + R_F$，设

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i M_d(1, \mathbf{y}_i) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j M_d(0, \mathbf{z}_j),\ \mathbf{y}_i \in \overline{F},\ \mathbf{z}_j \in RES_{\overline{F}},$$

其中 $\lambda_i \geq 0$，$\mu_j \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$。根据 F 和 RES_F 的定义，显然有 $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+2,\ d}$，$\mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i = 1$，$i \in [r]$，$\mathbf{a}^\top \mathbf{z}_j = 0$，$j \in [l]$ 并且通过直接计算可得

$$\langle \mathcal{X},\ \tilde{A}\rangle = 0,\ \widetilde{\mathcal{X}}_{\times 1} A_{\times 2} A_{\times 3} \cdots_{\times d} A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1},\ \mathcal{X}_{\times 1} \bar{A}_{\times 2} \bar{A}_{\times 3} \cdots_{\times d} \bar{A} \in \mathcal{C}^*_{t,d}.$$

此外，我们有

$$\langle \widetilde{\mathcal{X}},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i)^d + \sum_{j=1}^{l} \mu_j (\mathbf{a}^\top \mathbf{z}_j)^d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

因此，所需结果成立。 □

由定理3 和引理 4-5，我们得到以下定理。

定理 6 *For general polynomial optimization problem (20) if it has an optimal solution. Then (20) is equivalent with the following completely positive program:*

$$\begin{aligned} \min\ & \langle \mathcal{A}_{\bar{f}},\ \mathcal{X}\rangle \\ \text{s.t.}\ & \langle \widetilde{\mathcal{X}},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = 1,\ \langle \mathcal{X},\ \tilde{A}\rangle = 0,\ \mathcal{X}_{\times 1} \bar{A}_{\times 2} \bar{A} \cdots_{\times d} \bar{A} \in \mathcal{C}^*_{t,d}, \\ & \widetilde{\mathcal{X}}_{\times 1} A_{\times 2} A \cdots_{\times d} A \in \mathcal{C}^*_{m+n+1,d},\quad \mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+2,d}. \end{aligned}$$

Remark 5

(1) 在 $\bar{A}$ 的定义中，数 t 可以是满足 $t \geq 1$ 的任意正整数。这里，$\bar{A}$ 在 $\mathcal{X}_{\times 1} \bar{A}_{\times 2} \bar{A}_{\times 3} \cdots_{\times d} \bar{A} \in \mathcal{C}^*_{t,d}$ 中的作用很重要，它使得 $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^k M_d(\mathbf{y}_i)$ 的所有生成向量 $\mathbf{y}_i$ 都满足 $(\mathbf{y}_i)_1 - \mathbf{a}^\top \mathbf{y}_i \geq 0$。

(2) 对于定理 6 中的优化问题，我们可以统一考虑变量张量 variable tensor $\mathcal{X}$。对于任意 $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^*_{n+2,d}$，有 $\langle \mathcal{X},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = 1$ 等价于 $\langle \mathcal{X}\ M_d\ \rangle = 1$ $= 0$，$\top\ \top \in \mathbb{R}^{n+2}$ $\widetilde{\mathcal{X}}_{\times 1} A_{\times 2} A_{\times 3} \cdots_{\times d} A \in$，(a)，其 $\mathcal{C}^*_{m+n+1\ d}$ $\mathcal{X}_{\times 1} A'_{\times 2} A'_{\times 3} \cdots_{\times d} A' \in \mathcal{C}^*_{m+n+1\ d}$ $A' = \mathbf{0}$ A $\in$ 中 a (a)。类似地，，等价于，，其中 (,) $\mathbb{R}^{(m+n+1)\times(n+2)}$。

