arXiv:2601.00390v1 [math.AG] 1 Jan 2026

周群与霍奇数的可表性

SEN YANG

谨以此文献给刘克峰，祝贺他61岁生日

Abstract. 设 k 是 $\mathbb{Q}$ 的代数域扩张，且 X是定义在 k 上的维数为 $d \geq 2$的光滑射影簇。我们研究带有$2 \leq p \leq d$的周群 $CH^p(X)$ 的可表性。当 X 的某些霍奇数消失时，即对于满足 $0 \leq i \leq p-2$的 i，有$H^p(X, \Omega^i_{X/k}) = H^{p+1}(X, \Omega^i_{X/k}) = \cdots = H^{2p-1-i}(X, \Omega^i_{X/k}) = 0$，我们证明，在极大理想 m_A 处，局部增广 Artinian k代数 A 上的 $CH^p(X)$ 的形式完备化$\widehat{CH}^p(A)$ 满足

$$\widehat{CH}^p(A) \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k m_A.$$

这为函子 $\widehat{CH}^p$ 的可表性提供了统一的上同调判据，并推广了 Bloch、Stienstra 和 Mackall 早先关于 $p = 2$ 和 $p = 3$ 的工作。我们的结果揭示了代数循环的变形理论与 X的霍奇结构之间的内在联系。

1. Introduction

设 X 是域 k 上的特征零光滑射影簇。模去有理等价的余维为 p 的代数循环构成的周群 $CH^p(X)$ 是代数几何中的基本不变量，与代数循环、霍奇理论以及簇的算术性质密切相关。一个核心而微妙的问题是，理解周群在底层簇 X 的无穷小变形下如何变化。本文致力于研究周群的可表性。

令 Art_k 表示增广局部 Artinian k-代数的范畴。对于 $A \in Art_k$，记 $X_A = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$。令 $K_p^M(O_{X_A})$ 为与预层相关联的 Milnor K理论层

$$U \to K_p^M(O_{X_A}(U)),$$

2010年数学主题分类。14C25。1

其中 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ 是开仿射的， $K_p^M(O_{X_A}(U)) = K_p^M(R \otimes_k A)$。当 $A = k$ 时，记 $K_p^M(O_X) = K_p^M(O_{X_k})$。

本研究中的一项基本工具是 Bloch公式（参见 [1, 20, 21,26, 29]）。由于我们关注的是带有 $\mathbb{Q}$系数的周群，因此采用如下形式的 Bloch公式

$$CH^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^p(X, K_p^M(O_X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \tag{1.1}$$

Bloch公式 (1.1) 引出了 Art_k 上的一个函子

$$\widehat{CH}^p : A \to \ker\{H^p(X, K_p^M(O_{X_A})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{aug} H^p(X, K_p^M(O_X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\}, \tag{1.2}$$

其中， $H^p(X, K_p^M(O_{X_A})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 可视为 $CH^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的无穷小变形，这由同构 (1.1) 和映射aug 实现；该映射由增广映射 $A \to k$诱导。

群 $\widehat{CH}^p(A)$ 称为 $CH^p(X)$ 的形式完备化。显然， $\widehat{CH}^p$ 是一个Artin环函子。若 Artin环函子 F同构于函子 h_R，则称其为原可表示的，其中函子 h_R定义如下:

$$h_R(A) = Hom(R, A).$$

这里， $A \in Art_k$ R 是一个完备局部诺特 k代数，其极大理想为 m_R ，且满足 $R/m_R^n \in Art_k$； $Hom(R, A)$表示从 R 到 A的局部 k代数同态集合。

原可表示函子的一个有用例子如下:

$$A \to V \otimes_k m_A, \tag{1.3}$$

其中， V 是一个有限维 k向量空间， m_A 是 $A \in Art_k$的极大理想。关于可被形式表示函子的理论的详细介绍，请参阅 [28] 。

我们关注函子 $\widehat{CH}^p$的可表性。当 $p = 1$时，众所周知,

$$\widehat{CH}^1(A) \cong H^1(X, O_X) \otimes_k m_A, \tag{1.4}$$

它具有式（1.3）的形式。因此， $\widehat{CH}^1$的可表性显而易见。

对于对象 $\widehat{CH}^p(A)$ 的可表性的研究是高度非平凡的。在 $p = 2$ 的情形下，当 X 是定义在域k上的曲面，且该域是 $\mathbb{Q}$的代数域扩张时，Bloch [2, 3] 证明存在一个短正合列

$$0 \to H^2(X, O_X) \otimes_k \frac{\Omega^1_{A/k}}{dm_A} \to \widehat{CH}^2(A) \to H^2(X, \Omega^1_{X/k}) \otimes_k m_A \to 0.$$

由此得到以下结果。

定理 1.1（[2]）。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 的代数域扩张 k 上的光滑射影曲面，并假设 $H^2(X,O_X) = 0$。那么，对于任意 $A \in Art_k$，存在一个同构

$$\widehat{CH}^2(A) \cong H^2(X,\Omega^1_{X/k}) \otimes_k m_A.$$

因此，函子 $\widehat{CH}^2$ 是原可表示的，参见（1.3）。

这促成了以下重要猜想，该猜想已得到深入研究；关于其进展，参见 [5, 7, 19, 25, 33, 34] 。回顾一下，几何亏格 $p_g(X) = \dim H^0(X,\Omega^2_{X/k}) = \dim H^2(X,O_X)$。

猜想 1.2（[2]）。设 X 是一个几何亏格为零的连通光滑复射影曲面，即 $p_g(X) = 0$。则阿贝尔映射

$$CH^2_{deg\ 0}(X) \to Alb(X)$$

是一个同构，其中 $CH^2_{deg\ 0}(X)$ 是 $CH^2(X)$ 的子群，由次数为零的零循环组成，而 $Alb(X)$ 是阿贝尔簇。

最近，Mackall 将定理 1.1 推广到了 $p = 3$ 的情形。

定理 1.3（[23]）。设 X 是定义在有理数域 $\mathbb{Q}$ 的代数域扩张 k 上的光滑、射影、几何连通簇。假设满足以下条件：

$$\begin{cases} H^3(X,O_X) = H^4(X,O_X) = H^5(X,O_X) = 0, \\ H^3(X,\Omega^1_{X/k}) = H^4(X,\Omega^1_{X/k}) = 0. \end{cases}$$

那么，对于任意 $A \in Art_k$，存在一个同构

$$\widehat{CH}^3(A) \cong H^3(X,\Omega^2_{X/k}) \otimes_k m_A.$$

因此，函子 $\widehat{CH}^3$ 是原可表示的，参见（1.3）。

对于情形 $p > 3$，函子 $\widehat{CH}^p$ 的原可表示性如何？这自然引出了以下问题。

问题 1.4。设 X 是定义在域 k 上、维数为 $d \geq 2$ 的光滑射影簇，其中 k 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的代数域扩张。对于满足 $2 \leq p \leq d$ 的整数 p，函子 $\widehat{CH}^p$ 何时是原可表示的？

Bloch 和 Mackall 的工作揭示了一个深刻而普遍的原则：$\widehat{CH}^p$ 的可表性由 X的某些霍奇数的消失所决定。基于这一思想，我们回答了问题 1.4，这也是本文的主要结果。

定理 1.5（参见下文定理 4.10）。设 X 是域 k 上维数为 $d \geq 2$ 的光滑射影簇，其中 k 是 $\mathbb{Q}$ 的一个代数域扩张。假设满足以下条件:

$$H^p(X, \Omega^i_{X/k}) = H^{p+1}(X, \Omega^i_{X/k}) = \cdots = H^{2p-1-i}(X, \Omega^i_{X/k}) = 0,$$

其中， $2 \leq p \leq d$ 和 i 是满足 $0 \leq i \leq p-2$的整数。于是，对任意 $A \in Art_k$，存在一个同构

$$\widehat{CH}^p(A) \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k m_A.$$

因此，函子 $\widehat{CH}^p$ 是原可表示的，参见 (1.3)。

值得注意的是，在定理 1.1、定理 1.3 和定理 1.5 中，假设基域 k 是$\mathbb{Q}$的代数域扩张。这样做是为了避免在微分 $\Omega^1_{k/\mathbb{Q}} \neq 0$ 时计算 $\widehat{CH}^p(A)$所遇到的困难。

如果基域 k 包含超越元素，那么计算 $\widehat{CH}^p(A)$（即使对于 $p = 2$）也会复杂得多，因为会出现非平凡的绝对微分。当 $p = 2$时，Stienstra [30]对此进行了研究。

本文结构如下。第 2 节和第 3 节回顾德拉姆上同调和循环同调所需的背景知识。我们在第 4 节证明主要结果，即定理 4.10。

记号:

(1) 除非另有说明， k 是特征零域。令 Art_k表示局部 Artin k-代数 A构成的范畴，其中极大理想为 m_A ，且满足 $A/m_A = k$。

(2) 对任意阿贝尔群 M， $M_{\mathbb{Q}}$ 表示 $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。

2. de Rham cohomology

对于 k上的有限型概形 X ，我们用 $\Omega^\bullet_{X/k}$ 表示德拉姆复形

$$O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X/k} \xrightarrow{d} \cdots .$$

对于每个非负整数 j，德拉姆上同调 $H^j_{dR}(X/k)$ 定义为德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X/k}$ 的超上同调，即，

$$H^j_{dR}(X/k) = \mathbb{H}^j(X, \Omega^\bullet_{X/k}).$$

我们回顾一个德拉姆上同调的具体例子。

例2.1（参见 [18]第54页的注记）。仿射直线 A_k^1 的德拉姆上同调如下:

$$\begin{cases} H_{dR}^j(A_k^1/k) = k, \ j = 0; \\ H_{dR}^j(A_k^1/k) = 0, \ j \neq 0. \end{cases}$$

引理2.2（[14]）。当 $X = \mathrm{Spec}(T)$为仿射时，德拉姆上同调 $H_{dR}^j(X/k)$与下列上链复形的 j次上同调一致:

$$\Omega_{T/k}^\bullet : \ T \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^j \xrightarrow{d} \cdots .$$

我们简要概述证明。

证明。存在一个谱序列

$$E_1^{i_1,i_2} = H^{i_2}(X, \Omega_{X/k}^{i_1}) \Longrightarrow H_{dR}^j(X/k).$$

其中 $j = i_1 + i_2$。根据塞尔消失定理，当 $i_2 > 0$时，对每个$\Omega_{X/k}^{i_1}$，我们有

$$H^{i_2}(X, \Omega_{X/k}^{i_1}) = 0.$$

这意味着 $H_{dR}^j(X/k)$是下列复形的 j次上同调

$$H^0(X, O_X) \to H^0(X, \Omega_{X/k}^1) \to \cdots \to H^0(X, \Omega_{X/k}^j) \to \cdots ,$$

其形式为

$$T \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_{T/k}^j \xrightarrow{d} \cdots .$$

□

德拉姆上同调具有一系列良好性质。详情请参见[14, 15, 18, 32]。

设 $\mathcal{H}_{dR}^q(O_X)$ 为德拉姆上同调层，其定义为与以下预层相关联的层:

$$U \to H_{dR}^q(U/k),$$

其中 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ 是开仿射集，而 $H_{dR}^q(U/k)$ 是德拉姆复形的超上同调

$$\Omega_{U/k}^\bullet : \ U \xrightarrow{d} \Omega_{U/k}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{U/k}^2 \xrightarrow{d} \cdots .$$

我们希望找到层 $\mathcal{H}_{dR}^q(O_X)$ 的一个分解，从而能够计算其上同调。这引出了经典的 Bloch-Ogus 定理，该定理最初由 Bloch 和 Ogus [6] 证明。

给定一个光滑代数簇 X 和满足自然公理的上同调理论 h，经典布洛赫–奥格斯定理指出，Cousin 复形（由余维滤过

谱序列构造而成）的扎里斯基层化是与预层 $U \to h^*(U)$ 相关联的扎里斯基层的柔软层解。

Bloch 和 Ogus [6] 通过归约到消去定理，证明了适用于以单位根为系数的 ´étale 上同调的定理。Gabber 在 [13]中对其进行了推广。Colliot-Th´el`ene、Hoobler 和 Kahn 运用 Gabber 的方法，证明了该定理适用于任何满足 ´étale 切除和同伦不变性（或射影丛公式）的带支撑的上同调理论，见[9]的推论 5.1.11 和命题 5.4.3。我们已在 [12, 36]中将 Bloch-Ogus 定理应用于代数 K-理论和循环同调，以研究周群的变形。本文将把该定理应用于德拉姆上同调（见 [6]的例 2.2 或 [9]的 7.3）。

在本节余下部分中， X 是域 k 上的一个光滑射影簇，且 q 是一个非负整数。

定理2.3（参见 [6]中的定理4.2）。Cousin 复形的扎里斯基层化

$$0 \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^q_{dR}(x/k) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{q-1}_{dR}(x/k) \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} H^{q-2}_{dR}(x/k) \to \cdots, \tag{2.1}$$