4.3 等价的共正优化问题

根据完全正张量锥与共正张量锥的对偶性，我们考虑 (16) 和 (20) 的对偶优化问题，即共正优化问题。据我们所知，共正优化问题在为二次优化问题和高阶多项式优化问题设计算法方面具有诸多优势 [2,3,21,36]。因此，为了保证所考虑的原始-对偶对满足强对偶性，我们证明共正优化问题严格可行。回顾定理 5 中的等价模型：

$$\begin{aligned} &\min \ \langle \mathcal{A}_f^h,\ \mathcal{X}\rangle \\ &\text{s.t. } \mathcal{X} \in \left\{ \mathcal{X} \in \mathcal{C}_{n+1}^* \mid \langle \mathcal{X},\ M_d(\mathbf{a})\rangle = 1, \mathcal{X}_{\times 1} A_{\times 2} A_{\times 3} \cdots_{\times d} A \in \mathcal{C}_{m+n+1,d}^* \right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

其拉格朗日函数为

$$L(\mathcal{X},\lambda,\mathcal{U},\mathcal{V}) = \langle \mathcal{A}_f^h,\ \mathcal{X}\rangle - \lambda(\langle \mathcal{X},\ M_d(\mathbf{a})\rangle - 1) + \langle \mathcal{U},\ \mathcal{X}_{\times 1} A_{\times 2} A_{\times 3} \cdots_{\times d} A\rangle - \langle \mathcal{V},\ \mathcal{X}\rangle,$$

其中 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_{m+n+1,\ d}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{C}_{n+1,\ d}$ 均为共正张量，且 $\lambda \in \mathbb{R}$。它可以等价地改写为

$$L(\mathcal{X},\lambda,\mathcal{U},\mathcal{V}) = \left\langle \mathcal{A}_f^h - \lambda M_d(\mathbf{a}) + \mathcal{U}_{\times 1} A_{\times 2}^\top A_{\times 3}^\top \cdots_{\times d} A^\top - \mathcal{V},\ \mathcal{X} \right\rangle + \lambda.$$

因此，(29) 的对偶问题如下所示：

$$\begin{aligned} &\max \ \lambda \\ &\text{s.t. } \ \mathcal{A}_f^h - \lambda M_d(\mathbf{a}) + \mathcal{U}_{\times 1} A_{\times 2}^\top A_{\times 3}^\top \cdots_{\times d} A^\top \in \mathcal{C}_{n+1,d}, \\ &\quad \mathcal{U} \in \mathcal{C}_{m+n+1,d},\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{30}$$

显然，当 $\mathcal{U}$ 为零张量且 λ 足够小时，存在 $\lambda < 0$ 使得 $\mathcal{A}_f - \lambda M_d(\mathbf{a})$ 严格共正，这意味着 (30) 严格可行，且 (29) 和 (30) 满足强对偶性。

同理，由定理 6和注记 5，(20) 的等价完全正优化可改写如下：

$$\begin{aligned} &\min \ \langle \mathcal{A}_{\bar{f}},\ \mathcal{X}\rangle \\ &\text{s.t. } \ \langle \mathcal{X},\ M_d(\bar{\mathbf{a}})\rangle = 1,\ \langle \mathcal{X},\ \tilde{\mathcal{A}}\rangle = 0,\ \mathcal{X}_{\times 1} \bar{A}_{\times 2} \bar{A}_{\times 3} \cdots_{\times d} \bar{A} \in \mathcal{C}_{t,d}^*, \\ &\quad \mathcal{X}_{\times 1} A'_{\times 2} A'_{\times 3} \cdots_{\times d} A' \in \mathcal{C}_{m+n+1}^*, \quad \mathcal{X} \in \mathcal{C}_{n+2,d}^*. \end{aligned} \tag{31}$$

通过直接计算，我们得到 (31) 的对偶问题为

$$\begin{aligned} &\text{最大值 } \ \lambda \\ &\text{s.t. } \ \mathcal{A}_{\bar{f}} - \lambda M_d(\bar{\mathbf{a}}) - \mu\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{U}^1_{\times 1} \bar{A}_{\times 2}^\top \cdots_{\times d} \bar{A}^\top + \mathcal{U}^2_{\times 1} A'^\top_{\times 2} \cdots_{\times d} A'^\top \in \mathcal{C}_{n+2,d}, \\ &\quad \mathcal{U}^1 \in \mathcal{C}_t,\ \mathcal{U}^2 \in \mathcal{C}_{m+n+1,d},\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{32}$$