是德拉姆上同调层 $\mathcal{H}^q_{dR}(O_X)$的一个柔软层解，其中每个 $H^m_{dR}(x/k)$, $m = q, q-1, \cdots$定义如下

$$H^m_{dR}(x/k) = \varinjlim_{x\in U} H^m_{dR}(U/k).$$

推论2.4（参见 [6]中的推论6.2）。对于满足$j > q \geq 0$的每个整数 j，德拉姆上同调层$\mathcal{H}^q_{dR}(O_X)$的 j阶上同调消失，即

$$H^j(X, \mathcal{H}^q_{dR}(O_X)) = 0.$$

证明。由定理2.3，层上同调 $H^j(X, \mathcal{H}^q_{dR}(O_X))$可计算为复形（2.1）的 j阶上同调。更确切地说，它是复形的 j阶上同调

$$0 \to \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^q_{dR}(x/k) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(j-1)}} H^{q-(j-1)}_{dR}(x/k) \to \bigoplus_{x\in X^{(j)}} H^{q-j}_{dR}(x/k)$$
$$\to \bigoplus_{x\in X^{(j+1)}} H^{q-(j+1)}_{dR}(x/k) \to \cdots.$$

由于 $j > q, q-j < 0, H^{q-j}_{dR}(x/k) = 0$。由此得到所需结果。□

对于 $A \in Art_k$，我们记 $X_A = X \otimes_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$。令 $\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A})$ 为德拉姆上同调层，其定义为与下列预层相关联的层

$$U \to H^q_{dR}(U_A/k),$$

其中 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ 是开仿射集，$U_A = U \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$，而 $H^q_{dR}(U_A/k)$ 是德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{U_A/k}$ 的超上同调，其形式如下：

$$U_A \xrightarrow{d} \Omega^1_{U_A/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{U_A/k} \xrightarrow{d} \cdots .$$

引理 2.5（K¨unneth 公式）。采用上述记号，存在层之间的同构

$$\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A}) \cong \bigoplus_{q_1+q_2=q} \mathcal{H}^{q_1}_{dR}(O_X) \otimes_k H^{q_2}_{dR}(A), \tag{2.2}$$

其中 q 是非负整数，$H^{q_2}_{dR}(A)$ 是 A 的德拉姆上同调，即下列复形的第 q_2 个上同调（参见引理 2.2）

$$\Omega^\bullet_{A/k}: \ A \xrightarrow{d} \Omega^1_{A/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{A/k} \xrightarrow{d} \cdots .$$

K¨unneth 公式为专家所熟知。为方便读者，我们简要给出证明，并请参阅 [32] 的第 8 节，其中全面研究了德拉姆上同调的 K¨unneth 公式。

证明。只需在 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ 上局部验证同构（2.2），并证明以下同构：

$$H^q_{dR}(U_A/k) \cong \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}_{dR}(U/k) \otimes_k H^{q_2}_{dR}(A).$$

由于 U 和 $U_A = \mathrm{Spec}(R \otimes_k A)$ 都是仿射的，根据引理 2.2，德拉姆上同调 $H^q_{dR}(U_A/k)$ 和 $H^{q_1}_{dR}(U/k)$ 分别与下列复形 $\Omega^\bullet_{R\otimes_k A/k}$ 和 $\Omega^\bullet_{R/k}$ 的上同调群一致，

$$\Omega^\bullet_{R\otimes_k A/k} : R \otimes_k A \xrightarrow{d} \Omega^1_{R\otimes_k A/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{R\otimes_k A/k} \xrightarrow{d} \cdots ,$$
$$\Omega^\bullet_{R/k} : R \xrightarrow{d} \Omega^1_{R/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{R/k} \xrightarrow{d} \cdots .$$

也就是说，我们有

$$H^q_{dR}(U_A/k) \cong H^q(\Omega^\bullet_{R\otimes_k A/k}), \quad H^{q_1}_{dR}(U/k) \cong H^{q_1}(\Omega^\bullet_{R/k}).$$

因此，只需证明

$$H^q(\Omega^\bullet_{R\otimes_k A/k}) \cong \bigoplus_{q_1+q_2=q} H^{q_1}(\Omega^\bullet_{R/k}) \otimes_k H^{q_2}(\Omega^\bullet_{A/k}).$$

为此，我们注意到，下面的同构

$$\Omega^1_{R\otimes_k A/k} \cong (\Omega^1_{R/k} \otimes_k A) \oplus (\Omega^1_{A/k} \otimes_k R),$$

意味着复形 $\Omega^{\bullet}_{R\otimes_k A/k}$ 可以与张量积 $\Omega^{\bullet}_{R/k}\otimes_k\Omega^{\bullet}_{A/k}$ 所对应的复形等同。因此，两个复形的上同调群之间存在同构：

$$H^q(\Omega^{\bullet}_{R\otimes_k A/k})\cong H^q(\Omega^{\bullet}_{R/k}\otimes_k\Omega^{\bullet}_{A/k}).$$

剩下需要证明的是

$$H^q(\Omega^{\bullet}_{R/k}\otimes_k\Omega^{\bullet}_{A/k})\cong\bigoplus_{q_1+q_2=q}H^{q_1}(\Omega^{\bullet}_{R/k})\otimes_k H^{q_2}(\Omega^{\bullet}_{A/k}). \tag{2.3}$$

存在一个 K¨unneth 谱序列（参见 [24]中的定理2.20）

$$E_2^{p,q}=\bigoplus_{q_1+q_2=q}Tor_k^p(H^{q_1}(\Omega^{\bullet}_{R/k}),H^{q_2}(\Omega^{\bullet}_{A/k}))\Longrightarrow H^{p+q}(\Omega^{\bullet}_{R\otimes_k A/k}).$$

由于 k 是一个域，因此不存在非平凡的高阶Tor群。确切地说，当 $p>0$ 时，

$$Tor_k^p(H^{q_1}(\Omega^{\bullet}_{R/k}),H^{q_2}(\Omega^{\bullet}_{A/k}))=0.$$

因此，上述谱序列退化，并导出同构(2.3)。证明至此完成。

□

设 j 为一个非负整数。我们将同构(2.2)传递到上同调群：

$$\begin{aligned}H^j(X,\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A}))&\cong H^j(X,\bigoplus_{q_1+q_2=q}\mathcal{H}^{q_1}_{dR}(O_X)\otimes_k H^{q_2}_{dR}(A))\\&\cong\bigoplus_{q_1+q_2=q}H^j(X,\mathcal{H}^{q_1}_{dR}(O_X)\otimes_k H^{q_2}_{dR}(A))\\&\cong\bigoplus_{q_1+q_2=q}H^j(X,\mathcal{H}^{q_1}_{dR}(O_X))\otimes_k H^{q_2}_{dR}(A).\end{aligned}$$

当 $j>q$时，由于 $q\geq q_1$，显然有 $j\geq q_1$。由推论2.4立即可得，$H^j(X,\mathcal{H}^{q_1}_{dR}(O_X))=0$。这就得到以下结果。

推论 2.6. 对于满足 $j>q\geq 0$的每个整数 j，我们有

$$H^j(X,\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A}))=0.$$

根据引理2.2，德拉姆上同调层 $\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A})$可以与德拉姆复形的第 q个上同调相识别

$$\cdots\xrightarrow{d}\Omega^{q-1}_{X_A/k}\xrightarrow{d}\Omega^{q}_{X_A/k}\xrightarrow{d}\Omega^{q+1}_{X_A/k}\xrightarrow{d}\cdots.$$

准确地说，令 T^q 表示.....的核

$$d:\ \Omega^q_{X_A/k}\to\Omega^{q+1}_{X_A/k},$$

并令 $d\Omega^{q-1}_{X_A/k}$ 表示.....的像

$$d:\ \Omega^{q-1}_{X_A/k}\to\Omega^{q}_{X_A/k}.$$

那么，德拉姆上同调层 $\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A})$ 可以识别为商层 $d^{T^q}\Omega^{q-1}_{X_A/k}$，这一点专家们应该都知道。

引理 2.7. 采用上述记号，有一个同构

$$\mathcal{H}^q_{dR}(O_{X_A})\cong\frac{T^q}{d\Omega^{q-1}_{X_A/k}}.$$

我们利用推论 2.6 和引理 2.7 推导出以下结果。

推论 2.8. 对每个满足 $j>q\geq 0$ 的整数 j，层 $d^{T^q}\Omega^{q-1}_{X_A/k}$ 的 j 阶上同调消失，即

$$H^j(X,\frac{T^q}{d\Omega^{q-1}_{X_A/k}})=0.$$

3. Cyclic homology

设 R 是一个结合交换含幺 k-代数。其霍赫希尔德复形（系数取自 R）为

$$C(R):\ \cdots\to R^{\otimes(n+1)}\xrightarrow{b}R^{\otimes n}\to\cdots\to R\otimes_k R\xrightarrow{b}R,$$

其中 b 是霍赫希尔德边界（参见 [22]的第 1.1.1 节）。霍赫希尔德同调群 $HH_n(R)$定义为霍赫希尔德复形 $C(R)$的同调

$$HH_n(R):=H_n(C(R)).$$

循环双复形 $CC(R)$是由霍赫希尔德复形 $C(R)$构成的第一象限双复形，其全复形 Tot($CC(R)$)可用于定义 R的循环同调

$$HC_n(R):=H_n(\mathrm{Tot}(CC(R))). \tag{3.1}$$

详情请参见 [22] 的第 5.1 节。

Weibel、McCarthy 和 Keller 将循环同调及其变体的定义推广到了概形、正合范畴和局部化对；概要请参见 [11] 的第 2 节。

Hochschild 同调 $HH_n(R)$和循环同调 $HC_n(R)$上定义了 λ 运算 λ^m 和亚当斯运算 ψ^m，详情请参见 [22] 第 4.5 节和 [35] 第 9.4.3 节。对于每个整数$n\geq 1$，群 $HC_n(R)$可分解为特征子空间的直和

$$HC_n(R)=HC_n^{(1)}(R)\oplus\cdots\oplus HC_n^{(i)}(R)\oplus\cdots\oplus HC_n^{(n)}(R),$$

其中 $HC_n^{(i)}(R)$是 $\psi^m = m^{i+1}$的特征子空间。对于 $n=0$， $HC_0(R) = HC_0^{(0)}(R) = R$。

引理 3.1（参见 [35]的推论 9.8.16）。采用上述记号，存在一个同构

$$HC_n^{(n)}(R) \cong \frac{\Omega_{R/k}^n}{d\Omega_{R/k}^{n-1}},$$

其中 $d\Omega_{R/k}^{n-1}$ 是 $d\colon \Omega_{R/k}^{n-1} \to \Omega_{R/k}^n$的像。

对于 $A \in Art_k$，增广映射 $A \to k$ 诱导出一个代数 K 群的态射

$$K_n(R \otimes_k A) \to K_n(R \otimes_k k) \xrightarrow{\cong} K_n(R),$$

其核即为相对 K 群，记作$\overline{K}_n(R \otimes_k A)$。根据 [29]，这些 K 群带有亚当斯运算 ψ^m。令 $\overline{K}_n^{(i)}(R \otimes_k A)$为 $\psi^m = m^i$的特征子空间。相对循环同调 $\overline{HC}_{n-1}(R \otimes_k A)$及其特征子空间 $\overline{HC}_{n-1}^{(i-1)}(R \otimes_k A)$的定义类似。Goodwillie 和 Cathelineau 证明，这些相对群通过相对陈特征联系起来。

定理 3.2（[8, 16]）。沿用上述记号，相对陈特征诱导出以下同构（其中循环同调定义在 $\mathbb{Q}$ 上），

$$\begin{cases} \overline{K}_n(R \otimes_k A)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} \overline{HC}_{n-1}(R \otimes_k A), \\ \overline{K}_n^{(i)}(R \otimes_k A)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} \overline{HC}_{n-1}^{(i-1)}(R \otimes_k A). \end{cases}$$

该定理对于计算相对 K 群非常有用。Corti˜nas- Haesemeyer-Weibel [10] 将其推广到了空间层面。

在本节余下部分， X 是域 k 上的光滑射影簇，且该域的特征为零。对于 $A \in Art_k$，我们记作 $X_A = X \times \mathrm{Spec}(A)$。

定义 3.3。令 $HC_n(O_{X_A})$ 为与以下预层相关联的循环同调层

$$U \to HC_n(O_{X_A}(U)),$$

其中 $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$是开仿射集， $HC_n(O_{X_A}(U)) = HC_n(R \otimes_k A)$ 是 $R \otimes_k A$ 的循环同调，参见（3.1）。当 $A = k$ 时，我们记作$HC_n(O_X) = HC_n(O_{X_k})$。

亚当斯运算 ψ^m 作用于层 $HC_n(O_{X_A})$，其（对应于 $\psi^m = m^{i+1}$ 的）特征子空间为 $HC_n^{(i)}(O_{X_A})$。当 $A = k$ 时，我们将 $HC_n^{(i)}(O_X) = HC_n^{(i)}(O_{X_k})$ 记作。

定义 3.4. 相对循环同调层 $\overline{HC}_n^{(i)}(O_{X_A})$ 定义为下列映射（由 $A \to k$ 诱导）的核

$$HC_n^{(i)}(O_{X_A}) \to HC_n^{(i)}(O_X).$$

设 p 是一个整数，使得 $1 \leq p \leq \dim(X)$。我们用 $\overline{K}_p^M(O_{X_A})$ 表示相对 Milnor K 理论层，它定义为下述映射的核

$$K_p^M(O_{X_A}) \xrightarrow{A\to k} K_p^M(O_X).$$

存在一个短正合列

$$0 \to \overline{K}_p^M(O_{X_A}) \to K_p^M(O_{X_A}) \to K_p^M(O_X) \to 0,$$

该短正合列是分裂的。因此，形式完备化 $\widehat{CH}^p(A)$（定义见 (1.2)）可与 $H^p(X, \overline{K}_p^M(O_{X_A}))_{\mathbb{Q}}$ 等同，即

$$\widehat{CH}^p(A) \cong H^p(X, \overline{K}_p^M(O_{X_A}))_{\mathbb{Q}}. \tag{3.2}$$