显然，32是严格可行的，并且对于31和32，强对偶性成立。

5 结论

本文研究将多项式优化问题（POP）等价改写为完全正张量规划（CPTP）的方法。我们不再假设多项式约束在 $\mathbb{R}^n_+$ 上满足非负性，而是考虑一种放宽的条件，仅要求其在由线性不等式约束定义的可行域上满足非负性。为此，我们首先引入一个通用的提升框架，将POP转换为涉及张量变量的凸规划。随后，利用这一提升方法，对具有线性约束且可等价表示为CPTP的POP进行广泛刻画。此外，我们构造了改写后的CPTP的对偶问题，即余正规划，并证明其严格可行，从而确保强对偶性成立。

据我们所知，与二次优化问题不同，由于这类模型固有的复杂性，目前仍缺乏求解完全正张量优化问题的高效数值算法。众所周知，完全正张量优化问题的对偶问题对应于共正张量优化问题，这是数学优化中一个相对较新的领域，它推广了共正矩阵优化。尽管共正矩阵优化的数值算法研究已取得显著进展（见 [21]），共正张量优化方面却仍缺乏同等程度的进展。探索高阶共正张量优化问题的数值方法，是未来研究中一个有趣且前景广阔的方向。

致谢 作者谨向编辑和两位匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢他们提出的建设性意见，这些意见显著提升了本文的质量。本研究得到国家自然科学基金（12071249）、山东省自然科学基金（ZR2024MA003，ZR2021JQ01）、香港创新及科技委员会（InnoHK 项目 CIMDA）和香港研究资助局（项目 CityU 11204821）的资助。

数据和材料的可用性：本研究所用数据可向通讯作者索取。

参考文献

1. Bai, L., Mitchell, J.E., Pang, J.：关于锥二次多项式互补约束问题、锥二次约束二次规划和完全正规划。《数学规划》**159**(1-2), 1–28 (2016) 2. Bomze, I.M., Dür, M., de Klerk, E.：关于共正规划和标准二次优化问题。全球优化杂志 **18**(4), 301–320 (2000) 3. Burer, S.：关于二元与连续非凸二次规划的共正表示。《数学规划》**120**, 479–495 (2009) 4. Chen, H., Chen, Y., Li, G., Qi, L.：一种用于计算一类结构化张量最大特征值的半正定规划方法及其在超图和共正性检验中的应用。Numer. Linear Algebra Appl. **25**(1), e2125 (2018) 5. Chen, H., He, H., Zhou, G., Wang, Y.：一种用于四次多项式优化的高效交替最小化方法。全球优化杂志 **82**, 83–103 (2022) 6. Chen, H., Huang, Z., Qi, L.：共正张量检测及其在物理学和超图中的应用。《计算优化与应用》**69**, 133–158 (2018) 7. Chen, H., Huang, Z., Qi, L.：张量共正性检测：理论与算法。优化理论与应用杂志 **174**, 746–761 (2017)