设 $K_p^{(p)}(O_{X_A})$ 是 $\psi^m = m^p$ 的特征子空间，其中 ψ^m 是 K-理论层 $K_p(O_{X_A})$ 上的亚当斯运算，参见 [29]。由 [29], 第 526 页定理 5 的层版本可知，存在一个同构 $K_p^M(O_{X_A})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} K_p^{(p)}(O_{X_A})_{\mathbb{Q}}$，由此可得

$$\overline{K}_p^M(O_{X_A})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cong} \overline{K}_p^{(p)}(O_{X_A})_{\mathbb{Q}}, \tag{3.3}$$

其中 $\overline{K}_p^{(p)}(O_{X_A})$ 是映射 $K_p^{(p)}(O_{X_A}) \xrightarrow{A\to k} K_p^{(p)}(O_X)$ 的核。

结合定理 3.2 的层版本同构（令$i = n = p$）以及 (3.2) 和 (3.3), 我们可以用循环同调来计算形式完备化$\widehat{CH}^p(A)$。

引理 3.5. 使用上述记号，存在一个同构

$$\widehat{CH}^p(A) \cong H^p(X, \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A})).$$

4. Pro-representability of Chow groups

本节研究 (1.2) 中定义的 $\widehat{CH}^p(A)$ 的可表性，其中 $1 \leq p \leq \dim(X)$。由于 $p = 1$ 的情形已知（参见 (1.4)），我们将重点讨论 $p \geq 2$的情形。这要求 $\dim(X) \geq 2$。

从现在起，我们采用以下设定。

设定 4.1. 设 X 是一个定义在特征为零的域 k 上的光滑射影簇，其维数为 $\dim(X) \geq 2$。设 p 是一个

整数，使得 $2 \leq p \leq \dim(X)$ 成立。我们固定整数 p，并假设 X 满足以下条件

$$H^p(X, \Omega^i_{X/k}) = H^{p+1}(X, \Omega^i_{X/k}) = \cdots = H^{2p-1-i}(X, \Omega^i_{X/k}) = 0, \tag{4.1}$$

其中，i 是满足 $0 \leq i \leq p-2$的整数。

回顾一下，霍奇数 $h^{i,j}(X)$ 是 $H^j(X, \Omega^i_{X/k})$ 的维数，其中 j 是非负整数。条件（4.1）也可以表述为：

$$h^{i,p}(X) = h^{i,p+1}(X) = \cdots = h^{i,2p-1-i}(X) = 0.$$

为了理解条件（4.1），我们先考察 $p = 2$的情形。注意，在这种情况下，i 只能是 0。条件（4.1）变为

$$H^2(X, O_X) = H^3(X, O_X) = 0.$$

如果进一步假设 X 是一个曲面，那么格罗滕迪克消失定理表明，$H^3(X, O_X) = 0$。于是条件（4.1）变为

$$H^2(X, O_X) = 0.$$

换句话说，我们要求 X 的几何亏格为零，这正是猜想 1.2 的假设。

在 $p = 3, p-2 = 1$ 的情形下。由于 $0 \leq i \leq p-2, i$ 可以是 0 或 1，条件 (4.1) 变为

$$\begin{cases} H^3(X, O_X) = H^4(X, O_X) = H^5(X, O_X) = 0, \\ H^3(X, \Omega^1_{X/k}) = H^4(X, \Omega^1_{X/k}) = 0. \end{cases}$$

这是 Mackall 用来研究 $\widehat{CH}^3(A)$ 的可表性条件，参见定理 1.3。

一般而言，条件 (4.1) 具有以下形式：

$$\begin{cases} i = 0 : H^p(X, O_X) = H^{p+1}(X, O_X) = \cdots = H^{2p-1}(X, O_X) = 0, \\ i = 1 : H^p(X, \Omega^1_{X/k}) = H^{p+1}(X, \Omega^1_{X/k}) = \cdots = H^{2p-2}(X, \Omega^1_{X/k}) = 0, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ i = p-2 : H^p(X, \Omega^{p-2}_{X/k}) = H^{p+1}(X, \Omega^{p-2}_{X/k}) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

寻找满足条件 (4.1) 的簇很有意义。我们从射影空间开始，这是一个经典且广为人知的例子。

例 4.2。设 $X = \mathbb{P}^n_k$ 为 n 维射影空间。其上同调 $H^j(X, \Omega^{j'}_{X/k})$ 计算如下：

$$\begin{cases} H^j(X, \Omega^{j'}_{X/k}) = k, \text{ if } j = j' \leq n, \\ H^j(X, \Omega^{j'}_{X/k}) = 0, \text{ else.} \end{cases}$$

因此，射影空间显然满足条件 (4.1)。

接下来，我们考虑射影空间中的适当超曲面或完全交。这引导我们关注 Rapoport 的研究。

例4.3（[27]）。对于 $p = 3$的情形，以下簇满足条件（4.1）：

- （1） $\mathbb{P}^6$中的光滑三次超曲面。
- （2） $\mathbb{P}^7$中的两个二次曲面的光滑完全交。

这一例子在文献中有所应用；例如，参见 [23] 的例3.2，其中讨论了相关问题。

注4.4。当基域为复数域 $\mathbb{C}$时，条件（4.1）的一部分是 $p+1$阶上同调群平凡：

$$H^{p+1}(X, O_X) = H^{p+1}(X, \Omega^1_{X/\mathbb{C}}) = \cdots = H^{p+1}(X, \Omega^{p-2}_{X/\mathbb{C}}) = 0. \tag{4.3}$$

Green 和 Griffiths 用此研究 [17] 中周群 $CH^p(X)$ 的变形。设 $Z \subset X$ 是余维为 p 的子簇，并令 $[Z] \in CH^p(X)$ 为相应的有理等价类。他们证明，在满足条件 (4.3)，且基本类 $\psi_0(Z)$ 保持为 (p,p) 霍奇类型的前提下，类 $[Z]$ 可以形式地提升。精确陈述及进一步讨论参见 [17] 。

对于任意 $A \in Art_k$，我们照旧记 $X_A = X \otimes_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$。存在一个可以通过局部检验的同构，

$$\Omega^l_{X_A/k} \cong \bigoplus_{l_1+l_2=l} \Omega^{l_1}_{X/k} \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}, \tag{4.4}$$

其中 l、 l_1 和 l_2 均为非负整数。回忆 $i \leq p-2$ 属于设定 4.1。令 $l = i$ ，得到

$$\begin{aligned} H^j(X, \Omega^i_{X_A/k}) &\cong H^j(X, \bigoplus_{l_1+l_2=i} \Omega^{l_1}_{X/k} \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}) \\ &\cong \bigoplus_{l_1+l_2=i} H^j(X, \Omega^{l_1}_{X/k} \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}) \\ &\cong \bigoplus_{l_1+l_2=i} H^j(X, \Omega^{l_1}_{X/k}) \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 j 是一个非负整数。