8. Chen, B., He, S., Li, Z., Zhang, S.：最大块改进与多项式优化。SIAM 优化期刊 **22**, 87–107 (2012) 9. Dahl, G., Leinaas, J.M., Myrheim, J., Ovrum, E.：量子物理中的张量积矩阵逼近问题。线性代数及其应用 **420**, 711–725 (2007) 10. Klerk, E.：在单纯形、超立方体或球面上进行优化的复杂度：简短综述。欧洲运筹学杂志 **16**, 111–125 (2008) 11. He, S., Li, Z., Zhang, S.：带二次约束的齐次多项式优化近似算法。《数学规划》B辑 **125**, 353–383 (2010) 12. Hillar, C.J., Lim, L.：大多数张量问题都是NP难问题。ACM 学报 **60**, 1–39 (2013) 13. Jiang, B., Ma, S., Zhang, S.：实与复多项式优化模型的交替方向乘子法。Optimization **63**, 883–898 (2014) 14. Kov´aˇcov´a, G., Ulus, F：通过凸投影计算凸上像的衰退锥。arXiv:2304.02081. (2023) 15. Kuang, X., Zuluaga, L.：用于多项式优化的完全正和完全正半定张量松弛。全球优化杂志 **70** 551–577 (2018) 16. Lasserre, J.：具有稀疏性的多项式优化中的收敛半定规划松弛。SIAM 优化期刊 **17**(3) 822–843 (2006) 17. Lasserre, J.：半代数几何与多项式优化中的凸性。SIAM 优化期刊 **19**(4) 1995–2014 (2009) 18. Ling, C., He, H.J., Qi, L.Q.：标准四次多项式优化的改进近似结果。《优化快报》**11**, 1767–1782 (2017) 19. Ling, C., Nie, J., Qi, L., Ye, Y.：单位球面上的双二次优化与半定规划松弛。SIAM 优化期刊 **20**, 1286–1310 (2009) 20. Luo, Z., Zhang, S.：一种带二次约束的多元四次多项式优化半定松弛方案。SIAM 优化期刊 **20**, 1716–1736 (2010) 21. D¨ur, M., Rendl, F.：锥优化：重点讨论共正优化和二元二次问题的综述。EURO 计算优化杂志 **9** 100021 (2021) 22. Nesterov, Y.：单纯形上的随机游走与凸多胞体上的二次优化。CORE 讨论论文，鲁汶天主教大学，新鲁汶，比利时 (2003) 23. Nesterov, Y.：非负多项式的结构与优化问题。技术报告，Universit*é* catholique de Louvain，运筹学与计量经济学中心（CORE），(1997) 24. Nguyen, D.：用于二次优化问题的完全正与共正规划建模。Optimization **70**(2) 361–385 (2021) 25. Nie, J.：多项式优化的精确雅可比半定规划松弛。SIAM 优化期刊 **137**, 225–255 (2013) 26. Nie, J., Yang, Z., Zhang, X.：用于检测共正矩阵和张量的完备半定算法。SIAM 优化期刊 **28**(4) 2902–2921 (2018) 27. Pe˜na, J., Vera, J., Zuluaga, L.：多项式优化的完全正重构。《数学规划》**151**(2) 405–431 (2015) 28. Qi, L.：实对称张量的特征值。符号计算杂志 **40**(6), 1302–1324 (2005) 29. Qi, L., Teo, K.：多元多项式极小化及其在信号处理中的应用。全球优化杂志**26**419–433 (2003) 30. Razaviyayn, M., Hong, M., Luo, Z.：非光滑优化的块逐次极小化方法的统一收敛性分析。SIAM 优化期刊 **23**(2) 1126–1153 (2013) 31. Sankuru, S., Prabhu, B. Mohammad, A.：UNIPOL：面向主动感知系统的可分迭代四次多项式优化酉模序列设计。信号处理 **190** 108348 (2022) 32. Shor, N.：多项式函数全局最小值界的一类。Cybernetics and Systems Analysis **23**(6) 731–734 (1987) 33. So, A.：球面约束齐次多项式优化问题的确定性近似算法。《数学规划》**129** 357–382 (2011) 34. Soare, S., Yoon, J.W., Cazacu, O.：关于利用齐次多项式构造各向异性屈服函数及其在板材成形中的应用。国际塑性学报 **24**915–944 (2008) 35. Tseng, P.：非可微极小化块坐标下降法的收敛性。优化理论与应用杂志 **109** 475–494 (2001) 36. Wang, C., Chen, H., Wang, Y., Yan, H., Zhou, G.：共正张量优化问题及其在超图中的应用。工业与管理优化杂志 **20**(**3**) 926–941 (2024)

37. Xia, W., Zuluaga, L.F.：具有线性约束的多项式优化问题的完全正重构。《优化快报》**11** 1229–1241 (2017) 38. Zhang, M., Ni, G., Zhang, G.：用于计算非对称复张量 U-特征值的迭代方法及其在量子纠缠中的应用。《计算优化与应用》**75**(3) 779–798 (2020) 39. Zhou, G., Caccette, L., Teo, K., Wu, S.：单位球面上的非负多项式优化及凸规划松弛。《SIAM优化杂志》，**22** 987–1008 (2012) 40. Zhou, A., Fan, J.：以最小核范数值恢复完全正张量。《计算优化与应用》**70**(2) 419–441 (2018)