注意 $0 \leq l_1 \leq i \leq p-2$。条件 (4.1) 表明

$$H^j(X, \Omega^{l_1}_{X/k}) = 0, \text{ where } j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-l_1.$$

由于 $l_1 \leq i$, $2p-1-l_1 \geq 2p-1-i$，因此可得

$$H^j(X, \Omega^{l_1}_{X/k}) = 0, \text{ where } j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-i. \tag{4.6}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 可得以下结果。

引理 4.5。在设定 4.1 中，我们有如下结论

$$H^p(X,\Omega^i_{X_A/k})=H^{p+1}(X,\Omega^i_{X_A/k})=\cdots=H^{2p-1-i}(X,\Omega^i_{X_A/k})=0.$$

其核为

$$d:O_{X_A}\to\Omega^1_{X_A/k},$$

德拉姆上同调层 $\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A})$，参见引理 2.7（令 $q=0$）。我们将 dO_{X_A} 记作 d的像。由群同态基本定理，有层的短正合列

$$0\to\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A})\to O_{X_A}\to dO_{X_A}\to 0,$$

其对应的长正合列具有如下形式

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad &\cdots\to H^j(X,\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A}))\to H^j(X,O_{X_A})\to H^j(X,dO_{X_A})\\ &\to H^{j+1}(X,\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A}))\to\cdots,\end{aligned}$$

其中 j 是非负整数。

当 $j>0$ 时，由推论 2.6 可得

$$H^j(X,\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A}))=H^{j+1}(X,\mathcal{H}^0_{dR}(O_{X_A}))=0.$$

(4.7) 的正合性推出

$$H^j(X,O_{X_A})\cong H^j(X,dO_{X_A}).$$

将其与引理 4.5（令 $i=0$）结合，我们得到如下消失结果。

引理 4.6. 在设定 4.1 中，对于 $j=p,\ p+1,\cdots,2p-1$，j 阶上同调群 $H^j(X,dO_{X_A})$ 是平凡的，即，

$$H^p(X,dO_{X_A})=H^{p+1}(X,dO_{X_A})=\cdots=H^{2p-1}(X,dO_{X_A})=0.$$

令 T^1 和 $d\Omega^1_{X_A/k}$ 分别表示以下映射的核和像

$$d:\ \Omega^1_{X_A/k}\to\Omega^2_{X_A/k}.$$

存在两个层的短正合列

$$0\to dO_{X_A}\to T^1\to\mathcal{H}^1_{dR}(O_{X_A})\to 0,\tag{4.8}$$

$$0\to T^1\to\Omega^1_{X_A/k}\to d\Omega^1_{X_A/k}\to 0.\tag{4.9}$$

这里，(4.8) 的正合性由引理 2.7（令 $q=1$）得出，而 (4.9) 的正合性则来自群同态基本定理。

与 (4.8) 相关的层上同调群长正合列为

$$(4.10)\qquad \cdots\to H^j(X,dO_{X_A})\to H^j(X,T^1)\to H^j(X,\mathcal{H}^1_{dR}(O_{X_A}))\to\cdots,$$

其中 j 是一个非负整数。

当 j是一个介于 p和 $2p-1$之间的整数，即 $j=p$、 $p+1$、 $\cdots$、 $2p-1$时，引理 4.6 已证明

$$H^j(X, dO_{X_A}) = 0.$$

同时，由于 $j \geq p \geq 2 > 1$，根据推论 2.6， H^j（X， $\mathcal{H}^1_{dR}$（O_{X_A}））$=0$。由序列 (4.10) 的正合性可知

$$H^j(X, T^1) = 0, \text{ where } j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1. \tag{4.11}$$

与 (4.9) 相关联的层上同调群长正合列具有如下形式

$$\begin{aligned} \cdots \to H^j(X, T^1) \to H^j(X, \Omega^1_{X_A/k}) \to H^j(X, d\Omega^1_{X_A/k}) \to \\ H^{j+1}(X, T^1) \to H^{j+1}(X, \Omega^1_{X_A/k}) \to \cdots, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中 j 是一个非负整数。

对于 $j=p$、 $p+1$、 $\cdots$、 $2p-2$，将 (4.11) 代入 (4.12)，可得

$$H^j(X, \Omega^1_{X_A/k}) \cong H^j(X, d\Omega^1_{X_A/k}).$$

将其与引理 4.5（令 $i=1$）结合，我们得到以下消失结果。

引理 4.7. 对于 $j = p, p+1, \cdots, 2p-2$，上同调 $H^j(X, d\Omega^1_{X_A/k})$ 是平凡的。也就是说，

$$H^p(X, d\Omega^1_{X_A/k}) = H^{p+1}(X, d\Omega^1_{X_A/k}) = \cdots = H^{2p-2}(X, d\Omega^1_{X_A/k}) = 0.$$

现在我们推广引理 4.6 和引理 4.7。令 T^i 和 $d\Omega^i_{X_A/k}$ 分别表示以下映射的核与像

$$d:\ \Omega^i_{X_A/k} \to \Omega^{i+1}_{X_A/k},$$

其中 $i = 0, 1, \cdots, p-2$。

引理 4.8. 在设定 4.1 中，对于 $j = p,\ p+1, \cdots, 2p-1-i$，上同调 $H^j(X, d\Omega^i_{X_A/k})$ 是平凡的。换言之，我们有

$$H^p(X, d\Omega^i_{X_A/k}) = H^{p+1}(X, d\Omega^i_{X_A/k}) = \cdots = H^{2p-1-i}(X, d\Omega^i_{X_A/k}) = 0.$$

特别地，当 $i = p-2$ 时，我们有

$$H^p(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) = H^{p+1}(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) = 0. \tag{4.13}$$

证明。我们对 i 使用归纳法。 $i=0$ 的情形已在引理 4.6 中证明。对于 $i \geq 1$ 的情形，假设 $i-1$ 的情形已证明。也就是说，对于

$$j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-(i-1),$$

上同调 $H^j(X, d\Omega^{i-1}_{X_A/k})$ 是平凡的，即，

$$H^j(X, d\Omega^{i-1}_{X_A/k}) = 0. \tag{4.14}$$

我们采用证明引理 4.7 的方法继续进行。层存在两个短正合列

$$0 \to d\Omega^{i-1}_{X_A/k} \to T^i \to \mathcal{H}^i_{dR}(O_{X_A}) \to 0, \tag{4.15}$$

$$0 \to T^i \to \Omega^i_{X_A/k} \to d\Omega^i_{X_A/k} \to 0. \tag{4.16}$$

这里，(4.15) 的正合性来自引理 2.7（令 $q = i$），而 (4.16) 的正合性来自群同态的基本定理。

与 (4.15) 相关联的层上同调群长正合列具有如下形式

$$\cdots \to H^j(X, d\Omega^{i-1}_{X_A/k}) \to H^j(X, T^i) \to H^j(X, \mathcal{H}^i_{dR}(O_{X_A})) \to \cdots. \tag{4.17}$$

由于整数 i 满足 $0 \leq i \leq p-2$，对于 $j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-(i-1)$，显然有 $j \geq p > p-2 \geq i$。由推论 2.6 可得

$$H^j(X, \mathcal{H}^i_{dR}(O_{X_A})) = 0.$$

结合 (4.14)，利用序列 (4.17) 的正合性可知

$$H^j(X, T^i) = 0, \text{ where } j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-(i-1). \tag{4.18}$$

与 (4.16) 相关联的层上同调群的长正合列形式如下

$$\begin{aligned} \cdots \to H^j(X, T^i) \to H^j(X, \Omega^i_{X_A/k}) \to H^j(X, d\Omega^i_{X_A/k}) \\ \to H^{j+1}(X, T^i) \to H^{j+1}(X, \Omega^i_{X_A/k}) \to \cdots. \end{aligned} \tag{4.19}$$

当 $j = p, p+1, \cdots, 2p-1-i$ 时，由 (4.18) 可知，$H^j(X, T^i)$ 和 $H^{j+1}(X, T^i)$ 均为平凡的。(4.19) 的正合性推出

$$H^j(X, \Omega^i_{X_A/k}) \cong H^j(X, d\Omega^i_{X_A/k}).$$

结合引理 4.5，我们得到

$$H^j(X, d\Omega^i_{X_A/k}) = 0, \text{ where } j = p,\ p+1,\ \cdots,\ 2p-1-i.$$

至此，证明完成。

□

存在一个层的短正合列

$$0 \to d\Omega^{p-2}_{X_A/k} \to \Omega^{p-1}_{X_A/k} \to \frac{\Omega^{p-1}_{X_A/k}}{d\Omega^{p-2}_{X_A/k}} \to 0,$$

其对应的长正合列形式为

$$\cdots \to H^p(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) \to H^p(X, \Omega^{p-1}_{X_A/k}) \to H^p(X, \frac{\Omega^{p-1}_{X_A/k}}{d\Omega^{p-2}_{X_A/k}})$$
$$\to H^{p+1}(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) \to \cdots .$$

由于 $H^p(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) = H^{p+1}(X, d\Omega^{p-2}_{X_A/k}) = 0$，参见（4.13），可得

$$\begin{aligned} H^p(X, \frac{\Omega^{p-1}_{X_A/k}}{d\Omega^{p-2}_{X_A/k}}) &\cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X_A/k}) \\ &\cong H^p(X, \bigoplus_{l_1+l_2=p-1} \Omega^{l_1}_{X/k} \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}) \\ &\cong \bigoplus_{l_1+l_2=p-1} H^p(X, \Omega^{l_1}_{X/k} \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}) \\ &\cong \bigoplus_{l_1+l_2=p-1} H^p(X, \Omega^{l_1}_{X/k}) \otimes_k \Omega^{l_2}_{A/k}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中第二个同构来自（4.4）（令 $l = p-1$）。

当 l_1 从 0 取到 $p-2$，即 $0 \le l_1 \le p-2$时，条件（4.1）表明

$$H^p(X, \Omega^{l_1}_{X/k}) = 0.$$

这表明，在上述直和中唯一的非平凡直和项是 $H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k A$，在此情形下，$l_1 = p-1$ 和 $l_2 = 0$。因此，同构（4.20）变为

$$H^p(X, \frac{\Omega^{p-1}_{X_A/k}}{d\Omega^{p-2}_{X_A/k}}) \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k A. \tag{4.21}$$

当 $A = k$ 时，同构 (4.21) 特化为

$$H^p(X, \frac{\Omega^{p-1}_{X/k}}{d\Omega^{p-2}_{X/k}}) \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k k \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}). \tag{4.22}$$

由引理 3.1，我们得到以下层同构 [1]

$$HC_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A}) \cong \frac{\Omega_{X_A/\mathbb{Q}}^{p-1}}{d\Omega_{X_A/\mathbb{Q}}^{p-2}}, HC_{p-1}^{(p-1)}(O_X) \cong \frac{\Omega_{X/\mathbb{Q}}^{p-1}}{d\Omega_{X/\mathbb{Q}}^{p-2}}. \tag{4.23}$$

从现在起，我们对基域k 附加一个假设，并考虑以下设定。

设定 4.9。在设定 4.1 中，我们进一步假设 k 是 $\mathbb{Q}$的代数域扩张。

在此设定下，对于每个非负整数 l，$\Omega_{X_A/\mathbb{Q}}^l = \Omega_{X_A/k}^l$。因此，我们可以将 (4.23)改写为

$$HC_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A}) \cong \frac{\Omega_{X_A/k}^{p-1}}{d\Omega_{X_A/k}^{p-2}}, HC_{p-1}^{(p-1)}(O_X) \cong \frac{\Omega_{X/k}^{p-1}}{d\Omega_{X/k}^{p-2}}. \tag{4.24}$$

令 $\overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A})$ 表示相对循环同调层，参见定义 3.4（令 $i = n = p-1$）。存在一个分裂短正合列

$$0 \to \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A}) \to HC_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A}) \xrightarrow{A\to k} HC_{p-1}^{(p-1)}(O_X) \to 0,$$

这给出了一个分裂短正合列（根据 (4.24)）：

$$0 \to \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A}) \to \frac{\Omega_{X_A/k}^{p-1}}{d\Omega_{X_A/k}^{p-2}} \xrightarrow{A\to k} \frac{\Omega_{X/k}^{p-1}}{d\Omega_{X/k}^{p-2}} \to 0.$$

取上同调群后，我们得到一个短正合列

$$0 \to H^p(X, \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A})) \to H^p(X, \frac{\Omega_{X_A/k}^{p-1}}{d\Omega_{X_A/k}^{p-2}}) \xrightarrow{A\to k} H^p(X, \frac{\Omega_{X/k}^{p-1}}{d\Omega_{X/k}^{p-2}}) \to 0,$$

利用（4.21）和（4.22），可将其改写为

$$0 \to H^p(X, \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A})) \to H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k A \xrightarrow{A\to k} H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \to 0.$$

由于 $A = k \oplus m_A$（作为 k-向量空间），因此

$$\begin{aligned} H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k A &\cong H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k (k \oplus m_A) \\ &\cong (H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k k) \oplus (H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k m_A) \\ &\cong H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \oplus (H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k m_A). \end{aligned}$$

因此，我们有

$$H^p(X, \overline{HC}_{p-1}^{(p-1)}(O_{X_A})) \cong H^p(X, \Omega_{X/k}^{p-1}) \otimes_k m_A.$$

将其与引理 3.5结合，我们得到了本文的主要结果。

[1]这里的循环同调定义在 $\mathbb{Q}$上。

定理 4.10。在设定 4.9中，对于任意 $A \in Art_k$，存在一个同构

$$\widehat{CH}^p(A) \cong H^p(X, \Omega^{p-1}_{X/k}) \otimes_k m_A.$$

因此，函子 $\widehat{CH}^p$ 是原可表示的，参见 (1.3)。

致谢。作者非常感谢 Spencer Bloch[4] 和 Jan Stienstra [31] 分享他们的想法。作者感谢 Aise Johan de Jong、Phillip Griffiths、Jerome William Hoffman、刘克峰、Yang Shen、Wei Xia、Chenglong Yu 和 ZhiweiZheng 的讨论和/或评论。

本研究部分得到安徽省教育厅自然科学研究基金重点项目和重大项目（编号：2024AH051403 和编号：2023AH040225）、安徽省研究与创新团队（编号：2024AH010023）以及滁州学院启动研究基金（编号：2024qd53）的资助。

References

[1] S. Bloch， K_2 与代数循环，《数学年刊》99（2）（1974），349-379。[2]S. Bloch， K_2 Artin $\mathbb{Q}$代数，及其在代数循环中的应用，《代数通讯》3（1975），405-428。[3] S. Bloch，《代数循环讲义》，第二版，新数学专著，16，剑桥大学出版社，剑桥，2010，xxiv+130页。ISBN：978-0-521-11842-2。[4] S. Bloch，在清华大学的私人讨论，北京，春季学期（2015）和秋季学期（2016）。[5] S. Bloch、A. Kas、D. Lieberman，具有 $p_g = 0$的曲面上的零循环，《Compositio Mathematica》33（2）（1976），135-145。[6] S. Bloch 和 A. Ogus，Gersten 猜想与概形的同调，《法国高等师范学校科学年刊》7（4）（1974），181-201。[7] S. Bloch、V. Srinivas，关于对应与代数循环的评注，《美国数学杂志》105（1983），1235-1253。[8] J.-L. Cathelineau，代数 λ结构、代数 K理论与循环同调，K理论4（1991），591–606。[9] J.-L. Colliot-Th´el`ene、R. T. Hoobler 和 B. Kahn，Bloch-Ogus-Gabber 定理，《代数K理论》（多伦多，安大略省，1996），31-94，Fields研究所通讯，16，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[10] G. Corti˜ñas、C. Haesemeyer 和 C. Weibel，无穷小上同调及到负循环同调的陈特征，《数学年刊》344（2009），891-922。[11] G. Corti˜ñas、C. Haesemeyer、M. Schlichting 和 C. Weibel，循环同调、cdh-上同调与负 K-理论，《数学年刊》167（2）（2008），549-573。[12]B. Dribus、J. W. Hoffman 和 S. Yang，周群的切空间：关于 Green-Griffiths 一个问题的探讨，《意大利数学联合会通报》11（2018），205-244。

[13]O. Gabber，关于某些消失循环复形的 Gersten 猜想，《数学手稿》85（1994），323-343。[14] A. Grothendieck，关于代数簇的德拉姆上同调，《I.H.E.S.数学出版物》29（1966），95-103。[15] A. Grothendieck，晶体与概形的德拉姆上同调，I. Coates 和 O. Jussiila 笔记，载于《概形上同调十讲》，北荷兰出版社，1968。[16] T. G. Goodwillie，相对代数K理论与循环同调，《数学年刊》124（2）（1986），347-402。[17] M. Green 和 P. Griffiths，周群的形式变形，《尼尔斯·亨里克·阿贝尔遗产》（2004），467-509，施普林格，柏林。[18] R. Hartshorne，关于代数簇的德拉姆上同调，《I.H.E.S.数学出版物》45（1975），5-99。[19] W. Hu，某些卡拉比–丘簇之商的零循环周群，《休斯敦数学杂志》38（1）（2012），55-67。[20] K. Kato，Milnor K理论与零循环周群，《代数K理论在代数几何与数论中的应用》（科罗拉多州博尔德，1983）。《当代数学》，第55卷，241-253页。[21]M. Kerz，Milnor K理论的 Gersten 猜想，《数学发明》175（2009），1-33。[22]J.-L. Loday，《循环同调》，《数学科学基本原理》[《数学科学基本原理》], 301, 施普林格出版社，柏林，1992。附录E由 Mar´ía O. Ronco 撰写。[23] E. Mackall，权重3的 K^M上同调的可表性：Bloch结果的推广，《K理论年刊》8（1）（2023），127-139。[24]J. McCleary，《谱序列指南》，第二版，《剑桥高等数学研究》，58，剑桥大学出版社，剑桥，2001。[25] C. Pedrini 和 C. Weibel，满足 Bloch猜想的若干一般型曲面，《霍奇理论新进展》，308-329，《伦敦数学学会讲义丛书》，427，剑桥大学出版社，剑桥，2016。[26] D. Quillen，高等代数 K理论 I，《数学讲义》，341（1972），85-147。[27] M. Rapoport，对 P. Deligne《K3曲面的 Weil 猜想》一文的补充，《数学发明》15（1972），227-236。[28] M. Schlessinger，Artin环上的函子，《美国数学会汇刊》130（1968），208-222。[29] C. Soul´e，代数 K-理论中的运算，《加拿大数学杂志》37（1985），488-550。[30] J. Stienstra，特征零下光滑射影曲面的周群 $CH^2（X）$的形式完备化，《荷兰皇家科学院数学论丛》45（3）（1983），361-382。[31] J. Stienstra，通过电子邮件进行的私人讨论，春季学期（2024）。[32] Stacks项目，德拉姆上同调，Stacks项目第50章，在线可查：https://stacks.math.columbia.edu。[33] C. Voisin，一般完全交的广义霍奇猜想与 Bloch猜想等价，《法国高等师范学校科学年刊》46（3）（2013），449-475。

[34] C. Voisin, 《Catanese 曲面和 Barlow曲面上的 Bloch猜想》, 《微分几何杂志》97 (1) (2014), 149-175。[35]C. Weibel, 《同调代数导论》, 《剑桥高等数学研究》第 38 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1994, xiv+450 页。ISBN: 0-521-43500-5; 0-521-55987-1。[36]S. Yang, Bloch-Ogus 定理、循环同调与周群的变形, 《纯粹与应用代数杂志》229 (2) 2025, 107895。

School of Mathematics and Finance, Chuzhou University, Chuzhou, 239000, China,Applied Mathematics Research Center, Chuzhou University, Chuzhou 239000, China,电子邮箱: yangsen.2014@tsinghua.org.cn, 101012424@seu.edu.cn